Geometría analítica

MALLQUI BAÑOS Ricardo Michel

2020-02-27

Contents

1 Algebra vectorial **2**
1.1 Acciones 2

2 Rectas **3**

3 Lugar geométrico **4**

4 Circunferencia **5**

5 Parábola **8**

6 Elipse **11**

7 Hiperbola **13**

Capítulo 1

Algebra vectorial

Sea la la realcion oportuna entre los demas opciones conseguir una de las acciones consistentes de elegirla ecuacion anterior porque se desea que las equivalencias sean congruentes es decir que las deducciones sean logicas y buenas de acuerdo a ls opciones de la gente que debe tener en cuenta las demas opciones congruentes.

$$\frac{\rho\vec{r}}{\left(\int_1^2\right)}$$

Datos Sean los datos que se prosiguen

- www
- wwwww

1.0.1 ff

WWWW fff WWWW wwwww

1.0.2 ff

This is a *sample* book written in **Markdown**. You can use anything that Pandoc's Markdown supports, e.g., a math equation $a^2 + b^2 = c_c^2$.

The **bookdown** package can be installed from CRAN or Github:

Remember each Rmd file contains one and only one chapter, and a chapter is defined by the first-level heading .

To compile this example to PDF, you need XeLaTeX. You are recommended to install TinyTeX (which includes XeLaTeX): https://yihui.org/tinytex/.

1.1 Acciones

Sean los datos *emph* ***real*** **Entonces**

Capítulo 2
Rectas

Capítulo 3

Lugar geométrico

Here is a review of existing methods.

Capítulo 4
Circunferencia

Sea $\vec{a} = (a_1, a_2)$ entonces el vector escalado es $r\vec{a} \parallel \vec{a}$; el vector perpendicular a este es $\vec{a}^{\perp} = (-a_2, a_1)$ la norma del vector $\vec{a}$ es $\|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ el vector unitario en la dirección de $\vec{a}$ es $\vec{\mu} = \frac{\vec{a}}{\|a\|}$ que es paralela a este. Dado dos puntos P_1 y P_2 estos definen un vector $\vec{P_1 P_2} = P_2 - P_1$. Los vectores en dirección de los ejes positivos son $i = (1,0)$ y $j = (0,1)$; cualquier vector se pueden expresar en términos de estos es decir $\vec{a} = (a_1, a_2) = a_1(1,0) + a_2(0,1) = a_1 i + a_2 j$. De acuerdo al ángulo de inclinación del vector se tiene la siguiente representación $\vec{a} = \|\vec{a}\| (\cos\theta, \sin\theta)$.

Teorema 4.1 (russ)**.** *Dada el espacio R y $r \in R$ se tiene que* $\mathcal{R}(r) = \lim_{t\to\infty} g(y)_r$

$\sum$

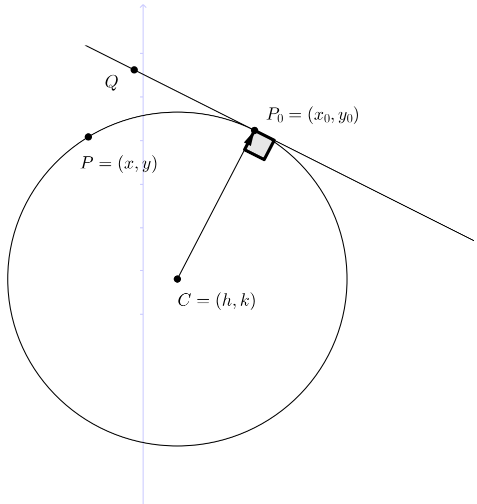

Figure 4.1: Elipse vectorial

Dos vectores son ortogonales ($\vec{a} \perp \vec{b}$) si $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = \left|\vec{a} + \vec{b}\right|$ y verifican

$\left|\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + = \left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2$ $\vec{a}\vec{b} = 0$ $\vec{a} \parallel \vec{b}^{\perp}$ $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son LI si y solo si $r\vec{a} + s\vec{b} = 0$ implica $r = 0$ y $s = 0$.

La proyeccion de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ es otro vector $\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$

$\vec{a} = \text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a} + \text{Proy}_{\vec{b}^{\perp}}\vec{a}$ si hacemos $\vec{a} = p\vec{b} + q\vec{b}^{\perp}$ entonces $q = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}$ y $p = \frac{\vec{a}\vec{b}^{\perp}}{\|\vec{b}\|^2}$ pues $\left\|\vec{b}\right\| = \left\|\vec{b}^{\perp}\right\|$ entonces $\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\vec{b} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\|\vec{b}\|}\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \text{Cp}_{\vec{b}}\vec{a}\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$; $\text{Cp}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$ recibe el nombre de componente de $\vec{a}$ en la dirección de $\vec{b}$

Dado P_0 y un vector $\vec{a}$ entonces la recta se define como el conjunto de puntos $\mathcal{L} =$

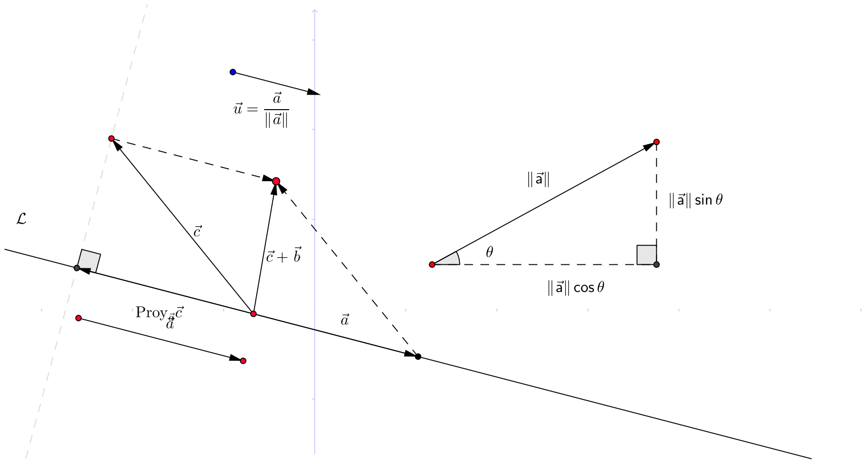

Figure 4.2: Elipse vectorial

$\{P \in \mathbb{R}^2 / P = P_0 + t\vec{a};\ t \in \mathbb{R}\}$ que recibe el nombre de ecuación vectorial de la recta. $P \in \mathcal{L} \iff (P - P_0) \cdot \vec{a}^{\perp} = 0$. De la ecuación vectorial de la recta se tiene si $P = (x.y)$; $P_0 = (x_0, y_0)$ y $\vec{a} = (a_1, a_2)$ se tiene la ecuación paramétrica de la recta. $x = x_0 + ta_1$; $y = y_0 + ta_2$ de esto se obtiene la ecuación simétrica de la recta

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}.$$

Sea $\vec{n} = (a, b) = \vec{a}^{\perp}$ entonces se tiene que si $P \in \mathcal{L}$ entonces $(P - P_0) \cdot \vec{n} = 0$ pues son perpendicualres; entonces $P \cdot \vec{n} = P_0 \cdot \vec{n} \iff ax + by = -c \implies ax + by + c = 0$ que recibe el nombre de ecuación general de la recta. Sea $Q = (x_1, y_1)$ un punto exterior a $\mathcal{L}$ entonces la distancia de Q a $\mathcal{L}$ se define como

$$\begin{aligned} d[Q; \mathcal{L}] &= |\text{Cp}_{\vec{n}}(Q - P_0)| \\ &= \left| \frac{(Q - P_0) \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| \\ &= \left| \frac{Q \cdot \vec{n} - P_0 \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| \\ &= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

Sean $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ dos rectas; con vectores directores $\vec{a} = (a_1, a_2)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2)$ respectivamente; entonces $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = (d_1, d_2)$ donde d_1 y d_2 satisfacen el sistema generado por las ecuaciones generales de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$; $a_1x + a_1y + k_1 = 0$ y $b_1x + b_1y + k_2 = 0$.

La pendiente de una recta se deduce de su vector director es decir si $\vec{a} = (a_1, a_2)$ entonces $m = \frac{a_2}{a_1}$; de esto se deduce $\vec{a} = (a_1, a_2) = a_1(1, \frac{a_2}{a_1}) = a_1(1, m)$. El angulo generado por las $\mathcal{L}_1$ con pendiente m_1 y $\mathcal{L}_2$ con pendiente m_1; está dada por $\theta = \arctan\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right)$.

El círculo se define como el conjunto de punto $P = (x, y)$ que satisfacen la ecuación

$$\|P - C\| = r$$

$r > 0$ es el radio, $C = (h, k)$ es el centro entonces la ecuación del círculo es

$$\|P - C\| = r \iff (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2.$$

La ecuación de la recta tangente en $P_0 = (x_0, y_0)$ ($P = P_0$ en el gráfico) está dada por

$$(Q - P_0) \cdot (P_0 - C) = 0$$

donde $Q = (x, y) \neq P$ cualquiera; entonces

$$(Q - P_0) \cdot (P_0 - C) = 0 \iff (x - x_0, y - y_0)(x_0 - h, y_0 - k) = 0$$

lo cual es equivalente a

$$(x-h)(x_0-h) + (x-k)(y_0-k) = r^2$$

Capítulo 5

Parábola

Sean la recta $\mathcal{L}$ y el punto F fijos; los puntos P que satisfacen la ecuación

$$d\,[P;F] = d\,[P;\mathcal{L}] = |p| \tag{5.1}$$

generan una curva llamada *parábola*, la excentricidad es el cociente de estas dos distancias que es igual a 1 pues ambas son iguales a $|p|$.

$\mathcal{L}$ es la *recta directriz* cuya ecuación es $x' = -p$ en el sistema $x'y'$; F es el *foco*, $V = (h,k)$ el *vertice*; p es el parámetro de la parábola; y RR' el *lado recto* de la parábola.

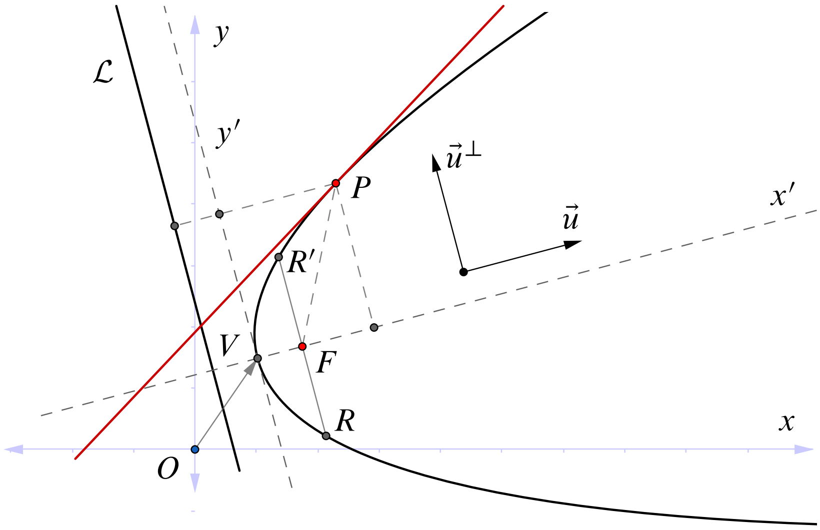

Figure 5.1: Elipse vectorial

Los puntos P en el sistema $x'y'$ satisfacen $P = (x,y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^{\perp}$ de donde al despejar x' e y' resultan $x' = [(x,y) - V]\vec{u}$ e $y' = [(x,y) - V]\vec{u}^{\perp}$ la recta directriz en el sitema $x'y'$ es $\mathcal{L} = \left\{Q/Q = (V - p\vec{u}) + t\vec{u}^{\perp},\ t \in \mathbb{R}\right\}$; donde el vértice es $F = V + p\vec{u}$ luego se tiene las ecuaciónes

$$d[P;\mathcal{L}] = \left|\mathrm{Cp}_{\vec{u}}\vec{PQ}\right| = \left|(Q-P)\cdot\vec{u}\right| = \left|x'+p\right| \tag{5.2}$$

$$d[P;F] = |P - F| = \left|(x'-p)\vec{u} + y'\vec{u}^{\perp}\right| \tag{5.3}$$

por lo tanto reemplazando (5.2) y (5.3) en (5.1)

$$\begin{aligned} d\,[P;F]^2 = d\,[P;\mathcal{L}]^2 &\implies \left|(x'+p)\vec{u} + y'\vec{u}^{\perp}\right|^2 = \left|x'+p\right|^2 \\ &\implies (x'-p)^2 + y'^2 = (x'+p)^2 \\ &\implies y'^2 = 4px' \end{aligned}$$

De este modo $P \in \mathcal{P}$ si P satisface la *ecuacion vectorial* de $\mathcal{P}$

$$P = (x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^{\perp}; \text{ donde } y'^2 = 4px'; \ \left|\vec{u}\right| = 1$$

Cuando el eje es paralelo al eje x; se tiene $\vec{u} = i = (1, 0)$ entonces

$$(x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^{\perp} = (h + x', k + y')$$

implica $x' = x - h$ y $y' = y - k$ en $y'^2 = 4px'$ resulta $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ ($y^2 = 4px$ si V está en el origen); entonces $F = V + p\vec{u} = (h + p, k)$; $\mathcal{L} : x = h - p$. Si $p < 1$ la parábola se invierte simétricamente a la directriz.

Cuando el eje es paralelo al eje y; $\vec{u} = j = (0, 1)$ entonces

$$(x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^{\perp} = (h - y', k + x')$$

implica $x' = y - k$ y $y' = h - x$ en $y'^2 = 4px'$ resulta $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ ($x^2 = 4py$ si V está en el origen); entonces $F = V + p\vec{u} = (h, k + p)$; $\mathcal{L} : x = k - p$. Si $p < 1$ la parábola se invierte simétricamente a la directriz.

Teorema 5.1 (Ecuaciones de la recta tangente de una parábola)**.** *La ecuación de la recta tangente a $y^2 = 4px$ en el punto $P_0 = (x_0, y_0)$ está dada por*

$$y = \frac{2p}{y_0}(x + x_0) \tag{5.4}$$

y la ecuación de la recta tangente a $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ en el punto $P_0 = (x_0, y_0)$ está dada por

$$(y_0 - k)(x_0 - k) = 4p\left[\left(\frac{x + x_0}{2} - h\right)\right] \tag{5.5}$$

similarmente la ecuación de la recta tangente a $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ en el punto $P_0 = (x_0, y_0)$ está dada por

$$(x_0 - h)(x_0 - h) = 4p\left[\left(\frac{y + y_0}{2} - h\right)\right]. \tag{5.6}$$

Proof. En efecto sea ... □

Ejercicio 5.1. *Al realizarse una transformacion de coordenadas, el eje de una parabola $\mathcal{P}$ resulta orientada segun el vector $(3, 4)$. En $x'y'$ un punto $Q' = (20, -20)' \in \mathcal{P}$ en els sistema xy el foco de $\mathcal{P}$ $E = (11, 5)$. Determinar en el sistema xy un punto R de la parabola $\mathcal{P}$ tal que el trinagulo QVR sea rectangulo en V vertice de la parábola.*

Ejercicio 5.2. *La circunferencia $\mathcal{C} = (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 25$ es tangente a una parábola $\mathcal{P}$ en $P_0 = (x_0, y_0)$, $y_0 > 7$. La recta $\mathcal{L} : 4x - 3y + 12 = 0$ es normal a $\mathcal{P}$ y $\mathcal{C}$ en P_0 y corta al eje focal de $\mathcal{P}$ en el punto R. Si $\left|\vec{C_0P_0}\right| = \left|\vec{P_0R}\right|$ y si la distancia $d[P_0; \text{eje focal}] = 4$, hallar la ecuación de la parábola $\mathcal{P}$. C_0 es el centro de la circunferencia y la absisa del vértice es menor que 6.*

Solución. *$P_0 = C_0 \pm r\vec{u}_{\mathcal{L}}$ donde $r = 5$, $C_0 = (3, 8)$ y $\vec{u}_{\mathcal{L}} = \frac{(3,4)}{5}$ es decir $P_0 = (3, 8) \pm 5\frac{(3,4)}{5}$ de esto consideramos $P_0 = (x_0, y_0) = (6, 12)$ por condición del problema con esto la recta tangente a $\mathcal{C}$ y $\mathcal{P}$ es $\mathcal{L}_T : (x, y)(3, 4) = (3, 4)(6, 12)$ equivalentemente $\mathcal{L}_T : 3x + 4y = 66$.*

Ya que $\left|\vec{C_0P_0}\right| = 5 = \left|\vec{P_0R}\right|$ y $d[P_0; \text{eje focal}] = d[P_0; Q] = 4$ entonces el trián-

gulo P_0QR es un triángulo rectángulo notable, por lo tanto $\left|\vec{QR}\right| = 3$ por el Teorema de Pitágoras, además $\vec{P_0R} = \vec{P_0Q} + \vec{QR}$ es decir si $\vec{P_0Q} = (v_1, v_2)$ se tiene la ecuacion $(3,4) = 4(v_1, v_2) \pm 3(-v_2, v_1)$ que al resolverla se tiene $\vec{P_0R} = (v_1, v_2) = (1,0)$ o $\vec{P_0R} = (v_1, v_2) = \left(\frac{24}{25}, \frac{7}{25}\right)$ entonces $Q = P_0 + 4(0,1) = (6,16)$ o $Q = P_0 + 4\left(\frac{24}{25}, \frac{7}{25}\right) = \left(6 + \frac{96}{25}, 12 + \frac{28}{25}\right)$ esto indica considerar $Q = (6,16)$ pues el vertice (tiene absisa menor que 6), debe estar a la derecha de P_0 pues la recta $\mathcal{L}_T$ tiene pendiente negativa. Por lo tanto $\mathcal{L}_T \cap \mathcal{F} : x = 16 = (\frac{2}{3}, 16)$ y por propiedad de la tangente a una parábola se tiene el vértice $V = \left(\frac{\mathcal{L}_T \cap \mathcal{F} + Q}{2}\right) = \left(\frac{10}{3}, 16\right)$. La ecuación de la parabola en le sistema original es $(y-h)^2 = 4\rho(x-k)$ donde $(h,k) = \left(\frac{10}{3}, 16\right)$ y $(6,12) \in \mathcal{P}$ se tiene $(-4)^2 = 4\rho(8/3)$ de donde $\rho = \frac{3}{2}$ entonces la recta directriz pasa por $\left(\frac{10}{3}, 16\right) + \frac{3}{2}(1,0) = \left(\frac{7}{3}, 16\right)$ por tanto $\mathcal{L}_D : x = \frac{7}{3}$ y la ecuacion de la parábola es

$$(y-16)^2 = 4\rho\left(x - \frac{10}{3}\right)$$

por ser paralela al eje x.

Ejercicio 5.3. *Los puntos $A = (60,13)$ y $B = (-4,61)$ estan sobre una parábola $\mathcal{P}$ además son simétricos con recpecto al eje focal. Desde un punto Q sobre el eje focal se traza un recta tangente a $\mathcal{P}$ que pasa por B, hallar la ecuación de $\mathcal{P}$ y las ecuaciones de las rectas tangentes trazadas desde Q.*

Solución. *Ya que A y B son simétricas entonces $P_0 = \frac{A+B}{2} = (28,37) \in \mathcal{L}_F$ donde $\mathcal{L}_F$ es el eje focal paralelo al vector $\vec{AB}^{\perp} = (B-A)^{\perp} = (-64,48) \parallel (-4,3) = \vec{v}_L$ es decir $\vec{v}_F$ y P_0 nos genera la ecuación del eje focal $\mathcal{L}_F : 4x + 3y = 1$. De otro lado dado el punto $Q = (20,x) \in \mathcal{L}_F$ que al reemplazarlo en la recta del eje focal nos genera $x = -27$ de donde $Q = (20,-27)$ ademas el vértice de la parabola es $V = \frac{Q+P_0}{2} = (4,5)$ por propiedad.*

Con el objetivo de hallar el valor de ρ en la ecuación $y'^2 = 4\rho x'$ se halla las coordenadas de B en el nuevo sistema de coordenadas centrada en V con vector director $\vec{u} = \frac{(3,4)}{5}$, haciendo uso de la relación

$$(x,y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^{\perp}$$

se obtiene $x' = [B-V]\,\vec{u} = 40$ y $y' = [B-V]\,\vec{u}^{\perp} = 40$ por tanto reemplazando $B = (-4,61) = (40,40)'$ en $y'^2 = 4\rho x'$ se tiene que $\rho = 10$

Los vectores directores de las rectas tangentes en el sistema $x'y'$ son $(2,1)$ y $(2,-1)$ respectivamente por tanto sus ecuaciones son $\mathcal{L}_A : 2y' = x' + 40$ y $\mathcal{L}_B = -2y' = x' + 40$ estas ecuaciones en el sistema original con $x' = [(x,y)-(4,5)]\,\frac{(3,4)}{5}$ y $y' = [(x,y)-(4,5)]\,\frac{(-4,3)}{5}$ reemplazadas resultan $\mathcal{L}_A : 2y - 11x - 166 = 0$ y $\mathcal{L}_B : 5x - 10y - 170 = 0$

1. ww

Capítulo 6

Elipse

$$f\ (k) = \binom{n}{k} p^k\ (1-p)^{n-k} \tag{6.1}$$

(6.1)

Corolario 6.1. *The characteristic function of the sum of two independent random variables X_1 and X_2 is the product of characteristic functions of X_1 and X_2, i.e.,*

$$\varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t)$$

Ejercicio 6.1 (Characteristic Function of the Sample Mean)**.** *Let $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} X_i$ be the sample mean of n independent and identically distributed random variables, each with characteristic function φ_X. Compute the characteristic function of $\bar{X}$.*

Solución. *Applying Theorem, we have*

$$\varphi_{\bar{X}}(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}\left(\frac{t}{n}\right) = \left[\varphi_X\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n.$$

Dados dos puntos distintos F_1 y F_2 llamados focos; la elipse $\mathcal{E}$ es el conjunto formado por los puntos P que satisfacen la ecuacion

$$|P - F_1| + |P - F_2| = 2a.$$

$C = (h, k)$ es el centro de la elipse; x' eje focal, V_1 y V_2 son los vértices de la elipse; $\overline{V_1V_2}$ el eje mayor $\overline{RR'}$ el lado recto; $\overline{B_1B_2}$ el eje menor de longitud $2b$. En el sistema $x'y'$ se tiene $B_1 = (0, b)'$; $B_2 = (0, -b)'$; $F_1 = (-c, 0)'$; $F_2 = (c, 0)'$ y $C = (0, 0)'$.

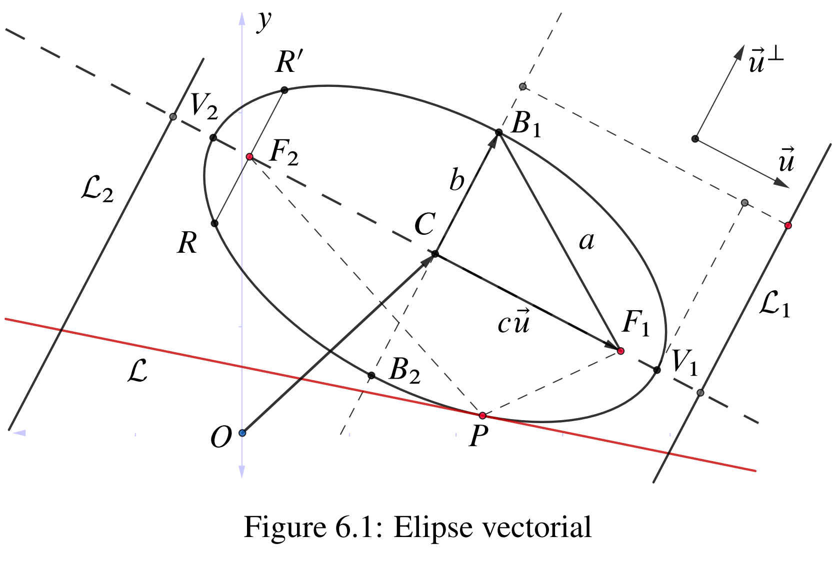

Figure 6.1: Elipse vectorial

La excentricidad e se define como

$$\frac{d\,[P;F_1]}{d\,[P;\mathcal{L}_1]} = e = \frac{d\,[P;F_2]}{d\,[P;\mathcal{L}_2]}$$

$d\,[B_i;F_1] = d\,[B_i;F_2] = a$ y $d\,[V_i;C] = d\,[V_i;C] = a$, $i = 1,2$. $d\,[C;;\mathcal{L}_1] = d\,[C;\mathcal{L}_2] = \frac{a}{e}$ pues $\frac{d[B_i;F_1]}{d[B_i;\mathcal{L}_1]} = e \implies \frac{a}{d[B;\mathcal{L}_1]} = e$. Sea $c = d\,[P;F_1] = d\,[P;F_2] \implies c = ae$ pues $\frac{d[P;F_1]}{d[P;\mathcal{L}_1]} = e \implies \frac{a-c}{\frac{a}{e}-a} = e \implies c = ae$. $a > b$ y $a^2 = b^2 + c^2$; pues $a = d\,[B_1;F_2] = d\left[(0, b^2 + c^2)'; (c,0)'\right]^2 = \sqrt{b}$; $0 < e < 1$ debido a que $0 < e = \frac{a}{e} < 1$ y $a > c > 0$.

$P = (x,y) = C + x'\vec{u} + y'\vec{u}^{\perp}$; $x' = [(x,y) - C]\vec{u}$; $y' = [(x,y) - C]\vec{u}^{\perp}$

$F_1 = C + c\vec{u}$ y $F_2 = C - c\vec{u}$ entonces

$$\begin{aligned}
|P - F_1| + |P - F_2| &= \left|C + x'\vec{u} + y'\vec{u}^{\perp} - C + c\vec{u}\right| \\
&\quad + \left|C + x'\vec{u} + y'\vec{u}^{\perp} - C - c\vec{u}\right| \\
&= \sqrt{(x'+c)^2 + y'^2} + \sqrt{(x'-c)^2 + y'^2} = 2a
\end{aligned}$$

por lo tanto resolviendo $\sqrt{(x'+c)^2 + y'^2} + \sqrt{(x'-c)^2 + y'^2} = 2a$ resulta $(a^2 - c^2)x'^2 + ay'^2 = a^2(a^2 - c^2) \implies b^2x'^2 + a^2y'^2 = a^2b^2$

De este modo $P \in \mathcal{E}$ si P satisface la ecuación vectorial

$$P = (x,y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^{\perp};\ \text{donde}\ \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1;\ \left|\vec{u}\right| = 1$$

Cuando el eje es paralelo al eje x; $\vec{u} = i = (1,0)$ entonces $(x,y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^{\perp} = (h + x', k + y') \implies x' = x - h$ y $y' = y - k$ en $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ resulta $\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ si V está en el origen); entonces $F_1 = C + c\vec{u} = (h + c, k)$; $\mathcal{L}_1 : x = h + \frac{a}{e}$ y $\mathcal{L}_2 : x = h - \frac{a}{e}$.

Cuando el eje es paralelo al eje y; $\vec{u} = j = (0,1)$ entonces $(x,y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^{\perp} = (h - y', k + x') \implies x' = y - k$ y $y' = h - x$ en $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ resulta $\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ si V está en el origen); entonces $F_1 = C + c\vec{u} = (h + c, k)$; $\mathcal{L}_1 : x = k + \frac{a}{e}$ y $\mathcal{L}_2 : x = k - \frac{a}{e}$.

Capítulo 7

Hiperbola

Los puntos \(P\) de un hipérbola verifican la siguiente ecuación

$$||P - F_1| + |P - F_1|| = 2a$$

$C = (h, k)$ es el centro de la hipérbola; V_1 y V_2 son los vértices; F_1 y F_2 son los focos; $\overline{V_1 V_2}$ es el eje transversal; $\overline{B_1 B_2}$ es el eje conjugado; x' es el eje focal

$$d\,[C; F_1] = d\,[C; F_2] = c$$

$F_1 = (-c, 0)$; $F_1 = (c, 0)$ en el sistema coordenado $x'y'$; $\mathcal{C}$ circunferencia con centro en C, radio c que pasa por los focos.

$$d\,[V_1; C] = d\,[V_2; C] = a$$

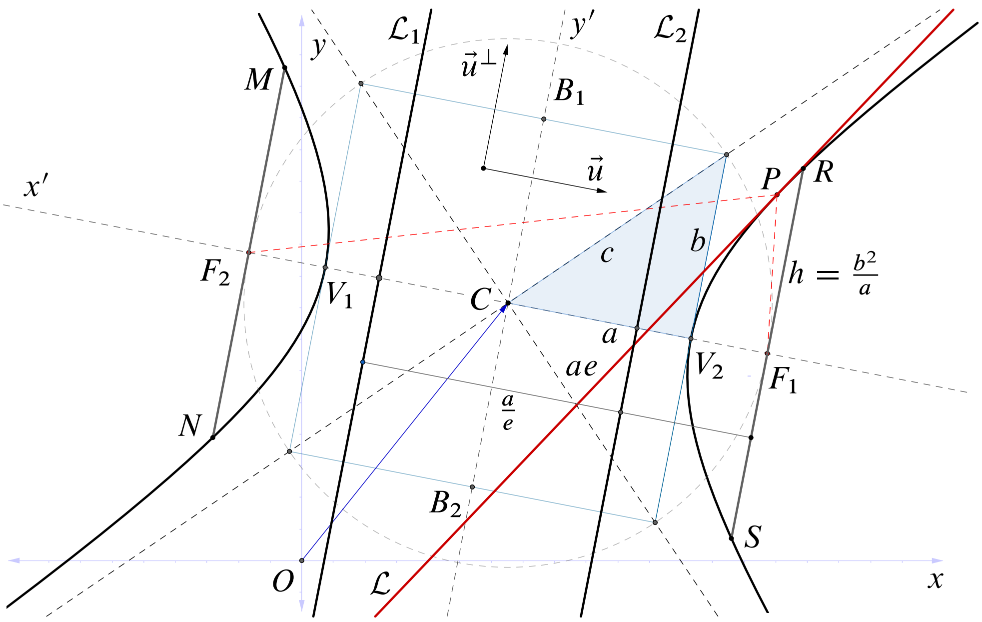

Figure 7.1: Elipse vectorial

$$\frac{d\,[P; F_1]}{d\,[P; \mathcal{L}_1]} = e = \frac{d\,[P; F_2]}{d\,[P; \mathcal{L}_2]}$$

$c = ae$; $d\,[C; \mathcal{L}_1] = d\,[C; \mathcal{L}_2] = \frac{a}{e}$ y $e > 1$; en efecto

$$\frac{d\,[R; F_1]}{d\,[R; \mathcal{L}_1]} = \frac{\frac{b^2}{a}}{c - d\,[C; \mathcal{L}_1]} = \frac{c^2 - a^2}{a(c - d\,[C; \mathcal{L}_1])}$$

$$\frac{d\,[V_2;F_1]}{d\,[V_2;\mathcal{L}_1]} = \frac{c-a}{a-d\,[C;\mathcal{L}_2]}.$$

De la primera

$$d\,[C;\mathcal{L}_2] = a - \frac{c-a}{e} \implies c - d\,[C;\mathcal{L}_2] = a - \frac{(c-a)(e+1)}{e}.$$

De la segunda ecuación

$$c^2 - a^2 = ae\frac{(c-a)(e+1)}{e} \implies c + a = a(e+1) \implies c = ae$$

luego $d\,[C;\mathcal{L}_2] = a - \frac{(c-a)(ae+a)}{e} = \frac{a}{e}$ y el caso $d\,[C;\mathcal{L}_1]$ es similar. Finalmente $e = \frac{c}{a} > 1$ pues $0 < a < c$.

$P = (x,y) = C + x'\vec{u} + y'\vec{u}^{\perp}$ $x' = [(x,y) - C]\vec{u}$ y $y' = [(x,y) - C]\vec{u}^{\perp}$

$F_1 = C + c\vec{u}$ y $F_2 = C - c\vec{u}$ tambien $V_1 = C + a\vec{u}$ y $V_2 = C - a\vec{u}$ entonces

$$\frac{d\,[P;F_1]}{d\,[P;\mathcal{L}_1]} = e \iff d\,[P;F_1]^2 = e^2 d\,[P;\mathcal{L}_1]^2$$

haciendo uso de $c = ae$ y $c^2 = a^2 + b^2$ se tiene lo siguiente

$$(x'-c)^2 + y'^2 = e^2\left(x' - \left(\frac{a}{e}\right)\right)^2$$

$$(c^2 - a^2)x'^2 + a^2y'^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$b^2x'^2 - a^2y'^2 = a^2b^2$$

De este modo $P \in \mathcal{H}$ si P satisface la ecuación vectorial

$$P = (x,y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^{\perp};\ \text{donde}\ \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1;\ \left|\vec{u}\right| = 1.$$

Cuando el eje es paralelo al eje x; $\vec{u} = i = (1,0)$ entonces $(x,y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^{\perp} = (h + x', k + y') \implies x' = x - h$ y $y' = y - k$ en $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$; resulta $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$; ($\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; si V está en el origen); entonces $F_1 = C + c\vec{u} = (h - \frac{a}{e}, k)$ y $F_2 = C + c\vec{u} = (h - \frac{a}{e}, k)$; $\mathcal{L}_1 : x = h - \frac{a}{e}$ y $\mathcal{L}_2 : x = h + \frac{a}{e}$ y las asíntotas de $y' = \pm\frac{a}{b}x'$ se convierte en $(y-k) = \pm\frac{a}{b}(x-h)$.

Cuando el eje es paralelo al eje y; $\vec{u} = j = (0,1)$ entonces $(x,y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^{\perp} = (h - y', k + x') \implies x' = y - k$ y $y' = h - x$ en $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$; resulta $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$; ($\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; si V está en el origen); entonces $F_1 = C + c\vec{u} = (h + c, k)$; $\mathcal{L}_1 : x = k + \frac{a}{e}$ y $\mathcal{L}_2 : x = k - \frac{a}{e}$ y las asíntotas de $y' = \pm\frac{b}{a}x'$ se convierte en $(y-k) = \pm\frac{b}{a}(x-h)$.