

Geometría analítica

MALLQUI BAÑOS Ricardo Michel

2020-03-03

Contents

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Algebra vectorial | 2 |
| 1.1 | Sistema de coordenadas cartesianas o rectangulares | 2 |
| 1.2 | Acciones | 2 |
| 2 | Rectas | 3 |
| 3 | Lugar geométrico | 4 |
| 4 | Circunferencia | 5 |
| 5 | Parábola | 8 |
| 6 | Elipse | 11 |
| 7 | Hiperbola | 14 |

Capítulo 1

Algebra vectorial

El capitulo trata sobre *vectores* y las operaciones en este conjunto

1.1 Sistema de coordenadas cartesianas o rectangulares

Este sistema está compuesto por un plano y dos rectas mutuamente perpendiculares. A cada punto P se le asocia un par ordenado de números reales $P = (x, y)$ donde los números x e y están ubicados sobre los ejes X e Y respectivamente.

- www
- wwwwww

1.1.1 ff

WWW fff WWW wwwwww

1.1.2 ff

This is a *sample* book written in **Markdown**. You can use anything that Pandoc's Markdown supports, e.g., a math equation $a^2 + b^2 = c^2$.

The **bookdown** package can be installed from CRAN or Github:

Remember each Rmd file contains one and only one chapter, and a chapter is defined by the first-level heading .

To compile this example to PDF, you need XeLaTeX. You are recommended to install TinyTeX (which includes XeLaTeX): <https://yihui.org/tinytex/>.

1.2 Acciones

Sean los datos *emph real* Entonces

Capítulo 2

Rectas

Capítulo 3

Lugar geométrico

Here is a review of existing methods.

Capítulo 4

Circunferencia

Sea $\vec{a} = (a_1, a_2)$ entonces el vector escalado es $r\vec{a} \parallel \vec{a}$; el vector perpendicular a este es $\vec{a}^\perp = (-a_2, a_1)$ la norma del vector \vec{a} es $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ el vector unitario en la dirección de \vec{a} es $\vec{\mu} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ que es paralela a este. Dado dos puntos P_1 y P_2 estos definen un vector $\vec{P_1P_2} = P_2 - P_1$. Los vectores en dirección de los ejes positivos son $i = (1, 0)$ y $j = (0, 1)$; cualquier vector se pueden expresar en términos de estos es decir $\vec{a} = (a_1, a_2) = a_1(1, 0) + a_2(0, 1) = a_1i + a_2j$. De acuerdo al ángulo de inclinación del vector se tiene la siguiente representación $\vec{a} = \|\vec{a}\| (\cos \theta, \sin \theta)$.

Teorema 4.1 (russ). Dada el espacio R y $r \in R$ se tiene que $\mathcal{R}(r) = \lim_{t \rightarrow \infty} g(y)_r$

Σ

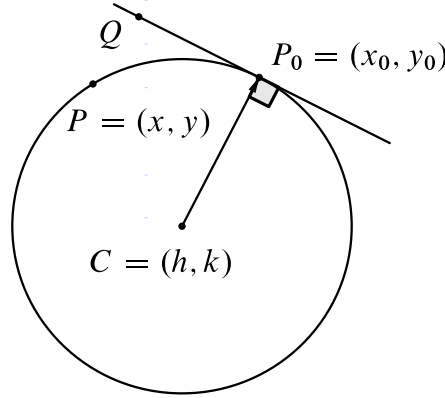


Figure 4.1: Elipse vectorial

Dos vectores son ortogonales ($\vec{a} \perp \vec{b}$) si $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$ y verifican

$|\vec{b}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{a} + \vec{b}|^2$ $\vec{a}\vec{b} = 0$ $\vec{a} \parallel \vec{b}^\perp$ \vec{a} y \vec{b} son LI si y solo si $r\vec{a} + s\vec{b} = 0$ implica $r = 0$ y $s = 0$.

La proyección de \vec{a} sobre \vec{b} es otro vector $\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$

$\vec{a} = \text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a} + \text{Proy}_{\vec{b}^\perp}\vec{a}$ si hacemos $\vec{a} = p\vec{b} + q\vec{b}^\perp$ entonces $q = \frac{\vec{a}\vec{b}^\perp}{\|\vec{b}\|^2}$ y $p = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}$ pues $\|\vec{b}\| = \|\vec{b}^\perp\|$ entonces $\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\vec{b} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\|\vec{b}\|} \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \text{Cp}_{\vec{b}}\vec{a} \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$; $\text{Cp}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$ recibe el nombre de componente de \vec{a} en la dirección de \vec{b}

Dado P_0 y un vector \vec{a} entonces la recta se define como el conjunto de puntos $\mathcal{L} = \{P \in \mathbb{R}^2 / P = P_0 + t\vec{a}; t \in \mathbb{R}\}$ que recibe el nombre de ecuación vectorial de la recta. $P \in \mathcal{L} \iff (P - P_0) \cdot \vec{a}^\perp = 0$. De la ecuación vectorial de la recta se tiene si $P = (x, y)$; $P_0 = (x_0, y_0)$ y $\vec{a} = (a_1, a_2)$ se tiene la ecuación paramétrica de la recta. $x = x_0 + ta_1$;

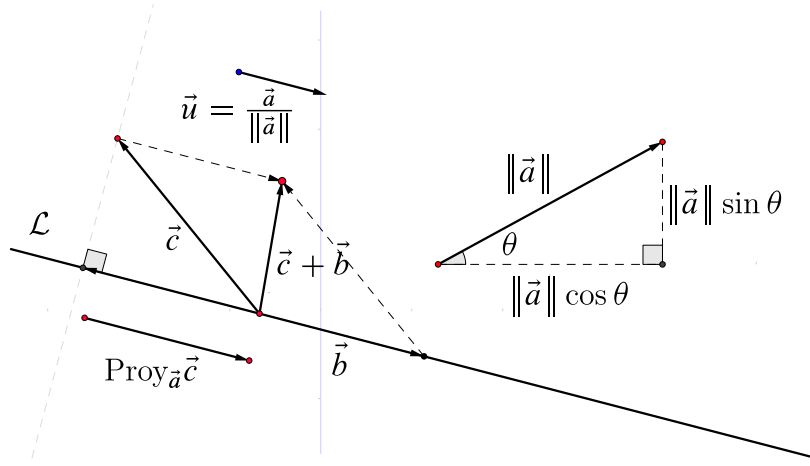


Figure 4.2: Elipse vectorial

$y = y_0 + ta_2$ de esto se obtiene la ecuación simétrica de la recta

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}.$$

Sea $\vec{n} = (a, b) = \vec{a}^\perp$ entonces se tiene que si $P \in \mathcal{L}$ entonces $(P - P_0) \cdot \vec{n} = 0$ pues son perpendiculares; entonces $P \cdot \vec{n} = P_0 \cdot \vec{n} \iff ax + by = -c \implies ax + by + c = 0$ que recibe el nombre de ecuación general de la recta. Sea $Q = (x_1, y_1)$ un punto exterior a \mathcal{L} entonces la distancia de Q a \mathcal{L} se define como

$$\begin{aligned} d[Q; \mathcal{L}] &= |\text{Cp}_{\vec{n}}(Q - P_0)| \\ &= \left| \frac{(Q - P_0) \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| \\ &= \left| \frac{Q \cdot \vec{n} - P_0 \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| \\ &= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

Sean \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 dos rectas; con vectores directores $\vec{a} = (a_1, a_2)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2)$ respectivamente; entonces $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = (d_1, d_2)$ donde d_1 y d_2 satisfacen el sistema generado por las ecuaciones generales de \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 ; $a_1x + a_1y + k_1 = 0$ y $b_1x + b_1y + k_2 = 0$.

La pendiente de una recta se deduce de su vector director es decir si $\vec{a} = (a_1, a_2)$ entonces $m = \frac{a_2}{a_1}$; de esto se deduce $\vec{a} = (a_1, a_2) = a_1(1, \frac{a_2}{a_1}) = a_1(1, m)$. El angulo generado por las \mathcal{L}_1 con pendiente m_1 y \mathcal{L}_2 con pendiente m_2 ; está dada por $\theta = \arctan\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right)$.

El círculo se define como el conjunto de punto $P = (x, y)$ que satisfacen la ecuación

$$\|P - C\| = r$$

$r > 0$ es el radio, $C = (h, k)$ es el centro entonces la ecuación del círculo es

$$\|P - C\| = r \iff (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

La ecuación de la recta tangente en $P_0 = (x_0, y_0)$ ($P = P_0$ en el gráfico) está dada por

$$(Q - P_0) \cdot (P_0 - C) = 0$$

donde $Q = (x, y) \neq P$ cualquiera; entonces

$$(Q - P_0) \cdot (P_0 - C) = 0 \iff (x - x_0, y - y_0)(x_0 - h, y_0 - k) = 0$$

lo cual es equivalente a

$$(x - h)(x_0 - h) + (x - k)(y_0 - k) = r^2$$

Capítulo 5

Parábola

Sean la recta \mathcal{L} y el punto F fijos; los puntos P que satisfacen la ecuación

$$d[P; F] = d[P; \mathcal{L}] = |p| \quad (5.1)$$

generan una curva llamada *parábola*, la excentricidad es el cociente de estas dos distancias que es igual a 1 pues ambas son iguales a $|p|$.

\mathcal{L} es la *recta directriz* cuya ecuación es $x' = -p$ en el sistema $x'y'$; F es el *foco*, $V = (h, k)$ el *vertice*; p es el parámetro de la parábola; y RR' el *lado recto* de la parábola.

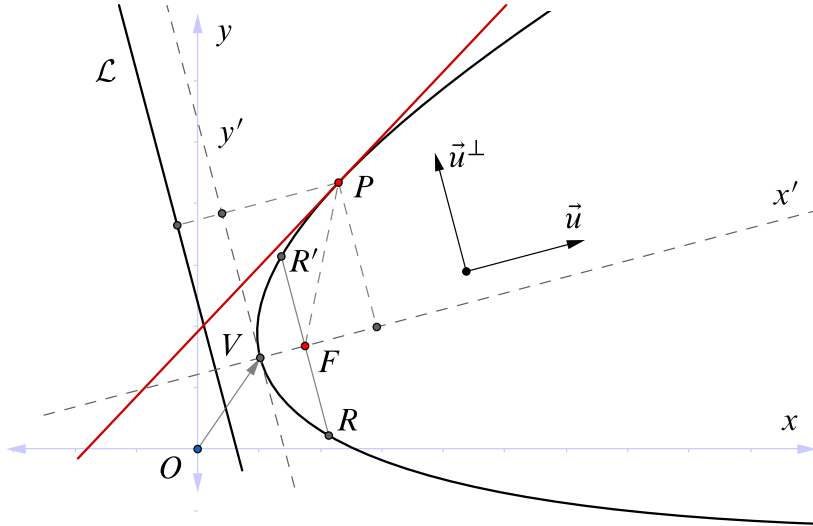


Figure 5.1: Elipse vectorial

Los puntos P en el sistema $x'y'$ satisfacen $P = (x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp$ de donde al despejar x' e y' resultan $x' = [(x, y) - V] \cdot \vec{u}$ e $y' = [(x, y) - V] \cdot \vec{u}^\perp$ la recta directriz en el sistema $x'y'$ es $\mathcal{L} = \{Q/Q = (V - p\vec{u}) + t\vec{u}^\perp, t \in \mathbb{R}\}$; donde el vértice es $F = V + p\vec{u}$ luego se tiene las ecuaciones

$$d[P; \mathcal{L}] = |\text{Cp}_{\vec{u}} P Q| = |(Q - P) \cdot \vec{u}| = |x' + p| \quad (5.2)$$

$$d[P; F] = |P - F| = |(x' - p)\vec{u} + y'\vec{u}^\perp| \quad (5.3)$$

por lo tanto reemplazando (5.2) y (5.3) en (5.1)

$$\begin{aligned} d[P; F]^2 = d[P; \mathcal{L}]^2 &\implies |(x' + p)\vec{u} + y'\vec{u}^\perp|^2 = |x' + p|^2 \\ &\implies (x' - p)^2 + y'^2 = (x' + p)^2 \\ &\implies y'^2 = 4px' \end{aligned}$$

De este modo $P \in \mathcal{P}$ si P satisface la ecuación vectorial de \mathcal{P}

$$P = (x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp; \text{ donde } y'^2 = 4px'; |\vec{u}| = 1$$

Cuando el eje es paralelo al eje x ; se tiene $\vec{u} = i = (1, 0)$ entonces

$$(x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp = (h + x', k + y')$$

implica $x' = x - h$ y $y' = y - k$ en $y'^2 = 4px'$ resulta $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ ($y^2 = 4px$ si V está en el origen); entonces $F = V + p\vec{u} = (h + p, k)$; $\mathcal{L} : x = h - p$. Si $p < 1$ la parábola se invierte simétricamente a la directriz.

Cuando el eje es paralelo al eje y ; $\vec{u} = j = (0, 1)$ entonces

$$(x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp = (h - y', k + x')$$

implica $x' = y - k$ y $y' = h - x$ en $y'^2 = 4px'$ resulta $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ ($x^2 = 4py$ si V está en el origen); entonces $F = V + p\vec{u} = (h, k + p)$; $\mathcal{L} : x = k - p$. Si $p < 1$ la parábola se invierte simétricamente a la directriz.

Teorema 5.1 (Ecuaciones de la recta tangente de una parábola). *La ecuación de la recta tangente a $y^2 = 4px$ en el punto $P_0 = (x_0, y_0)$ está dada por*

$$y = \frac{2p}{y_0}(x + x_0) \quad (5.4)$$

y la ecuación de la recta tangente a $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ en el punto $P_0 = (x_0, y_0)$ está dada por

$$(y_0 - k)(x_0 - k) = 4p \left[\left(\frac{x + x_0}{2} - h \right) \right] \quad (5.5)$$

similarmente la ecuación de la recta tangente a $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ en el punto $P_0 = (x_0, y_0)$ está dada por

$$(x_0 - h)(x_0 - h) = 4p \left[\left(\frac{y + y_0}{2} - k \right) \right]. \quad (5.6)$$

Proof. En efecto sea ... □

Ejercicio 5.1. Al realizarse una transformación de coordenadas, el eje de una parábola \mathcal{P} resulta orientada según el vector $(3, 4)$. En $x'y'$ un punto $Q' = (20, -20)' \in \mathcal{P}$ en el sistema xy el foco de \mathcal{P} $E = (11, 5)$. Determinar en el sistema xy un punto R de la parábola \mathcal{P} tal que el triángulo QVR sea rectángulo en V vértice de la parábola.

Ejercicio 5.2. La circunferencia $\mathcal{C} = (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 25$ es tangente a una parábola \mathcal{P} en $P_0 = (x_0, y_0)$, $y_0 > 7$. La recta $\mathcal{L} : 4x - 3y + 12 = 0$ es normal a \mathcal{P} y \mathcal{C} en P_0 y corta al eje focal de \mathcal{P} en el punto R . Si $|C_0\vec{P}_0| = |P_0\vec{R}|$ y si la distancia $d[P_0; \text{eje focal}] = 4$, hallar la ecuación de la parábola \mathcal{P} . C_0 es el centro de la circunferencia y la abscisa del vértice es menor que 6.

Solución. $P_0 = C_0 \pm r\vec{u}_{\mathcal{L}}$ donde $r = 5$, $C_0 = (3, 8)$ y $\vec{u}_{\mathcal{L}} = \frac{(3,4)}{5}$ es decir $P_0 = (3, 8) \pm 5\frac{(3,4)}{5}$ de esto consideramos $P_0 = (x_0, y_0) = (6, 12)$ por condición del problema con esto la recta tangente a \mathcal{C} y \mathcal{P} es $\mathcal{L}_T : (x, y)(3, 4) = (3, 4)(6, 12)$ equivalentemente $\mathcal{L}_T : 3x + 4y = 66$.

Ya que $|C_0\vec{P}_0| = 5 = |P_0\vec{R}|$ y $d[P_0; \text{eje focal}] = d[P_0; Q] = 4$ entonces el triángulo P_0QR es un triángulo rectángulo notable, por lo tanto $|\vec{QR}| = 3$ por el Teorema de Pitágoras, además $P_0\vec{R} = P_0\vec{Q} + \vec{QR}$ es decir si $P_0\vec{Q} = (v_1, v_2)$ se tiene la ecuación $(3, 4) = 4(v_1, v_2) \pm 3(-v_2, v_1)$ que al resolverla se tiene $P_0\vec{R} = (v_1, v_2) = (1, 0)$ o $P_0\vec{R} = (v_1, v_2) = (\frac{24}{25}, \frac{7}{25})$ entonces $Q = P_0 + 4(0, 1) = (6, 16)$ o $Q = P_0 + 4(\frac{24}{25}, \frac{7}{25}) = (6 + \frac{96}{25}, 12 + \frac{28}{25})$ esto indica considerar $Q = (6, 16)$ pues el vertice (tiene absisa menor que 6), debe estar a la derecha de P_0 pues la recta \mathcal{L}_T tiene pendiente negativa. Por lo tanto $\mathcal{L}_T \cap \mathcal{F} : x = 16 = (\frac{2}{3}, 16)$ y por propiedad de la tangente a una parábola se tiene el vértice $V = (\frac{\mathcal{L}_T \cap \mathcal{F} + Q}{2}) = (\frac{10}{3}, 16)$. La ecuación de la parábola en el sistema original es $(y - h)^2 = 4\rho(x - k)$ donde $(h, k) = (\frac{10}{3}, 16)$ y $(6, 12) \in \mathcal{P}$ se tiene $(-4)^2 = 4\rho(8/3)$ de donde $\rho = \frac{3}{2}$ entonces la recta directriz pasa por $(\frac{10}{3}, 16) + \frac{3}{2}(1, 0) = (\frac{7}{3}, 16)$ por tanto $\mathcal{L}_D : x = \frac{7}{3}$ y la ecuación de la parábola es

$$(y - 16)^2 = 4\rho\left(x - \frac{10}{3}\right)$$

por ser paralela al eje x .

Ejercicio 5.3. Los puntos $A = (60, 13)$ y $B = (-4, 61)$ están sobre una parábola \mathcal{P} además son simétricos con respecto al eje focal. Desde un punto Q sobre el eje focal se traza una recta tangente a \mathcal{P} que pasa por B , hallar la ecuación de \mathcal{P} y las ecuaciones de las rectas tangentes trazadas desde Q .

Solución. Ya que A y B son simétricas entonces $P_0 = \frac{A+B}{2} = (28, 37) \in \mathcal{L}_F$ donde \mathcal{L}_F es el eje focal paralelo al vector $\vec{AB}^\perp = (B - A)^\perp = (-64, 48) \parallel (-4, 3) = \vec{v}_L$ es decir \vec{v}_F y P_0 nos genera la ecuación del eje focal $\mathcal{L}_F : 4x + 3y = 1$. De otro lado dado el punto $Q = (20, x) \in \mathcal{L}_F$ que al reemplazarlo en la recta del eje focal nos genera $x = -27$ de donde $Q = (20, -27)$ además el vértice de la parábola es $V = \frac{Q+P_0}{2} = (4, 5)$ por propiedad.

Con el objetivo de hallar el valor de ρ en la ecuación $y'^2 = 4\rho x'$ se halla las coordenadas de B en el nuevo sistema de coordenadas centrada en V con vector director $\vec{u} = \frac{(3,4)}{5}$, haciendo uso de la relación

$$(x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp$$

se obtiene $x' = [B - V]\vec{u} = 40$ y $y' = [B - V]\vec{u}^\perp = 40$ por tanto reemplazando $B = (-4, 61) = (40, 40)'$ en $y'^2 = 4\rho x'$ se tiene que $\rho = 10$

Los vectores directores de las rectas tangentes en el sistema $x'y'$ son $(2, 1)$ y $(2, -1)$ respectivamente por tanto sus ecuaciones son $\mathcal{L}_A : 2y' = x' + 40$ y $\mathcal{L}_B : -2y' = x' + 40$ estas ecuaciones en el sistema original con $x' = [(x, y) - (4, 5)]\frac{(3,4)}{5}$ y $y' = [(x, y) - (4, 5)]\frac{(-4,3)}{5}$ reemplazadas resultan $\mathcal{L}_A : 2y - 11x - 166 = 0$ y $\mathcal{L}_B : 5x - 10y - 170 = 0$

1. ww

Capítulo 6

Elipse

Dados dos puntos distintos F_1 y F_2 llamados focos; la elipse \mathcal{E} es el conjunto formado por los puntos P que satisfacen la ecuación

$$|P - F_1| + |P - F_2| = 2a \quad (6.1)$$

$C = (h, k)$ es el centro de la elipse; x' eje focal, V_1 y V_2 son los vértices de la elipse; $\overline{V_1 V_2}$ el eje mayor $\overline{RR'}$ el lado recto; $\overline{B_1 B_2}$ el eje menor de longitud $2b$. En el sistema $X'Y'$ se tiene $B_1 = (0, b)'$; $B_2 = (0, -b)'$; $F_1 = (-c, 0)'$; $F_2 = (c, 0)'$ y $C = (0, 0)'$.

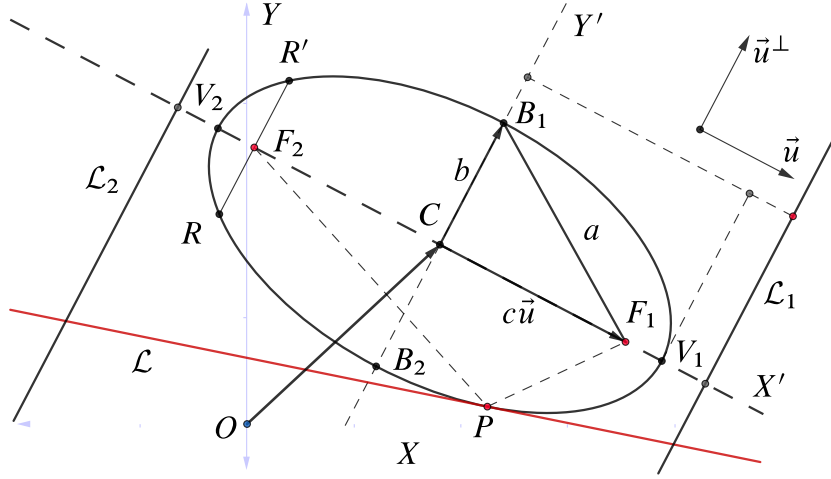


Figure 6.1: Elipse vectorial

Dado $P \in \mathcal{E}$, la excentricidad e se define como

$$\frac{d[P; F_1]}{d[P; \mathcal{L}_1]} = e = \frac{d[P; F_2]}{d[P; \mathcal{L}_2]} \quad (6.2)$$

$$d[B_i; F_1] = d[B_i; F_2] = a \text{ y } d[V_i; C] = d[V_i; C] = a, i = 1, 2.$$

Teorema 6.1. En la elipse se verifican las siguientes igualdades

1. $d[B_1; F_1] = d[B_2; F_1] = a$
2. $d[V_1; C] = d[V_2; C] = a$
3. $d[C; \mathcal{L}_1] = d[C; \mathcal{L}_2] = \frac{c}{e}$
4. $c = d[P; F_1] = d[P; F_2] \implies c = ae$

Proof. 1. Ya que $d[B_1; F_1] + d[B_1; F_2] = 2a = d[B_2; F_1] + d[B_2; F_2]$ es decir $2d[B_1; F_1] = 2a = 2d[B_2; F_1]$ entonces $d[B_1; F_1] = a = d[B_2; F_1]$ $i = 1, 2$.

2. Por la definición (6.1) de la elipse se tiene

$$d[V_1; F_2] + d[V_1; F_1] = 2a \quad (6.3)$$

además la diferencia

$$d[V_1; F_2] - d[V_1; F_1] = 2c \quad (6.4)$$

restando las ecuaciones (6.3) y (6.4) se tiene

$$d[V_1; F_1] = a - c \quad (6.5)$$

entonces haciendo uso de (6.5) en $d[V_1; C] = d[V_1; F_1] + d[F_1; C] = (a - c) + c = a$; de manera similar para el vértice V_2 .

3. En efecto

$$\frac{d[B; F_i]}{d[B; \mathcal{L}_i]} = e \iff \frac{a}{d[B; \mathcal{L}_i]} = e$$

además $d[B_i; \mathcal{L}_i] = d[C; \mathcal{L}_i]$ por lo tanto $\frac{a}{d[C; \mathcal{L}_i]} = e$.

4. Pues

$$\frac{d[P; F_1]}{d[P; \mathcal{L}_1]} = e$$

implica $\frac{a-c}{e-a} = e$ es decir $c = ae$.

Por lo tanto □

$a > b$ y $a^2 = b^2 + c^2$; pues $a = d[B_1; F_2] = d[(0, b^2 + c^2)'; (c, 0)']^2 = \sqrt{b}$; $0 < e < 1$ debido a que $0 < e = \frac{a}{e} < 1$ y $a > c > 0$.

$$P = (x, y) = C + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp; x' = [(x, y) - C]\vec{u}; y' = [(x, y) - C]\vec{u}^\perp$$

$$F_1 = C + c\vec{u} \text{ y } F_2 = C - c\vec{u} \text{ entonces}$$

$$\begin{aligned} |P - F_1| + |P - F_2| &= |C + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp - C + c\vec{u}| \\ &\quad + |C + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp - C - c\vec{u}| \\ &= \sqrt{(x' + c)^2 + y'^2} + \sqrt{(x' - c)^2 + y'^2} = 2a \end{aligned}$$

por lo tanto resolviendo $\sqrt{(x' + c)^2 + y'^2} + \sqrt{(x' - c)^2 + y'^2} = 2a$ resulta $(a^2 - c^2)x'^2 + ay'^2 = a^2(a^2 - c^2) \implies b^2x'^2 + a^2y'^2 = a^2b^2$

De este modo $P \in \mathcal{E}$ si P satisface la ecuación vectorial

$$P = (x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp; \text{ donde } \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1; |\vec{u}| = 1$$

Cuando el eje es paralelo al eje x ; $\vec{u} = i = (1, 0)$ entonces $(x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp = (h + x', k + y') \implies x' = x - h$ y $y' = y - k$ en $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ resulta $\frac{(x-k)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ si V está en el origen); entonces $F_1 = C + c\vec{u} = (h + c, k)$; $\mathcal{L}_1 : x = h + \frac{a}{e}$ y $\mathcal{L}_2 : x = h - \frac{a}{e}$.

Cuando el eje es paralelo al eje y ; $\vec{u} = j = (0, 1)$ entonces $(x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp = (h - y', k + x') \implies x' = y - k$ y $y' = h - x$ en $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ resulta $\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ si V está en el origen); entonces $F_1 = C + c\vec{u} = (h + c, k)$; $\mathcal{L}_1 : x = k + \frac{a}{e}$

y $\mathcal{L}_2 : x = k - \frac{a}{e}$.

Corolario 6.1. *The characteristic function of the sum of two independent random variables X_1 and X_2 is the product of characteristic functions of X_1 and X_2 , i.e.,*

$$\varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t)$$

Ejercicio 6.1 (Characteristic Function of the Sample Mean). *Let $\bar{X} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} X_i$ be the sample mean of n independent and identically distributed random variables, each with characteristic function φ_X . Compute the characteristic function of \bar{X} .*

Solución. Applying Theorem, we have

$$\varphi_{\bar{X}}(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i} \left(\frac{t}{n} \right) = \left[\varphi_X \left(\frac{t}{n} \right) \right]^n.$$

Hiperbola

Los puntos (P) de un hipérbola verifican la siguiente ecuación

$$||P - F_1| + |P - F_1|| = 2a$$

$C = (h, k)$ es el centro de la hipérbola; V_1 y V_2 son los vértices; F_1 y F_2 son los focos; $\overline{V_1 V_2}$ es el eje transversal; $\overline{B_1 B_2}$ es el eje conjugado; x' es el eje focal

$$d [C; F_1] = d [C; F_2] = c$$

$F_1 = (-c, 0)$; $F_2 = (c, 0)$ en el sistema coordenado $x'y'$; \mathcal{C} circunferencia con centro en C , radio c que pasa por los focos.

$$d[V_1; C] = d[V_2; C] = a$$

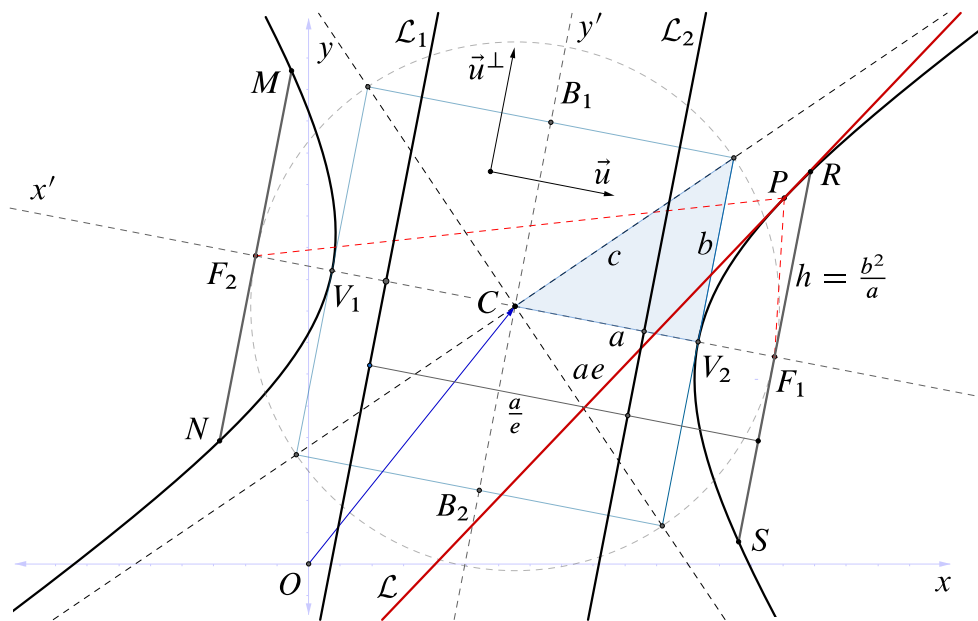


Figure 7.1: Ellipse vectorial

$$\frac{d [P; F_1]}{d [P; \mathcal{L}_1]} = e = \frac{d [P; F_2]}{d [P; \mathcal{L}_2]}$$

$c = ae$; $d [C; \mathcal{L}_1] = d [C; \mathcal{L}_2] = \frac{a}{e}$ y $e > 1$; en efecto

$$\frac{d[R; F_1]}{d[R; \mathcal{L}_1]} = \frac{\frac{b^2}{a}}{c - d[C; \mathcal{L}_1]} = \frac{c^2 - a^2}{a(c - d[C; \mathcal{L}_1])}$$

$$\frac{d[V_2; F_1]}{d[V_2; \mathcal{L}_1]} = \frac{c-a}{a-d[C; \mathcal{L}_2]}.$$

De la primera

$$d[C; \mathcal{L}_2] = a - \frac{c-a}{e} \implies c-d[C; \mathcal{L}_2] = a - \frac{(c-a)(e+1)}{e}.$$

De la segunda ecuación

$$c^2 - a^2 = ae \frac{(c-a)(e+1)}{e} \implies c+a = a(e+1) \implies c = ae$$

luego $d[C; \mathcal{L}_2] = a - \frac{(c-a)(ae+a)}{e} = \frac{a}{e}$ y el caso $d[C; \mathcal{L}_1]$ es similar. Finalmente $e = \frac{c}{a} > 1$ pues $0 < a < c$.

$$P = (x, y) = C + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp \quad x' = [(x, y) - C]\vec{u} \quad y' = [(x, y) - C]\vec{u}^\perp$$

$$F_1 = C + c\vec{u} \quad y \quad F_2 = C - c\vec{u} \quad \text{tambien} \quad V_1 = C + a\vec{u} \quad y \quad V_2 = C - a\vec{u} \quad \text{entonces}$$

$$\frac{d[P; F_1]}{d[P; \mathcal{L}_1]} = e \iff d[P; F_1]^2 = e^2 d[P; \mathcal{L}_1]^2$$

haciendo uso de $c = ae$ y $c^2 = a^2 + b^2$ se tiene lo siguiente

$$(x' - c)^2 + y'^2 = e^2 \left(x' - \left(\frac{a}{e} \right) \right)^2$$

$$(c^2 - a^2)x'^2 + a^2y'^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$b^2x'^2 - a^2y'^2 = a^2b^2$$

De este modo $P \in \mathcal{H}$ si P satisface la ecuación vectorial

$$P = (x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp; \text{ donde } \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1; |\vec{u}| = 1.$$

Cuando el eje es paralelo al eje x ; $\vec{u} = i = (1, 0)$ entonces $(x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp = (h + x', k + y') \implies x' = x - h$ y $y' = y - k$ en $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$; resulta $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$; $(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; si V está en el origen); entonces $F_1 = C + c\vec{u} = (h - \frac{a}{e}, k)$ y $F_2 = C - c\vec{u} = (h + \frac{a}{e}, k)$; $\mathcal{L}_1 : x = h - \frac{a}{e}$ y $\mathcal{L}_2 : x = h + \frac{a}{e}$ y las asíntotas de $y' = \pm \frac{a}{b}x'$ se convierte en $(y - k) = \pm \frac{a}{b}(x - h)$.

Cuando el eje es paralelo al eje y ; $\vec{u} = j = (0, 1)$ entonces $(x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp = (h - y', k + x')$ $\implies x' = y - k$ y $y' = h - x$ en $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$; resulta $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$; $(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; si V está en el origen); entonces $F_1 = C + c\vec{u} = (h + c, k)$; $\mathcal{L}_1 : x = k + \frac{a}{e}$ y $\mathcal{L}_2 : x = k - \frac{a}{e}$ y las asíntotas de $y' = \pm \frac{b}{a}x'$ se convierte en $(y - k) = \pm \frac{b}{a}(x - h)$.