

# Geometría analítica

MALLQUI BAÑOS Ricardo Michel

2020-02-27

## Contents

<b>1</b>	<b>Algebra vectorial</b>	<b>2</b>
1.1	Acciones . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Rectas</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Lugar geométrico</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Circunferencia</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>Parábolas</b>	<b>8</b>
<b>6</b>	<b>Elipse</b>	<b>11</b>
<b>7</b>	<b>Hiperbola</b>	<b>13</b>

## Capítulo 1

### Algebra vectorial

Sea la la realcion oportuna entre los demas opciones conseguir una de las acciones consistentes de elegirla ecuacion anterior porque se desea que las equivalencias sean congruentes es decir que las deducciones sean logicas y buenas de acuerdo a ls opciones de la gente que debe tener en cuenta las demas opciones congruentes. ## Datos Sean los datos que se prosiguen

- www
- wwwwww

**ff**

WWW ff WWW wwwwww

**ff**

This is a *sample* book written in **Markdown**. You can use anything that Pandoc's Markdown supports, e.g., a math equation  $a^2 + b^2 = c_c^2$ .

The **bookdown** package can be installed from CRAN or Github:

```
install.packages("bookdown")  
# or the development version  
# devtools::install_github("rstudio/bookdown")
```

Remember each Rmd file contains one and only one chapter, and a chapter is defined by the first-level heading .

To compile this example to PDF, you need XeLaTeX. You are recommended to install TinyTeX (which includes XeLaTeX): <https://yihui.org/tinytex/>.

**Acciones**

Sean los datos *emph real* **Entonces**

## **Capítulo 2**

### **Rectas**

### **Capítulo 3**

#### **Lugar geométrico**

Here is a review of existing methods.

## Capítulo 4

### Circunferencia

Sea  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  entonces el vector escalado es  $r\vec{a} \parallel \vec{a}$ ; el vector perpendicular a este es  $\vec{a}^\perp = (-a_2, a_1)$  la norma del vector  $\vec{a}$  es  $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$  el vector unitario en la dirección de  $\vec{a}$  es  $\vec{\mu} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$  que es paralela a este. Dado dos puntos  $P_1$  y  $P_2$  estos definen un vector  $\vec{P_1P_2} = P_2 - P_1$ . Los vectores en dirección de los ejes positivos son  $i = (1, 0)$  y  $j = (0, 1)$ ; cualquier vector se pueden expresar en términos de estos es decir  $\vec{a} = (a_1, a_2) = a_1(1, 0) + a_2(0, 1) = a_1i + a_2j$ . De acuerdo al ángulo de inclinación del vector se tiene la siguiente representación  $\vec{a} = \|\vec{a}\| (\cos \theta, \sin \theta)$ .

**Theorem 4.1** (russ). Dada el espacio  $R$  y  $r \in R$  se tiene que  $\mathcal{R}(r) = \lim_{t \rightarrow \infty} g(y)_r$

$\Sigma$

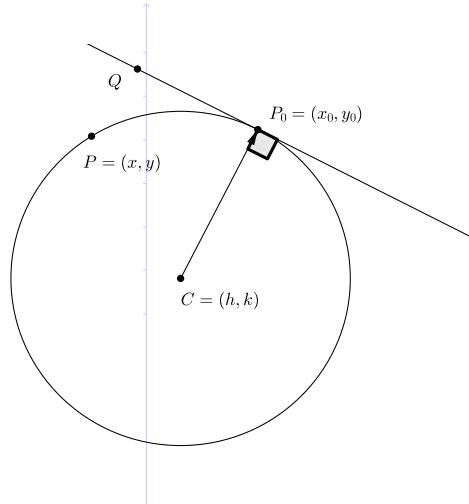


Figure 4.1: Elipse vectorial

Dos vectores son ortogonales ( $\vec{a} \perp \vec{b}$ ) si  $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$  y verifican

$|\vec{b}|^2 + |\vec{b}|^2 + = |\vec{a} + \vec{b}|^2$   $\vec{a}\vec{b} = 0$   $\vec{a} \parallel \vec{b}^\perp$   $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  son LI si y solo si  $r\vec{a} + s\vec{b} = 0$  implica  $r = 0$  y  $s = 0$ .

La proyeccion de  $\vec{a}$  sobre  $\vec{b}$  es otro vector  $\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$

$\vec{a} = \text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a} + \text{Proy}_{\vec{b}^\perp}\vec{a}$  si hacemos  $\vec{a} = p\vec{b} + q\vec{b}^\perp$  entonces  $q = \frac{\vec{a}\vec{b}^\perp}{\|\vec{b}\|^2}$  y  $p = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}$  pues  $\|\vec{b}\| = \|\vec{b}^\perp\|$  entonces  $\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\vec{b} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\|\vec{b}\|} \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \text{Cp}_{\vec{b}}\vec{a} \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$ ;  $\text{Cp}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$  recibe el nombre de componente de  $\vec{a}$  en la dirección de  $\vec{b}$

Dado  $P_0$  y un vector  $\vec{a}$  entonces la recta se define como el conjunto de puntos  $\mathcal{L} = \{P \in \mathbb{R}^2 / P = P_0 + t\vec{a}; t \in \mathbb{R}\}$  que recibe el nombre de ecuación vectorial de la recta.  $P \in \mathcal{L} \iff (P - P_0) \cdot \vec{a}^\perp = 0$ . De la ecuación vectorial de la recta se tiene si  $P = (x, y)$ ;  $P_0 = (x_0, y_0)$  y  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  se tiene la ecuación paramétrica de la recta.  $x = x_0 + ta_1$ ;

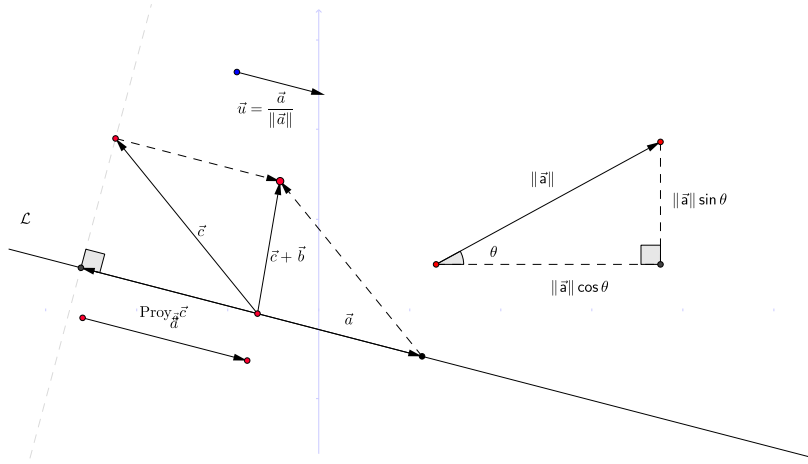


Figure 4.2: Elipse vectorial

$y = y_0 + ta_2$  de esto se obtiene la ecuación simétrica de la recta

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}.$$

Sea  $\vec{n} = (a, b) = \vec{a}^\perp$  entonces se tiene que si  $P \in \mathcal{L}$  entonces  $(P - P_0) \cdot \vec{n} = 0$  pues son perpendiculares; entonces  $P \cdot \vec{n} = P_0 \cdot \vec{n} \iff ax + by = -c \implies ax + by + c = 0$  que recibe el nombre de ecuación general de la recta. Sea  $Q = (x_1, y_1)$  un punto exterior a  $\mathcal{L}$  entonces la distancia de  $Q$  a  $\mathcal{L}$  se define como

$$\begin{aligned} d[Q; \mathcal{L}] &= |\text{Cp}_{\vec{n}}(Q - P_0)| \\ &= \left| \frac{(Q - P_0) \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| \\ &= \left| \frac{Q \cdot \vec{n} - P_0 \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| \\ &= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

Sean  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  dos rectas; con vectores directores  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  y  $\vec{b} = (b_1, b_2)$  respectivamente; entonces  $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = (d_1, d_2)$  donde  $d_1$  y  $d_2$  satisfacen el sistema generado por las ecuaciones generales de  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$ ;  $a_1x + a_2y + k_1 = 0$  y  $b_1x + b_2y + k_2 = 0$ .

La pendiente de una recta se deduce de su vector director es decir si  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  entonces  $m = \frac{a_2}{a_1}$ ; de esto se deduce  $\vec{a} = (a_1, a_2) = a_1(1, \frac{a_2}{a_1}) = a_1(1, m)$ . El angulo generado por las  $\mathcal{L}_1$  con pendiente  $m_1$  y  $\mathcal{L}_2$  con pendiente  $m_2$ ; está dada por  $\theta = \arctan\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right)$ .

El círculo se define como el conjunto de punto  $P = (x, y)$  que satisfacen la ecuación

$$\|P - C\| = r$$

$r > 0$  es el radio,  $C = (h, k)$  es el centro entonces la ecuación del círculo es

$$\|P - C\| = r \iff (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

La ecuación de la recta tangente en  $P_0 = (x_0, y_0)$  ( $P = P_0$  en el gráfico) está dada por

$$(Q - P_0) \cdot (P_0 - C) = 0$$

donde  $Q = (x, y) \neq P$  cualquiera; entonces

$$(Q - P_0) \cdot (P_0 - C) = 0 \iff (x - x_0, y - y_0)(x_0 - h, y_0 - k) = 0$$

lo cual es equivalente a

$$(x - h)(x_0 - h) + (x - k)(y_0 - k) = r^2$$



## Capítulo 5

### Parábolas

Sean la recta  $\mathcal{L}$  y el punto  $F$  fijos; los puntos  $P$  que satisfacen

$$d[P; F] = d[P; \mathcal{L}] = |p|$$

la excentricidad es el cociente de estas dos distancias igual a 1.

$\mathcal{L}$  es la recta directriz cuya ecuación es  $x' = -p$ ;  $F$  es el foco;  $V = (h, k)$  vértice,  $p$  parámetro de la parábola;  $RR'$  lado recto de la parábola.

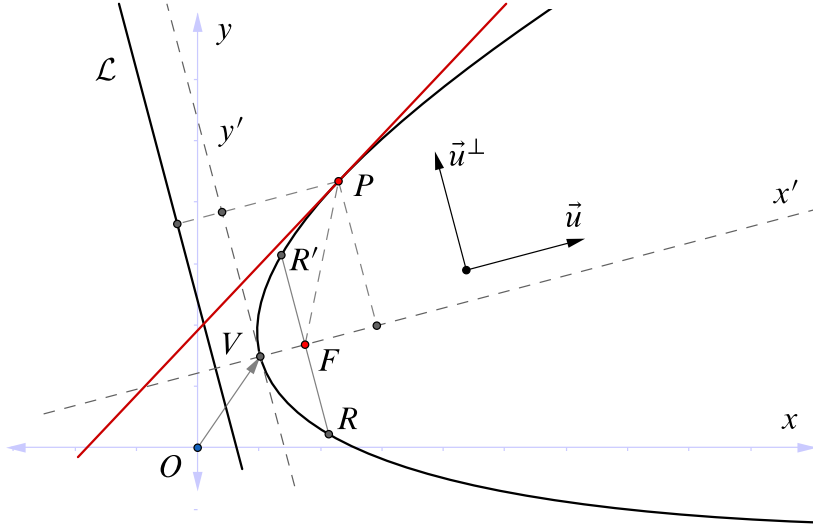


Figure 5.1: Elipse vectorial

$$P = (x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp \quad x' = [(x, y) - V] \cdot \vec{u} \quad y' = [(x, y) - V] \cdot \vec{u}^\perp$$

$$\mathcal{L} = \{Q/Q = (V - p\vec{u}) + t\vec{u}^\perp, t \in \mathbb{R}\}; F = V + p\vec{u} \text{ luego}$$

$$d[P; \mathcal{L}] = |\text{Cp}_{\vec{u}} \vec{PQ}| = |(Q - P) \cdot \vec{u}| = |x' + p|$$

$$d[P; F] = |P - F| = |(x' - p)\vec{u} + y'\vec{u}^\perp|$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} d[P; F]^2 = d[P; \mathcal{L}]^2 &\implies |(x' - p)\vec{u} + y'\vec{u}^\perp|^2 = |x' + p|^2 \\ &\implies (x' - p)^2 + y'^2 = (x' + p)^2 \\ &\implies y'^2 = 4px' \end{aligned}$$

De este modo  $P \in \mathcal{P}$  si  $P$  satisface la ecuacion vectorial

$$P = (x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp; \text{ donde } y'^2 = 4px'; |\vec{u}| = 1$$

Cuando el eje es paralelo al eje  $x$ ;  $\vec{u} = i = (1, 0)$  entonces  $(x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp = (h + x', k + y')$   $\implies x' = x - h$  y  $y' = y - k$  en  $y'^2 = 4px'$  resulta  $(y - k)^2 = 4p(x - h)$  ( $y^2 = 4px$  si  $V$  está en el origen); entonces  $F = V + p\vec{u} = (h + p, k)$ ;  $\mathcal{L} : x = h - p$ . Si  $p < 1$  la parábola se invierte simétricamente a la directriz.

Cuando el eje es paralelo al eje  $y$ ;  $\vec{u} = j = (0, 1)$  entonces  $(x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp = (h - y', k + x')$   $\implies x' = y - k$  y  $y' = h - x$  en  $y'^2 = 4px'$  resulta  $(x - h)^2 = 4p(y - k)$  ( $x^2 = 4py$  si  $V$  está en el origen); entonces  $F = V + p\vec{u} = (h, k + p)$ ;  $\mathcal{L} : x = k - p$ . Si  $p < 1$  la parábola se invierte simétricamente a la directriz.

La ecuación de la recta tangente a  $y^2 = 4px$  en el punto  $P_0 = (x_0, y_0)$  está dada por  $y = \frac{2p}{y_0}(x + x_0)$  y la ecuación de la recta tangente a  $(y - k)^2 = 4p(x - h)$  en el punto  $P_0 = (x_0, y_0)$  está dada por  $(y_0 - k)(x_0 - k) = 4p \left[ \left( \frac{x+x_0}{2} - h \right) \right]$  similarmente la ecuación de la recta tangente a  $(x - h)^2 = 4p(y - k)$  en el punto  $P_0 = (x_0, y_0)$  está dada por  $(x_0 - h)(y_0 - k) = 4p \left[ \left( \frac{y+y_0}{2} - k \right) \right]$ .

1. Al realizarse una transformación de coordenadas, el eje de una parábola  $\mathcal{P}$  resulta orientada según el vector  $(3, 4)$ . En  $x'y'$  un punto  $Q' = (20, -20)' \in \mathcal{P}$  en el sistema  $xy$  el foco de  $\mathcal{P}$   $E = (11, 5)$ . Determinar en el sistema  $xy$  un punto  $R$  de la parábola  $\mathcal{P}$  tal que el triángulo  $QVR$  sea rectángulo en  $V$  vértice de la parábola.
2. La circunferencia  $\mathcal{C} = (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 25$  es tangente a una parábola  $\mathcal{P}$  en  $P_0 = (x_0, y_0)$ ,  $y_0 > 7$ . La recta  $\mathcal{L} : 4x - 3y + 12 = 0$  es normal a  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{C}$  en  $P_0$  y corta al eje focal de  $\mathcal{P}$  en el punto  $R$ . Si  $|C_0\vec{P}_0| = |P_0\vec{R}|$  y si la distancia  $d[P_0; \text{eje focal}] = 4$ , hallar la ecuación de la parábola  $\mathcal{P}$ .  $C_0$  es el centro de la circunferencia y la abscisa del vértice es menor que 6.

$P_0 = C_0 \pm r\vec{u}_{\mathcal{L}}$  donde  $r = 5$ ,  $C_0 = (3, 8)$  y  $\vec{u}_{\mathcal{L}} = \frac{(3,4)}{5}$  es decir  $P_0 = (3, 8) \pm 5\frac{(3,4)}{5}$  de esto consideramos  $P_0 = (x_0, y_0) = (6, 12)$  por condición del problema con esto la recta tangente a  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{P}$  es  $\mathcal{L}_T : (x, y)(3, 4) = (3, 4)(6, 12)$  equivalentemente  $\mathcal{L}_T : 3x + 4y = 66$ .

Ya que  $|C_0\vec{P}_0| = 5 = |P_0\vec{R}|$  y  $d[P_0; \text{eje focal}] = d[P_0; Q] = 4$  entonces el triángulo  $P_0QR$  es un triángulo rectángulo notable, por lo tanto  $|\vec{QR}| = 3$  por el Teorema de Pitágoras, además  $P_0\vec{R} = P_0\vec{Q} + \vec{QR}$  es decir si  $P_0\vec{Q} = (v_1, v_2)$  se tiene la ecuación  $(3, 4) = 4(v_1, v_2) \pm 3(-v_2, v_1)$  que al resolverla se tiene  $P_0\vec{R} = (v_1, v_2) = (1, 0)$  o  $P_0\vec{R} = (v_1, v_2) = \left(\frac{24}{25}, \frac{7}{25}\right)$  entonces  $Q = P_0 + 4(0, 1) = (6, 16)$  o  $Q = P_0 + 4\left(\frac{24}{25}, \frac{7}{25}\right) = \left(6 + \frac{96}{25}, 12 + \frac{28}{25}\right)$  esto indica considerar  $Q = (6, 16)$  pues el vértice (tiene abscisa menor que 6), debe estar a la derecha de  $P_0$  pues la recta  $\mathcal{L}_T$  tiene pendiente negativa. Por lo tanto  $\mathcal{L}_T \cap \mathcal{F} : x = 16 = \left(\frac{2}{3}, 16\right)$  y por propiedad de la tangente a una parábola se tiene el vértice  $V = \left(\frac{\mathcal{L}_T \cap \mathcal{F} + Q}{2}\right) = \left(\frac{10}{3}, 16\right)$ . La ecuación de la parábola en el sistema original es  $(y - h)^2 = 4\rho(x - k)$  donde  $(h, k) = \left(\frac{10}{3}, 16\right)$  y  $(6, 12) \in \mathcal{P}$  se tiene  $(-4)^2 = 4\rho(8/3)$  de donde  $\rho = \frac{3}{2}$  entonces la recta directriz pasa por  $\left(\frac{10}{3}, 16\right) + \frac{3}{2}(1, 0) = \left(\frac{7}{3}, 16\right)$  por tanto  $\mathcal{L}_D : x = \frac{7}{3}$  y la ecuación de la parábola es

$$(y - 16)^2 = 4\rho\left(x - \frac{10}{3}\right)$$

por ser paralela al eje  $x$ .

2. Los puntos  $A = (60, 13)$  y  $B = (-4, 61)$  están sobre una parábola  $\mathcal{P}$  además son simétricos con respecto al eje focal. Desde un punto  $Q$  sobre el eje focal se traza una recta tangente a  $\mathcal{P}$  que pasa por  $B$ , hallar la ecuación de  $\mathcal{P}$  y las ecuaciones de las

rectas tangentes trazadas desde  $Q$ .

Ya que  $A$  y  $B$  son simétricas entonces  $P_0 = \frac{A+B}{2} = (28, 37) \in \mathcal{L}_F$  donde  $\mathcal{L}_F$  es el eje focal paralelo al vector  $\vec{AB}^\perp = (B - A)^\perp = (-64, 48) \parallel (-4, 3) = \vec{v}_L$  es decir  $\vec{v}_F$  y  $P_0$  nos genera la ecuación del eje focal  $\mathcal{L}_F : 4x + 3y = 1$ . De otro lado dado el punto  $Q = (20, x) \in \mathcal{L}_F$  que al reemplazarlo en la recta del eje focal nos genera  $x = -27$  de donde  $Q = (20, -27)$  además el vértice de la parábola es  $V = \frac{Q+P_0}{2} = (4, 5)$  por propiedad.

Con el objetivo de hallar el valor de  $\rho$  en la ecuación  $y'^2 = 4\rho x'$  se halla las coordenadas de  $B$  en el nuevo sistema de coordenadas centrada en  $V$  con vector director  $\vec{u} = \frac{(3,4)}{5}$ , haciendo uso de la relación

$$(x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp$$

se obtiene  $x' = [B - V] \vec{u} = 40$  y  $y' = [B - V] \vec{u}^\perp = 40$  por tanto reemplazando  $B = (-4, 61) = (40, 40)'$  en  $y'^2 = 4\rho x'$  se tiene que  $\rho = 10$

Los vectores directores de las rectas tangentes en el sistema  $x'y'$  son  $(2, 1)$  y  $(2, -1)$  respectivamente por tanto sus ecuaciones son  $\mathcal{L}_A : 2y' = x' + 40$  y  $\mathcal{L}_B : -2y' = x' + 40$  estas ecuaciones en el sistema original con  $x' = [(x, y) - (4, 5)] \frac{(3,4)}{5}$  y  $y' = [(x, y) - (4, 5)] \frac{(-4,3)}{5}$  reemplazadas resultan  $\mathcal{L}_A : 2y - 11x - 166 = 0$  y  $\mathcal{L}_B : 5x - 10y - 170 = 0$

1. ww

## Capítulo 6

### Elipse

Dados dos puntos distintos  $F_1$  y  $F_2$  llamados focos; la elipse  $\mathcal{E}$  es el conjunto formado por los puntos  $P$  que satisfacen la ecuación

$$|P - F_1| + |P - F_2| = 2a.$$

$C = (h, k)$  es el centro de la elipse;  $x'$  eje focal,  $V_1$  y  $V_2$  son los vértices de la elipse;  $\overline{V_1V_2}$  el eje mayor  $\overline{RR'}$  el lado recto;  $\overline{B_1B_2}$  el eje menor de longitud  $2b$ . En el sistema  $x'y'$  se tiene  $B_1 = (0, b)'$ ;  $B_2 = (0, -b)'$ ;  $F_1 = (-c, 0)'$ ;  $F_2 = (c, 0)'$  y  $C = (0, 0)'$ .

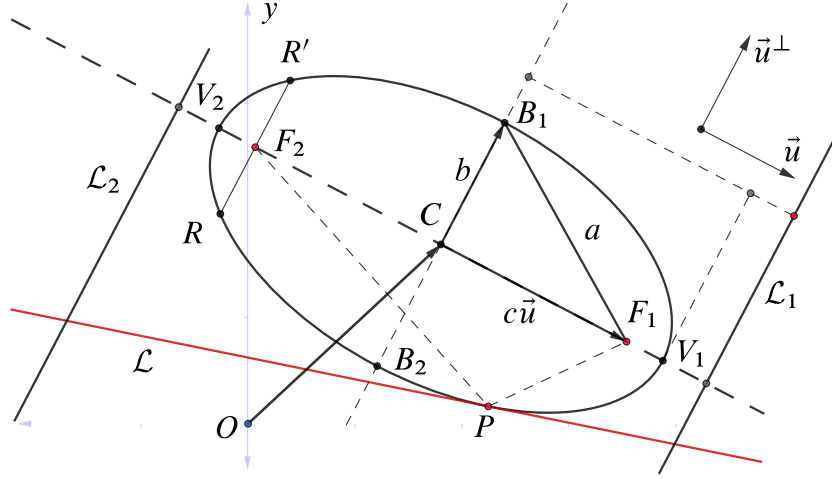


Figure 6.1: Elipse vectorial

La excentricidad  $e$  se define como

$$\frac{d[P; F_1]}{d[P; \mathcal{L}_1]} = e = \frac{d[P; F_2]}{d[P; \mathcal{L}_2]}$$

$d[B_i; F_1] = d[B_i; F_2] = a$  y  $d[V_i; C] = d[V_i; C] = a$ ,  $i = 1, 2$ .  $d[C; \mathcal{L}_1] = d[C; \mathcal{L}_2] = \frac{a}{e}$  pues  $\frac{d[B_i; F_1]}{d[B_i; \mathcal{L}_1]} = e \implies \frac{a}{d[B; \mathcal{L}_1]} = e$ . Sea  $c = d[P; F_1] = d[P; F_2] \implies c = ae$  pues  $\frac{d[P; F_1]}{d[P; \mathcal{L}_1]} = e \implies \frac{a-c}{\frac{a}{e}-a} = e \implies c = ae$ .  $a > b$  y  $a^2 = b^2 + c^2$ ; pues  $a = d[B_1; F_2] = d[(0, b^2 + c^2)'; (c, 0)']^2 = \sqrt{b}$ ;  $0 < e < 1$  debido a que  $0 < e = \frac{a}{e} < 1$  y  $a > c > 0$ .

$$P = (x, y) = C + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp; x' = [(x, y) - C]\vec{u}; y' = [(x, y) - C]\vec{u}^\perp$$

$$F_1 = C + c\vec{u} \text{ y } F_2 = C - c\vec{u} \text{ entonces}$$

$$\begin{aligned}
|P - F_1| + |P - F_2| &= \left| C + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp - C + c\vec{u} \right| \\
&\quad + \left| C + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp - C - c\vec{u} \right| \\
&= \sqrt{(x' + c)^2 + y'^2} + \sqrt{(x' - c)^2 + y'^2} = 2a
\end{aligned}$$

por lo tanto resolviendo  $\sqrt{(x' + c)^2 + y'^2} + \sqrt{(x' - c)^2 + y'^2} = 2a$  resulta  $(a^2 - c^2)x'^2 + ay'^2 = a^2(a^2 - c^2) \implies b^2x'^2 + a^2y'^2 = a^2b^2$

De este modo  $P \in \mathcal{E}$  si  $P$  satisface la ecuación vectorial

$$P = (x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp; \text{ donde } \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1; |\vec{u}| = 1$$

Cuando el eje es paralelo al eje  $x$ ;  $\vec{u} = i = (1, 0)$  entonces  $(x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp = (h + x', k + y') \implies x' = x - h$  y  $y' = y - k$  en  $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$  resulta  $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$  ( $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  si  $V$  está en el origen); entonces  $F_1 = C + c\vec{u} = (h + c, k)$ ;  $\mathcal{L}_1 : x = h + \frac{a}{e}$  y  $\mathcal{L}_2 : x = h - \frac{a}{e}$ .

Cuando el eje es paralelo al eje  $y$ ;  $\vec{u} = j = (0, 1)$  entonces  $(x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp = (h - y', k + x') \implies x' = y - k$  y  $y' = h - x$  en  $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$  resulta  $\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(h-x)^2}{b^2} = 1$  ( $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  si  $V$  está en el origen); entonces  $F_1 = C + c\vec{u} = (h + c, k)$ ;  $\mathcal{L}_1 : x = k + \frac{a}{e}$  y  $\mathcal{L}_2 : x = k - \frac{a}{e}$ .

## Capítulo 7

### Hiperbola

Los puntos  $\backslash(P\backslash)$  de un hipérbola verifican la siguiente ecuación

$$||P - F_1| + |P - F_1|| = 2a$$

$C = (h, k)$  es el centro de la hipérbola;  $V_1$  y  $V_2$  son los vértices;  $F_1$  y  $F_2$  son los focos;  $\overline{V_1V_2}$  es el eje transversal;  $\overline{B_1B_2}$  es el eje conjugado;  $x'$  es el eje focal

$$d[C; F_1] = d[C; F_2] = c$$

$F_1 = (-c, 0)$ ;  $F_2 = (c, 0)$  en el sistema coordenado  $x'y'$ ;  $\mathcal{C}$  circunferencia con centro en  $C$ , radio  $c$  que pasa por los focos.

$$d[V_1; C] = d[V_2; C] = a$$

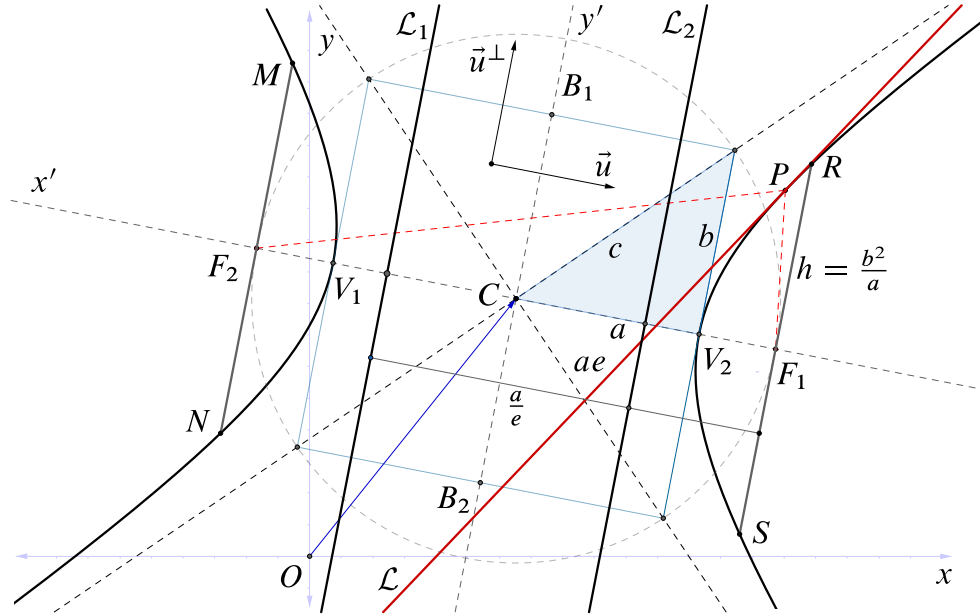


Figure 7.1: Ellipse vectorial

$$\frac{d[P; F_1]}{d[P; \mathcal{L}_1]} = e = \frac{d[P; F_2]}{d[P; \mathcal{L}_2]}$$

$c = ae$ ;  $d[C; \mathcal{L}_1] = d[C; \mathcal{L}_2] = \frac{a}{e}$  y  $e > 1$ ; en efecto

$$\frac{d[R; F_1]}{d[R; \mathcal{L}_1]} = \frac{\frac{b^2}{a}}{c - d[C; \mathcal{L}_1]} = \frac{c^2 - a^2}{a(c - d[C; \mathcal{L}_1])}$$

$$\frac{d[V_2; F_1]}{d[V_2; \mathcal{L}_1]} = \frac{c - a}{a - d[C; \mathcal{L}_2]}.$$

De la primera

$$d[C; \mathcal{L}_2] = a - \frac{c - a}{e} \implies c - d[C; \mathcal{L}_2] = a - \frac{(c - a)(e + 1)}{e}.$$

De la segunda ecuación

$$c^2 - a^2 = ae \frac{(c - a)(e + 1)}{e} \implies c + a = a(e + 1) \implies c = ae$$

luego  $d[C; \mathcal{L}_2] = a - \frac{(c-a)(ae+a)}{e} = \frac{a}{e}$  y el caso  $d[C; \mathcal{L}_1]$  es similar. Finalmente  $e = \frac{c}{a} > 1$  pues  $0 < a < c$ .

$$P = (x, y) = C + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp \quad x' = [(x, y) - C]\vec{u} \quad y' = [(x, y) - C]\vec{u}^\perp$$

$$F_1 = C + c\vec{u} \quad y \quad F_2 = C - c\vec{u} \quad \text{tambien} \quad V_1 = C + a\vec{u} \quad y \quad V_2 = C - a\vec{u} \quad \text{entonces}$$

$$\frac{d[P; F_1]}{d[P; \mathcal{L}_1]} = e \iff d[P; F_1]^2 = e^2 d[P; \mathcal{L}_1]^2$$

haciendo uso de  $c = ae$  y  $c^2 = a^2 + b^2$  se tiene lo siguiente

$$(x' - c)^2 + y'^2 = e^2 \left( x' - \left( \frac{a}{e} \right) \right)^2$$

$$(c^2 - a^2)x'^2 + a^2y'^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$b^2x'^2 - a^2y'^2 = a^2b^2$$

De este modo  $P \in \mathcal{H}$  si  $P$  satisface la ecuación vectorial

$$P = (x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp; \quad \text{donde} \quad \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1; \quad |\vec{u}| = 1.$$

Cuando el eje es paralelo al eje  $x$ ;  $\vec{u} = i = (1, 0)$  entonces  $(x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp = (h + x', k + y') \implies x' = x - h$  y  $y' = y - k$  en  $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$ ; resulta  $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ;  $(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ; si  $V$  está en el origen); entonces  $F_1 = C + c\vec{u} = (h - \frac{a}{e}, k)$  y  $F_2 = C - c\vec{u} = (h + \frac{a}{e}, k)$ ;  $\mathcal{L}_1 : x = h - \frac{a}{e}$  y  $\mathcal{L}_2 : x = h + \frac{a}{e}$  y las asíntotas de  $y' = \pm \frac{a}{b}x'$  se convierte en  $(y - k) = \pm \frac{a}{b}(x - h)$ .

Cuando el eje es paralelo al eje  $y$ ;  $\vec{u} = j = (0, 1)$  entonces  $(x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp = (h - y', k + x') \implies x' = y - k$  y  $y' = h - x$  en  $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$ ; resulta  $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ;  $(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ; si  $V$  está en el origen); entonces  $F_1 = C + c\vec{u} = (h + c, k)$ ;  $\mathcal{L}_1 : x = k + \frac{a}{e}$  y  $\mathcal{L}_2 : x = k - \frac{a}{e}$  y las asíntotas de  $y' = \pm \frac{b}{a}x'$  se convierte en  $(y - k) = \pm \frac{b}{a}(x - h)$ .