Relaciones topológicas entre los conjuntos Multibrots y de Julia generados por el polinomio $z^p + c$

MALLQUI BAÑOS Ricardo Michel

2020-02-16

Índice general

I. Preliminares **2**
1.1. Topología de los números complejos 2
1.2. Trasformaciones de variable compleja 3

II. Dinamica discreta compleja **5**
2.1. Iteración de funciones complejas 5
2.2. Conjuntos de Fatou y Julia $\mathcal{K}$, $\mathcal{J}$ y $\mathcal{F}$ 5
2.3. Plano de parámetros generado por $Q_{p,c} = z^p + c$ 5
2.4. Plano dinámico generado por $Q_{p,c} = z^p + c$ ($\mathcal{C}_\infty$) 6

III. Relaciones topólogicas entre los conjuntos Multibrot y Julia **7**

CAPÍTULO I

Preliminares

1.1. Topología de los números complejos

1.1.1. Espacio métrico

(Barnsley, 1988) (X, d), espacio métrico

- $d(a, b) \geq 0$.
- $d(a, b) = 0 \iff a = b$.
- $d(a, b) = d(b, a)$ (axioma de simetría).
- $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$ (desigualdad triangular)

Para todo a, b y c en X.

(V. Churchill et al., 2019) se tiene que $\mathbb{C}$

$$d(z, w) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

1.1.2. Conjuntos compactos

Sea A subconjunto de un espacio métrico X, decimos que A es compacto si para cada cubierta abierta $\mathcal{C}$ de A existe una subcubierta finita $\mathcal{C}'$.

1.1.3. Conjuntos conexos

Decimos que el espacio X es conexo si, para todos los conjuntos abiertos U y V en X, no vacíos, de modo que $X \subset U \cup V$, se tiene $U \cap V \neq \emptyset$. En otras palabras, X no puede ser cubierto por dos conjuntos abiertos disjuntos.

1. Conexidad por trayectorias
2. Conjuntos convexos
3. Componentes conexas

1.1.4. Sucesiones

Una sucesión en un conjunto X es una función de los naturales en X. Designamos por x_n al n – ésimo término de la sucesión es decir, a la imagen de n a través de la función $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Decimos que una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio métrico (X, d) es convergente en X si existe un punto $p \in X$ con la propiedad de que $\forall \epsilon \geq 0$, $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N$, $d(p, x_n) < \epsilon$.

1.1.5. El plano extendido complejo

En esta sección se recopilará información acerca de la topología del plano complejo asociado al número ∞ siendo esto posible con la ayuda de la esfera de Riemann. De acuerdo a (Rudin, 1987) el conjunto $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se llama *plano complejo ampliado*, ($\infty \notin \mathbb{C}$). En $\mathbb{C}$ adoptamos la aritmética usual con ∞. $\mathbb{C}_\infty$ se le dota de una topología para la cual es un espacio compacto, es decir los entornos de los puntos de $a \in \mathbb{C}$ son por definición los entornos en $\mathbb{C}_\infty$ y para $a = \infty$ una base de entornos en $\mathbb{C}_\infty$ viene dada por $V_r = \{z \in \mathbb{C}; |z| > r\} \cup \{\infty\}$, tomando todos los $r > 0$. $\mathbb{C}$ se puede identificar con

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}.$$

1.1.6. Topología de Hausdorff

Sea (X, d) un espacio métrico completo. Entonces $\mathfrak{H}(X)$ denota el espacio cuyos puntos son los subconjuntos compactos no vacíos de X. Sea $x \in X$, A y $B \in \mathfrak{H}(X)$.

$$d(x, B) = \text{mín}\{d(x, y) : y \in B\}.$$

$$d(A, B) = \text{máx}\{d(x, B) : x \in A\}.$$

$$h(A, B) = d(A, B) \vee d(B, A).$$

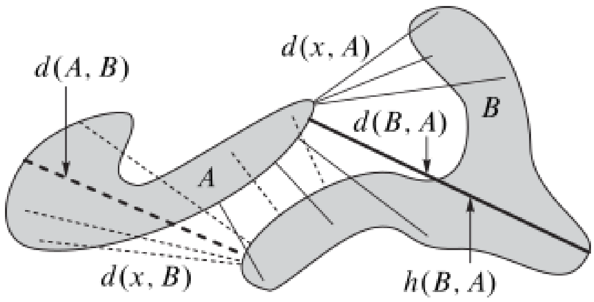

Figura I.1: Distancia de Housdorff

1.2. Trasformaciones de variable compleja

1.2.1. Transformación de Möbius

las transformaciones de Möbius $T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ no constantes, son definidas mediante funciones racionales de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}_\infty$, $ad - bc \neq 0$ donde se utilizan las convenciones funcionales habituales $T(\infty) = a/c$ además $T(-d/c) = \infty$ si $c \neq 0$ $T(\infty) = \infty$ si $c = 0$. Para cada $w \in \mathbb{C}_\infty$ la ecuación $T(z) = w$ tiene una única solución

$$z = T^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

luego T^{-1} sigue siendo una transformación del mismo tipo.

1.2.2. Transformaciones holomorfas y analíticas

Dado un dominio Ω y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función, decimos que f es holomorfa en $z_0 \in \Omega$ si el cociente

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

converge a un único límite cuando $h \to 0$ (donde $h \in \mathbb{C}, h \neq 0$ y $z + h \in \Omega$). Si el limite existe, entonces decimos que la derivada (compleja) de f en z_0 esta dada por

$$f'(z_0) = \lim_{h \to \infty} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

1.2.3. Transformaciones conformes

Una transformación conforme es una función $f : A \to \mathbb{C}$, diferenciable en $z_0 \in A \subset \mathbb{C}$, que preserva el ángulo que dos curvas α: $[a, b] \to A$ y β: $[a, b] \to A$, diferenciables en $\alpha^{-1}(z_0)$ y $\beta^{-1}(z_0)$, respectivamente, forman entre sí en z_0. Es decir f es conforme en z_0 cuando se verifica

$$\arg \left[\frac{(f \circ \alpha)'(z_0)}{(f \circ \beta)'(z_0)} \right] = \arg \left(\frac{\alpha'(z_0)}{\beta'(z_0)} \right),$$

siempre y cuando $\alpha'(z_0)$ y $\beta'(z_0)$ sean vectores tangentes no nulos.

1.2.4. Conjugación analítica

Sean f y g transformaciones complejas, de acuerdo a (Carleson and Gamelin, 2013): Decimos que una función $f : U \to U$ es conformalmente conjugado a una función $g : V \to V$ si existe una transformación conforme $\varphi : U \to V$ tal que $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$, es decir, tal que

$$\varphi(f(z)) = g(\varphi(z))$$

Las transformaciones f y g se pueden considerar como las mismas transformaciones visto en diferentes sistemas de coordenadas C2

CAPÍTULO II

Dinamica discreta compleja

2.1. Iteración de funciones complejas

Se define como la **composición reiterada** de f consigo misma k veces y la denotamos por f^k donde $f^{k+1} = f \circ f^k$. Ademas $f^1 = f$ y $f^0 = id$. La órbita de x bajo f como la **sucesión** $x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots, f^k(x), \ldots$

Dado un punto periódico z_0 con periodo k, se define el número λ, llamado el **valor propio** o **el multiplicador**

$$\lambda = \begin{cases} \left(f^k\right)'(z_0) = \prod_{i=0}^{k-1} f'(z_i) & \text{si } z_0 \neq \infty \\ \frac{1}{\left(f^k\right)'(z_0)} & \text{si } z_0 = \infty. \end{cases}$$

z_0 es un **punto fijo** de f si verifica la ecuación $f(z_0) = z_0$. Un punto fijo z de f, es periódica, de periodo 1.

- Puntos eventualemente periódicos
- Puntos eventualmente periódico-repelentes
- Cuencas superactractoras (inmediata)

2.2. Conjuntos de Fatou y Julia $\mathcal{K}$, $\mathcal{J}$ y $\mathcal{F}$

El **conjunto lleno de Julia** asociado a una función f: $\| = \mathcal{K}(f)$ esta formado por $z \in \mathbb{C}_\infty$, donde la secuencia definida $z_0 = z, z_{n+1} = f(z_n)$, (órbita positiva) de z, **no converge a infinito**; y el **conjunto de Julia** es la frontera del **conjunto lleno de Julia** es decir $\mathcal{J} = \partial\mathcal{K}$.

El **conjunto de Fatou**, asociado a f, lo cual se denota como $\mathcal{F} = \mathcal{F}(F)$ es aquel conjunto de todos los $z \in \mathbb{C}_\infty$, para los cuales la secuencia definida por inducción por $z_0 = z, z_{n+1} = f(z_n)$, **no converge a infinito**

2.3. Plano de parámetros generado por $Q_{p,c} = z^p + c$

Es un conjunto de puntos llamados **parámetros**, definida por una función compleja f, que contiene un parámetro c, es decir $f_c(z)$, donde viven los conjuntos acotados (Multibrots)

$$\mathcal{Q} := \left\{c \in \mathbb{C} : \{f_c^m(0)\}_{m=1}^{\infty} \text{ es acotada}\right\}$$

$$\mathcal{M}^p := \left\{c \in \mathbb{C} : \left\{Q_{c,p}^m(0)\right\}_{m=1}^{\infty} \text{ es acotada}\right\}$$

de manera que este conjunto, divide al plano de parámetros $(\mathcal{C}_\infty)$ en dos conjuntos complementarios $\mathcal{Q}$ y $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathcal{Q}$.

2.4. Plano dinámico generado por $Q_{p,c} = z^p + c$ ($\mathcal{C}_\infty$)

Este plano esta estructurado con los **conjuntos de Julia** cuyas propiedades dependen de la **ubicación del parámetro c** en relación a los conjuntos Multibrot, mencionado en la definición del plano de parámetros. C3

CAPÍTULO III

Relaciones topólogicas entre los conjuntos Multibrot y Julia

Bibliografía

Barnsley, M. (1988). *Fractal Everywhere*. Academic Press. Inc, 1250 Sixth Avenue, San Diego,CA 92101 Londres, 2 edition.

Carleson, L. and Gamelin, T. (2013). *Complex Dynamics*. Universitext. Springer New York.

Rudin, W. (1987). *Real and complex analysis*. Alhambra, University of Wisconsin, Madison, 3 edition.

V. Churchill, R., Ward Brown, J., and F. Verhey, R. (2019). Variable compleja y sus aplicaciones / ruel v. churchill, j.w. brown, r.f. verhey ; tr. de onofre rojo asenjo.