

Relaciones topológicas entre los conjuntos  
Multibrots y de Julia generados por el  
polinomio  $z^p + c$

*MALLQUI BAÑOS Ricardo Michel*

*2020-02-15*

## Índice general

<b>I. Preliminares</b>	<b>2</b>
1.1. Topología de los números complejos . . . . .	2
1.2. Trasformaciones de variable compleja . . . . .	3
<b>II. Dinamica discreta compleja</b>	<b>5</b>
2.1. Iteración de funciones complejas . . . . .	5
2.2. Conjuntos de Fatou y Julia $\mathcal{K}$ , $\mathcal{J}$ y $\mathcal{F}$ . . . . .	5
2.3. Plano de parámetros generado por $Q_{p,c} = z^p + c$ . . . . .	5
2.4. Plano dinámico generado por $Q_{p,c} = z^p + c$ ( $\mathcal{C}_\infty$ ) . . . . .	6
<b>III. Relaciones topológicas entre los conjuntos Multibrot y Julia</b>	<b>7</b>

## CAPÍTULO I

### Preliminares

#### 1.1. Topología de los números complejos

##### 1.1.1. Espacio métrico

(Barnsley, 1988)  $(X, d)$ , espacio métrico

- $d(a, b) \geq 0$ .
- $d(a, b) = 0 \iff a = b$ .
- $d(a, b) = d(b, a)$  (axioma de simetría).
- $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$  (desigualdad triangular)

Para todo  $a, b$  y  $c$  en  $X$ .

(V. Churchill et al., 2019) se tiene que  $\mathbb{C}$

$$d(z, w) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

##### 1.1.2. Conjuntos compactos

Sea  $A$  subconjunto de un espacio métrico  $X$ , decimos que  $A$  es compacto si para cada cubierta abierta  $\mathcal{C}$  de  $A$  existe una subcubierta finita  $\mathcal{C}'$ .

##### 1.1.3. Conjuntos conexos

Decimos que el espacio  $X$  es conexo si, para todos los conjuntos abiertos  $U$  y  $V$  en  $X$ , no vacíos, de modo que  $X \subset U \cup V$ , se tiene  $U \cap V \neq \emptyset$ . En otras palabras,  $X$  no puede ser cubierto por dos conjuntos abiertos disjuntos.

1. Conexidad por trayectorias
2. Conjuntos convexos
3. Componentes conexas

##### 1.1.4. Sucesiones

Una sucesión en un conjunto  $X$  es una función de los naturales en  $X$ . Designamos por  $x_n$  al  $n$ -ésimo término de la sucesión es decir, a la imagen de  $n$  a través de la función  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

Decimos que una sucesión  $\{x_n\}$  en un espacio métrico  $(X, d)$  es convergente en  $X$  si existe un punto  $p \in X$  con la propiedad de que  $\forall \epsilon \geq 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, d(p, x_n) < \epsilon$ .

##### 1.1.5. El plano extendido complejo

En esta sección se recopilará información acerca de la topología del plano complejo asociado al número  $\infty$  siendo esto posible con la ayuda de la esfera de Riemann. De acuerdo a (Rudin,

1987) el conjunto  $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  se llama *plano complejo ampliado*, ( $\infty \notin \mathbb{C}$ ). En  $\mathbb{C}$  adoptamos la aritmética usual con  $\infty$ .  $\mathbb{C}_\infty$  se le dota de una topología para la cual es un espacio compacto, es decir los entornos de los puntos de  $a \in \mathbb{C}$  son por definición los entornos en  $\mathbb{C}_\infty$  y para  $a = \infty$  una base de entornos en  $\mathbb{C}_\infty$  viene dada por  $V_r = \{z \in \mathbb{C}; |z| > r\} \cup \{\infty\}$ , tomando todos los  $r > 0$ .  $\mathbb{C}$  se puede identificar con

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

### 1.1.6. Topología de Hausdorff

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo. Entonces  $\mathfrak{H}(X)$  denota el espacio cuyos puntos son los subconjuntos compactos no vacíos de  $X$ . Sea  $x \in X$ ,  $A$  y  $B \in \mathfrak{H}(X)$ .

$$d(x, B) = \min \{d(x, y) : y \in B\}.$$

$$d(A, B) = \max \{d(x, B) : x \in A\}.$$

$$h(A, B) = d(A, B) \vee d(B, A).$$

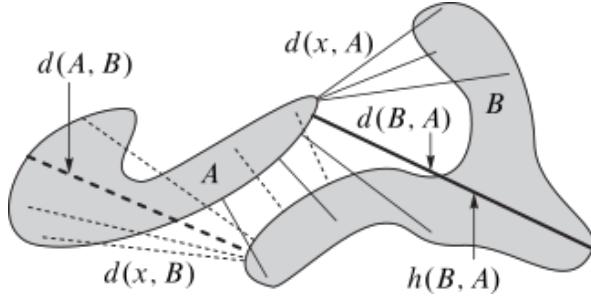


Figura I.1: Distancia de Housdorff

## 1.2. Trasformaciones de variable compleja

### 1.2.1. Transformación de Möbius

las transformaciones de Möbius  $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  no constantes, son definidas mediante funciones racionales de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

donde  $a, b, c, d \in \mathbb{C}_\infty$ ,  $ad - bc \neq 0$  donde se utilizan las convenciones funcionales habituales  $T(\infty) = a/c$  además  $T(-d/c) = \infty$  si  $c \neq 0$   $T(\infty) = \infty$  si  $c = 0$ . Para cada  $w \in \mathbb{C}_\infty$  la ecuación  $T(z) = w$  tiene una única solución

$$z = T^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

luego  $T^{-1}$  sigue siendo una transformación del mismo tipo.

### 1.2.2. Transformaciones holomorfas y analíticas

Dado un dominio  $\Omega$  y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función, decimos que  $f$  es holomorfa en  $z_0 \in \Omega$  si el cociente

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

converge a un único límite cuando  $h \rightarrow 0$  (donde  $h \in \mathbb{C}, h \neq 0$  y  $z + h \in \Omega$ ). Si el límite existe, entonces decimos que la derivada (compleja) de  $f$  en  $z_0$  esta dada por

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

### 1.2.3. Transformaciones conformes

Una transformación conforme es una función  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ , diferenciable en  $z_0 \in A \subset \mathbb{C}$ , que preserva el ángulo que dos curvas  $\alpha : [a, b] \rightarrow A$  y  $\beta : [a, b] \rightarrow A$ , diferenciables en  $\alpha^{-1}(z_0)$  y  $\beta^{-1}(z_0)$ , respectivamente, forman entre sí en  $z_0$ . Es decir  $f$  es conforme en  $z_0$  cuando se verifica

$$\arg \left[ \frac{(f \circ \alpha)'(z_0)}{(f \circ \beta)'(z_0)} \right] = \arg \left( \frac{\alpha'(z_0)}{\beta'(z_0)} \right),$$

siempre y cuando  $\alpha'(z_0)$  y  $\beta'(z_0)$  sean vectores tangentes no nulos.

### 1.2.4. Conjugación analítica

Sean  $f$  y  $g$  transformaciones complejas, de acuerdo a (Carleson and Gamelin, 2013): Decimos que una función  $f : U \rightarrow U$  es conformalmente conjugado a una función  $g : V \rightarrow V$  si existe una transformación conforme  $\varphi : U \rightarrow V$  tal que  $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ , es decir, tal que

$$\varphi(f(z)) = g(\varphi(z))$$

Las transformaciones  $f$  y  $g$  se pueden considerar como las mismas transformaciones visto en diferentes sistemas de coordenadas C2

## CAPÍTULO II

### Dinamica discreta compleja

#### 2.1. Iteración de funciones complejas

Se define como la **composición reiterada** de  $f$  consigo misma  $k$  veces y la denotamos por  $f^k$  donde  $f^{k+1} = f \circ f^k$ . Ademas  $f^1 = f$  y  $f^0 = id$ . La órbita de  $x$  bajo  $f$  como la **sucesión**  $x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots, f^k(x), \dots$

Dado un punto periódico  $z_0$  con periodo  $k$ , se define el número  $\lambda$ , llamado el **valor propio o el multiplicador**

$$\lambda = \begin{cases} \left(f^k\right)'(z_0) = \prod_{i=0}^{k-1} f'(z_i) & \text{si } z_0 \neq \infty \\ \frac{1}{\left(f^k\right)'(z_0)} & \text{si } z_0 = \infty. \end{cases}$$

$z_0$  es un **punto fijo** de  $f$  si verifica la ecuación  $f(z_0) = z_0$ . Un punto fijo  $z$  de  $f$ , es periódica, de periodo 1.

- Puntos eventualmente periódicos
- Puntos eventualmente periódico-repelentes
- Cuencas superatractoras (inmediata)

#### 2.2. Conjuntos de Fatou y Julia $\mathcal{K}, \mathcal{J}$ y $\mathcal{F}$

El **conjunto lleno de Julia** asociado a una función  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  esta formado por  $z \in \mathbb{C}_\infty$ , donde la secuencia definida  $z_0 = z, z_{n+1} = f(z_n)$ , ( $\text{órbita positiva}$ ) de  $z$ , **no converge a infinito**; y el **conjunto de Julia** es la frontera del **conjunto lleno de Julia** es decir  $\mathcal{J} = \partial \mathcal{K}$ .

El **conjunto de Fatou**, asociado a  $f$ , lo cual se denota como  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(f)$  es aquel conjunto de todos los  $z \in \mathbb{C}_\infty$ , para los cuales la secuencia definida por inducción por  $z_0 = z, z_{n+1} = f(z_n)$ , **no converge a infinito**

#### 2.3. Plano de parámetros generado por $Q_{p,c} = z^p + c$

Es un conjunto de puntos llamados **parámetros**, definida por una función compleja  $f$ , que contiene un parámetro  $c$ , es decir  $f_c(z)$ , donde viven los conjuntos acotados (Multibrots)

$$\mathcal{Q} := \{c \in \mathbb{C} : \{f_c^m(0)\}_{m=1}^\infty \text{ es acotada}\}$$

$$\mathcal{M}^p := \left\{c \in \mathbb{C} : \left\{Q_{c,p}^m(0)\right\}_{m=1}^\infty \text{ es acotada}\right\}$$

de manera que este conjunto, divide al plano de parámetros ( $\mathbb{C}_\infty$ ) en dos conjuntos complementarios  $\mathcal{Q}$  y  $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathcal{Q}$ .

## 2.4. Plano dinámico generado por $Q_{p,c} = z^p + c$ ( $\mathcal{C}_\infty$ )

Este plano esta estructurado con los **conjuntos de Julia** cuyas propiedades dependen de la **ubicación del parámetro  $c$**  en relación a los conjuntos Multibrot, mencionado en la definición del plano de parámetros. C3

## **CAPÍTULO III**

### **Relaciones topológicas entre los conjuntos Multibrot y Julia**

## Bibliografía

- Barnsley, M. (1988). *Fractal Everywhere*. Academic Press. Inc, 1250 Sixth Avenue, San Diego, CA 92101 Londres, 2 edition.
- Carleson, L. and Gamelin, T. (2013). *Complex Dynamics*. Universitext. Springer New York.
- Rudin, W. (1987). *Real and complex analysis*. Alhambra, University of Wisconsin, Madison, 3 edition.
- V. Churchill, R., Ward Brown, J., and F. Verhey, R. (2019). Variable compleja y sus aplicaciones / ruel v. churchill, j.w. brown, r.f. verhey ; tr. de onofre rojo asenjo.