Relaciones topológicas entre los conjuntos Multibrots y de Julia generados por el polinomio $z^p + c$

MALLQUI BAÑOS Ricardo Michel

2019-08-30

Chapter 1

Preliminares

@ref(we) @ref(ww) @ref(www)

Topología de los números complejos

Espacio métrico

De acuerdo a (Barnsley 1988) un espacio métrico es un par (X, d), donde X es un conjunto no vacío de elementos a los que llamaremos puntos y d es una función de $X \times X$ en R que cumple los siguientes axiomas:

- $d(a, b) \geq 0$.
- $d(a, b) = 0 \iff a = b$.
- $d(a, b) = d(b, a)$ (axioma de simetría).
- $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$ (desigualdad triangular)Para todo a, b y c en X.

La función d se llama distancia o métrica en X.

Un ejemplo clásico de espacio métrico es el conjunto de los números complejos y la distancia usual dada por el módulo de un número complejo. De acuerdo a (V. Churchill, Ward Brown, and F. Verhey 2019) se tiene que

$$d(z, w) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

donde los números complejos son $z = x_1 + iy_1$ y $w = x_2 + iy_2$. La teoría de los espacios métricos surge con el objetivo de generalizar los espacios euclidianos, permitiendo extender ideas a otros tipos de conjuntos. El siguiente ejemplo muestra como verificar los axiomas sobre un supuesto espacio métrico.

Conjuntos compactos

Sea A subconjunto de un espacio métrico X, decimos que A es compacto si para cada cubierta abierta $\mathcal{C}$ de A existe una subcubierta finita $\mathcal{C}'$.

Conjuntos conexos

Decimos que el espacio X es conexo si, para todos los conjuntos abiertos U y V en X, no vacíos, de modo que $X \subset U \cup V$, se tiene $U \cap V \neq \emptyset$. En otras palabras, X no puede ser cubierto por dos conjuntos abiertos disjuntos.

Conexidad por trayectorias

Conjuntos convexos

Componentes conexas

Sucesiones

Una sucesión en un conjunto X es una función de los naturales en X. Designamos por x_n al $n-$ésimo término de la sucesión es decir, a la imagen de n a través de la función $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. El campo de variabilidad de la sucesión $\{x_n\}$ es

$$\{y \in X : \exists n \in \mathbb{N} : x_n = y\},$$

es decir, el conjunto de valores que toma la sucesión. Una sucesión se dice acotada si su campo de variabilidad es un conjunto acotado.

Decimos que una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio métrico (X, d) es convergente en X si existe un punto $p \in X$ con la propiedad de que $\forall \epsilon \geq 0$, $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N$, $d(p, x_n) < \epsilon$. En ese caso, decimos que la sucesión converge hacia p, o que p

es el limite de $\{x_n\}$, y escribimos $\lim_{n\to\infty} x_n = p$. Observemos que decir que $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ es equivalente a decir que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, p) = 0$.

El plano extendido complejo

En esta sección se recopilará información acerca de la topología del plano complejo asociado al número ∞ siendo esto posible con la ayuda de la esfera de Riemann. De acuerdo a (Rudin 1987) el conjunto $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se llama *plano complejo ampliado*, $(\infty \notin \mathbb{C})$. En $\mathbb{C}$ adoptamos la aritmética usual con ∞. $\mathbb{C}_\infty$ se le dota de una topología para la cual es un espacio compacto, es decir los entornos de los puntos de $a \in \mathbb{C}$ son por definición los entornos en $\mathbb{C}_\infty$ y para $a = \infty$ una base de entornos en $\mathbb{C}_\infty$ viene dada por $V_r = \{z \in \mathbb{C}; |z| > r\} \cup \{\infty\}$, tomando todos los $r > 0$. $\mathbb{C}$ se puede identificar con

$$S = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\Big\}.$$

Topología de Hausdorff

Sea (X, d) un espacio métrico completo. Entonces $\mathfrak{H}(X)$ denota el espacio cuyos puntos son los subconjuntos compactos no vacíos de X.

Sea (X, d) un espacio métrico completo, $x \in X$, A y $B \in \mathfrak{H}(X)$. Se define

$$d(x, B) = \min\{d(x, y) : y \in B\}.$$

$d(x, B)$ es la distancia desde el punto x al conjunto B.

además

$$d(A, B) = \max\{d(x, B) : x \in A\}.$$

La distancia de Hausdorff entre los puntos A y $B \in \mathfrak{H}(X)$ se define por

$$h(A, B) = d(A, B) \vee d(B, A).$$

Refiérase a la Figura @ref(fig:ww)

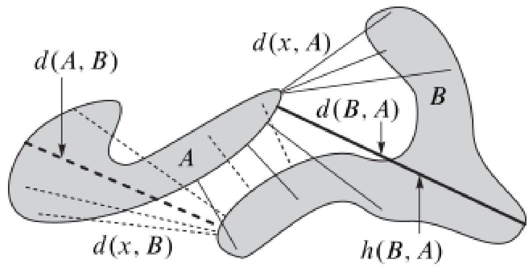

Figure 1.1: Distancia de Housdorff

Trasformaciones de variable compleja

Transformación de Möbius

las transformaciones de Möbius $T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ no constantes, son definidas mediante funciones racionales de la forma

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}_\infty$, $ad-bc \neq 0$ donde se utilizan las convenciones funcionales habituales $T(\infty) = a/c$ además $T(-d/c) = \infty$ si $c \neq 0$ $T(\infty) = \infty$ si $c = 0$. Para cada $w \in \mathbb{C}_\infty$ la ecuación $T(z) = w$ tiene una única solución

$$z = T^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}$$

luego T^{-1} sigue siendo una transformación del mismo tipo.

Transformaciones holomorfas y analíticas

Dado un dominio Ω y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función, decimos que f es holomorfa en $z_0 \in \Omega$ si el cociente

$$\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$

converge a un único límite cuando $h \to 0$ (donde $h \in \mathbb{C}, h \neq 0$ y $z + h \in \Omega$). Si el limite existe, entonces decimos que la derivada (compleja) de f en z_0 esta dada por

$$f'(z_0) = \lim_{h\to\infty} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}.$$

Transformaciones conformes

Una transformación conforme es una función $f : A \to \mathbb{C}$, diferenciable en $z_0 \in A \subset \mathbb{C}$, que preserva el ángulo que dos curvas $\alpha\colon [a,b] \to A$ y $\beta\colon [a,b] \to A$, diferenciables en $\alpha^{-1}\left(z_0\right)$ y $\beta^{-1}\left(z_0\right)$, respectivamente, forman entre sí en z_0. Es decir f es conforme en z_0 cuando se verifica

$$\arg\left[\frac{\left(f\circ\alpha\right)'\left(z_0\right)}{\left(f\circ\beta\right)'\left(z_0\right)}\right] = \arg\left(\frac{\alpha'(z_0)}{\beta'(z_0)}\right),$$

siempre y cuando $\alpha'(z_0)$ y $\beta'(z_0)$ sean vectores tangentes no nulos.

Conjugación analítica

Sean f y g transformaciones complejas, de acuerdo a (Carleson and Gamelin 2013): Decimos que una función $f : U \to U$ es conformalmente conjugado a una función $g : V \to V$ si existe una transformación conforme $\varphi : U \to V$ tal que $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$, es decir, tal que

$$\varphi(f(z)) = g(\varphi(z))$$

Las transformaciones f y g se pueden considerar como las mismas transformaciones visto en diferentes sistemas de coordenadas

@ref(we) @ref(ww) @ref(www)

Chapter 2

Dinamica discreta compleja

@ref(we) @ref(ww) @ref(www)

Iteración de funciones complejas

Sea $f : X \to X$ una función continua en un espacio métrico X. Para $k \in \mathbb{N}$, la $k-$ésima iteración de f se define como la composición reiterada de f consigo misma k veces y la denotamos por f^k Por ejemplo, $f^2 = f \circ f, f^3 = f \circ f \circ f$ y en general

$$f^{k+1} = f \circ f^k.$$

Se entiende que $f^1 = f$ y definimos $f^0 = id$. Para $x \in X$ definimos la órbita de x bajo f como la sucesión

$$x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots, f^k(x), \ldots$$

algunas veces llamadas ecuaciones de recurrencia, puesto que su valor al tiempo $n+1$ está en función de su valor en el tiempo n. El objetivo es determinar el comportamiento de la órbita de cualquier punto bajo la correspondiente función. En este capítulo exploraremos sistemáticamente la teoría elemental de sistemas dinámicos discretos complejos, es decir, donde f es un función compleja.

Dado un punto periódico z_0 con periodo k, se define el número λ, llamado el *valor propio*, el *multiplicador* o el *eigenvalor* de la órbita periódica z_0

$$\lambda = \begin{cases} \left(f^k\right)'(z_0) & \text{si } z_0 \neq \infty \\ \frac{1}{\left(f^k\right)'(z_0)} & \text{si } z_0 = \infty \end{cases}$$

donde por regla de la cadena

$$\begin{aligned} \left(f^k\right)'(z_0) &= f'(z_0)f'(z_1)\dots f'(z_{k-1}) \\ &= \prod_{i=0}^{k-1} f'(z_i) = \prod_{i=0}^{k-1} f'(f^i(z_0)) \end{aligned}$$

y $z_i \in \{z_0, z_1, \ \dots, \ z_{k-1}\}$. Esto es, λ es el producto de las derivadas de f a lo largo de la órbita, por lo tanto, no depende del punto elegido en la órbita, sino de toda la órbita.

z_0 es un punto fijo de f si verifica la ecuación

$$f(z_0) = z_0. \tag{2.1}$$

Un punto fijo z de f, es periódica, de periodo 1, en efecto se tiene de (2.1) que $f^n(z_0) = z_0$, $n \in \mathbb{N}$. z_0 es un punto critico de f si verifica la ecuación $f'(z_0) = 0$.

Puntos fijos atractores y repulsores

Conjuntos de Fatou y Julia $\mathcal{K}$, $\mathcal{J}$ y $\mathcal{F}$

El conjunto lleno de Julia asociado a una función f, lo cual se denota como $\mathcal{K} = \mathcal{K}(f)$ es aquel conjunto de todos los $z \in \mathbb{C}_\infty$, para los cuales la secuencia definida por inducción por $z_0 = z, z_{n+1} = f(z_n)$, a la que llamaremos órbita positiva de z, no converge a infinito; y el conjunto de Julia es la frontera del conjunto lleno de Julia es decir $\mathcal{J} = \partial\mathcal{K}$.

El conjunto de Fatou, asociado a una función f, lo cual se denota como $\mathcal{F} = \mathcal{F}(f)$ es aquel conjunto de todos los $z \in \mathbb{C}_\infty$, para los cuales la secuencia definida por inducción por $z_0 = z, z_{n+1} = f(z_n)$, forma una familia normal, es decir f^n es normal, de esto

Plano de parámetros generado por $Q_{p,c} = z^p + c$

Es un conjunto de puntos llamados *parámetros*, definida por una función compleja f, que contiene un parámetro c, es decir $f_c(z)$, es decir

$$\mathcal{Q} := \{c \in \mathbb{C} : \{f_c^m(0)\}_{m=1}^{\infty} \text{ es acotada}\}$$

de manera que este conjunto, divide al *plano de parámetros* en dos conjuntos complementarios $\mathcal{Q}$ y $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathcal{Q}$.

Plano dinámico generado por $Q_{p,c} = z^p + c$

Este plano esta estructurado con los conjuntos de Julia cuyas propiedades dependen de la ubicación del parámetro c en relación a los conjuntos acotados en ellos, mencionado en la definición del plano de parámetros.

Chapter 3

Relaciones topólogicas entre los conjuntos Multibrot y Julia

@ref(we) @ref(ww) @ref(www)

Hipótesis 1

El parámetro c pertenece al conjunto Multibrots, si, y solo si el conjunto de Julia asociado a este parámetro, es simplemente conexa, además el complemento del conjunto lleno de Julia es conexa

Barnsley, Michael. 1988. *Fractal Everywhere*. 2nd ed. 1250 Sixth Avenue, San Diego,CA 92101 Londres: Academic Press. Inc.

Carleson, L., and T.W. Gamelin. 2013. *Complex Dynamics*. Universitext. Springer New York. https://books.google.com.pe/books?id=2CMRBwAAQBAJ.

Rudin, W. 1987. *Real and Complex Analysis*. 3rd ed. University of Wisconsin, Madison: Alhambra.

V. Churchill, Ruel, James Ward Brown, and Roger F. Verhey. 2019. "Variable Compleja Y Sus Aplicaciones / Ruel V. Churchill, J.w. Brown, R.f. Verhey ; Tr. De Onofre Rojo Asenjo." January.