

Relaciones topológicas entre los
conjuntos Multibrots y de Julia
generados por el polinomio $z^p + c$

MALLQUI BAÑOS Ricardo Michel

2019-09-10

Chapter 1

Preliminares

Topología de los números complejos

Espacio métrico

(Barnsley 1988) (X, d) , espacio métrico

- $d(a, b) \geq 0$.
- $d(a, b) = 0 \iff a = b$.
- $d(a, b) = d(b, a)$ (axioma de simetría).
- $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$ (desigualdad triangular)

Para todo a, b y c en X .

(V. Churchill, Ward Brown, and F. Verhey 2019) se tiene que \mathbb{C}

$$d(z, w) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

Conjuntos compactos

Sea A subconjunto de un espacio métrico X , decimos que A es compacto si para cada cubierta abierta \mathcal{C} de A existe una subcubierta finita \mathcal{C}' .

Conjuntos conexos

Decimos que el espacio X es conexo si, para todos los conjuntos abiertos U y V en X , no vacíos, de modo que $X \subset U \cup V$, se tiene $U \cap V \neq \emptyset$. En otras palabras, X no puede ser cubierto por dos conjuntos abiertos disjuntos.

1. Conexidad por trayectorias
2. Conjuntos convexos
3. Componentes conexas

Sucesiones

Una sucesión en un conjunto X es una función de los naturales en X . Designamos por x_n al n – ésimo término de la sucesión es decir, a la imagen de n a través de la función $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Decimos que una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio métrico (X, d) es convergente en X si existe un punto $p \in X$ con la propiedad de que $\forall \epsilon \geq 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, d(p, x_n) < \epsilon$.

El plano extendido complejo

En esta sección se recopilará información acerca de la topología del plano complejo asociado al número ∞ siendo esto posible con la ayuda de la esfera de Riemann. De acuerdo a (Rudin 1987) el conjunto $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se llama *plano complejo ampliado*, ($\infty \notin \mathbb{C}$). En \mathbb{C} adoptamos la aritmética usual con ∞ . \mathbb{C}_∞ se le dota de una topología para la cual es un espacio compacto, es decir los entornos de los puntos de $a \in \mathbb{C}$ son por definición los entornos en \mathbb{C}_∞ y para $a = \infty$ una base de entornos en \mathbb{C}_∞ viene dada por $V_r = \{z \in \mathbb{C}; |z| > r\} \cup \{\infty\}$, tomando todos los $r > 0$. \mathbb{C} se puede identificar con

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

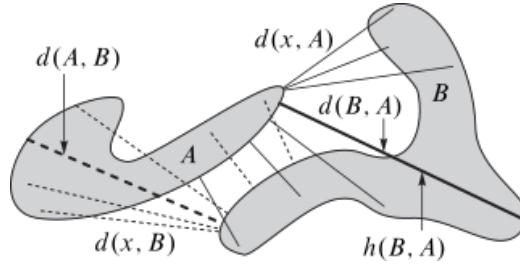


Figure 1.1: Distancia de Housdorff

Topología de Hausdorff

Sea (X, d) un espacio métrico completo. Entonces $\mathfrak{H}(X)$ denota el espacio cuyos puntos son los subconjuntos compactos no vacíos de X . Sea $x \in X$, A y $B \in \mathfrak{H}(X)$.

$$d(x, B) = \min \{d(x, y) : y \in B\}.$$

$$d(A, B) = \max \{d(x, B) : x \in A\}.$$

$$h(A, B) = d(A, B) \vee d(B, A).$$

Trasformaciones de variable compleja

Transformación de Möbius

las transformaciones de Möbius $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ no constantes, son definidas mediante funciones racionales de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}_\infty$, $ad - bc \neq 0$ donde se utilizan las convenciones funcionales habituales $T(\infty) = a/c$ además $T(-d/c) = \infty$ si $c \neq 0$ $T(\infty) = \infty$ si $c = 0$. Para cada $w \in \mathbb{C}_\infty$ la ecuación $T(z) = w$ tiene una única solución

$$z = T^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

luego T^{-1} sigue siendo una transformación del mismo tipo.

Transformaciones holomorfas y analíticas

Dado un dominio Ω y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función, decimos que f es holomorfa en $z_0 \in \Omega$ si el cociente

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

converge a un único límite cuando $h \rightarrow 0$ (donde $h \in \mathbb{C}, h \neq 0$ y $z + h \in \Omega$). Si el límite existe, entonces decimos que la derivada (compleja) de f en z_0 esta dada por

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Transformaciones conformes

Una transformación conforme es una función $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, diferenciable en $z_0 \in A \subset \mathbb{C}$, que preserva el ángulo que dos curvas $\alpha : [a, b] \rightarrow A$ y $\beta : [a, b] \rightarrow A$, diferenciables en $\alpha^{-1}(z_0)$ y $\beta^{-1}(z_0)$, respectivamente, forman entre sí en z_0 . Es decir f es conforme en z_0 cuando se verifica

$$\arg \left[\frac{(f \circ \alpha)'(z_0)}{(f \circ \beta)'(z_0)} \right] = \arg \left(\frac{\alpha'(z_0)}{\beta'(z_0)} \right),$$

siempre y cuando $\alpha'(z_0)$ y $\beta'(z_0)$ sean vectores tangentes no nulos.

Conjugación analítica

Sean f y g transformaciones complejas, de acuerdo a (Carleson and Gamelin 2013): Decimos que una función $f : U \rightarrow U$ es conformalmente conjugado a una función $g : V \rightarrow V$ si existe una transformación conforme $\varphi : U \rightarrow V$ tal que $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$, es decir, tal que

$$\varphi(f(z)) = g(\varphi(z))$$

Las transformaciones f y g se pueden considerar como las mismas transformaciones visto en diferentes sistemas de coordenadas \mathbb{C}^2

Chapter 2

Dinamica discreta compleja

Iteración de funciones complejas

Se define como la composición reiterada de f consigo misma k veces y la denotamos por f^k donde $f^{k+1} = f \circ f^k$. Además $f^1 = f$ y $f^0 = id$. La órbita de x bajo f como la sucesión $x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots, f^k(x), \dots$

Dado un punto periódico z_0 con periodo k , se define el número λ , llamado el valor propio o el multiplicador

$$\lambda = \begin{cases} (f^k)'(z_0) = \prod_{i=0}^{k-1} f'(z_i) & \text{si } z_0 \neq \infty \\ \frac{1}{(f^k)'(z_0)} & \text{si } z_0 = \infty. \end{cases}$$

z_0 es un punto fijo de f si verifica la ecuación $f(z_0) = z_0$. Un punto fijo z de f , es periódica, de periodo 1.

Conjuntos de Fatou y Julia \mathcal{K} , \mathcal{J} y \mathcal{F}

El conjunto lleno de Julia asociado a una función f , lo cual se denota como $\mathcal{K} = \mathcal{K}(f)$ es aquel conjunto de todos los $z \in \mathbb{C}_\infty$, para los cuales la secuencia definida por inducción por $z_0 = z, z_{n+1} = f(z_n)$, a la que llamaremos órbita

positiva de z , no converge a infinito; y el conjunto de Julia es la frontera del conjunto lleno de Julia es decir $\mathcal{J} = \partial\mathcal{K}$.

El conjunto de Fatou, asociado a una función f , lo cual se denota como $\mathcal{F} = \mathcal{F}(f)$ es aquel conjunto de todos los $z \in \mathbb{C}_\infty$, para los cuales la secuencia definida por inducción por $z_0 = z, z_{n+1} = f(z_n)$, forma una familia normal, es decir f^n es normal, de esto

Plano de parámetros generado por $Q_{p,c} = z^p + c$

Es un conjunto de puntos llamados *parámetros*, definida por una función compleja f , que contiene un parámetro c , es decir $f_c(z)$, es decir

$$\mathcal{Q} := \{c \in \mathbb{C} : \{f_c^m(0)\}_{m=1}^\infty \text{ es acotada}\}$$

de manera que este conjunto, divide al *plano de parámetros* en dos conjuntos complementarios \mathcal{Q} y $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathcal{Q}$.

Plano dinámico generado por $Q_{p,c} = z^p + c$

Este plano esta estructurado con los conjuntos de Julia cuyas propiedades dependen de la ubicación del parámetro c en relación a los conjuntos acotados en ellos, mencionado en la definición del plano de parámetros. C3

Chapter 3

Relaciones topológicas entre los conjuntos Multibrot y Julia

<e!—

Hipótesis 1

El parámetro c pertenece al conjunto Multibrots, si, y solo si el conjunto de Julia asociado a este parámetro, es simplemente conexa, además el complemento del conjunto lleno de Julia es conexa:

$$c \in \mathcal{M}^p \iff \mathcal{J}_c^p \text{ es conexa}$$

Hipótesis 2

Los conjuntos Multibrots y de Julia son similares, en un entorno de un punto de Misiurewicz: $\forall r > 0$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\rho_k^{-1} \left(\mathcal{J}_{c_0}^p - c_0 \right) \right]_r \rightarrow [\mathcal{J}'] \leftarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \left[q \rho_k^{-1} \left(\mathcal{M}^p - c_0 \right) \right]_r$$

con la topología de Hausdorff.

Hipótesis 3

Si un parámetro c pertenece a una componente hiperbólica del conjunto Multibrots de periodo 1, entonces el conjunto de Julia es una curva de Jordan:

$$c \in \mathcal{H}_1^p \iff \mathcal{J}_c^p \text{ es una curva de Jordan}$$

Hipótesis 4

Si un parámetro c es un punto periódico superatractivo, de periodo k , entonces existen puntos eventualmente periódicos en el conjunto lleno de Julia con periodo k y $N > 1$, que son las imágenes inversas de los elementos de la órbita: $c \in \mathcal{M}^p$ tal que $(f^k)'(c) = 0$ entonces $\exists z \in \mathcal{K}$ tal que $f^{n+k}(z) = f^n(z)$, $\forall n > N$

Hipótesis 5

Si un parámetro c pertenece al conjunto Multibrots, entonces el conjunto de Julia es un subconjunto propio del conjunto lleno de Julia y si este no pertenece al conjunto de Multibrots, el conjunto de Julia es igual al conjunto lleno de Julia:

$$\begin{aligned} c \in \mathcal{M}^p &\implies \mathcal{J}_c^p \subset \mathcal{K}_c^p \\ c \notin \mathcal{M}^p &\implies \mathcal{J}_c^p = \mathcal{K}_c^p \end{aligned}$$

—>

Barnsley, Michael. 1988. *Fractal Everywhere*. 2nd ed. 1250 Sixth Avenue, San Diego, CA 92101 Londres: Academic Press. Inc.

Carleson, L., and T.W. Gamelin. 2013. *Complex Dynamics*. Universitext. Springer New York. <https://books.google.com.pe/books?id=2CMRBwAAQBAJ>.

Rudin, W. 1987. *Real and Complex Analysis*. 3rd ed. University of Wisconsin, Madison: Alhambra.

V. Churchill, Ruel, James Ward Brown, and Roger F. Verhey. 2019. “Variable Compleja Y Sus Aplicaciones / Ruel V. Churchill, J.w. Brown, R.f. Verhey ; Tr. De Onofre Rojo Asenjo.” January.