Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

Escuela de Ingeniería y Ciencias

Ingeniería en Ciencia de Datos y Matemáticas

Estimación del Valor Futuro de una Opción Financiera Usando Modelos de Simulación

Optimización Estocástica

Morales Ramón Michelle Yareni A01552627

Laureles Olmedo Leonardo A01659241

Banderas Álvarez Óscar Antonio A01568492

Mateos Pérez Carlos A01654085

Camacho Castillo Ricardo A01654132

en conjunto con: Banxico

supervisado por:
Dr. Fernando Elizalde Ramírez
Dr. Jaime Eduardo Martínez Sánchez

Monterrey, Nuevo León. Fecha, 4 de diciembre de 2022

Keywords— Modelo Black Scholes, Método de Monte Carlo, Cadenas de Markov, finanzas, Análisis Contigente de Merton, Teorema del Limite Central, Suma Estocástica, Procesos Estocásticos

1. Contexto

El análisis del valor futuro de una opción financiera depende de factores que no se pueden controlar, es decir, factores que pueden variar aleatoriamente en el tiempo, por lo que no es posible predecir el valor exacto de dicho activo financiero, sin embargo, es posible obtener estimaciones mediante modelos probabilísticos.

El precio de un activo financiero depende solamente del valor presente, por lo que la evolución de un activo en el tiempo se puede modelar mediante cadenas de Markov de tipo continuo. Existen técnicas de estadística inferencial para realizar dichas estimaciones, tales como, intervalos de confianza, método de Monte Carlo entre otros.

En el caso del reto propuesto, se partirá del valor de un activo y considerando el histórico de las tasas de interés, usando métodos probabilísticos se estimará su valor después de un tiempo t. Un elemento clave para poder estimar el precio del instrumento de inversión a tiempo futuro es estimar de forma estadística la media y la varianza de los datos históricos.

Durante el transcurso de este proyecto se trabajará en el desarrollo de una simulación de la evolución del precio del activo a través del tiempo con el objetivo de determinar el precio de un activo financiero en un tiempo de maduración predefinido.

Para ello se estudiarán varios procesos estocásticos (Markoviano, de Poisson, exponencial, etc.) y se elaboraran diversas simulaciones bajo diferentes condiciones.

2. Etapa 1

2.1. Modelo Black-Scholes

En 1973 Fisher Black, Myron Scholes y Robert Merton lograron uno de los más grandes adelantos en la valuación de opciones hasta aquel instante, conocido como el modelo de Black-Scholes, que ha tenido una gigantesca predominación en la forma en que los agentes valúan y cubren opciones. Fue además un punto de alusión para el desarrollo y triunfo de la ingeniería financiera a partir de entonces. La importancia del modelo fue reconocida cuando Robert Merton y Myron Acholes fueron premiados con el Premio Nobel de Economía; desgraciadamente Fisher Black murió en 1995, quien indudablemente además hubiera recibido el premio. [1]

Los autores introdujeron su modelo para el precio de un activo,junto con una ecuación diferencial parcial para el valor de una opción Europea. Para hacerlo se asumen las siguientes ”condiciones ideales” en el mercado:[12]

- La tasa de interés a corto plazo, también llamada libre de riesgo, es conocida y constante hasta la maduración de la opción.
- Los rendimientos logarítmicos de la acción siguen un movimiento browniano con deriva.
- La opción es europea, es decir, sólo puede ejercerse al vencimiento.
- No hay costes de transacción, ni penalizaciones por venta al descubierto.
- Es posible comprar o tomar prestada cualquier fracción del valor.
- La negociación en los mercados es continua
- No hay costes de transacción o impuestos
- La volatilidad se mantiene constante

Para simplificar las cosas, se asume que el mercado es líquido y sin fricciones, que la negociación se puede hacer en tiempo constante y que la tasa libre de riesgo es constante a lo largo de la vida de la opción. [12]

La ecuación que describe lo anterior se puede interpretar como...

$$V = [SN(\phi(d_1) - Ke^{-rT}N(\phi(d_2)] \tag{1}$$

donde d1 y d2 se definen como:

$$d_1 = \frac{ln\frac{S}{X} + [r + \frac{\sigma^2}{2}] * T}{\sigma * \sqrt{T}} d_2 = \frac{ln\frac{S}{X} + [r + \frac{\sigma^2}{2}] * T}{\sigma * \sqrt{T}} = d_1 - \sigma * \sqrt{T} \tag{2}$$

cuando ϕ tiene un valor de 1, se define la ecuación como:

$$C = e^{-rT}[Se^{bT}N(d_1) - KN(d_2)] \tag{3}$$

y cuando ϕ tiene un valor de -1, se redefine la ecuación como:

$$P = e^{-rT}[KN(-d_2) - Se^{bT}N(-d_1)] \tag{4}$$

donde las variables se definen como:

- C= Precio de compra de la opción hoy
- T= Periodo hasta vencimiento en AÑOS

- r= Tasa de interés sin riesgo
- σ= volatilidad en tanto por uno
- X= Precio de ejercicio de la opción de compra
- S= Precio de la acción
- N= Valor de la función de probabilidad acumulada de una distribución normal con media cero y desviación típica uno
- K= El precio al que se puede ejercer una opción de venta o de compra
- b= El costo de llevar
- P= Valor de una opción de venta
- ϕ= Un indicador de compra o venta, 1=compra, -1 venta
- q=el rendimiento dividido continuo o rendimiento conveniente
- V= valor de una opción de compra o venta

3. Ejemplos aplicados

3.1. Primer caso

Valor de una opción de compra europea

La valuación de una opción de compra europea fue la aplicación original para la cuál fue desarrollado el modelo Black-Scholes, con variables que incluyen el precio de la acción, precio de ejercicio, tiempo de vencimiento, varianza del precio de la acción y la tasa libre de riesgo. Bellalah y Jacquillat (1995) [9] comprobaron que no existe diferencia significativa entre el precio de la opción calculado con el modelo y el valor de mercado de la misma; así determinan la validez del modelo. Leslie y Michaels (1997) [7] analizan la aplicación del modelo de opciones a la evaluación de inversiones de largo plazo en la empresa, concluyendo que conduce a la administración hacia la maximización de oportunidades mientras minimiza los riesgos, asegurándose que la empresa vea cada situación como una inversión inicial contra una posibilidad futura.

Un ejemplo de la aplicación sería tomando los precios de una cierta acción durante un periodo de tiempo específico con datos recopilados de la Bolsa Mexicana de Valores, la recopilación permitirá establecer los valores de σ, r y S para poder calcular el precio de la opción. Por otro lado, se obtendrá el valor de una opción fijando cuatro parámetros y variar uno de ellos para poder ver el comportamiento del precio de la opción al variar parámetros. Se tomará como precio alguno de esos valores procedente de los datos recopilados y se propondrá una fecha de vencimiento T de tal forma que el precio acción en ese periodo de tiempo sea conocida y de esta manera determinar si convendrá o no ejercer el contrato, de igual manera, se podrá saber la cantidad que se hubiera ingresado o perdido por la realización del contrato opción.

3.2. Segundo caso

Valuación de una empresa

El modelo de Black-Scholes aplicado a la valuación de empresas se deriva del análisis contingente de Merton, el cuál es una técnica para determinar el precio de un valor cuyo resultado depende del precio de uno o más valores, donde se sostiene que las deudas corporativas en general pueden ser vistas como simples contratos de opciones, determinando entonces que el modelo de opciones se puede utilizar para valuar acciones. Diversos autores coinciden con esta aplicación del modelo, Stewart (1996)[14] señala que las acciones comunes son opciones de compra, que toman o retienen los activos de la empresa para pagar su deuda. Los accionistas pueden vender los activos de la firma a sus acreedores; el precio de ejercicio de la venta sería el valor de la deuda. Damodaran (1994)[5] señala que el valor de la empresa dependerá del valor del activo, del valor del pasivo a futuro, del tiempo de vencimiento de la deuda, de la volatilidad, es decir, del riesgo del activo y de la tasa libre de riesgo. Este modelo es considerado de gran utilidad al valuar empresas que trabajan con alto apalancamiento. Luehrman (1998)[8] señala que la clave para valuar a una empresa como opción se encuentra en la capacidad de encontrar una simple correspondía entre las características de las empresa y las de una opción. El valor de los activos operativos es semejante al precio de la acción; el período que la empresa espera antes de tomar una decisión es semejante al tiempo de expiración de la opción de compra; la incertidumbre acerca del valor de los activos operativos es capturado por la varianza de los retornos, y es análoga a la varianza de los retornos de la acción

3.3. Tercer caso

Valores de opciones de monedas extranjera (Mercado de divisas)

En 1983 Garman y Kohlhagen plantearon la idea de aplicar el modelo de Black-Scholes para las opciones de manera extranjera, pero había un problema y es que el modelo estándar de valoraciones de opciones asume que las tasas de interés son constantes por lo cual el precio de la acción debe, por arbitraje, comandar una prima a plazo igual a la tasa de interés, pero en los mercados de divisas, los precios a plazo pueden implicar primas o descuentos. Por lo cual se tenía que hacer algún tipo de modificación al modelo, porque en este caso la paridad de la tasa de interés afirma que la la prima de cambio a plazo debe ser igual al interés diferencial el cual puede ser positivo o negativo. [6]

Para hacer los ajustes pertinentes al modelo se hizo lo siguiente:

$$b = r_d - r_f$$

$$r = r_f$$
$$q = r_d$$

donde r_d denota la tasa de interés interna y r_f la tasa de interés extranjera. Por último definieron V, d1 y d2:

$$V = \phi[Se^{-r_f T} N(\phi d_1) - Ke^{-r_d T} N(\phi d_2)]$$

donde:

$$d_1 = \frac{ln(S/K) + (r_d - r_f + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Con estas modificaciones Garman y Kohlhagen pudieron adaptar el modelo de Black-Scholes para poder implementarlo en el mercado de divisas. Algo que se puede observar es como el modelo estándar se puede modificar ligeramente para llevarle a otro mercado. [3]

4. Etapa 2

4.1. Método Monte Carlo

El método de Monte Carlo es un modelo estocástico que consiste en generar posibles escenarios resultantes de una serie de datos iniciales, hace referencia al Casino de Monte Carlo por ser la çapital del juego de azar"; en el método de Monte Carlo se emplea el muestreo aleatorio, con la generación de números aleatorios y la automatización de los cálculos (es decir, la simulación), donde el principal objetivo es la generación numérica de series mediante un muestreo aleatorio de las distribuciones de probabilidad.

El fundamento del método de Monte Carlo se basa en el teorema del límite central, que establece "dada una muestra aleatoria suficientemente grande de la población, la distribución de las medias muéstrales seguirá una distribución normal"[4].

Este método se aplica cuando se busca simular un escenario real y sus distintas probabilidades, por lo que puede ser aplicado en el campo de la economía, a continuación se presentan algunos ejemplos

1. Cuando la empresa comienza algún proyecto, este método ayuda a generar los posibles escenarios que se se pueden suscitar en el futuro, y así hacer una estimación de las ganancias/pérdidas que se pueden presentar en dicho proyecto.
2. Gestionar el riesgo en las inversiones
3. Resolución para integrales que no se pueden resolver por métodos analíticos

Para aplicar el método de Monte Carlo, se necesita hacer la configuración del modelo predictivo, es decir, identificar la variable dependiente, que en este caso es la que se debe predecir y las variables independientes que son las encargadas de la predicción, por otra parte, especificar las distribuciones de probabilidades las variables independientes, que se puede utilizar datos históricos para establecer el rango de valores probables, y finalmente ejecutar las simulaciones para generar valores aleatorios de las variables independientes hasta generar una muestra representativa del número de combinaciones posibles.

La integración Monte Carlo se utiliza cuando se quiere calcular el valor esperad de g(X), donde X-p(X—θ). La variable aleatoria X se distribuye de acuerdo al modelo probabilístico p(X—θ), lo que nos interesa calcular es.

$$E[g(X)] = \int g(x)p(x|\theta)dx \tag{5}$$

Si se toma $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(N)}\widetilde{iid}p(x|\theta)$, entonces cuando N es grande

$$E[g(X)] = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g(x^{(n)}) \tag{6}$$

4.2. Número de iteraciones

No existe un número de corridas predeterminado para el cuál el método logre un cierto nivel de eficiencia, sin embargo, siempre se sugiere realizar una gran cantidad de iteraciones para lograr una eficiencia más alta, por lo que se puede decir que 10,000 iteraciones es un número apto de corridas.

4.2.1. Ventajas

1. Con el método de Monte Carlo, al buscar generar múltiples posibilidades en escenarios futuros, se obtiene una estimación en el rendimiento de la inversión
2. Determinar si un sistema es útil o va a dejar de serlo
3. Analizar el riesgo de la inversión
4. Resultados en gráficos para la interpretación del modelo

4.2.2. Desventajas

1. Si los datos no cuentan con un una actualización con el contexto actual, las estimaciones y conclusiones serán erróneas.
2. Si la relación entre variables puede modificar el resultado, la simulación de Monte Carlo no será la idónea ya que no tiene en cuenta la dependencia entre los datos
3. En muestras poco representativas, los resultados son poco fiables como la muestra inicial

4.3. Suma estocástica/Proceso estocástico

4.3.1. Proceso estocástico

Suma estocástica se puede definir como un proceso estocástico ya que es el conjunto de variables aleatorias que depende de un parámetro o de un argumento, es decir es una sucesión de variables aleatorias cuyas características pueden variar a lo largo del tiempo. A los posibles valores que pueden tomar la variables aleatoria, se le conocen como estados, estos pueden tener un estado discreto o un espacio continuo , igualmente la variable tiempo se puede considerar como discreto/continuo.

4.4. Caminata aleatoria

La caminata aleatoria es una teoría que sugiere que los cambios en el precio de las acciones tienen la misma distribución y son independientes una de la otra, se asume que el movimiento pasado de la acción o mercado no puede ser usado para predecir su movimiento futuro, en resumen, la teoría de caminata aleatoria menciona que la acción toma un camino aleatorio e impredecible que hace que todos los métodos utilizados para predecir los precios de acción sean inutilizables [13].

4.5. Métodos para determinar que una suma estocástica alcance cierto valor

Algunos métodos de los procesos estocásticos son:

- Procesos de Markov: Un proceso aleatorio dependiente del tiempo para el cual se cumple una propiedad específica, es decir que la probabilidad condicional sobre el estado presente, el futuro y el pasado del sistema son independientes [15].
- Proceso estacionario: Es un proceso estocástico cuya distribución de probabilidad en un instante de tiempo fijo o una posición fija es constante para todos los instantes de tiempo o posiciones [11].
- Proceso de Bernoulli: Es la repetición de un ensayo de Bernoulli, es decir, un experimento aleatorio que solo se pueden obtener 2 resultados (éxito o fracaso).
- Teorema central del límite de Laplace: Sean X1,,,Xn variables aleatorias independientes, identicamente distribuidas y acotadas, si n es lo suficientemente grande entonces vale la siguiente: aproximación: $P(n\mu + r_1\sqrt{n} \leq X_1 + ... + X_n \leq n\mu + r_2\sqrt{n}) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt$ [2]
- Teorema Central del Límite de Liapunov: Liapunov demostró por este método, que el teorema central del līmite era aplicable con hipótesis más generales que los de Tshbyshev y Markov, al igual Liapunov demostró el teorema central del līmite con hipótesis más débiles. [2]

- Proceso de Poisson: Es un proceso estocástico de tiempo continuo que consiste en contar eventos diferentes a lo normal a lo largo del tiempo, el tiempo en cada evento consecutivo tiene una distribución exponencial con parámetro λ.

4.6. Aplicaciones de las sumas estocásticas-procesos estocásticos

Algunas de las aplicaciones de las sumas estocásticas son [10]:

- Señales de telecomunicación
- Señales biomédicas
- Señales sísmicas
- Solicitudes individuales de documentos en un servidor de Internet

5. Etapa 3

5.1. Activos a considerar y periodo de los datos

Se trabajo con datos de la página investing.com, se seleccionaron activos que en el último año tuvieran estabilidad en su comportamiento, las acciones seleccionadas fueron AMD (empresa de semiconductores que desarrolla procesadores de computación), Lockeed Martin (compañia multinacional de la industria aeroespacial y militar), IAG (aerolínea hispano-británica, matriz de Iberia y British Airways), Iberdrola (compañia española dedicada a la producción, distribución y comercialización de energía), Repsol (multinacional energética y petroquímica española) y Costco (cadena internacional de tiendas de autoservicio con un formato de club de precios). El periodo para el cuál se tomarán los datos abarca del 1 de diciembre de 2018 al 1 de diciembre de 2022.

5.2. Proceso para realizar la predicción

- Descargar datos históricos de la acción o divisa de interés
- Acondicionar los datos
- Obtener primer y segundo momento muestral, así como la volatilidad
- Obtener precio al día de hoy, tasa libre de riesgo y precio strike
- Obtener la distribución de los datos
- Realizar simulaciones y con el resultado aplicar el modelo Black-Scholes

5.3. Distribución de probabilidad ajustada

Para la distribución de probabilidad ajustada, lo primero que se realizó fue una gráfica que representara los datos durante el rango seleccionado, en este caso fue (2018/12/02 - 2022/12/02), a partir de esto, se puede deducir cuál es la mejor distribución de probabilidad para cada acción ya que no existe una predeterminada, cada acción puede llegar a tener una distribución distinta dependiendo de cuál se ajuste mejor a ella.

5.3.1. Graficos AMD vs Ibedrola

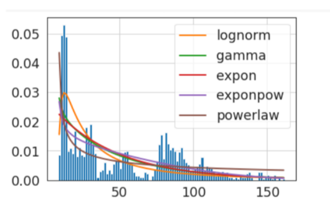

Figura 1: Distribución ajustada para AMD

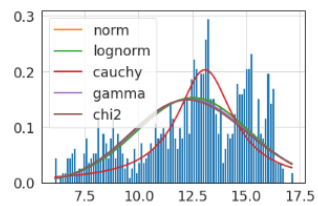

Figura 2: Distribución ajustada para Ibedrola

Al observar ambas gráficas, se puede determinar que para la acción AMD, se recomienda usar una distribución (lognormal), por otra parte, se tiene que para la acción Ibedrola, la distribución es (norm). Este proceso se repite para las distintas acciones presentadas en el reto (IAG, Repsol, Costco)

5.4. Aplicación de la ecuación de Black-Scholes y valores obtenidos

Para la aplicación del modelo Black-Scholes se definió una función 3 que calculará el precio Black-Scholes de call y put que se muestra en la caminata aleatoria, así como el precio de la acción al finalizar el periodo, para llamar esta función es necesario poner los valores del precio de la acción a tiempo 0 (S), el periodo de tiempo en años (T), la tasa libre de riesgo (r), la volatilidad (sigma), el precio de compra a tiempo 0 (K) y el número de simulaciones y de pasos. Para obtener dicha información, se consideró la información brindada por la página web Investing.com, para la cuál se obtienen los siguientes parámetros sobre la acción Ibedrola

- S = 45.73
- T = 1
- r = 0.035
- sigma = 0.0309
- K = 45.82
- Nsimulations = 10000

- Nsteps = 253

```python
def blackScholes(r, S, K, T, sigma, type="c"):
    "Calculate BS price of call/put"
    d1 = (np.log(S/K) + (r + sigma**2/2)*T)/(sigma*np.sqrt(T))
    d2 = d1 - sigma*np.sqrt(T)
    try:
        if type == "c":
            price = S*norm.cdf(d1, 0, 1) - K*np.exp(-r*T)*norm.cdf(d2, 0, 1)
        elif type == "p":
            price = K*np.exp(-r*T)*norm.cdf(-d2, 0, 1) - S*norm.cdf(-d1, 0, 1)
        return price
    except:
        print("Please confirm option type, either 'c' for Call or 'p' for Put!")
```

Figura 3: Función Black-Scholes

Los resultados muestran que el precio de la acción en el tiempo 0, es decir en la fecha 2022/12/02, tuvo un valor de 45.73; la función de Black-Scholes nos indica que el precio a un año, es decir 2023/12/02, será de 47.34 para la acción Iberdrola

5.5. Diseño del caminata aleatoria y las 10000 trayectorias

Se implementaron en el algoritmo variables q y p con métodos for para diseñar la caminata aleatoria del modelo, posteriormente, incluyendo las variables seleccionadas junto a la tasa libre de riesgo y el periodo, se realizó una predicción para obtener los valores call y put de la acción, los cuáles fueron 0.5724 y 0.5571 respectivamente.

Se realizaron 10,000 replicas de la estimación del precio del activo, las cuáles arrojaron la siguiente gráfica.

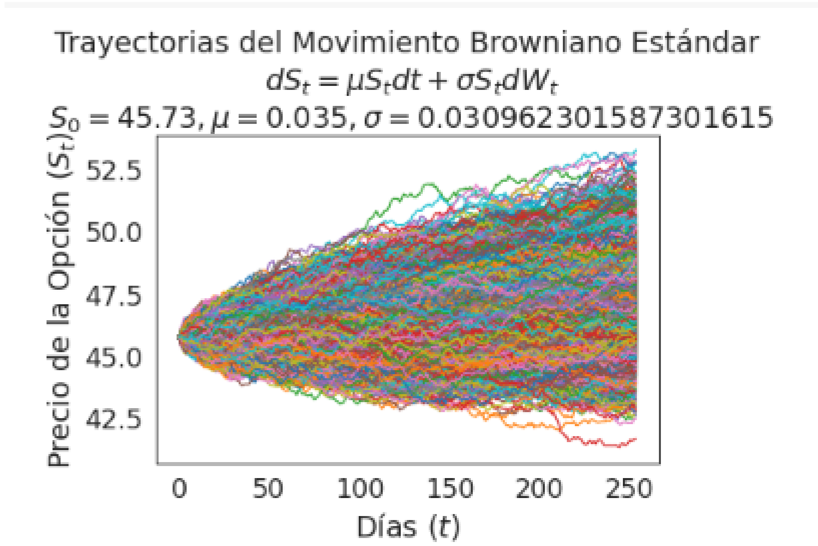

Figura 4: Gráfica de las 10,000 réplicas de la acción Iberdrola

5.6. Conclusiones

Finalmente se logró hacer un modelo para estimar el precio de un activo financiero en un lapso de tiempo de un año. Sin embargo, es importante recordar que el comportamiento de los datos históricos no siempre siguen una distribución en específico, lo que puede afectar el proceso de predicción de tal modo que no se obtiene una estimación tan certera. Además, se sabe que los activos financieros dependen de muchas variables que pueden verse alteradas por situaciones fuera de nuestro control.

6. Anexo-Resultados de 5 acciones

6.1. Distribuciones de cada acción

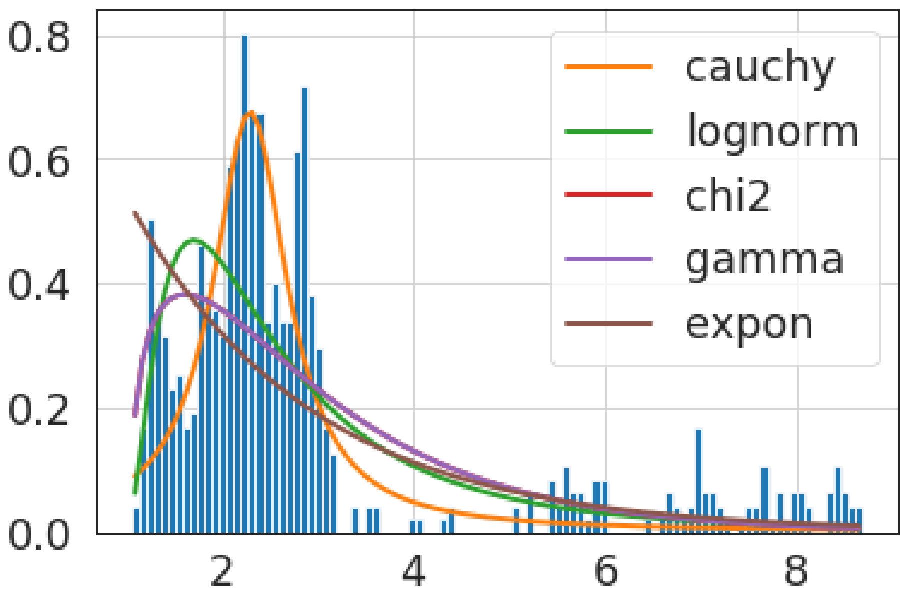

Figura 5: Distribuciones para la acción IAG

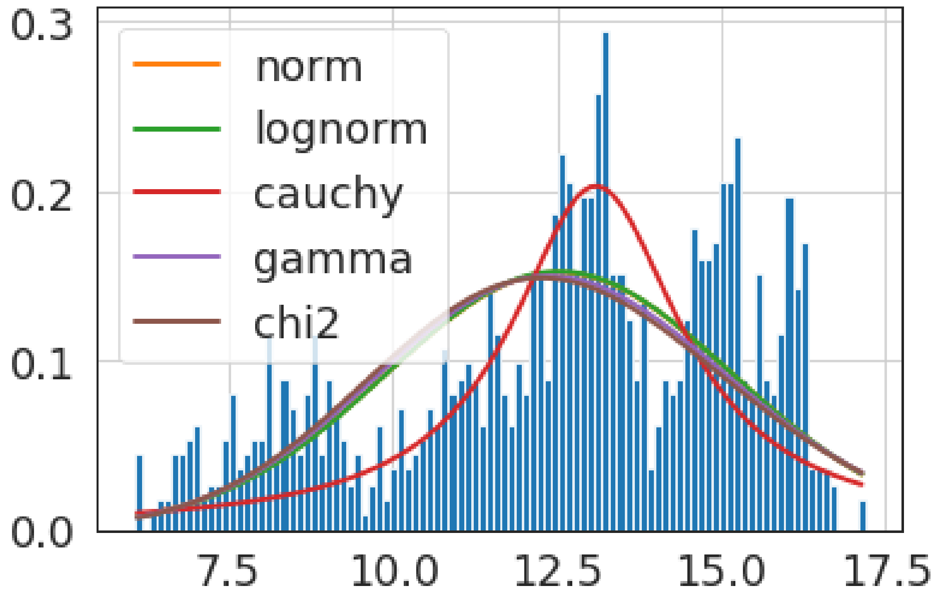

Figura 6: Distribuciones para la acción Repsol

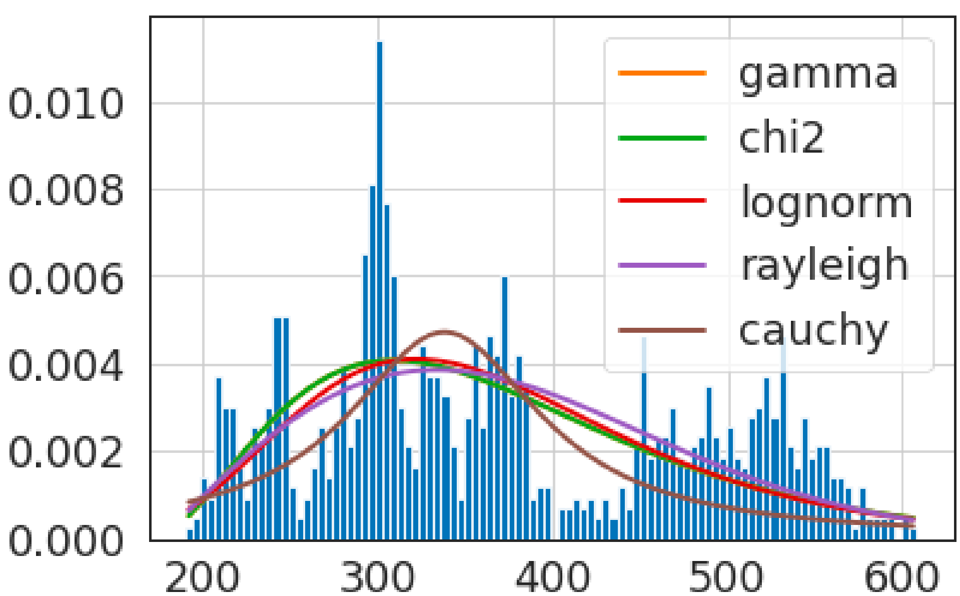

Figura 7: Distribuciones para la acción Costco

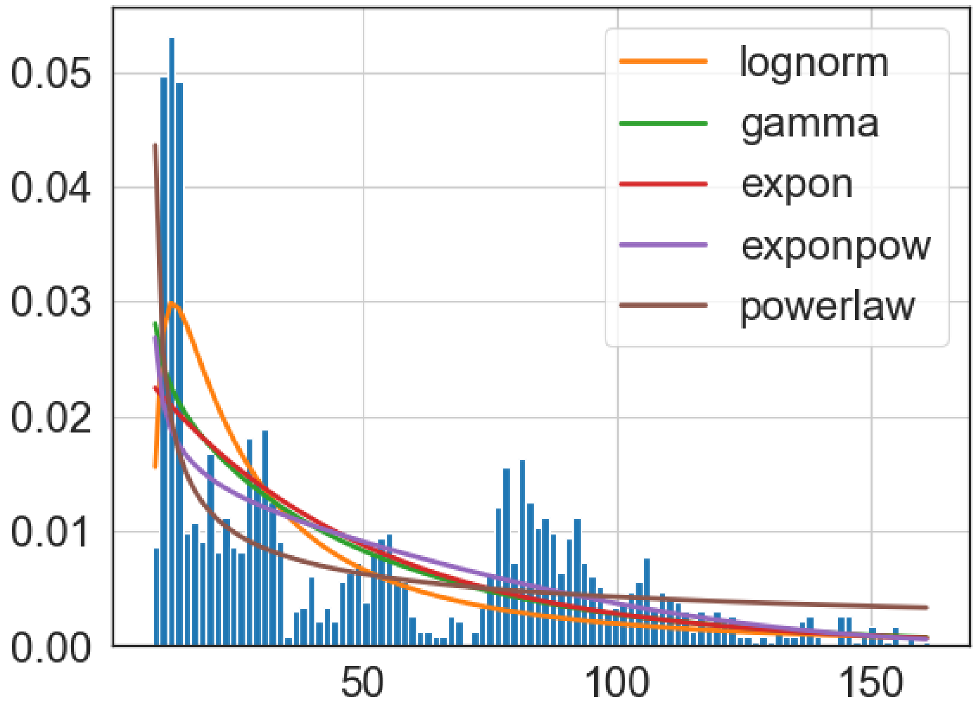

Figura 8: Distribuciones para la acción AMD

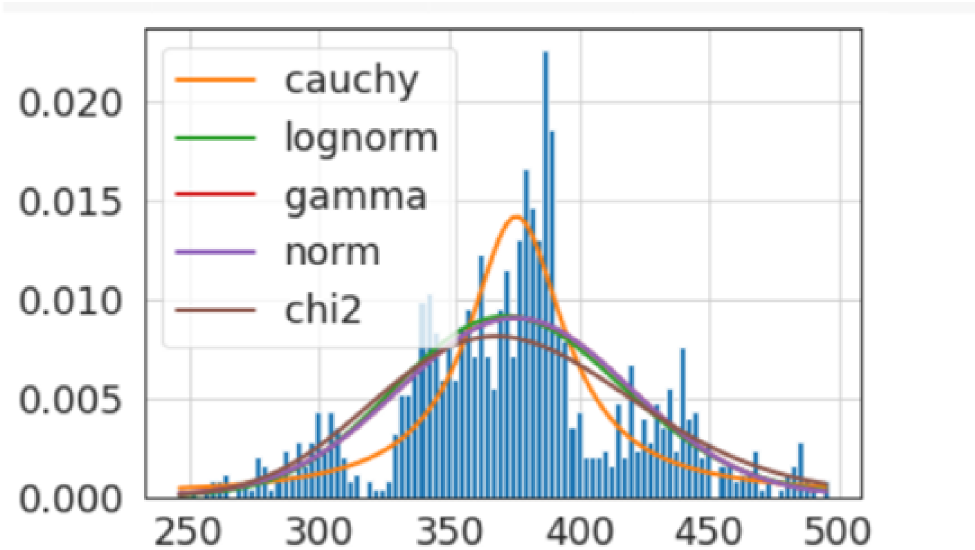

Figura 9: Distribuciones para la acción Lockeed Martin

6.2. Valores a predecir

Acción	Valor a tiempo 0	Valor futuro con Monte Carlo
AMD	74.98	77.433
Lockeed Martin	496.23	513.8608
IAG	1.62	1.6786
Repsol	14.62	15.14
Costco	494.53	512.38

6.3. Precio call/ Precio put

Acción	Precio call	Precio put
AMD	6.311	6.1
Lockeed Martin	21.2065	12.9847
IAG	0.0898	0.0332
Repsol	0.1776	0.1723
Costco	27.21	9.46

6.4. Trayectorias del Movimiento Browniano

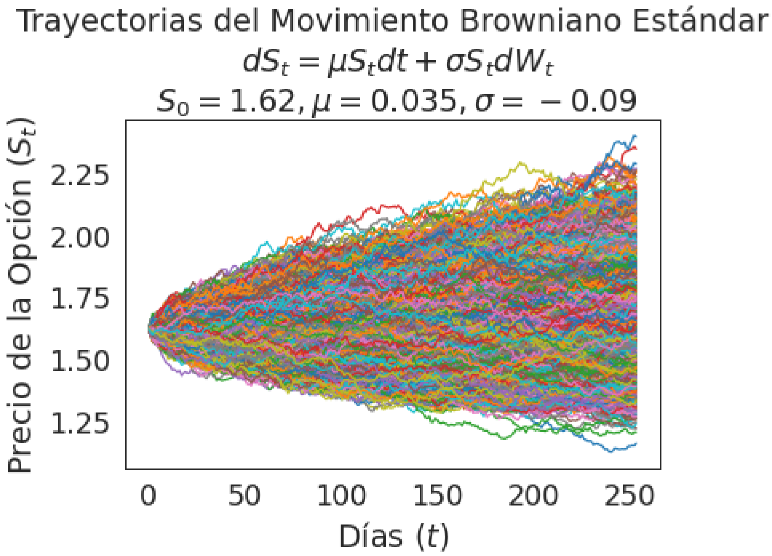

Figura 10: Trayectorias para la acción IAG

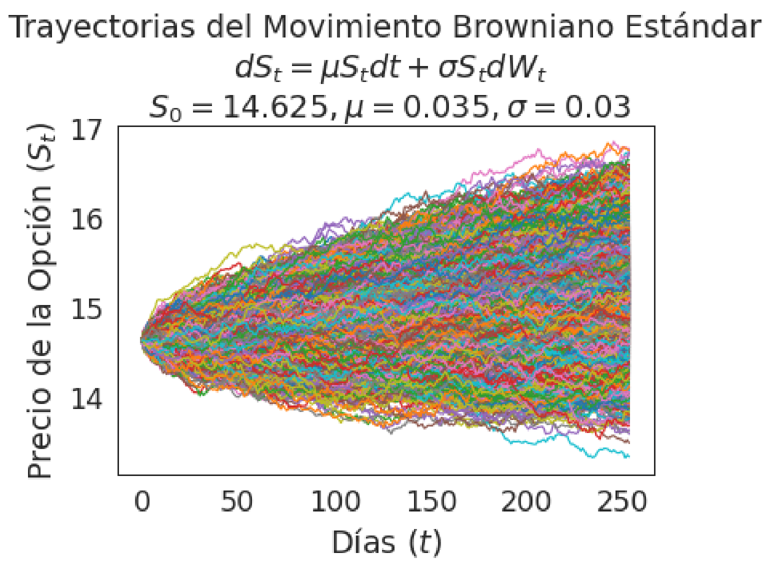

Figura 11: Trayectorias para la acción Repsol

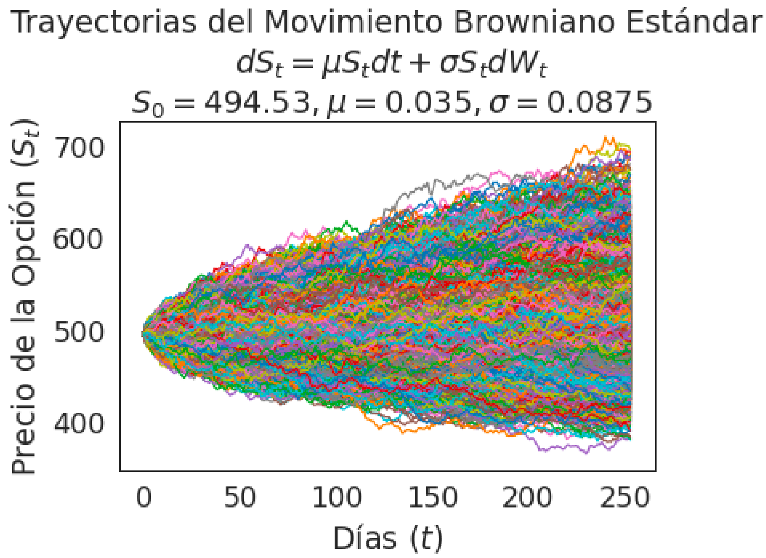

Figura 12: Trayectorias para la acción Costco

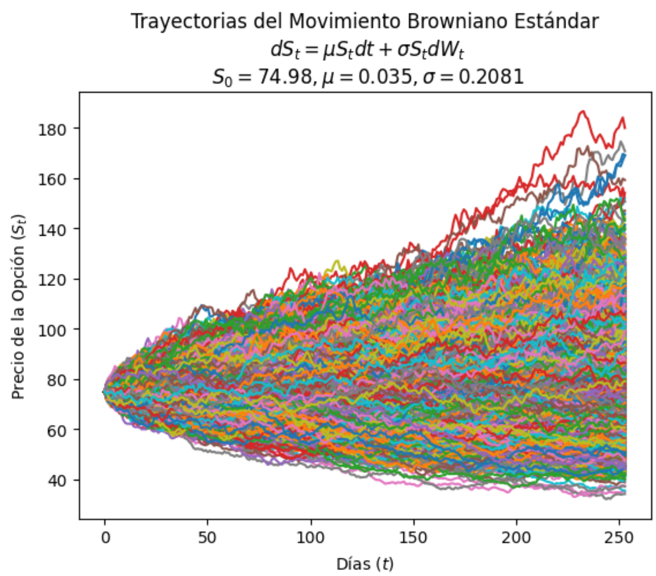

Figura 13: Trayectorias para la acción AMD

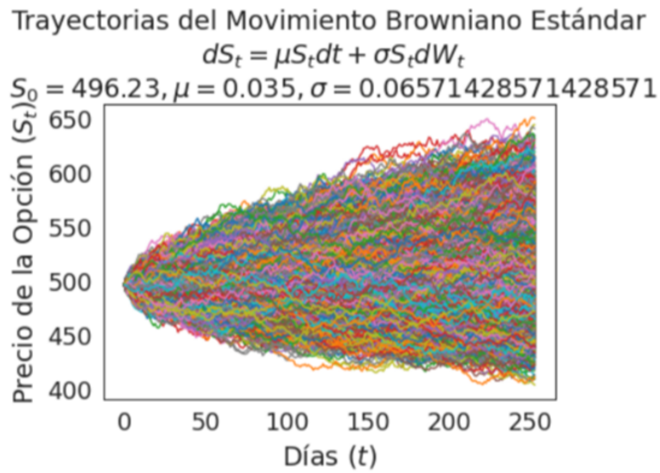

Figura 14: Trayectorias para la acción Lockeed Martin

Referencias

[1] Danae Duana Ávila y César Gabriel Díaz Millán. «Modelo Black-Scholes-Merton, para la toma de decisiones financieras.» En: *Revista académica virtual universidad de Málaga* (2008).

[2] P Blaiotta J. Delieutraz. «Teorema Central del Limite». En: *Universidad de Buenos Aires Facultad de Ciencias Exactas y Naturales* (2004).

[3] N Burgess. «A Review of the Generalized Black-Scholes Formula It's Application to Different Underlying Assets». En: (2017).

[4] A Castañeda. «Simulación Teorema Central del Limite». En: (2016).

[5] Aswath Damodaran. «Damodaran on Valuation». En: *Security Analysis for Investment and Corporate Finance* (1994).

[6] Steven W Garman Mark B.; Kohlhagen. «Foreign currency option values». En: *Journal of International Money and Finance* (1983).

[7] Max Michaels Keith Lesly. «The real Power of Real Options». En: *The McKinsey Quartely* (1997).

[8] Timothy Luehrman. «Investment Opportunities as Real Options». En: *Harvard Business Review* (1998).

[9] Jacquillat Bertrand Mondher Bellalah. «Option Valuation with information cost: Theory and tests». En: *The Financial Review* (1995).

[10] Francisco Montes. «Procesos estocásticos para ingenieros: Teoría y aplicaciones». En: *Universitat de Valencia* (2007).

[11] Juan Ramos. «Procesos estocásticos estacionarios». En: *RStudio Pubs* (2016).

[12] Bruno Rémillard. *Statistical methods for financial engineering*. 2016. DOI: `10.1201/b14285`.

[13] Tim Smith. «Random Walk Theory». En: *Investopedia* (2020).

[14] Myers Stewart. «Fischer Blacks's contributions to corporate finance». En: *Tampa Financial Management* (1996).

[15] Juan del Valle. «Introducción a los procesos de Markov». En: *Ingeniería UNAM* (2015).