CÁLCULO NUMÉRICO (EAMB018-A)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

PROJETO FINAL (AB1)

Professores:
Adeildo Soares Ramos Júnior
Luciana Correia Laurindo Martins Vieira

CTEC Centro de Tecnologia UFAL

Data de divulgação: 19/04/2021

Data de entrega: 05/05/2021

Este é o projeto final da AB1. Neste projeto, vocês deverão fazer uma apresentação **individual ou em dupla** no horário da aula, com duração de aproximadamente **10 minutos**. Para isso, deverão preparar uma apresentação de slides contemplando os seguintes tópicos:

- Introdução
- Objetivos
- Metodologia
- Análise de resultados
- Conclusão

Essa apresentação de slides deve ser enviada no moodle da disciplina (https://ava.ufal.br/course/view.php?id=16302) antes do horário da aula, ou seja, até as **11h10min do dia 05/05/2021**.

Para maiores esclarecimentos sobre o que deve ser abordado em cada um dos tópicos supracitados, consultar o **Anexo A**.

O objeto de discussão desses tópicos deve ser a resolução e análise de sistemas lineares, os quais deverão ser obtidos mediante idealização do problema de um sistema mecânico discreto, conforme **Anexo B**.

A resolução desse problema deve ser feita com auxílio da sua linguagem de programação preferida. Trechos de código devem ser mostrados nos itens pertinentes ao longo da apresentação que **deve contemplar os seguintes itens**:

a) Implementar os algoritmos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel, utilizando como métrica de erro a diferença $\|\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_k\|$ calculada conforme a norma L2 (dica: você pode se basear nos algoritmos do livro-texto).

b) Montar um sistema de equações (matriz **A** dos coeficientes e vetor **b** de constantes) para 3 sistemas discretos distintos, com respectivamente, **5, 50 e 100** elementos (molas) em série. Para isso, adote a rigidez de cada mola e a carga externa aplicada conforme valores apresentados no **Anexo C**.

c) Mostrar que os sistemas montados são consistentes e determinados (Dica: pode-se utilizar determinante e posto da matriz dos coeficientes, por exemplo. Justificar a abordagem teórica utilizada).

d) Calcular o número de condição de cada sistema utilizando a norma espectral (Dica: veja a documentação da função *opnorm* na linguagem Julia).

e) Calcular analiticamente os valores de rigidez equivalente dos sistemas e os deslocamentos de sua extremidade livre.

f) Adotando a tolerância $\varepsilon_s = 10^{-5}$ e um número máximo de 100.000 iterações, gerar gráficos relacionando, no eixo das abscissas, cada número de equações do sistema e, no eixo das ordenadas, os respectivos tempos de execução observados. Deve ser feito um gráfico para cada um dos seguintes algoritmos:

   i. Algoritmo de Gauss-Jacobi.
   ii. Algoritmo de Gauss-Seidel.
   iii. Algoritmo nativo da linguagem escolhida (ex.: operador \ no Julia).

g) Utilizando o sistema de 100 equações e adotando um número máximo de 100.000 iterações e as tolerâncias 10^{-3}, 10^{-5} e 10^{-7}, gerar um gráfico comparativo entre os métodos numéricos (Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel) relacionando, no eixo das abscissas, cada tolerância adotada e, no eixo das ordenadas, os respectivos números de iterações obtidos.

ANEXO A

INTRODUÇÃO

- Apresentar o problema a ser resolvido.

OBJETIVOS

- Apresentar o objetivo principal do trabalho (objetivo macro)
- Apresentar os objetivos específicos do trabalho (etapas que devem ser realizadas para cumprir o objetivo macro)

METODOLOGIA

- Descrever como o problema será resolvido.
- Delimitar processos, procedimentos e ferramentas utilizadas na resolução.
- Detalhar todos os passos necessários para resolver o problema e atender os objetivos.

ANÁLISE DE RESULTADOS

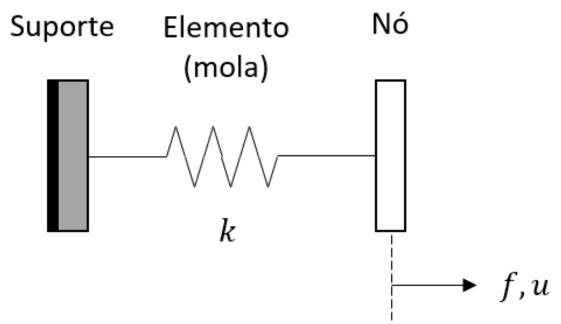
- Expor os resultados obtidos com a metodologia proposta,
- Utilizar ferramentas gráficas para melhor apresentar os resultados.
- Fazer comentários nos códigos implementados para auxiliar na correção, explicando minimamente o que será feito no trecho posterior ao comentário, por exemplo.

CONCLUSÃO

- Estabelecer juízo técnico sobre os resultados obtidos, de modo a situá-los no contexto do trabalho realizado.

ANEXO B

Sistema mecânico discreto

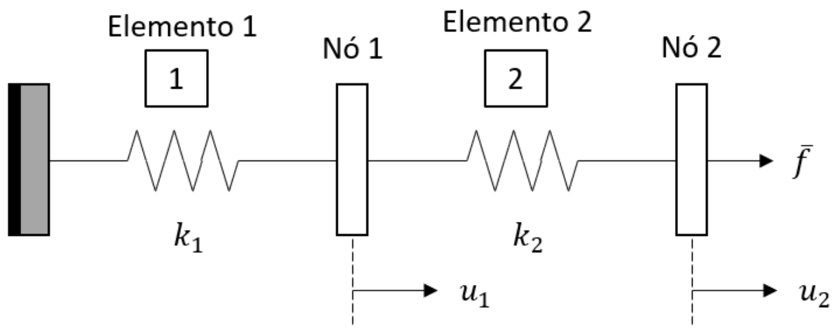


- Nó: Entidade para aplicação de forças (f) ou deslocamentos (u)
- Elemento: Conecta 2 nós. Possui rigidez (k)
- Suporte: Nó com restrição de deslocamento, $u = 0$

Para <u>1 grau de liberdade</u> (1 nó livre)

$$\boxed{f = k\,u}$$

Lei de Hooke



Para <u>2 graus de liberdade</u> (2 nós livres)

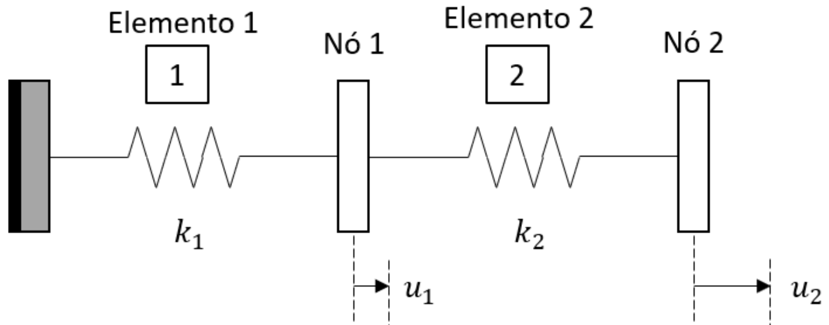
- O elemento 1 conecta o suporte ao nó 1 e possui rigidez k_1
- O elemento 2 conecta o nó 1 ao nó 2 e possui rigidez k_2

- Para cada nó i, tem-se que
  - a força f_i é conhecida
  - o deslocamento u_i é incógnita

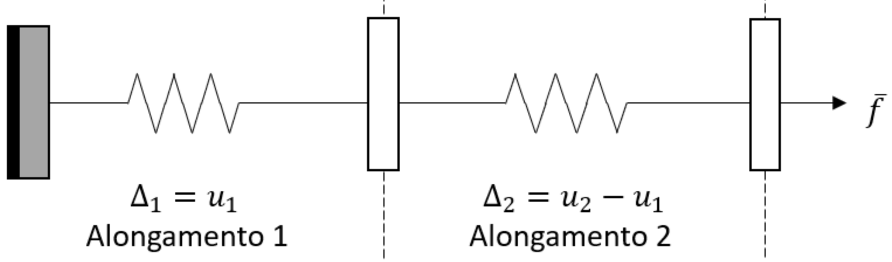
- Assumindo $f_1 = 0$ e $f_2 = \bar{f}$
- Quem são as incógnitas u_1 e u_2?

Sistema mecânico discreto

Configuração indeformada



Configuração deformada



Para 2 graus de liberdade (2 nós livres)

Determinação da rigidez equivalente do sistema

- Ao se aplicar a força $\bar{f}$ na extremidade à direita, cada elemento (mola) é mobilizado por esta mesma força
- Aplica-se a lei de Hooke para cada elemento, levando-se em consideração sua rigidez e seu alongamento

$$\bar{f} = k_1\,\Delta_1 = k_2\Delta_2$$

- O deslocamento na extremidade livre equivale à soma dos alongamentos dos elementos

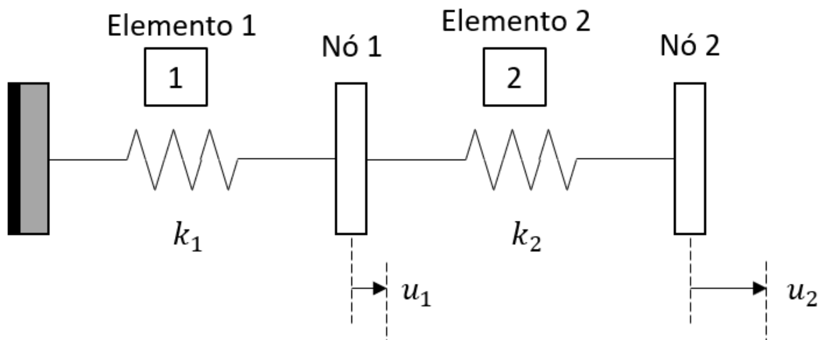
$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = \left[\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right]\bar{f}$$

- A rigidez equivalente K_{eq} do sistema é calculada idealizando que o sistema fosse composto por apenas um elemento

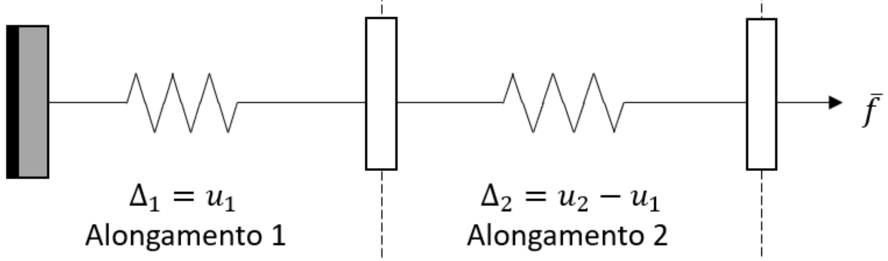
$$\Delta = \frac{1}{K_{eq}}\bar{f} \;\Rightarrow\; \frac{1}{K_{eq}} = \left[\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right]$$

Sistema mecânico discreto

Configuração indeformada

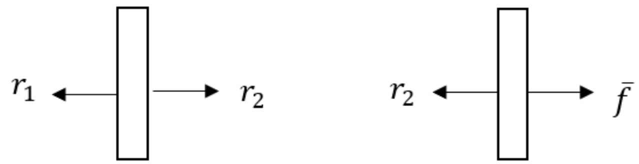


Configuração deformada



$r_1 = k_1\Delta_1$

$r_2 = k_2\Delta_2$



Forças internas dos elementos, r_1, r_2

Para 2 graus de liberdade (2 nós livres)

Determinação dos deslocamentos

- Com base nas forças internas dos elementos (r_1, r_2) e na força externa aplicada no nó da extremidade livre $(\bar{f})$, faz-se o equilíbrio de forças em cada nó

$$r_1 - r_2 = 0$$
$$r_2 - \bar{f} = 0$$

- Expressando as forças internas em função dos deslocamentos, tem-se

$$r_1 - r_2 = 0 \;\Rightarrow\; k_1 u_1 - k_2(u_2 - u_1) = 0$$
$$r_2 - \bar{f} = 0 \;\Rightarrow\; k_2(u_2 - u_1) - \bar{f} = 0$$

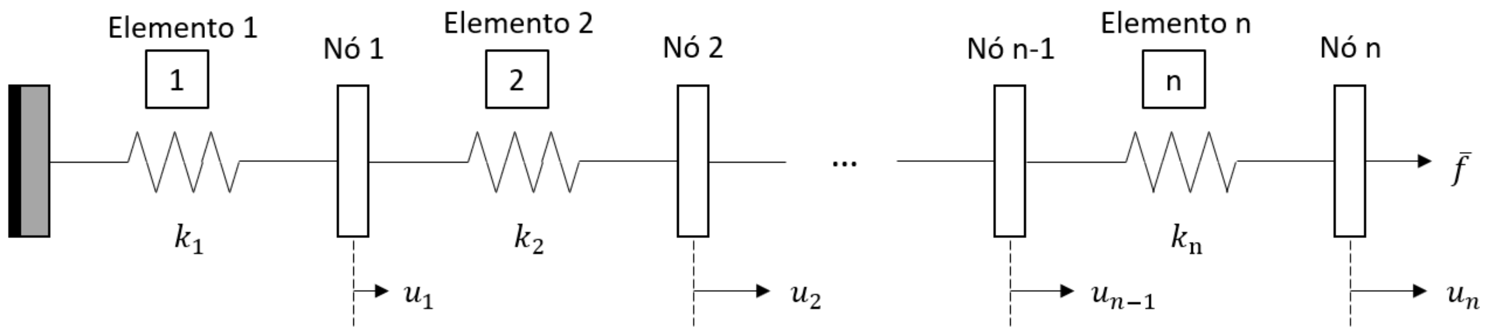
- Utilizando o formato matricial, as equações acima podem ser expressas como

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{f} \end{bmatrix}$$

Sistema mecânico discreto

Para n graus de liberdade (n nós livres)

Generalizando para um sistema com n elementos em série e com carga aplicada na extremidade livre



Determinação da rigidez equivalente do sistema

$$\Delta = \frac{1}{K_{eq}}\bar{f} \;\Rightarrow\; \frac{1}{K_{eq}} = \left[\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n}\right]$$

Determinação dos deslocamentos

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -k_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_{n-2}+k_{n-1} & -k_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -k_{n-1} & k_{n-1}+k_n & -k_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -k_n & k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \bar{f} \end{bmatrix}$$

ANEXO C

Valores a serem utilizados no sistema mecânico discreto

Nome do aluno ou dupla	**Rigidez de cada mola dividida pelo número de molas, k_i/n**	**Valor da carga externa aplicada, $\bar{f}$**
Evany Araújo e Jaíne Silva	1.0e+6	1.0e+4
David Silva e Gustavo Melo	1.5e+6	2.0e+4
Júlia Souza e Klessia Lima	2.0e+6	3.0e+4
Ana Laura Lins e Anny Karoline Gonçalves	2.5e+6	4.0e+4
Deborah Santos e Elder Santana	3.0e+6	5.0e+4
André Costa Filho	3.5e+6	6.0e+4
Arianne Brandão	4.0e+6	7.0e+4
Erakethlyn Araújo	4.5e+6	8.0e+4
Layane Silva	5.0e+6	9.0e+4
Layne Siqueira	5.5e+6	1.0e+5
Mariana Almeida	6.0e+6	9.0e+4
Nathalia Magalhães	6.5e+6	8.0e+4