Formulação Matemática e Implementação Computacional no MATLAB de Modelos Físicos Discretos

Adeildo Soares Ramos Júnior e Luciana C. L. Martins Vieira

Resumo **— Neste trabalho apresentam-se o desenvolvimento matemático e a implementação computacional de modelos físicos discretos nas áreas de Mecânica, Hidráulica, Transferência de Calor e Eletricidade, onde se busca sistematizar suas soluções em regime estacionário. A metodologia aqui apresentada permite ao aluno, de um curso introdutório do Método dos Elementos Finitos, revisar e sedimentar conceitos previamente estudados nas diversas áreas supracitadas, definir as estruturas de dados, implementar computacionalmente suas soluções matemáticas e entender o significado de um sistema de coordenadas. Após essa fase, o aluno estará mais bem preparado para lidar com a solução discretizada de problemas contínuos. Utiliza-se para implementação computacional o programa MATLAB, onde são explorados recursos de programação de alto nível, a exemplo de recursos de estrutura de dados e de matrizes esparsas.**

Palavras chaves **— Elementos Finitos, MATLAB, Mecânica, Eletricidade, Hidráulica, Transferência de calor, Sistemas discretos**

I. Introdução

Diversos problemas de engenharia são regidos por equações diferenciais ou sistemas de equações diferenciais que são matematicamente equivalentes. A solução analítica destes problemas é difícil ou impossível de ser obtida, requerendo em geral uma solução aproximada, que pode ser obtida por alguma técnica de discretização como o método dos elementos finitos ou o método das diferenças finitas. Este artigo apresenta uma metodologia que visa padronizar os conceitos, formulação matemática e implementação computacional de sistemas discretos mecânicos, hidráulicos, elétricos e térmicos, permitindo assim ao aluno, que inicia o curso profissionalizante de engenharia, a lidar com os procedimentos de solução utilizados normalmente nas técnicas de aproximação e a sedimentar os conceitos básicos destas áreas, através da sistematização e implementação de suas soluções.

II. Modelos Físicos

Na apresentação dada a seguir, procura-se unificar o equacionamento matemático e a implementação computacional dos modelos físicos discretos mecânicos, térmicos, hidráulicos e elétricos em regime estacionário.

A. S. Ramos Jr., Universidade Federal de Alagoas - UFAL, adramos@ctec.ufal.br, L. C. L. M. Vieira, PET/Civil/Universidade Federal de Alagoas - UFAL, lvieira@ctec.ufal

A formulação apresentada baseia-se nas idéias apresentadas em [1]-[2]. A representação desses modelos será baseada em dois tipos básicos de entidades denominados nós e elementos, conforme desenho esquemático apresentado na Fig. 1.

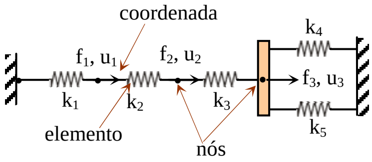

Fig. 1. Representação esquemática dos nós, elementos e sistema global de coordenadas para o modelo mecânico

A. Relações Básicas

As leis físicas deverão ser satisfeitas nos nós e nos elementos que compõe cada tipo de modelo, que se caracteriza também pelas relações constitutivas em cada elemento e pelas relações de compatibilidade nodal. Na Tabela I estão resumidas as relações básicas para cada tipo de modelo físico e na Tabela II as grandezas físicas pertencentes a cada modelo e representadas pelas letras f , u e k.

TABELA I
Relações Básicas

Sistemas	Lei Física	Constitutiva	Compatibilidade
Mecânico	Equilíbrio de Forças	Lei de Hooke	Deslocamento
Hidráulico	Cont. de Fluxo	Lei de Darcy	Pressão
Térmico	Cont. de Fluxo térmico	Lei de Fourier	Temperatura
Elétrico	Cont. de Corrente	Lei de Ohm	Voltagem

TABELA II
Grandezas Físicas

Sistemas	f	u	k
Mecânico	Força	Deslocamento	Coeficiente de rigidez
Hidráulico	Vazão	Pressão	Fator de carga
Térmico	Fluxo de calor	Temperatura	Coef. de cond. de calor
Elétrico	Corrente	Voltagem	Condutância

B. Sistemas de Coordenadas

A representação das grandezas físicas vetoriais, ou seja, a força e deslocamento do sistema mecânico e a vazão, o fluxo de calor e a corrente nos modelos hidráulico, térmico e elétrico respectivamente, requerem a definição de um sistema de coordenadas. Para representa-las foram definidos três sistemas de coordenadas, denominados sistemas global, local e interno. Na Fig.1 está representado o sistema de coordenadas global para o sistema mecânico e na Tabela III os sistemas interno e local para cada modelo físico. A representação do sistema global nos demais modelos foi definida como positiva nos casos em que a vazão, o fluxo de calor e a corrente entram no sistema.

TABELA III
SISTEMAS DE COORDENADAS

Sistemas	Interno	Local
Mecânico	←—WW—→	→i —WW— j→
Hidráulico	i ═→═ j	→i ═══ j←
Térmico	i [→] j	→i [ ] j←
Elétrico	i —WW— j	→i—WW—j←

C. Matriz constitutiva do elemento

A caracterização das propriedades físicas de cada modelo é definida pelas relações constitutivas no sistema interno de coordenadas através da equação:

$$f = \alpha \cdot k \cdot (u_j - u_i) \tag{1}$$

onde *f*, *u* e *k* são as grandezas físicas apresentadas na Tabela II e α um fator de correção que tem valor unitário para o modelo mecânico e -1 para os outros modelos. Os índices *i* e *j* na variável *u* referem-se aos nós de extremidade do elemento (Tabela III).

Relacionando as grandezas nodais de um elemento *n* (no sistema local) com as grandezas no sistema interno, têm-se as seguintes relações no elemento, que satisfazem as leis físicas apresentadas na Tabela I

$$\begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix}^n = \alpha \cdot \begin{Bmatrix} -f \\ f \end{Bmatrix}^n = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}^n \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}^n \tag{2}$$

que pode ser representada matricialmente na forma

$$\mathbf{f}_e^n = \mathbf{k}_e^n \cdot \mathbf{u}_e^n \tag{3}$$

Organizando as matrizes e vetores de todos os elementos em um sistema de equações lineares único, obtém-se

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{u}_e \tag{4}$$

onde

$$\mathbf{f}_e = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_e^1 \\ \mathbf{f}_e^2 \\ \vdots \end{Bmatrix} \tag{5}$$

$$\mathbf{u}_e = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_e^1 \\ \mathbf{u}_e^2 \\ \vdots \end{Bmatrix} \tag{6}$$

e

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_e^1 & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_e^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{7}$$

D. Relações Nodais

Em cada nó deverão ser satisfeitas as leis físicas e as relações de compatibilidade. Para um nó *m* as leis físicas poderão ser representadas através da equação

$$f_m = \sum_{i=1}^{N} f_m^i \tag{8}$$

onde N é o número de elementos conectados ao nó *m*, f_m a grandeza física *f* global associada ao nó *m* e f_m^i a grandeza física do nó *m* do elemento *i*. Organizando matricialmente para todos os nós, pode-se equacionar na forma

$$\mathbf{f} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{f}_e \tag{9}$$

onde **H** é denominada matriz de equilíbrio para o sistema mecânico e de continuidade para os demais e **f** é o vetor global das grandezas físicas *f*.

De modo equivalente, as relações de compatibilidade nodal podem ser descritas pelas equações

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} \tag{10}$$

onde **A** é a matriz de compatibilidade e **u** é o vetor global das grandezas físicas *u*.

E. Equacionamento

Relacionando as equações (4), (9) e (10), chega-se a seguinte expressão

$$\mathbf{f} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} \tag{11}$$

onde **K** é a matriz global associada as grandezas físicas *k* que pode ser obtida pela equação

$$\mathbf{K} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{A} \tag{12}$$

Em geral, nos sistemas mecânicos **K** é denominada matriz de rigidez da estrutura, nos sistemas hidráulicos matriz de pressões, no sistema elétrico matriz de condutância e no térmico matriz de condução de calor.

A montagem da matriz **K** pode ser feita pelo método direto, evitando a montagem e a multiplicação das três matrizes da equação (12) e reduzindo assim o esforço computacional durante a solução. Este procedimento consiste em observar a influência que a matriz local de cada elemento ($\mathbf{k}_e^n$) tem na montagem da matriz **K**. Na Fig. 2 apresenta-se esquematicamente este resultado. Observa-se que o número das linhas e das colunas em relação às quais um elemento *n* está associado está relacionado com o número dos nós aos quais ele está conectado.

$$\begin{array}{r c} \begin{array}{r} \textit{linha } i \\ \\ \textit{linha } j \end{array} & \begin{bmatrix} k_n & -k_n \\ & \\ -k_n & k_n \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{cc} \textit{coluna } i & \textit{coluna } j \end{array} \end{array}$$

Fig. 2. Posição da matriz local do elemento *n* na matriz **K** do modelo

F. Condições de contorno

Na equação (11), parcela das incógnitas está associada ao vetor **u** e parcela ao vetor **f**, requerendo um rearranjo das equações para obtenção da solução. Para solucionar este problema, evitando o rearranjo das equações e facilitando a implementação computacional, adotou-se o método da penalidade, que consiste em somar um número β de ordem de grandeza elevada a todos os elementos da diagonal da matriz **K** que estejam associados a valores prescritos de *u* ($\bar{u}_n$) no vetor **u** e substituir estas mesmas posições no vetor **f** pelo fator $\beta \cdot \bar{u}_n$. Resolvendo-se o sistema de equações modificado obtém-se a solução.

III. Implementação Computacional

A implementação computacional do equacionamento anteriormente apresentado foi feita no programa MATLAB 5.2 [3], onde foram explorados recursos de programação de alto nível. Dentre estes recursos se destacam: o tratamento de matrizes esparsas, os recursos de estruturação de dados e as técnicas de vetorização das operações matriciais.

A. Estrutura de dados

A estrutura de dados definida baseia-se nos nós e nos elementos do modelo. Para cada uma destas entidades definem-se estruturas que representarão seus dados. Para os nós definem-se dois campos visando representar as grandezas físicas *f* e *u* e para os elementos definem-se campos para armazenar sua conectividade (número dos nós aos quais eles estão conectados), seu coeficiente *k* e sua grandeza física *f*. A representação deste esquema na linguagem de programação do MATLAB está mostrada na Fig. 3.

```
elem(1).k = 20*10^6;
elem(1).cnt = [1 2];

no(1).u = 1;  % valor prescrito
no(1).f = []; % valor desconhecido
```

Fig. 3. Estrutura de dados para os elementos e nós

B. Algoritmo de solução e funções do MATLAB

A solução de um problema requer a determinação em cada nó das grandezas nodais *u* ou *f* desconhecidas no sistema global de coordenadas e das grandezas *f* no elemento no sistema interno de coordenadas. As principais etapas de solução de um problema genérico estão resumidas no algoritmo apresentado na Fig. 4.

1. Definição dos dados de entrada
2. Montagem da matriz **K** e do vetor **f**
3. Estabelecimento das Condições de Contorno
4. Solução do sistema de equações modificado:
   $\overline{\mathbf{K}}\,\mathbf{u} = \overline{\mathbf{f}}$
5. Cálculo das grandezas físicas *f* nos elementos
6. Cálculo das grandezas nodais desconhecidas *u* e *f*

Fig. 4. Algoritmo de solução

A funções do MATLAB para as etapas 2, 3, 5 e 6 do algoritmo da Fig. 4, estão representadas respectivamente nas Figs. 5, 6, 7 e 8.

```
function [fg,kg] = kfglobal(elem,no)
% Função para montar K e f

% Num de elementos e de graus de nós
nelem = length(elem);
nnos  = length(no);

% Definição da matriz K como esparsa
kg  = sparse(nnos,nnos);

for i=1:nelem
    % Matriz local dos elementos
    ke = elem(i).k * [1 -1 ; -1  1];
    % Vetor de conectividades
    cnt = elem(i).cnt;
    % Montagem da matriz K global
    kg(cnt,cnt)= kg(cnt,cnt) + ke;
end

% Montagem do vetor f
for i=1:nnos
    if isempty(no(i).fp)
       fg(i) = 0;
    else
       fg(i) = no(i).fp;
    end
end
fg = fg';
```

Fig. 5. Função .m do MATLAB para montar **K** e **f**

```
function [fga,kga] = contorno(kg,fg,no)
% Função para definição das condições
% de contorno

nnos  = length(no);
beta  = 10^20*max(diag(kg));
kga = kg;
fga = fg;

for i=1:nnos
   if isempty(no(i).f)
      kga(i,i)= kg(i,i) + beta;
      fga(i)  = beta * no(i).u;
   end
end
```

Fig. 6. Função .m do MATLAB para estabelecer as condições de contorno

```
function elem = felem(elem,u,alfa)
% Função para cálculo da grandeza física
% f nos elementos

nelem = length(elem);
for i =1:nelem
   noi = elem(i).cnt(1);
   noj = elem(i).cnt(2);
   du  = u(noj)-u(noi);
   elem(i).f = alfa * elem(i).k * du;
end
```

Fig. 7. Função .m do MATLAB para cálculo de *f* nos elementos

```
function no = fnodal(no,u,kg)
% Função para cálculo da grandezas nodais

nnos = length(no);
for i=1:nnos
   if isempty(no(i).f)
      no(i).f = kg(i,:)*u;
   else
      no(i).u = u(i);
   end
end
```

Fig. 8. Função .m do MATLAB para cálculo de *f* e *u* nos nós

IV. Exemplo

A seguir apresentam-se dois exemplo ilustrativos de um modelo mecânico e de um modelo hidráulico. Em cada caso ilustram-se as potencialidades da formulação matemática e da implementação computacional apresentadas.

A. Exemplo mecânico

Na Fig. 9 apresenta-se o desenho esquemático do modelo que será analisado neste exemplo. Os seguintes valores foram atribuídos para os coeficiente de rigidez das molas: k1 = 300 kN/m, k2 = 200 kN/m, k3 = 300 kN/m, k4 = 200 kN/m, k5 = 300 kN/m. No nó 1, o deslocamento u1 é nulo (valor prescrito) e no nó 4 a força f4 tem valor 10 kN com as forças nos outros nós nulas.

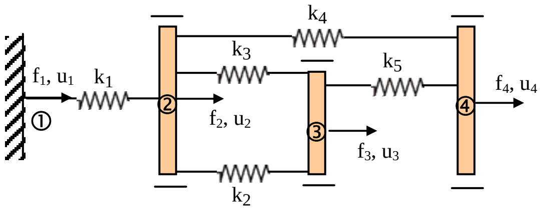

Fig. 9. Desenho esquemático do modelo mecânico

Na Fig. 10 apresenta-se o arquivo com os dados de entrada e o algoritmo de solução.

```
clear all
alfa = 1; % Problema mecânico

% Dados dos elementos
elem(1).k=300;
elem(1).cnt=[1 2];
elem(2).k=200;
elem(2).cnt=[2 3];
elem(3).k=300;
elem(3).cnt=[2 3];
elem(4).k=200;
elem(4).cnt=[2 4];
elem(5).k=300;
elem(5).cnt=[3 4];

% Dados nodais
no(1).u = 0;
no(2).f = 0;
no(3).f = 0;
no(4).f = 10;

% Algoritmo de solução
    % Matriz K e vetor f global
    [fg,kg] = kfglobal(elem,no)

    % Condições de contorno
    [fga,kga] = contorno(kg,fg,no);

    % Vetor dos deslocamentos
    u = kga\fga;

    % Vetor das foças normais (elemento)
    elem = felem(elem,u,alfa)

    % Calculo das grandezas f e u nos nós
   no = fnodal(no,u,kg);
```

Fig. 10. Arquivo do MATLAB com os dados de entrada e o algoritmo de solução do exemplo mecânico

Na Tabela IV estão apresentados os resultados da análise para os elementos e nós.

B. Exemplo hidráulico

Na Fig. 11 apresenta-se o desenho esquemático de um modelo hidráulico. Os seguintes valores foram atribuídos para o fator de carga *k* para os elementos tubulares: k_1=3 m/s^2

TABELA IV

RESULTADOS – EXEMPLO 1

Elemento	*f* (kN)	Nó	*u* (m)	*f* (kN)
1	-10.00	1	0.000	-10
2	1.93	2	0.033	0
3	2.90	3	0.043	0
4	5.16	4	0.059	10
5	4.83			

k_2= 5 m/s^2, k_3= 3 m/s^2, k_4= 2 m/s^2, k_5= 2 m/s^2, k_6= 2 m/s^2, k_7= 4 m/s^2, k_8= 2 m/s^2, k_9= 3 m/s^2, k_{10}= 3 m/s^2. No nó 1 tem-se um valor de pressão prescrito de 10 m e no nó 7 uma vazão, saindo do sistema, de 8 m^3/s sendo os outros valores nodais com vazão nula.

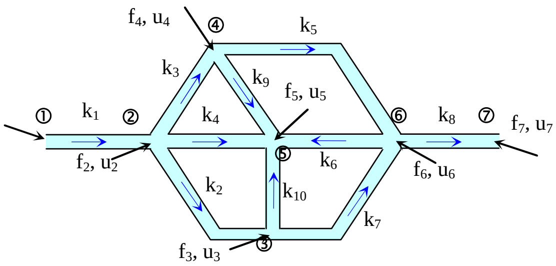

Fig. 11. Desenho esquemático do modelo hidráulico

Observa-se pelas conectividades dos elementos mostradas na Fig. 12 que o sentido positivo para o fluxo no sistema interno de coordenadas é aquele representado pelas setas azuis na Fig. 10. A seqüência de definição dos nós das conectividades altera apenas o sinal do vazão nos elementos.

Nota-se ainda que, para estes modelos físicos, a prescrição apenas das grandezas físicas globais *f* levará a uma singularidade na matriz **K**, fazendo com que não exista solução única para o problema.

TABELA V

RESULTADOS – EXEMPLO 2

Elemento	*f* (m^3/s)	Nó	*u* (m)	*f* (m^3/s)
1	8.00	1	10.00	8
2	4.04	2	7.33	0
3	2.28	3	6.61	0
4	1.66	4	6.53	0
5	2.08	5	6.43	0
6	-1.94	6	5.52	0
7	3.97	7	1.52	-8
8	8.00			
9	0.06			
10	0.20			

```
clear all
alfa = -1; % Problema hidráulico

% Dados dos elementos
elem(1).k = 3;
elem(1).cnt = [1 2];
elem(2).k = 5;
elem(2).cnt = [2 4];
elem(3).k = 3;
elem(3).cnt = [2 3];
elem(4).k = 2;
elem(4).cnt = [2 5];
elem(5).k = 2;
elem(5).cnt = [3 6];
elem(6).k = 2;
elem(6).cnt = [6 5];
elem(7).k = 4;
elem(7).cnt = [4 6];
elem(8).k = 2;
elem(8).cnt = [6 7];
elem(9).k = 3;
elem(9).cnt = [4 5];
elem(10).k = 3;
elem(10).cnt =[3 5];

% Dados nodais
no(1).u = 10;
no(2).f =  0;
no(3).f =  0;
no(4).f =  0;
no(5).f =  0;
no(6).f =  0;
no(7).f = -8;

% Ver Fig. 10 para o algoritmo de
% solução
```

Fig. 12. Arquivo do MATLAB com os dados de entrada do exemplo hidráulico

V. CONCLUSÕES

A formulação e a implementação computacional apresentadas permitiu unificar os procedimentos de solução para alguns modelos físicos discretos em regime estacionário. Nos exemplos apresentados foram obtidas as soluções de um modelo mecânico e de um modelo hidráulico em regime estacionário, utilizando-se uma implementação no MATLAB para um modelo físico genérico.

REFERÊNCIAS

[1] Y. W. Kwon and H. Bang, “The Finite Element Method using MATLAB”, Editor CRC Mechanical Engineering Series, University of Minnesota, 1996.

[2] K. J. Bathe, “Finite Element Procedures in Engineering Analysis”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1982.

[3] D. Hanselman e B. Littlefield, “MATLAB 5 – Guia do Usuário”, Makron Books, São Paulo, SP, 1999.