Universidade Federal de Alagoas - UFAL
Centro de Tecnologia - CTEC
Curso de Engenharia Civil

Mecânica dos Sólidos 3 - ECIV051D (2020.2)

Exercícios:
Métodos de Energia (Segundo teorema de Castigliano)
Encontro Assíncrono

Monitores:
Hugo Vinícius F. Azevedo
Milton Mateus G. Santos
Ricardo A. Fernandes

Professor/Supervisor:
Adeildo S. Ramos Jr.

Maceió/AL, 15/09/2021

Energia de deformação

Energia de deformação: $U = \int_V \frac{\sigma_x^2}{2E}\, dV$

Para barras: $\sigma_x = \frac{N}{A}$, $dV = A\, dx \;\rightarrow\; U = \sum_{i=1}^{M} \int_0^{L_i} \frac{N_i^2}{2\, E_i\, A_i}\, dx$

Na flexão: $\sigma_x = \frac{M\, y}{I}$, $dV = A\, dx \;\rightarrow\; U = \sum_{i=1}^{M} \int_0^{L_i} \frac{M_i^2}{2\, E_i\, I_i}\, dx$

Segundo teorema de Castigliano

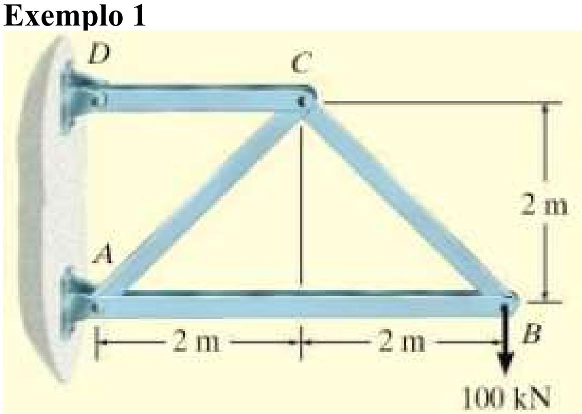
$\Delta_j = \frac{dU}{dP_j}$, deslocamento na direção da carga concentrada P_j

$\theta_j = \frac{dU}{dT_j}$, rotação na direção do momento concentrado T_j

Para barras: $\Delta_j = \sum_{i=1}^{M} \int_0^{L_i} \frac{N_i}{E_i\, A_i} \frac{dN_i}{dP_j}\, dx$

Na flexão: $\Delta_j = \sum_{i=1}^{M} \int_0^{L_i} \frac{M_i}{E_i\, I_i} \frac{dM_i}{dP_j}\, dx$

Exemplo 1



Determinar o deslocamento vertical em C

restart :

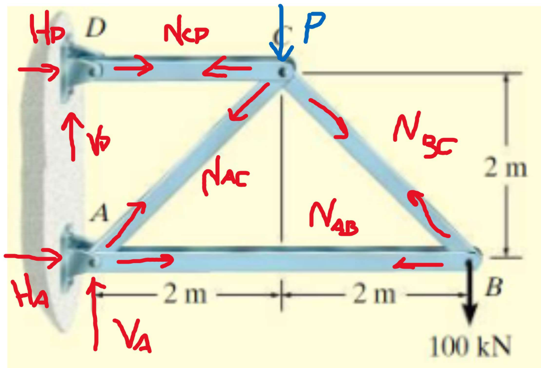
Dados no SI

$A, E, F := 400 \cdot (10^{-3})^2, 200 \cdot 10^9, 100 \cdot 10^3$:

$L_{AB}, L_{AC}, L_{BC}, L_{CD} := 4, \sqrt{8}, \sqrt{8}, 2 :$

$c, s := \cos\left(\frac{\text{Pi}}{4}\right), \sin\left(\frac{\text{Pi}}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Método dos nós



$\Sigma F_{HA} := H_A + N_{AB} + N_{AC} \cdot c = 0 :$

$\Sigma F_{VA} := V_A + N_{AC} \cdot s = 0 :$

$\Sigma F_{HB} := -N_{AB} - N_{BC} \cdot c = 0 :$

$\Sigma F_{VB} := N_{BC} \cdot s - F = 0 :$

$\Sigma F_{HC} := -N_{CD} - N_{AC} \cdot c + N_{BC} \cdot c = 0 :$

$\Sigma F_{VC} := -N_{AC} \cdot s - N_{BC} \cdot s - P = 0 :$

$\Sigma F_{HD} := H_{\mathrm{D}} + N_{CD} = 0 :$

$\Sigma F_{VD} := V_{\mathrm{D}} = 0 :$

$assign\left(solve\left(\{\Sigma F_{HA}, \Sigma F_{VA}, \Sigma F_{HB}, \Sigma F_{VB}, \Sigma F_{HC}, \Sigma F_{VC}, \Sigma F_{HD}, \Sigma F_{VD}\}, \{H_A, V_A, H_{\mathrm{D}}, V_{\mathrm{D}}, N_{AB}, N_{AC}, N_{BC}, N_{CD}\}\right)\right)$

$H_A, V_A, H_{\mathrm{D}}, V_{\mathrm{D}} = 200000 + P, 100000 + P, -200000 - P, 0$

$N_{AB}, N_{AC}, N_{BC}, N_{CD} = -100000, -\sqrt{2}\,(100000 + P), 100000\sqrt{2}, 200000 + P$

Aplicando do segundo teorema de Castigliano

$\Delta_{AB} := subs\left(P = 0,\ N_{AB} \cdot diff(N_{AB}, P) \cdot \frac{L_{AB}}{A \cdot E}\right) = 0$

$\Delta_{AC} := subs\left(P = 0, N_{AC} \cdot diff(N_{AC}, P) \cdot \frac{L_{AC}}{A \cdot E}\right) = \frac{1}{200}\sqrt{2}$

$\Delta_{BC} := subs\left(P = 0,\ N_{BC} \cdot diff(N_{BC}, P) \cdot \frac{L_{BC}}{A \cdot E}\right) = 0$

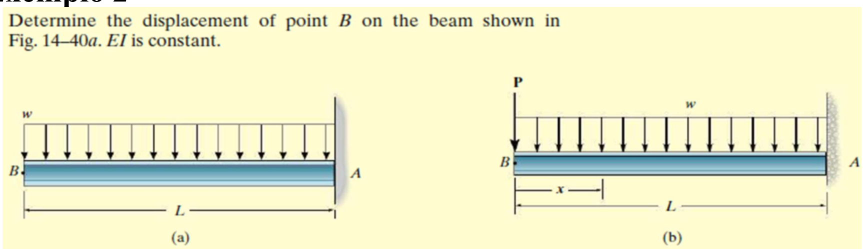
$\Delta_{CD} := subs\left(P = 0, N_{CD} \cdot diff(N_{CD}, P) \cdot \frac{L_{CD}}{A \cdot E}\right) = \frac{1}{200}$

Resultado

$\Delta := evalf\left(\Delta_{AB} + \Delta_{AC} + \Delta_{BC} + \Delta_{CD}\right) = 0.01207106781$

O deslocamento vertical em C vale 12,1 mm para baixo

Exemplo 2



restart :

Momento fletor

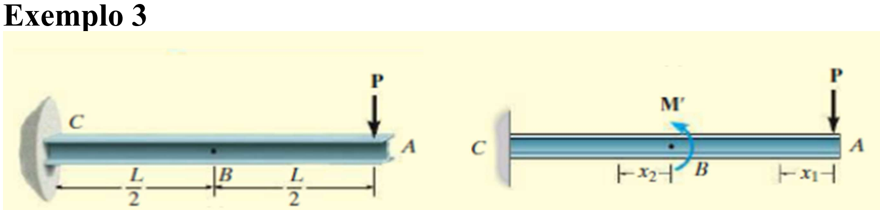
$$M := solve\left(M + P\cdot x + w\cdot\frac{x^2}{2} = 0, M\right) = -P\,x - \frac{1}{2}\,w\,x^2$$

Aplicando do segundo teorema de Castigliano

$$\delta_B := subs\left(P = 0, int\left(\frac{M}{EI}\cdot diff(M, P), x = 0..L\right)\right) = \frac{1}{8}\,\frac{w\,L^4}{EI}$$

O deslocamento vertical em B vale wL^4 / (8EI) para baixo

Exemplo 3



Determinar a rotação em B.
Considerar EI constante
restart :

Momento fletor

$$M_1 := solve\left(-M - P\cdot x_1 = 0, M\right) = -P\,x_1$$

$$M_2 := solve\left(-M - P\cdot\left(\frac{L}{2} + x_2\right) + M_B = 0, M\right) = -\frac{1}{2}\,P\,L - P\,x_2 + M_B$$

Aplicação do segundo teorema de Castigliano

$$\theta_{B1} := int\left(\frac{M_1}{EI}\cdot diff(M_1, M_B), x_1 = 0..\frac{L}{2}\right) = 0$$

$$\theta_{B2} := subs\left(M_B = 0, int\left(\frac{M_2}{EI}\cdot diff(M_2, M_B), x_2 = 0..\frac{L}{2}\right)\right) = -\frac{3}{8}\,\frac{P\,L^2}{EI}$$

$$\theta_B := \theta_{B1} + \theta_{B2} = -\frac{3}{8}\,\frac{P\,L^2}{EI}$$

A rotação em B vale 3/8 PL^2/(EI) no sentido horário