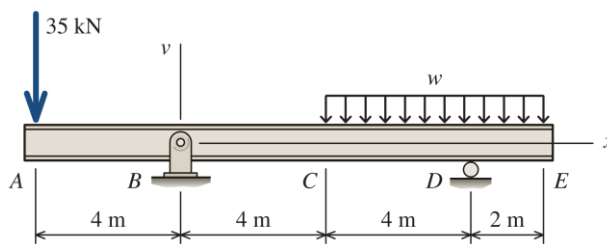


AB1P2 – Resolução

Data: 03/09/2021

Questão 1 Determinar o deslocamento vertical no ponto A e a rotação no ponto D da viga mostrada abaixo utilizando o método da superposição. Considerar a seção transversal constante ao longo do comprimento da viga. Dados: $I = 351 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $E = 200 \text{ GPa}$; $w = 80 \text{ kN/m}$.



Usando o método da superposição:

$$\theta_{B1} = \frac{wL_{CD}^2}{24L_{BD}EI} [2L_{BD}^2 - L_{CD}^2]$$

$$\theta_{D1} = \frac{wL_{CD}^2}{24L_{BD}EI} [2L_{BD} - L_{CD}]^2$$

$$\theta_{B2} = \frac{(PL_{AB})L_{BD}}{3EI}$$

$$\theta_{D2} = \frac{(PL_{AB})L_{BD}}{6EI}$$

$$\theta_{B3} = \frac{(wL_{DE}^2/2)L_{BD}}{6EI}$$

$$\theta_{D3} = \frac{(wL_{DE}^2/2)L_{BD}}{3EI}$$

$$\delta_{A4} = \frac{PL_{AB}^3}{3EI}$$

O deslocamento vertical em A e a rotação em D são determinados por:

$$v_A = [\theta_{B1} - \theta_{B2} - \theta_{B3}]L_{AB} - \delta_{A4}$$

$$\theta_D = \theta_{D1} - \theta_{D2} - \theta_{D3}$$

Questão 1: Memorial de cálculo**Dados no SI***restart :*

$$I_z := 351 \cdot 10^6 \cdot (10^{-3})^4 = \frac{351}{1000000}$$

$$E, w, P := 200 \cdot 10^9, 80 \cdot 10^3, 35 \cdot 10^3 :$$

$$L_{AB}, L_{BC}, L_{CD}, L_{DE} := 4, 4, 4, 2 :$$

$$L_{BD} := L_{BC} + L_{CD} = 8$$

Rotações e deflexões tabeladas (Anexo G - Mecânica dos Materiais, Gere)

$$\theta_{B1}, \theta_{D1} := \frac{w \cdot L_{CD}^2}{24 \cdot L_{BD} \cdot E \cdot I_z} \cdot (2 \cdot L_{BD}^2 - L_{CD}^2), \frac{w \cdot L_{CD}^2}{24 \cdot L_{BD} \cdot E \cdot I_z} \cdot (2 \cdot L_{BD} - L_{CD})^2 = \frac{56}{5265}, \frac{8}{585}$$

$$\theta_{B2}, \theta_{D2} := \frac{(P \cdot L_{AB}) \cdot L_{BD}}{3 \cdot E \cdot I_z}, \frac{(P \cdot L_{AB}) \cdot L_{BD}}{6 \cdot E \cdot I_z} = \frac{28}{5265}, \frac{14}{5265}$$

$$\theta_{B3}, \theta_{D3} := \frac{\left(\frac{w \cdot L_{DE}^2}{2}\right) \cdot L_{BD}}{6 \cdot E \cdot I_z}, \frac{\left(\frac{w \cdot L_{DE}^2}{2}\right) \cdot L_{BD}}{3 \cdot E \cdot I_z} = \frac{16}{5265}, \frac{32}{5265}$$

$$\delta_{A4} := \frac{P \cdot L_{AB}^3}{3 \cdot E \cdot I_z} = \frac{56}{5265}$$

Determinação do deslocamento vertical em A e da rotação em D

$$v_A := (\theta_{B1} - \theta_{B2} - \theta_{B3}) \cdot L_{AB} - \delta_{A4} = -\frac{8}{5265}$$

$$\theta_D := \theta_{D1} - \theta_{D2} - \theta_{D3} = \frac{2}{405}$$

$$\theta_{D, deg} := \text{convert}(\theta_D, \text{'units', 'rad', 'deg'}) = \frac{8}{9 \pi}$$

Avaliação numérica dos valores calculados

$$\theta_{B1}, \theta_{D1} := \text{evalf}(\theta_{B1}), \text{evalf}(\theta_{D1}) = 0.01063627730, 0.01367521368$$

$$\theta_{B2}, \theta_{D2} := \text{evalf}(\theta_{B2}), \text{evalf}(\theta_{D2}) = 0.005318138651, 0.002659069326$$

$$\theta_{B3}, \theta_{D3} := \text{evalf}(\theta_{B3}), \text{evalf}(\theta_{D3}) = 0.003038936372, 0.006077872745$$

$$\delta_{A4} := \text{evalf}(\delta_{A4}) = 0.01063627730$$

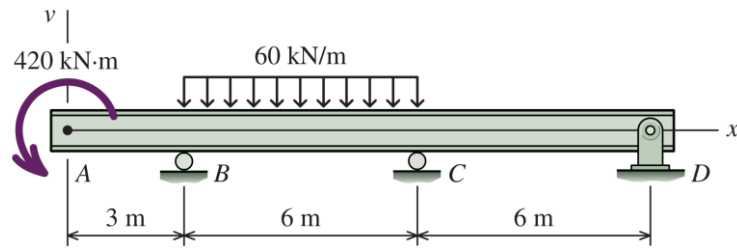
$$v_A := \text{evalf}(v_A) = -0.001519468186$$

$$\theta_D, \theta_{D, deg} := \text{evalf}(\theta_D), \text{evalf}(\theta_{D, deg}) = 0.004938271605, 0.2829421210$$

Resposta:

- O deslocamento vertical no ponto A vale 1,5195 mm para baixo
- A rotação no ponto D da viga vale 0,004938 rad ou 0,2829° no sentido anti-horário

Questão 2 Calcular as reações nos apoios da viga contínua mostrada abaixo usando o método das forças. Considerar o momento de inércia do vão BC central igual a $2EI$, onde EI é o momento de inércia dos demais vãos.



Usando o método das forças:

<p>Grau de indeterminação estática $ge = 3 - 2 = 1$</p> <p>Sistema principal</p> <p>Hiperestático</p>	<p>Reações de apoio (equilíbrio)</p> $\sum F_v = R_B + R_C + R_D - wL_{BC} = 0$ $\sum M_A = M_0 + R_B L_{AB} + R_C L_{AC} + R_D L_{AD} - wL_{BC}(L_{AB} + L_{BC}/2) = 0$ $\Rightarrow R_B = \frac{wL_{BC}^2 + 2L_{CD}R_D + 2M_0}{2L_{BC}}, R_C = \frac{wL_{BC}^2 - 2L_{BD}R_D - 2M_0}{2L_{BC}}$
<p> $\theta_{cp1} = \frac{wL_{BC}^3}{24EI_{BC}}$ </p> <p> $\theta_{cp2} = \frac{M_0 L_{BC}}{6EI_{BC}}$ </p>	<p> $\theta_{ch} = \frac{(R_D L_{CD}) L_{BC}}{3EI_{BC}}$ </p> <p> $\delta_{dh} = \frac{R_D L_{CD}^3}{3EI_{CD}}$ </p>

Os deslocamentos verticais em D no sistema principal e no hiperestático valem, respectivamente,

$$v_{Dp} = [\theta_{cp1} - \theta_{cp2}]L_{CD}$$

$$v_{Dh} = \theta_{ch}L_{CD} + \delta_{dh}$$

A equação de compatibilidade é dada por:

$$v_{Dp} + v_{Dh} = 0$$

Questão 2: Memorial de cálculo

Dados no SI

restart :

$$M_0, w := 420 \cdot 10^3, 60 \cdot 10^3 :$$

$$EI_{AB}, EI_{BC}, EI_{CD} := EI, 2 \cdot EI, EI :$$

$$L_{AB}, L_{BC}, L_{CD} := 3, 6, 6 :$$

$$L_{BD} := L_{BC} + L_{CD} = 12$$

Cálculo das reações de apoio

$$R_B, R_C := \frac{w \cdot L_{BC}^2 + 2 \cdot L_{CD} \cdot R_D + 2 \cdot M_0}{2 \cdot L_{BC}}, \frac{w \cdot L_{BC}^2 - 2 \cdot L_{BD} \cdot R_D - 2 \cdot M_0}{2 \cdot L_{BC}} = R_D + 250000, -2 R_D + 110000$$

Rotações e deflexões tabeladas (Anexo G - Mecânica dos Materiais, Gere)

$$\theta_{cp1}, \theta_{cp2} := \frac{w \cdot L_{BC}^3}{24 \cdot EI_{BC}}, \frac{M_0 \cdot L_{BC}}{6 \cdot EI_{BC}} = \frac{270000}{EI}, \frac{210000}{EI}$$

$$\theta_{ch}, \delta_{dh} := \frac{(R_D \cdot L_{CD}) \cdot L_{BC}}{3 \cdot EI_{BC}}, \frac{R_D \cdot L_{CD}^3}{3 \cdot EI_{CD}} = \frac{6 R_D}{EI}, \frac{72 R_D}{EI}$$

Deslocamento vertical em D no sistema principal e hiperestático

$$v_{dp}, v_{dh} := (\theta_{cp1} - \theta_{cp2}) \cdot L_{CD}, \theta_{ch} \cdot L_{CD} + \delta_{dh} = \frac{360000}{EI}, \frac{108 R_D}{EI}$$

Equação de compatibilização: resolvendo o hiperestático R_D

$$R_D := \text{solve}(v_{dp} + v_{dh} = 0, R_D) = -\frac{10000}{3}$$

Avaliação numérica dos valores calculados

$$\theta_{cp1}, \theta_{cp2} := \text{evalf}(\theta_{cp1}), \text{evalf}(\theta_{cp2}) = \frac{2.70000 \cdot 10^5}{EI}, \frac{2.10000 \cdot 10^5}{EI}$$

$$\theta_{ch}, \delta_{dh} := \text{evalf}(\theta_{ch}), \text{evalf}(\delta_{dh}) = -\frac{20000}{EI}, -\frac{2.40000 \cdot 10^5}{EI}$$

$$v_{dp}, v_{dh} := \text{evalf}(v_{dp}), \text{evalf}(v_{dh}) = \frac{3.60000 \cdot 10^5}{EI}, -\frac{3.60000 \cdot 10^5}{EI}$$

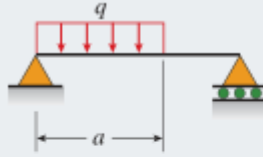

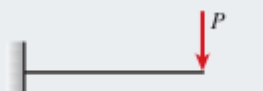
$$R_B, R_C, R_D := \text{evalf}(R_B), \text{evalf}(R_C), \text{evalf}(R_D) = 2.466666667 \cdot 10^5, 1.166666667 \cdot 10^5, -3333.333333$$

Resposta:



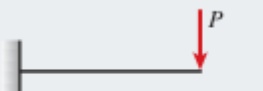
- A reação de apoio no ponto B vale 246,67 kN (para cima)
- A reação de apoio no ponto C vale 116,67 kN (para cima)
- A reação de apoio do ponto D vale 3,333 kN (para baixo)

Rotações e deflexões tabeladas (Anexo G – Mecânica dos Materiais, Gere)

Questão 1

<p>3</p> 	$v = -\frac{qx}{24EI} [a^4 - 4a^3L + 4a^2L^2 + 2a^2x^2 - 4aLx^2 + Lx^3] \quad (0 \leq x \leq a)$ $v' = -\frac{q}{24EI} [a^4 - 4a^3L + 4a^2L^2 + 6a^2x^2 - 12aLx^2 + 4Lx^3] \quad (0 \leq x \leq a)$ $v = -\frac{qa^2}{24EI} [-a^2L + 4L^2x + a^2x - 6Lx^2 + 2x^3] \quad (a \leq x \leq L)$ $v' = -\frac{qa^2}{24EI} [4L^2 + a^2 - 12Lx + 6x^2] \quad (a \leq x \leq L)$ $\theta_A = \frac{qa^2}{24EI} (2L - a)^2 \quad \theta_B = \frac{qa^2}{24EI} (2L^2 - a^2)$
<p>7</p> 	$v = -\frac{M_0x}{6EI} (2L^2 - 3Lx + x^2) \quad v' = -\frac{M_0}{6EI} (2L^2 - 6Lx + 3x^2)$ $\delta_C = \frac{M_0L^2}{16EI} \quad \theta_A = \frac{M_0L}{3EI} \quad \theta_B = \frac{M_0L}{6EI}$ $x_1 = L \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad \text{and} \quad \delta_{\max} = \frac{M_0L^2}{9\sqrt{3}EI}$
<p>4</p> 	$v = -\frac{Px^2}{6EI} (3L - x) \quad v' = -\frac{Px}{2EI} (2L - x)$ $\delta_B = \frac{PL^3}{3EI} \quad \theta_B = \frac{PL^2}{2EI}$

Questão 2

<p>1</p> 	$v = -\frac{qx}{24EI} (L^3 - 2Lx^2 + x^3)$ $v' = -\frac{q}{24EI} (L^3 - 6Lx^2 + 4x^3)$ $\delta_C = \delta_{\max} = \frac{5qL^4}{384EI} \quad \theta_A = \theta_B = \frac{qL^3}{24EI}$
<p>7</p> 	$v = -\frac{M_0x}{6EI} (2L^2 - 3Lx + x^2) \quad v' = -\frac{M_0}{6EI} (2L^2 - 6Lx + 3x^2)$ $\delta_C = \frac{M_0L^2}{16EI} \quad \theta_A = \frac{M_0L}{3EI} \quad \theta_B = \frac{M_0L}{6EI}$ $x_1 = L \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad \text{and} \quad \delta_{\max} = \frac{M_0L^2}{9\sqrt{3}EI}$
<p>4</p> 	$v = -\frac{Px^2}{6EI} (3L - x) \quad v' = -\frac{Px}{2EI} (2L - x)$ $\delta_B = \frac{PL^3}{3EI} \quad \theta_B = \frac{PL^2}{2EI}$