Equação de KdV

*Ricardo Marques**

Universidade de Coimbra, Portugal

Resumo

Em 1834, um engenheiro chamado John Scott Russell foi contratado por uma empresa para melhorar os barcos de um canal, perto de Edinburgo.
John Scott Russel observou algo muito interessante enquanto trabalhava.
O que ele observou foi 2 barcos a serem puxados por um par de cavalos numa determinada rota, tendo parado de repente e quando pararam uma pequena onda originou-se dali. Essa mesma onda manteve a forma e velocidade durante uma grande distância, tendo achado este pormenor muito interessante.

Por exemplo, quando atiramos uma pedra num lago, as ondas que resultam rapidamente se dissipam. O som que uma guitarra gera dura muito pouco tempo.
Qualquer onda que geramos geralmente se dissipa muito rápido, mas o que John Scott Russell observou foi que a onda desencadeada naquele canal pelo barco começou a mover-se numa direção, mantendo a forma e velocidade por uma distância considerável.

O engenheiro seguiu essa mesma onda durante sensivelmente 2 milhas, mas claro com o tempo a onda perdeu-se nos afluentes do canal.

As ondas solitárias observadas por John Scott Russell são atualmente chamadas de 'solitons'.
Após esta observação, John Scott Russell fez várias experiências em laboratório com solitons e chegou à conclusão que $c = \sqrt{g(h+a)}$, onde c é a velocidade da onda, h é profundidade da água onde a onda está a passar, a é a amplitude da onda e g é a aceleração da gravidade.
Posto isto, a velocidade do soliton é proporcional à sua altura e amplitude.

*Email: 2017250754@uc.pt

1 Equação de KdV

A primeira vez que qualquer tipo de base teórica foi proposta foi mais tarde por Boussinesq e Rayleigh.

Eles obtiveram um perfil de onda da forma

$$u(x,t) = \alpha sech^2(\beta(x-ct)), \frac{1}{\beta^2} = \frac{4h^3}{3a} g(h+a), a > 0, \frac{a}{h} << 1$$

As soluções são formas de onda que estão localizadas no espaço e viajam sem muita dispersão.

Outro avanço teórico é a chamada equação de Korteweg-de Vries, equação não linear de derivadas parciais e é nesta que nos vamos focar.

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

$u = u(x,t)$: altura da onda na posição x e no instante t

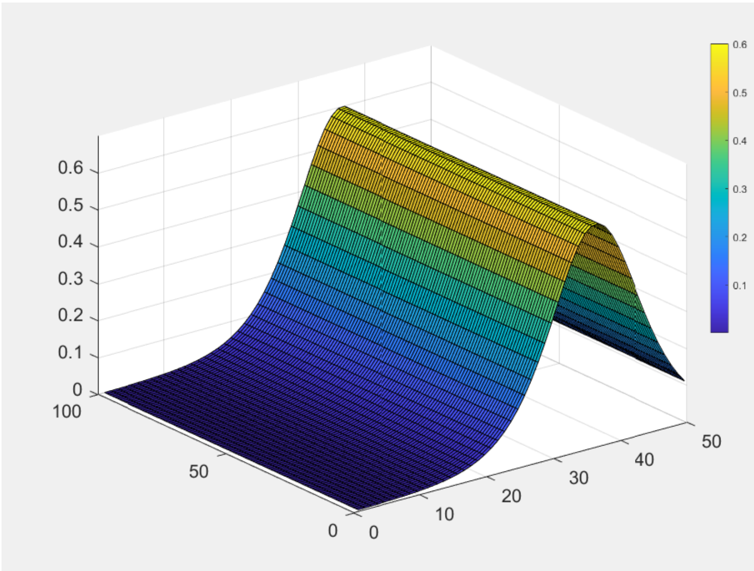

Figura 1:Simulação de onda solitária no Matlab

Esta imagem foi obtida a partir do código simulwave.m anexado.

Aqui discutimos ondas que se movem em 1D. Segundo a observação de John Scott Russell, a largura do canal não importa.
Os solitons são soluções desta equação, tendo as seguintes propriedades:

1- São localizadas;

2- Movem-se com forma e velocidade constantes;

3- São preservadas se houver colisões com outras ondas. Se dois solitons colidirem, eles reaparecem com a mesma forma e velocidade.

Enquanto os solitons por si próprios se movem a uma velocidade constante, mantendo também a sua forma, o divertimento começa quando duas soluções se aproximam.
O soliton move-se sempre para a direita e a sua velocidade é proporcional à sua altura, logo se tivermos um soliton seguindo outro, em que o soliton de "trás"é mais alto que o da "frente", então eventualmente o soliton de "trás"vai alcançar e ultrapassar o soliton da "frente".

Uma possível solução é a onda solitária dada por

$$u(x,t) = 3csech^2(\frac{\sqrt{c}}{2})(x-ct),\ \alpha = 12\beta^2 \text{ e } c = 4\beta^2,\ \beta \in \mathbb{R}$$

Vamos então verificar este último dado verificando que é solução da equação de KdV.

De $\alpha = 12\beta^2$ e $c = 4\beta^2$, temos que $\alpha = 3c$ e $beta = -sqrt(c)/2$.

Seja $z = x - ct$, então $u(x,t) = u(z), \frac{\partial u}{\partial z} = u'$

Então, tem-se que

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = (\frac{\partial u}{\partial z}).(-c) = -cu' \ (*)$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = (\frac{\partial u}{\partial z}).1 = u' \ (**)$$

$$u_{xxx} = \frac{\partial u^3}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}(u_{xx}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial x}u_x) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial u}{\partial z}).\frac{\partial u}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u^2}{\partial x^2}.1) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u^2}{\partial z^2}) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial u^2}{\partial z^2})\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial u^3}{\partial z^3}.1 = \frac{\partial u^3}{\partial z^3} = u''' \ (***)$$

Substituindo $(*), (**), (***)$ na equação de KdV, vem

$$-cu' + uu' + u''' = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial z}(-cu + \frac{1}{2}u^2 + u'') = 0$$

$$\Leftrightarrow -cu + \frac{1}{2}u^2 + u'' - \gamma_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \int(-cu + \frac{1}{2}u^2 + u'')du = 0$$

$$\Leftrightarrow -c\frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{(u')^2}{2} - \gamma_1 u - \gamma_2 = 0, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$$

Seja $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$,vem então $-c\frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{(u')^2}{2} = 0$

$$u' = \sqrt{cu^2 - \frac{u^3}{3}} \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = \sqrt{cu^2 - \frac{u^3}{3}} \Leftrightarrow \frac{du}{\sqrt{cu^2 - \frac{u^3}{3}}} = dz$$

$$\Leftrightarrow \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{cu^2 - \frac{u^3}{3}}} = \int_{u_0}^{u} dz \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{c}}\int_{u_0}^{u} \frac{du}{u\sqrt{1 - \frac{u}{3c}}} = z - z_0 \ \text{(ii)}$$

Considerando agora $u = \alpha sech^2(\beta(x - ct)) = 3csech^2(-\sqrt{\frac{c}{2}}z)$.

Temos que $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(\alpha sech^2(\beta(x-ct)) = 3csech^2(-\sqrt{\frac{c}{2}}z)) = \alpha sech^2(\beta(x-ct)) = 3c\sqrt{c}sech^2(-\sqrt{\frac{c}{2}}z)tanh(-\sqrt{\frac{c}{2}}z)$

$\Leftrightarrow du = 3c\sqrt{c}sech^2(-\sqrt{\frac{c}{2}}z)tanh(-\sqrt{\frac{c}{2}}z)dz$ (ii)

Então de (i),(ii), vem que

$$\frac{1}{\sqrt{c}}\int_{u_0}^{u} \frac{3c\sqrt{c}sech^2(-\sqrt{\frac{c}{2}}z)tanh(-\sqrt{\frac{c}{2}}z)}{3csech^2(-\frac{\sqrt{c}}{2}z)\sqrt{1 - \frac{3csech^2(-\frac{\sqrt{c}}{2})}{3c}})}dz = u - u_0$$

$$\Leftrightarrow \int_{u_0}^{u} \frac{tanh(-\frac{\sqrt{c}}{2}z)}{\sqrt{1 - sech^2(-\frac{\sqrt{c}}{2})}}dz = u - u_0 \Leftrightarrow \int_{u_0}^{u} dz = u - u_0$$

Esta equivalência é verdadeira logo conclui-se que $u(z) = 3csech^2(-\frac{\sqrt{c}}{2}z)$

$$\Leftrightarrow u(x,t) = 3csech^2(-\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct)) = \alpha sech^2(\beta(x - ct)) \text{ é a solução da equação de KdV.}$$

Vamos agora analisar a equação de KdV ignorando cada um das seus termos à vez e tirando as posteriores conclusões.

Se eliminarmos apenas da equação u_t, é fácil perceber que vamos perder completamente a evolução do tempo e isso não é claramente opção.

Se eliminarmos apenas o segundo termo da equação (uu_x), termo este que não é linear, obtemos uma equação de KdV "linearizada". Obtemos $u_t = -u_{xxx}$.
Isto é equivalente a a termos $u' + u''' = 0$ e esta é uma equação diferencial linear homogénea com solução

$$u\left(z\right) = c_1 + c_2 \cos\left(z\right) + c_3 \sin\left(z\right) \Leftrightarrow \text{u}(x,t) = c_1 + c_2 \cos\left(x - ct\right) + c_3 \sin\left(x - ct\right)$$

O termo u_{xxx} está relacionado com a dispersão da onda, logo à medida que o tempo passa a onda localizada vai dispersar-se . Essas ondas que movem em direção a x a tender para menos infinito, se fixarmos um valor para para x, a amplitude da onda vai aproximar-se de zero à medida que o tempo passa.

O terceiro termo(u_{xxx}) é o responsável pela dispersão da onda. Se eliminarmos da equação apenas este termo, obtemos uma equação de advecção

$$\frac{1}{u} u_t + u_x = 0$$

com solução exata e a propagação da condição inicial com velocidade c tal que

$$u(x,t) = u_0(x - ct)$$

A onda vai permanecer localizada, não há dispersão e acumula-se para a direita e ao fim de um tempo quebra-se, a este tempo chama-se tempo de interrupção.

2 Aplicação do Método das diferenças finitas

Vamos agora descrever o método utilizado para aproximar a solução do problema.

Seja $Q \bar{=} [0,1] \times (0,T], T > 0$.

Queremos encontrar $u(x,t)$ tal que

$$\begin{cases} u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, x \in Q = (0,1) \times (0,T] \\ u(0,t) = \alpha sech^2(-\beta ct), t \in [0,T] \\ u(1,t) = \alpha sech^2(-\beta(1-ct)), t \in [0,T] \\ u(x,0) = \alpha sech^2(\beta x), x \in [0,1] \end{cases}$$

Definimos a malha $\bar{Q}_h^{\Delta t}$ em $\bar{Q}r = [0,1] \times [0,T]$, tal que a malha é uniforme, onde o h ($h = \frac{1}{N+1}$) é o tamanho da malha na direção x e $\Delta t(\Delta t = T/M)$ tamanho da malha na direção t.

$\bar{Q}_h^{\Delta t} =\leq \left\{(x_j, t^m) : x_j = jh, 0 \leq j \leq N+1, t^m = m\Delta t; 0 \leq m \leq M\right\}$

Seja $V_h \subset H_0^1$, o conjunto de todas as funções lineares por segmentos definidos na x-malha

$0 = x_0 < x_1 < .... < x_N < x_{N+1} = 1$, que desaparece nos pontos finais $x = 0$ e $x = 1$.

Discretizando o problema inicial, agora queremos encontrar $U_j \approx u(x_j, t^m)$ para $0 \leq j \leq N+1$, $0 \leq m \leq M$:

$$\frac{U_j^{m+1} - U_j^m}{\Delta t} + U_j^m \frac{U_{j+1}^m - U_j^m}{h} + \frac{1}{2h^3}(U_{j+2}^m - U_{j-2}^m - 2U_{j+1}^m + 2U_{j-1}^m) = 0$$
$$\Leftrightarrow U_j^{m+1} = U_j^m - U_j^m \frac{\Delta t}{h}(U_{j+1}^m - U_j^m) - \frac{\Delta t}{2h^3}(U_{j+2}^m - U_{j-2}^m - 2U_{j+1}^m + 2U_{j-1}^m)$$

com as seguintes condições de fronteiras

$$\begin{cases} U_0^m = \alpha sech^2(-\beta ct), 0 \leq m \leq M \\ U_{N+1}^m = \alpha sech^2(-\beta(1-ct)), 0 \leq m \leq M \\ U_j^0 = \alpha sech^2(-\beta x_j), 0 \leq j \leq N+1 \end{cases}$$

A discretização da terceira derivada foi obtida a partir do seguinte raciocínio.

Usando Taylor, calculei aproximações até ordem 4 de $f(x_0 \pm h)$,$f(x_0 \pm 2h)$ em x_0.

Assim temos, para $\xi_i, i = 1,2,3,4$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2!} + f'''(x_0)\frac{h^3}{3!} + f^{(4)}(x_0)\frac{h^4}{4!} + f^{(5)}(\xi_1)\frac{h^5}{5!} \text{ , } \xi_1 \in (x_0, x_0+h)$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2!} - f'''(x_0)\frac{h^3}{3!} + f^{(4)}(x_0)\frac{h^4}{4!} - f^{(5)}(\xi_2)\frac{h^5}{5!} \text{ ,} \xi_1 \in (x_0-h, x_0)$$

$$f(x_0+2h) = f(x_0) + f'(x_0)2h + f''(x_0)\frac{(2h)^2}{2!} + f'''(x_0)\frac{(2h)^3}{3!} + f^{(4)}(x_0)\frac{(2h)^4}{4!} + f^{(5)}(\xi_3)\frac{(2h)^5}{5!} =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)2h + f''(x_0)2h^2 + f'''(x_0)\frac{4h^3}{3} + f^{(4)}(x_0)\frac{2h^4}{3} + f^{(5)}(\xi_3)\frac{4h^5}{15}, \xi_4 \in (x_0, x_0+2h)$$

$$f(x_0-2h) = f(x_0) - f'(x_0)2h + f''(x_0)\frac{(2h)^2}{2!} - f'''(x_0)\frac{(2h)^3}{3!} + f^{(4)}(x_0)\frac{(2h)^4}{4!} - f^{(5)}(\xi_4)\frac{(2h)^5}{5!} =$$

$$= f(x_0) - f'(x_0)2h + f''(x_0)2h^2 - f'''(x_0)\frac{4h^3}{3} + f^{(4)}(x_0)\frac{2h^4}{3} - f^{(5)}(\xi_4)\frac{4h^5}{15}, \xi_3 \in (x_0-2h, x_0)$$

Agora note-se que $f(x_0+2h)-f(x_0-2h)-2[f(x_0+h)-f(x_0-h)] = f(x_0)2h^3+\bar{\xi}h^5$, com $\bar{\xi}=\frac{4}{15}(f^{(5)}(\xi_3)-f^{(5)}(\xi_4))-\frac{1}{60}(f^{(5)}(\xi_2)-f^{(5)}(\xi_1))$

Desprezando o erro $(\bar{\xi}h^5)$, temos

$$f'''(x_0)=\frac{1}{2h^3}[f(x_0+2h)-f(x_0-2h)-2f(x_0+h)+2f(x_0-h)]$$

Assim obtemos a seguinte discretização

$u_{xxx}(x_j,t^m)=\frac{1}{2h^3}(U^m_{j+2}-U^m_{j-2}-2U^m_{j+1}+U^m_{j-1})$

Referências

[1] Adérito Araújo *Lecture Notes on Numerical Methods for PDEs, Coimbra, 2020.*

[2] KdV equation...solitons and inverse scattering,
`https://people.maths.ox.ac.uk/trefethen/pdectb.html`