UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO BICOCCA

Confronto tra risolutori per sistemi lineari sparsi

Metodi del calcolo scientifico

Matamoros Ricardo 807450

r.matamorosaragon@campus.unimib.it

21 giugno 2019

Introduzione

L'obiettivo di questo progetto è quello di confrontare Matlab con diverse librerie open source, le quali forniscono l'implementazione del metodo di Cholesky per risolvere sistemi lineari di matrici sparse definite positive. Il confronto prevede l'utilizzo di due sistemi operativi, i quali sono stati configurati per l'utilizzo delle librerie analizzate.

Windows & Linux

Linux Mint 19.1 Cinnamon

version Cinnamon: 4.0.8
version: Lenovo ideapad Y700-15ISK
width: 64 bits
capabilities: smbios-2.8 dmi-2.8 smp vsyscall32
cpu
product: Intel(R) Core(TM) i7-6700HQ CPU @ 2.60GHz
vendor: Intel Corp.
memory
description: System Memory size: 8GiB
memory storage : 80GB

Windows 10 pro

version: Lenovo ideapad Y700-15ISK
width: 64 bits
capabilities: smbios-2.8 dmi-2.8 smp vsyscall32
cpu
product: Intel(R) Core(TM) i7-6700HQ CPU @ 2.60GHz
vendor: Intel Corp.
memory
description: System Memory size: 8GiB
memory storage : 420 GB

Matlab

MATLAB è una piattaforma di programmazione progettata per il calcolo basato su matrici, permette di implementare efficientemente algoritmi della matematica computazionale.
MATLAB è ben documentato, supportato e ha una grande comunità.
MATLAB non è open-source e specialmente non è gratuito: il costo della licenza varia molto a seconda dell'uso. MATLAB è facile da imparare e da utilizzare, ma è anche un intero ambiente di programmazione, ed è questo che lo rende meno portabile rispetto ad altre scelte.

Matlab

MATLAB integra la funzionalità per la risoluzione di sistemi lineari sparsi tramite la fattorizzazione di Cholesky. La quale viene eseguita attraverso l'istruzione x = A \B (operatore mldivide), MATLAB sceglie internamente il risolutore ottimale basato su matrici simmetriche, riducendo al minimo il tempo di calcolo.
Per le matrici sparse, la fattorizzazione di Cholesky viene utilizzata quando la matrice è quadrata, non è triangolare ne permutata, è Hermitiana ed è diagonale definita positiva.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO BICOCCA

Scikit-Sparse (Python)

Scikit-Sparse è una libreria di script Scipy.Sparse open source per la manipolazione di matrici sparse che estende la libreria Scipy.
Scikit-Sparse è documentato anche se il livello di descrizione delle funzioni fornite non sia molto accurata.
Sulla maggior parte delle distribuzioni Linux vengono offerti i file già compilati nella repository della distro.
Per Windows, la compilazione di SuiteSparse / Cholmod richiede l'uso di qualche gestore delle dipendenze.

Scikit-Sparse (Python)

Scikit-Sparse consente di effettuare la Fattorizzazioni di Cholesky sia come LDL^T che LL^T.
Offre anche un'interfaccia comoda ed efficiente per l'utilizzo di questa decomposizione per risolvere i problemi del tipo Ax = b.

Eigen (C++)

Eigen è una libreria C ++ open source per l'algebra lineare.
Eigen presenta un'ampia documentazione, cicli di rilascio stabili ed è utilizzato da un ampia quantità di progetti (ad esempio Google's Tensorflow).
Eigen, essendo una libreria di solo file .header, è abbastanza facile da includere in un progetto, e non richiede dipendenze aggiuntive.

Operazioni

Tutti i test sono stati condotti calcolando l'equazione Ax = b, dove b è stata scelta per contenere la soluzione esatta composta come xe = [1 1 1 1 1 ...].
In altre parole, b = A * xe.

Matrici

Tutti le matrici in input sono definite positive e simmetriche, provengono dalla SuiteSparse Matrix Collection. In particolare, sono state utilizzate le seguenti matrici:

- ex15
- cfd1
- shallow_water1
- cfd2
- parabolic_fem
- apache2
- StocF-1465
- Flan_1565
- G3_circuit

Performance

Per ogni libreria e piattaforma, sono stati misurati tre parametri per il confronto:

- Errore relativo
- Tempo per la risoluzione del sistema
- Memoria utilizzata

Matlab


```
mat =load(strcat(path, name_matrix));
A=mat.Problem.A;
n=size(A,1);
xe=ones(n,1);
b=A*xe;
x=A\b;
error = norm(x-xe)/norm(xe);
```

Scikit-sparse


```
from sksparse.cholmod import cholesky
import numpy as np
from scipy.io import mmread

def chol(A):
    factor = cholesky(A)
    xe=[1]*A.shape[0]
    b=A.dot(xe)
    x =factor(b)
    error=np.linalg.norm(x-xe)/np.linalg.norm(xe)


A = mmread(path+matrix).tocsc()
chol(A)
```

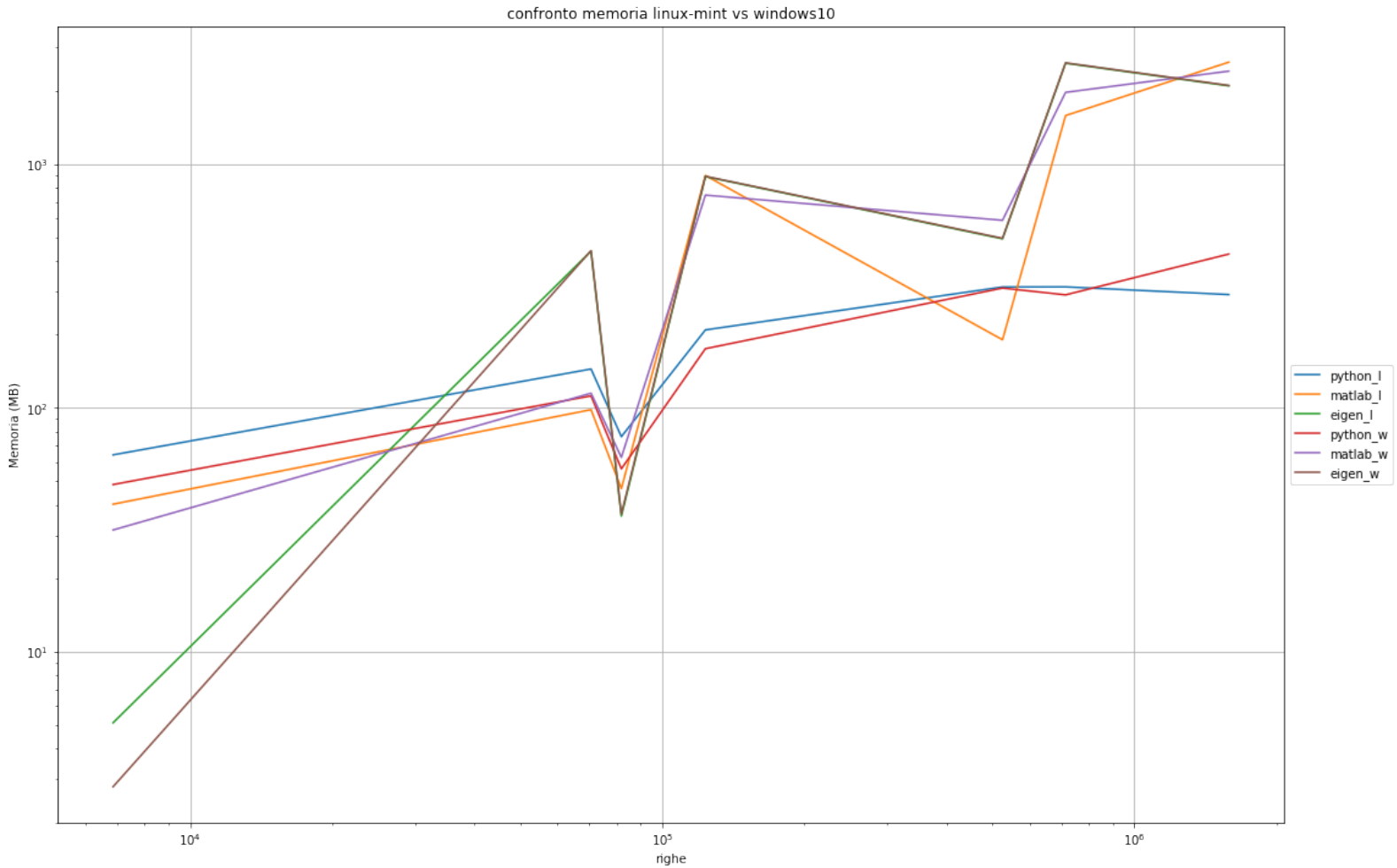
Eigen


```
#include <Eigen/Sparse>
#include <Eigen/SparseCholesky>
typedef Eigen::SparseMatrix<double, Eigen::ColMajor> sparsa;
int main(int argc, char** argv){
    sparsa A;
    //open matrix
    loadMarket(A, matrix);
    int n=A.cols();
    Eigen::VectorXd b(n),x(n), xe(n);
    xe=VectorXd::Constant(A.rows(), 1);
    //Cholesky factorization of A
    Eigen::SimplicialCholesky<sparsa,Eigen::Lower> chol(A);
    b=A.selfadjointView<Eigen::Lower>() * xe;
    x =chol.solve(b);
    double relative_error = (x-xe).norm()/(xe).norm();
}
```

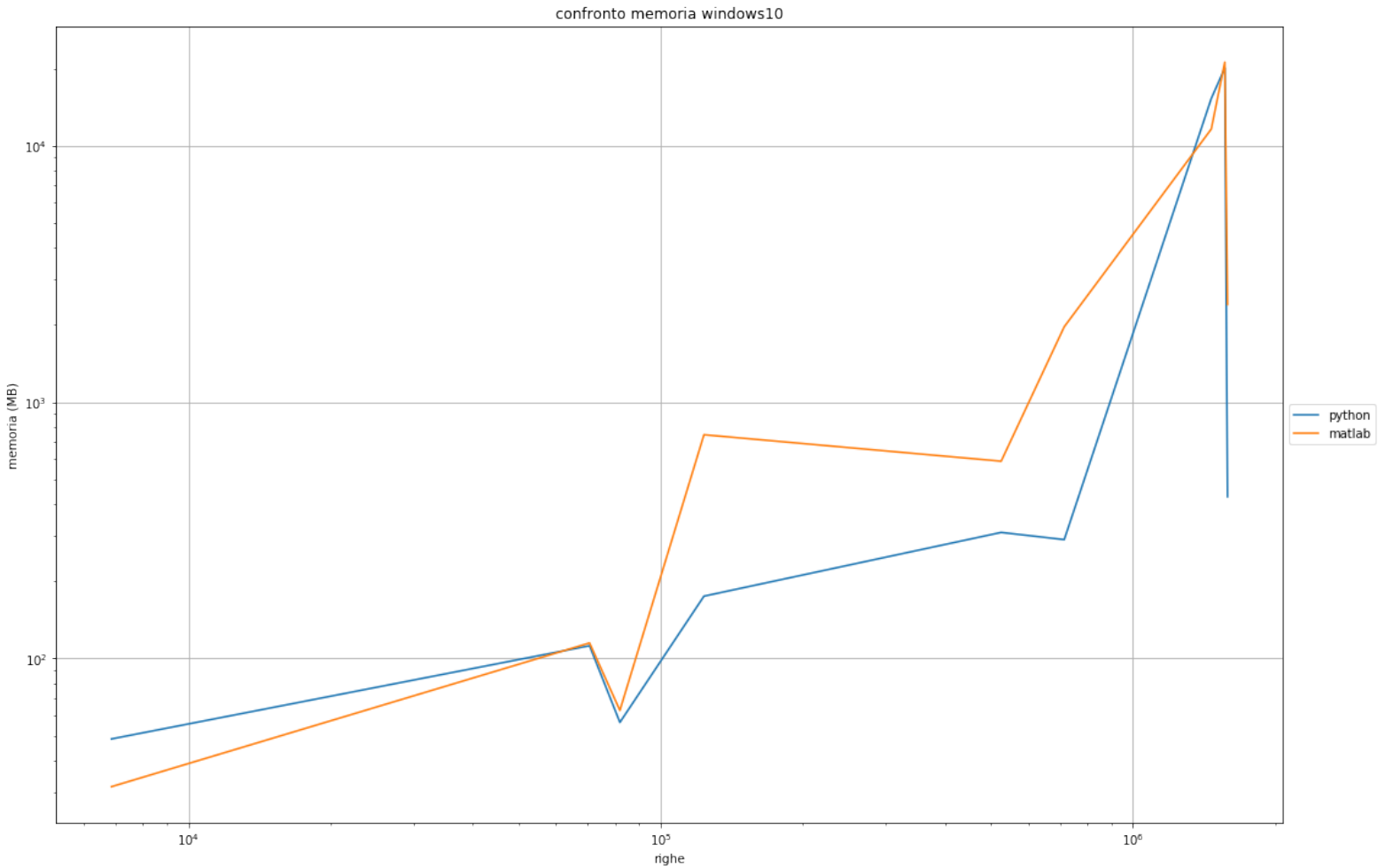
Note

- Le matrici StocF-1465 e Flan_1565 falliscono in eigen.
- Le matrici StocF-1465 e Flan_1565 non erano computabili in linux (vincolo di memoria).
- Per rilevare la memoria sono stati utilizzati diversi strumenti.
- Le matrici sono state ordinate in modo crescente rispetto alla dimensione.

Memoria



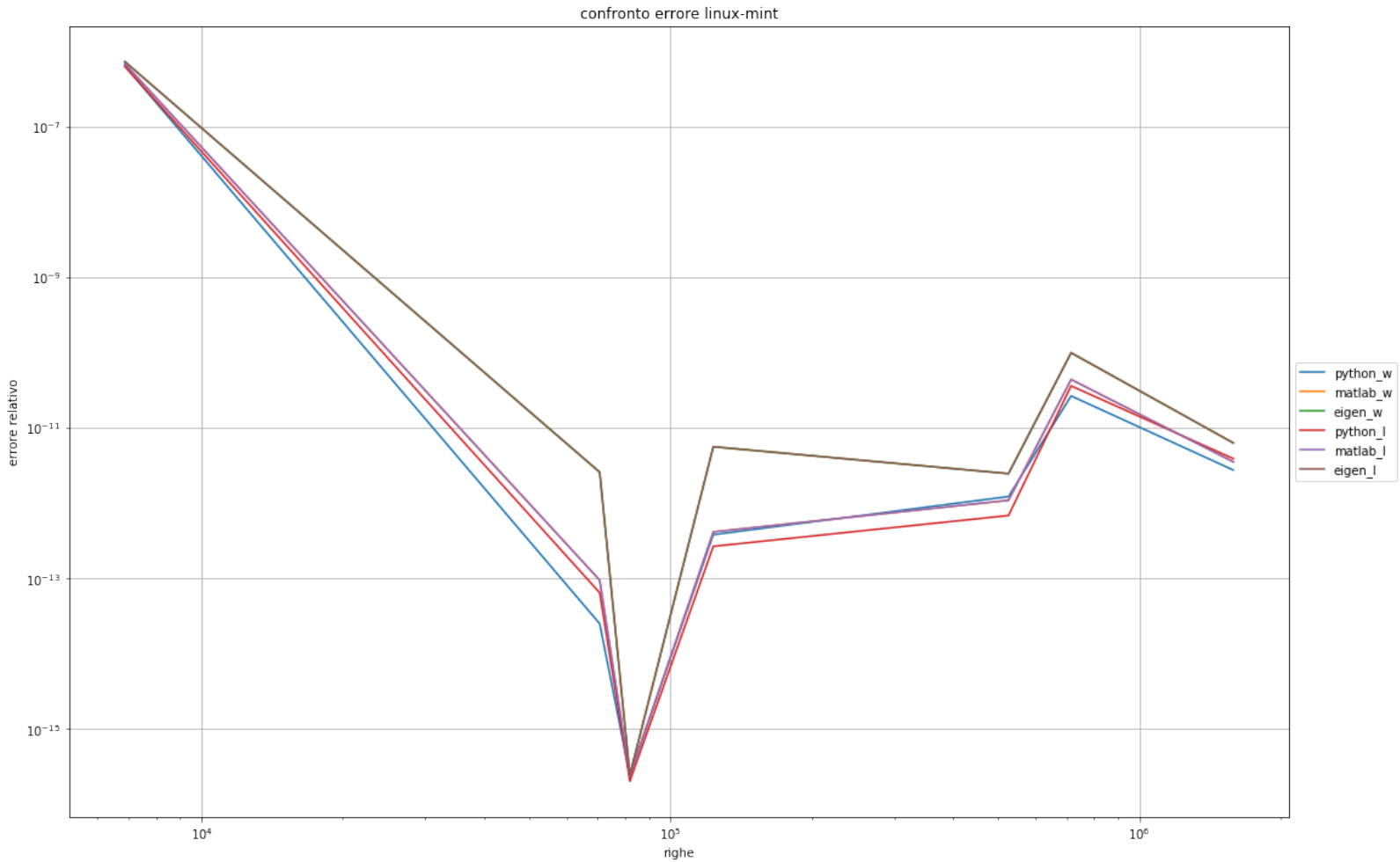
Memoria per StocF-1465 & Flan_1565



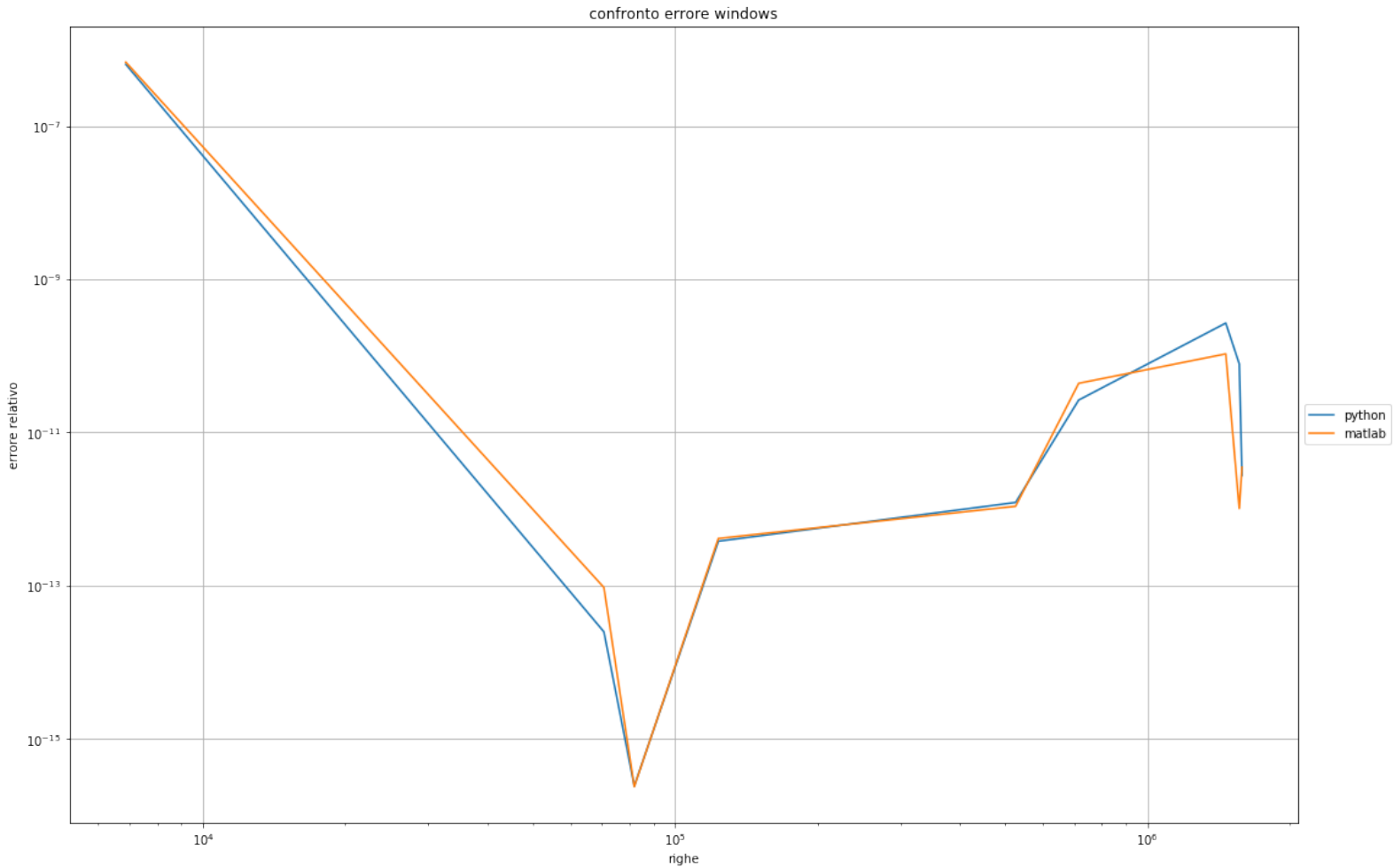
Considerazioni sulla memoria utilizzata

- Per le matrici di dimensione inferiore a 10K Eigen si comporta in modo migliore rispetto a Matlab e Scikit-sparse sia in Linux che Windows.
- La libreria più stabile è scikit-sparse.
- A livello di memoria su matrici di grande dimensioni è preferibile Scikit-sparse con 292 MB per G3_circuit.

Errore Relativo



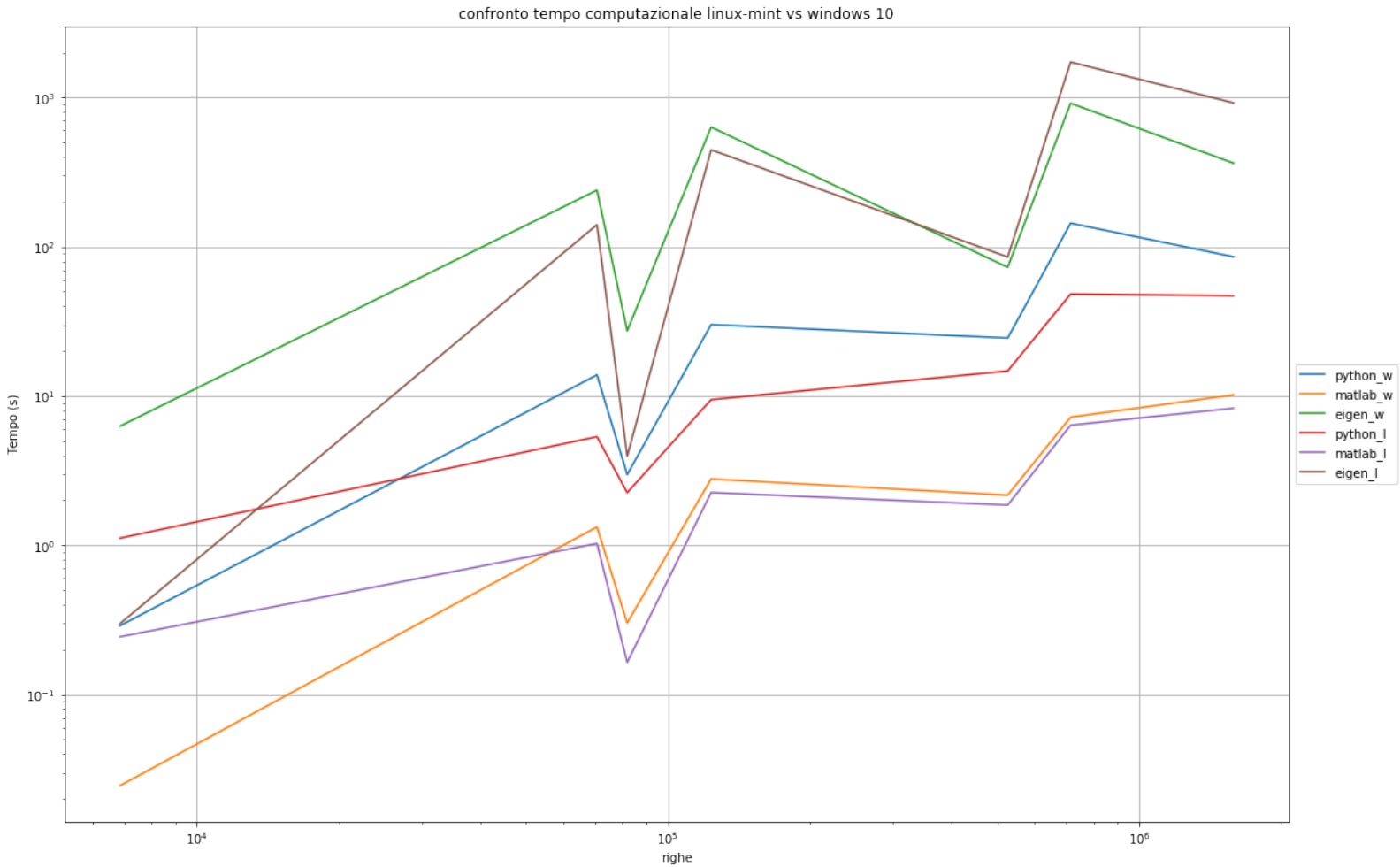
Errore Relativo per StocF-1465 & Flan_1565



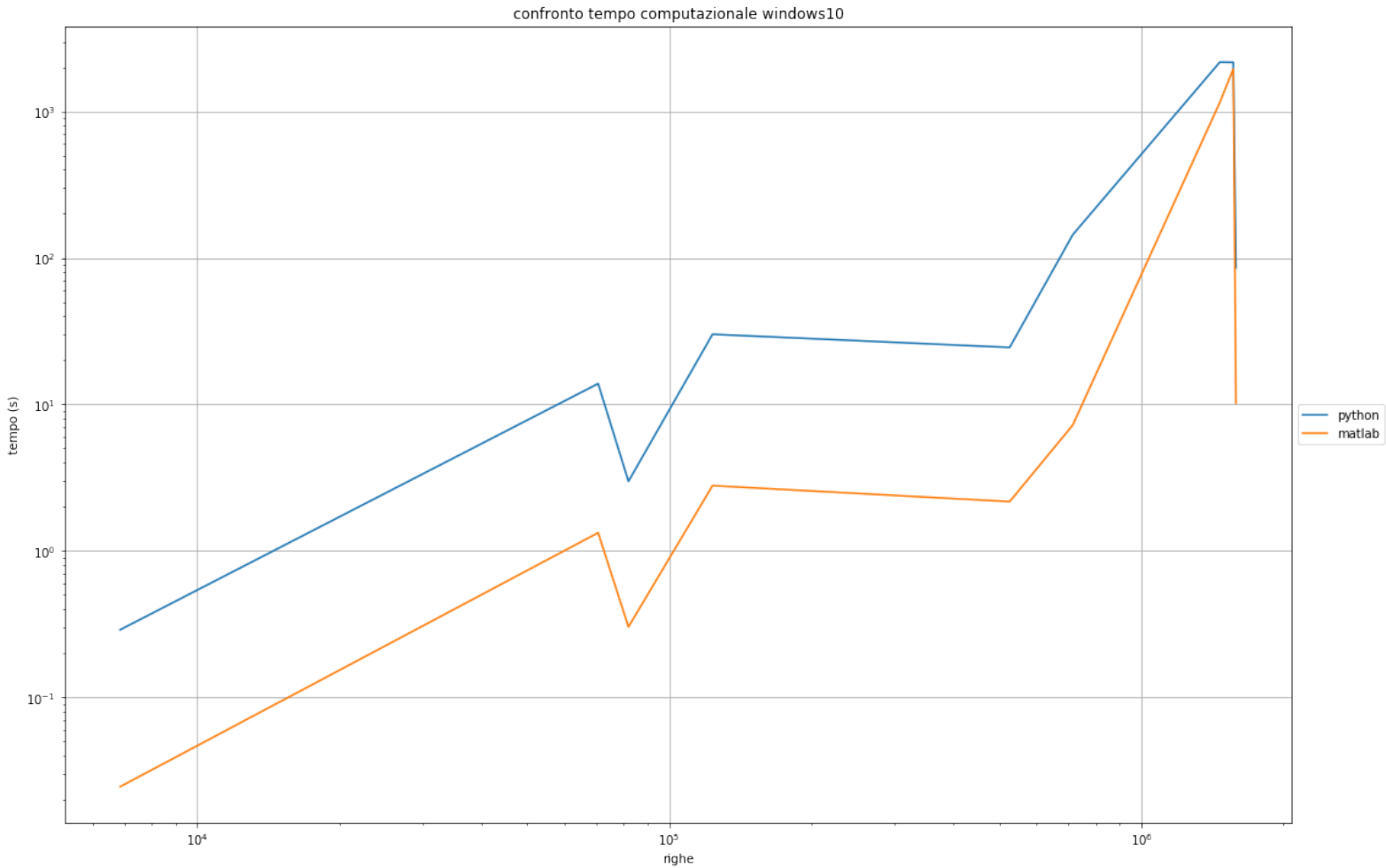
Considerazioni sull'Errore relativo

- Complessivamente le librerie si comportano allo stesso modo sia in Linux che Windows.
- In Linux Mint Eigen presenta un errore relativo superiore di circa 1 ordine di grandezza.
- l'errore relativo più grande corrisponde alla matrice ex15, dovuto al mal condizionamento della matrice.

Tempo Richiesto



Tempo Richiesto per StocF-1465 & Flan_1565



Considerazioni sul tempo richiesto

- Per questa misura è evidente che Matlab è molto più performante rispetto a Python e Eigen che presenta il peggiore risultato.
- Per esempio per Apache2 Eigen va oltre le 10 ore di tempo, Scikit-Sparse circa 2 ore, invece Matlab circa 8 secondi.

Conclusioni

- Dopo l'analisi delle misure effettuata nelle diapositive precedenti, MATLAB sembra essere lo strumento più veloce per risolvere sistemi lineari sparsi con la fattorizzazione di Cholesky.
- Tuttavia, su matrici di grandi dimensioni richiede una quantità di memoria elevata per funzionare correttamente.
- Produce anche errori relativi molto bassi, sopratutto per le matrici di grandi dimensioni riporta i risultati migliori.

Conclusioni

- Scikit-sparse presenta i risultati migliori rispetto alla quantità di memoria richiesta per la fattorizzazione di Cholesky.
- Scikit-Sparse potrebbe essere una buona scelta per la risoluzione di matrici che richiedono tempi ragionevoli di esecuzione, inoltre è open source.
- L'errore relativo ottenuto è leggermente migliore di quello di Matlab rispetto alle matrici di piccole dimensione.

Conclusioni

- Infine Eigen è stato il meno performante in termini di tempo, memoria e errore relativo.
- Eigen è stato utilizzato solo con le funzioni fornite di default, ma ha il vantaggio che è ampiamente supportato, è in futuro potrebbero essere rilasciati miglioramenti o estensioni a librerie esterne come BLAS / Lapack.

GRAZIE PER L'ATTENZIONE

Matamoros Ricardo 807450