

Cálculo de Programas

Trabalho Prático

MiEI+LCC — 2018/19

Departamento de Informática
Universidade do Minho

Junho de 2019

Grupo nr.	99 (preencher)
a77045	Ricardo Barros Pereira
a22222	Nome2 (preencher)
a33333	Nome3 (preencher)

1 Preâmbulo

A disciplina de **Cálculo de Programas** tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação (conjunto de leis universais e seus corolários) e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos dois cursos que têm esta disciplina, restringe-se a aplicação deste método à programação funcional em **Haskell**. Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em **Haskell**. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas, validá-los, e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

2 Documentação

Para cumprir de forma integrada os objectivos enunciados acima vamos recorrer a uma técnica de programação dita “**literária**” [1], cujo princípio base é o seguinte:

Um programa e a sua documentação devem coincidir.

Por outras palavras, o código fonte e a documentação de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp1819t.pdf` que está a ler é já um exemplo de **programação literária**: foi gerado a partir do texto fonte `cp1819t.lhs`¹ que encontrará no **material pedagógico** desta disciplina descompactando o ficheiro `cp1819t.zip` e executando

```
$ lhs2TeX cp1819t.lhs > cp1819t.tex
$ pdflatex cp1819t
```

em que **lhs2tex** é um pre-processor que faz “pretty printing” de código Haskell em **L^AT_EX** e que deve desde já instalar executando

```
$ cabal install lhs2tex
```

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp1819t.lhs` é executável e contém o “kit” básico, escrito em **Haskell**, para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp1819t.lhs
```

¹O suffixo ‘lhs’ quer dizer *literate Haskell*.

Abra o ficheiro `cp1819t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

vai ser seleccionado pelo **GHCI** para ser executado.

3 Como realizar o trabalho

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de três alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na [página da disciplina](#) na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo de trabalho por forma a poderem responder às questões que serão colocadas na *defesa oral* do relatório.

Em que consiste, então, o *relatório* a que se refere o parágrafo anterior? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo **D** com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com **BibTeX**) e o índice remissivo (com **makeindex**),

```
$ bibtex cp1819t.aux
$ makeindex cp1819t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. Dever-se-á ainda instalar o utilitário **QuickCheck**, que ajuda a validar programas em **Haskell** e a biblioteca **Gloss** para geração de gráficos 2D:

```
$ cabal install QuickCheck gloss
```

Para testar uma propriedade **QuickCheck** *prop*, basta invocá-la com o comando:

```
> quickCheck prop
+++ OK, passed 100 tests.
```

Qualquer programador tem, na vida real, de ler e analisar (muito!) código escrito por outros. No anexo **C** disponibiliza-se algum código **Haskell** relativo aos problemas que se seguem. Esse anexo deverá ser consultado e analisado à medida que isso for necessário.

Problema 1

Um compilador é um programa que traduz uma linguagem dita de *alto nível* numa linguagem (dita de *baixo nível*) que seja executável por uma máquina. Por exemplo, o **GCC** compila C/C++ em código objecto que corre numa variedade de arquitecturas.

Compiladores são normalmente programas complexos. Constan essencialmente de duas partes: o *analizador sintático* que lê o texto de entrada (o programa *fonte* a compilar) e cria uma sua representação interna, estruturada em árvore; e o *gerador de código* que converte essa representação interna em código executável. Note-se que tal representação intermédia pode ser usada para outros fins, por exemplo, para gerar uma listagem de qualidade (*pretty print*) do programa fonte.

O projecto de compiladores é um assunto complexo que será assunto de outras disciplinas. Neste trabalho pretende-se apenas fazer uma introdução ao assunto, mostrando como tais programas se podem construir funcionalmente à custa de cata/ana/hilo-morfismos da linguagem em causa.

Para cumprirmos o nosso objectivo, a linguagem desta questão terá que ser, naturalmente, muito simples: escolheu-se a das expressões aritméticas com inteiros, *eg.* $1+2$, $3*(4+5)$ etc. Como representação interna adopta-se o seguinte tipo polinomial, igualmente simples:

```
data Expr = Num Int | Bop Expr Op Expr
data Op = Op String
```

1. Escreva as definições dos {cata, ana e hilo}-morfismos deste tipo de dados segundo o método ensinado nesta disciplina (recorde módulos como *eg.* `BTree` etc).

2. Como aplicação do módulo desenvolvido no ponto 1, defina como $\{\text{cata}, \text{ana ou hilo}\}$ -morfismo a função seguinte:

- $\text{calcula} :: \text{Expr} \rightarrow \text{Int}$ que calcula o valor de uma expressão;

Propriedade QuickCheck 1 O valor zero é um elemento neutro da adição.

```
prop_neutro1 :: Expr → Bool
prop_neutro1 = calcula · addZero ≡ calcula where
  addZero e = Bop (Num 0) (Op "+") e
prop_neutro2 :: Expr → Bool
prop_neutro2 = calcula · addZero ≡ calcula where
  addZero e = Bop e (Op "+") (Num 0)
```

Propriedade QuickCheck 2 As operações de soma e multiplicação são comutativas.

```
prop_comuta = calcula · mirror ≡ calcula where
  mirror = cataExpr [Num, g2]
  g2 =  $\widehat{\widehat{\text{Bop}}} \cdot (\text{swap} \times \text{id}) \cdot \text{assocl} \cdot (\text{id} \times \text{swap})$ 
```

3. Defina como $\{\text{cata}, \text{ana ou hilo}\}$ -morfismos as funções

- $\text{compile} :: \text{String} \rightarrow \text{Codigo}$ - trata-se do compilador propriamente dito. Deverá ser gerado código posfixo para uma máquina elementar de **stack**. O tipo *Codigo* pode ser definido à escolha. Dão-se a seguir exemplos de comportamentos aceitáveis para esta função:

```
Tp4> compile "2+4"
["PUSH 2", "PUSH 4", "ADD"]
Tp4> compile "3*(2+4)"
["PUSH 3", "PUSH 2", "PUSH 4", "ADD", "MUL"]
Tp4> compile "(3*2)+4"
["PUSH 3", "PUSH 2", "MUL", "PUSH 4", "ADD"]
Tp4>
```

- $\text{show}' :: \text{Expr} \rightarrow \text{String}$ - gera a representação textual de uma *Expr* pode encarar-se como o *pretty printer* associado ao nosso compilador

Propriedade QuickCheck 3 Em anexo, é fornecido o código da função *readExp*, que é “inversa” da função *show'*, tal como a propriedade seguinte descreve:

```
prop_inv :: Expr → Bool
prop_inv =  $\pi_1 \cdot \text{head} \cdot \text{readExp} \cdot \text{show}' \equiv \text{id}$ 
```

Valorização Em anexo é apresentado código **Haskell** que permite declarar *Expr* como instância da classe *Read*. Neste contexto, *read* pode ser vista como o analisador sintático do nosso minúsculo compilador de expressões aritméticas.

Analise o código apresentado, corra-o e escreva no seu relatório uma explicação **breve** do seu funcionamento, que deverá saber defender aquando da apresentação oral do relatório.

Exprima ainda o analisador sintático *readExp* como um anamorfismo.

Problema 2

Pretende-se neste problema definir uma linguagem gráfica “brinquedo” a duas dimensões (2D) capaz de especificar e desenhar agregações de caixas que contêm informação textual. Vamos designar essa linguagem por *L2D* e vamos defini-la como um tipo em **Haskell**:

```
type L2D = X Caixa Tipo
```

onde *X* é a estrutura de dados



Figura 1: Caixa simples e caixa composta.

data $X \ a \ b = Unid \ a \mid Comp \ b \ (X \ a \ b) \ (X \ a \ b)$ **deriving** *Show*

e onde:

type $Caixa = ((Int, Int), (Texto, G.Color))$
type $Texto = String$

Assim, cada caixa de texto é especificada pela sua largura, altura, o seu texto e a sua cor.² Por exemplo,

$((200, 200), ("Caixa \ azul", col_blue))$

designa a caixa da esquerda da figura 1.

O que a linguagem *L2D* faz é agregar tais caixas tipográficas umas com as outras segundo padrões especificados por vários “tipos”, a saber,

data $Tipo = V \mid Vd \mid Ve \mid H \mid Ht \mid Hb$

com o seguinte significado:

- V - agregação vertical alinhada ao centro
- Vd - agregação vertical justificada à direita
- Ve - agregação vertical justificada à esquerda
- H - agregação horizontal alinhada ao centro
- Hb - agregação horizontal alinhada pela base
- Ht - agregação horizontal alinhada pelo topo

Como *L2D* instancia o parâmetro b de X com $Tipo$, é fácil de ver que cada “frase” da linguagem *L2D* é representada por uma árvore binária em que cada nó indica qual o tipo de agregação a aplicar às suas duas sub-árvores. Por exemplo, a frase

$ex2 = Comp \ Hb \ (Unid \ ((100, 200), ("A", col_blue)))$
 $\quad \quad \quad (Unid \ ((50, 50), ("B", col_green)))$

deverá corresponder à imagem da direita da figura 1. E poder-se-á ir tão longe quando a linguagem o permita. Por exemplo, pense na estrutura da frase que representa o *layout* da figura 2.

É importante notar que cada “caixa” não dispõe informação relativa ao seu posicionamento final na figura. De facto, é a posição relativa que deve ocupar face às restantes caixas que irá determinar a sua posição final. Este é um dos objectivos deste trabalho: *calcular o posicionamento absoluto de cada uma das caixas por forma a respeitar as restrições impostas pelas diversas agregações*. Para isso vamos considerar um tipo de dados que comporta a informação de todas as caixas devidamente posicionadas (i.e. com a informação adicional da origem onde a caixa deve ser colocada).

²Pode relacionar *Caixa* com as caixas de texto usadas nos jornais ou com *frames* da linguagem HTML usada na Internet.



Figura 2: *Layout* feito de várias caixas coloridas.

```
type Fig = [(Origem, Caixa)]
type Origem = (Float, Float)
```

A informação mais relevante deste tipo é a referente à lista de “caixas posicionadas” (tipo $(Origem, Caixa)$). Regista-se aí a origem da caixa que, com a informação da sua altura e comprimento, permite definir todos os seus pontos (consideramos as caixas sempre paralelas aos eixos).

1. Forneça a definição da função *calc_origems*, que calcula as coordenadas iniciais das caixas no plano:

$$calc_origems :: (L2D, Origem) \rightarrow X (Caixa, Origem) ()$$

2. Forneça agora a definição da função *agrup_caixas*, que agrupa todas as caixas e respectivas origens numa só lista:

$$agrup_caixas :: X (Caixa, Origem) () \rightarrow Fig$$

Um segundo problema neste projecto é *descobrir como visualizar a informação gráfica calculada por desenho*. A nossa estratégia para superar o problema baseia-se na biblioteca **Gloss**, que permite a geração de gráficos 2D. Para tal disponibiliza-se a função

$$crCaixa :: Origem \rightarrow Float \rightarrow Float \rightarrow String \rightarrow G.Color \rightarrow G.Picture$$

que cria um rectângulo com base numa coordenada, um valor para a largura, um valor para a altura, um texto que irá servir de etiqueta, e a cor pretendida. Disponibiliza-se também a função

$$display :: G.Picture \rightarrow IO ()$$

que dado um valor do tipo *G.picture* abre uma janela com esse valor desenhado. O objectivo final deste exercício é implementar então uma função

$$mostra_caixas :: (L2D, Origem) \rightarrow IO ()$$

que dada uma frase da linguagem *L2D* e coordenadas iniciais apresenta o respectivo desenho no ecrã.

Sugestão: Use a função *G.pictures* disponibilizada na biblioteca **Gloss**.

Problema 3

Nesta disciplina estudou-se como fazer **programação dinâmica** por cálculo, recorrendo à lei de recursividade mútua.³

Para o caso de funções sobre os números naturais (\mathbb{N}_0 , com functor $F X = 1 + X$) é fácil derivar-se da lei que foi estudada uma *regra de algibeira* que se pode ensinar a programadores que não tenham estudado **Cálculo de Programas**. Apresenta-se de seguida essa regra, tomando como exemplo o cálculo do ciclo-for que implementa a função de Fibonacci, recordar o sistema

$$\begin{aligned} fib\ 0 &= 1 \\ fib\ (n + 1) &= f\ n \\ f\ 0 &= 1 \\ f\ (n + 1) &= fib\ n + f\ n \end{aligned}$$

Obter-se-á de imediato

$$\begin{aligned} fib' &= \pi_1 \cdot \text{for loop init where} \\ \text{loop } (fib, f) &= (f, fib + f) \\ \text{init} &= (1, 1) \end{aligned}$$

usando as regras seguintes:

- O corpo do ciclo *loop* terá tantos argumentos quanto o número de funções mutuamente recursivas.
- Para as variáveis escolhem-se os próprios nomes das funções, pela ordem que se achar conveniente.⁴
- Para os resultados vão-se buscar as expressões respectivas, retirando a variável n .
- Em *init* colecionam-se os resultados dos casos de base das funções, pela mesma ordem.

Mais um exemplo, envolvendo polinómios no segundo grau a $x^2 + bx + c$ em \mathbb{N}_0 . Seguindo o método estudado nas aulas⁵, de $f\ x = ax^2 + bx + c$ derivam-se duas funções mutuamente recursivas:

$$\begin{aligned} f\ 0 &= c \\ f\ (n + 1) &= f\ n + k\ n \\ k\ 0 &= a + b \\ k\ (n + 1) &= k\ n + 2\ a \end{aligned}$$

Seguindo a regra acima, calcula-se de imediato a seguinte implementação, em Haskell:

$$\begin{aligned} f'\ a\ b\ c &= \pi_1 \cdot \text{for loop init where} \\ \text{loop } (f, k) &= (f + k, k + 2 * a) \\ \text{init} &= (c, a + b) \end{aligned}$$

Qual é o assunto desta questão, então? Considerem fórmula que dá a série de Taylor da função coseno:

$$\cos x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i}$$

Pretende-se o ciclo-for que implementa a função $\cos' x\ n$ que dá o valor dessa série tomando i até n inclusivé:

$$\cos' x = \dots \text{for loop init where } \dots$$

Sugestão: Começar por estudar muito bem o processo de cálculo dado no anexo B para o problema (semelhante) da função exponencial.

Propriedade QuickCheck 4 Testes de que $\cos' x$ calcula bem o coseno de π e o coseno de $\pi / 2$:

$$\begin{aligned} \text{prop_cos1 } n &= n \geq 10 \Rightarrow \text{abs } (\cos \pi - \cos' \pi\ n) < 0.001 \\ \text{prop_cos2 } n &= n \geq 10 \Rightarrow \text{abs } (\cos (\pi / 2) - \cos' (\pi / 2)\ n) < 0.001 \end{aligned}$$

³Lei (3.94) em [2], página 98.

⁴Podem obviamente usar-se outros símbolos, mas numa primeiraleitura dá jeito usarem-se tais nomes.

⁵Secção 3.17 de [2].

Valorização Transliterar *cos'* para a linguagem C; compilar e testar o código. Conseguia, por intuição apenas, chegar a esta função?

Problema 4

Pretende-se nesta questão desenvolver uma biblioteca de funções para manipular *sistemas de ficheiros* genéricos. Um sistema de ficheiros será visto como uma associação de *nomes* a ficheiros ou *directorias*. Estas últimas serão vistas como sub-sistemas de ficheiros e assim recursivamente. Assumindo que *a* é o tipo dos identificadores dos ficheiros e directorias, e que *b* é o tipo do conteúdo dos ficheiros, podemos definir um tipo indutivo de dados para representar sistemas de ficheiros da seguinte forma:

```
data FS a b = FS [(a, Node a b)] deriving (Eq, Show)
data Node a b = File b | Dir (FS a b) deriving (Eq, Show)
```

Um caminho (*path*) neste sistema de ficheiros pode ser representado pelo seguinte tipo de dados:

```
type Path a = [a]
```

Assumindo estes tipos de dados, o seguinte termo

```
FS [("f1", File "01a"),
    ("d1", Dir (FS [("f2", File "01e"),
                    ("f3", File "01e")
                    ]))
    ]
```

representará um sistema de ficheiros em cuja raíz temos um ficheiro chamado *f1* com conteúdo "01a" e uma directoria chamada "d1" constituída por dois ficheiros, um chamado "f2" e outro chamado "f3", ambos com conteúdo "01e". Neste caso, tanto o tipo dos identificadores como o tipo do conteúdo dos ficheiros é *String*. No caso geral, o conteúdo de um ficheiro é arbitrário: pode ser um binário, um texto, uma colecção de dados, etc.

A definição das usuais funções *inFS* e *recFS* para este tipo é a seguinte:

```
inFS = FS · map (id × inNode)
inNode = [File, Dir]
recFS f = baseFS id id f
```

Suponha que se pretende definir como um *catamorfismo* a função que conta o número de ficheiros existentes num sistema de ficheiros. Uma possível definição para esta função seria:

```
conta :: FS a b → Int
conta = cataFS (sum · map ([1, id] · π₂))
```

O que é para fazer:

1. Definir as funções *outFS*, *baseFS*, *cataFS*, *anaFS* e *hyloFS*.
2. Apresentar, no relatório, o diagrama de *cataFS*.
3. Definir as seguintes funções para manipulação de sistemas de ficheiros usando, obrigatoriamente, catamorfismos, anamorfismos ou hilomorfismos:
 - (a) Verificação da integridade do sistema de ficheiros (i.e. verificar que não existem identificadores repetidos dentro da mesma directoria).

```
check :: FS a b → Bool
```

Propriedade QuickCheck 5 A integridade de um sistema de ficheiros não depende da ordem em que os últimos são listados na sua directoria:

```
prop_check :: FS String String → Bool
prop_check = check · (cataFS (inFS · reverse)) ≡ check
```

- (b) Recolha do conteúdo de todos os ficheiros num arquivo indexado pelo *path*.

$tar :: FS\ a\ b \rightarrow [(Path\ a, b)]$

Propriedade QuickCheck 6 O número de ficheiros no sistema deve ser igual ao número de ficheiros listados pela função *tar*.

$prop_tar :: FS\ String\ String \rightarrow Bool$
 $prop_tar = length \cdot tar \equiv conta$

- (c) Transformação de um arquivo com o conteúdo dos ficheiros indexado pelo *path* num sistema de ficheiros.

$untar :: [(Path\ a, b)] \rightarrow FS\ a\ b$

Sugestão: Use a função *joinDupDirs* para juntar directorias que estejam na mesma pasta e que possuam o mesmo identificador.

Propriedade QuickCheck 7 A composição *tar* · *untar* preserva o número de ficheiros no sistema.

$prop_untar :: [(Path\ String, String)] \rightarrow Property$
 $prop_untar = validPaths \Rightarrow ((length \cdot tar \cdot untar) \equiv length)$
 $validPaths :: [(Path\ String, String)] \rightarrow Bool$
 $validPaths = (\equiv 0) \cdot length \cdot (filter\ (\lambda(a, -) \rightarrow length\ a \equiv 0))$

- (d) Localização de todos os *paths* onde existe um determinado ficheiro.

$find :: a \rightarrow FS\ a\ b \rightarrow [Path\ a]$

Propriedade QuickCheck 8 A composição *tar* · *untar* preserva todos os ficheiros no sistema.

$prop_find :: String \rightarrow FS\ String\ String \rightarrow Bool$
 $prop_find = curry\ \$$
 $length \cdot \widehat{find} \equiv length \cdot \widehat{find} \cdot (id \times (untar \cdot tar))$

- (e) Criação de um novo ficheiro num determinado *path*.

$new :: Path\ a \rightarrow b \rightarrow FS\ a\ b \rightarrow FS\ a\ b$

Propriedade QuickCheck 9 A adição de um ficheiro não existente no sistema não origina ficheiros duplicados.

$prop_new :: ((Path\ String, String), FS\ String\ String) \rightarrow Property$
 $prop_new = ((validPath \wedge notDup) \wedge (check \cdot \pi_2)) \Rightarrow$
 $(checkFiles \cdot \widehat{new})\ \mathbf{where}$
 $validPath = (\neq 0) \cdot length \cdot \pi_1 \cdot \pi_1$
 $notDup = \neg \cdot \widehat{elem} \cdot (\pi_1 \times ((fmap\ \pi_1) \cdot tar))$

Questão: Supondo-se que no código acima se substitui a propriedade *checkFiles* pela propriedade mais fraca *check*, será que a propriedade *prop_new* ainda é válida? Justifique a sua resposta.

Propriedade QuickCheck 10 A listagem de ficheiros logo após uma adição nunca poderá ser menor que a listagem de ficheiros antes dessa mesma adição.

$prop_new2 :: ((Path\ String, String), FS\ String\ String) \rightarrow Property$
 $prop_new2 = validPath \Rightarrow ((length \cdot tar \cdot \pi_2) \leq (length \cdot tar \cdot \widehat{new}))\ \mathbf{where}$
 $validPath = (\neq 0) \cdot length \cdot \pi_1 \cdot \pi_1$

- (f) Duplicação de um ficheiro.

$cp :: Path\ a \rightarrow Path\ a \rightarrow FS\ a\ b \rightarrow FS\ a\ b$

Propriedade QuickCheck 11 A listagem de ficheiros com um dado nome não diminui após uma duplicação.

$prop_cp :: ((Path\ String, Path\ String), FS\ String\ String) \rightarrow Bool$
 $prop_cp = length \cdot tar \cdot \pi_2 \leq length \cdot tar \cdot \widehat{cp}$



Figura 3: Exemplo de um sistema de ficheiros visualizado em Graphviz.

(g) Eliminação de um ficheiro.

$rm :: Path\ a \rightarrow FS\ a\ b \rightarrow FS\ a\ b$

Sugestão: Construir um anamorfismo $nav :: (Path\ a, FS\ a\ b) \rightarrow FS\ a\ b$ que navegue por um sistema de ficheiros tendo como base o *path* dado como argumento.

Propriedade QuickCheck 12 *Remover duas vezes o mesmo ficheiro tem o mesmo efeito que o remover apenas uma vez.*

$$prop_rm :: (Path\ String, FS\ String\ String) \rightarrow Bool$$

$$prop_rm = \widehat{rm} \cdot \langle \pi_1, \widehat{rm} \rangle \equiv \widehat{rm}$$

Propriedade QuickCheck 13 *Adicionar um ficheiro e de seguida remover o mesmo não origina novos ficheiros no sistema.*

$$prop_rm2 :: ((Path\ String, String), FS\ String\ String) \rightarrow Property$$

$$prop_rm2 = validPath \Rightarrow ((length \cdot tar \cdot \widehat{rm} \cdot \langle \pi_1 \cdot \pi_1, \widehat{new} \rangle) \leq (length \cdot tar \cdot \pi_2)) \text{ where}$$

$$validPath = (\neq 0) \cdot length \cdot \pi_1 \cdot \pi_1$$

Valorização Definir uma função para visualizar em Graphviz a estrutura de um sistema de ficheiros. A Figura 3, por exemplo, apresenta a estrutura de um sistema com precisamente dois ficheiros dentro de uma directoria chamada "d1".

Para realizar este exercício será necessário apenas escrever o anamorfismo

$$cFS2Exp :: (a, FS\ a\ b) \rightarrow (Exp\ ()\ a)$$

que converte a estrutura de um sistema de ficheiros numa árvore de expressões descrita em Exp.hs. A função *dotFS* depois tratará de passar a estrutura do sistema de ficheiros para o visualizador.

Anexos

A Como exprimir cálculos e diagramas em LaTeX/lhs2tex

Estudar o texto fonte deste trabalho para obter o efeito:⁶

$$\begin{aligned}
 id &= \langle f, g \rangle \\
 &\equiv \{ \text{universal property} \} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{array} \right. \\
 &\equiv \{ \text{identity} \} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{array} \right. \\
 &\square
 \end{aligned}$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* L^AT_EX *xymatrix*, por exemplo:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{N}_0 & \xleftarrow{\text{in}} & 1 + \mathbb{N}_0 \\
 \downarrow \langle g \rangle & & \downarrow id + \langle g \rangle \\
 B & \xleftarrow{g} & 1 + B
 \end{array}$$

B Programação dinâmica por recursividade múltipla

Neste anexo dão-se os detalhes da resolução do Exercício 3.30 dos apontamentos da disciplina⁷, onde se pretende implementar um ciclo que implemente o cálculo da aproximação até $i = n$ da função exponencial $\exp x = e^x$ via série de Taylor:

$$\exp x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \quad (1)$$

Seja $e\ x\ n = \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!}$ a função que dá essa aproximação. É fácil de ver que $e\ x\ 0 = 1$ e que $e\ x\ (n+1) = e\ x\ n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. Se definirmos $h\ x\ n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ teremos $e\ x$ e $h\ x$ em recursividade mútua. Se repetirmos o processo para $h\ x\ n$ etc obteremos no total três funções nessa mesma situação:

$$\begin{aligned}
 e\ x\ 0 &= 1 \\
 e\ x\ (n+1) &= h\ x\ n + e\ x\ n \\
 h\ x\ 0 &= x \\
 h\ x\ (n+1) &= x / (s\ n) * h\ x\ n \\
 s\ 0 &= 2 \\
 s\ (n+1) &= 1 + s\ n
 \end{aligned}$$

Segundo a *regra de algibeira* descrita na página 3 deste enunciado, ter-se-á, de imediato:

$$\begin{aligned}
 e'\ x &= prj \cdot \text{for loop init where} \\
 init &= (1, x, 2) \\
 loop\ (e, h, s) &= (h + e, x / s * h, 1 + s) \\
 prj\ (e, h, s) &= e
 \end{aligned}$$

⁶Exemplos tirados de [2].

⁷Cf. [2], página 102.

C Código fornecido

Problema 1

Tipos:

```
data Expr = Num Int
          | Bop Expr Op Expr deriving (Eq, Show)
data Op = Op String deriving (Eq, Show)
type Codigo = [String]
```

Functor de base:

```
baseExpr f g = id + (f × (g × g))
```

Instâncias:

```
instance Read Expr where
  readsPrec _ = readExp
```

Read para Exp's:

```
readOp :: String → [(Op, String)]
readOp input = do
  (x, y) ← lex input
  return ((Op x), y)

readNum :: ReadS Expr
readNum = (map (λ(x, y) → ((Num x), y))) · reads

readBinOp :: ReadS Expr
readBinOp = (map (λ((x, (y, z)), t) → ((Bop x y z), t))) ·
  ((readNum 'ou' (pcurvos readExp))
   'depois' (readOp 'depois' readExp))

readExp :: ReadS Expr
readExp = readBinOp 'ou' (
  readNum 'ou' (
    pcurvos readExp))
```

Combinadores:

```
depois :: (ReadS a) → (ReadS b) → ReadS (a, b)
depois _ _ [] = []
depois r1 r2 input = [((x, y), i2) | (x, i1) ← r1 input,
  (y, i2) ← r2 i1]

readSeq :: (ReadS a) → ReadS [a]
readSeq r input
  = case (r input) of
    [] → [([], input)]
    l → concat (map continua l)
    where continua (a, i) = map (c a) (readSeq r i)
      c x (xs, i) = ((x : xs), i)

ou :: (ReadS a) → (ReadS a) → ReadS a
ou r1 r2 input = (r1 input) ++ (r2 input)

senao :: (ReadS a) → (ReadS a) → ReadS a
senao r1 r2 input = case (r1 input) of
  [] → r2 input
  l → l

readConst :: String → ReadS String
readConst c = (filter ((≡ c) · π1)) · lex

pcurvos = parenthesis ' ( ' ' ) '
```

```

prectos = parenthesis ' [ ' ' ] '
chavetas = parenthesis ' { ' ' } '
parenthesis :: Char → Char → (ReadS a) → ReadS a
parenthesis _ _ _ [] = []
parenthesis ap pa r input
= do
  ((-, (x, -)), c) ← ((readConst [ap]) 'depois' (
    r 'depois' (
      readConst [pa]))) input
  return (x, c)

```

Problema 2

Tipos:

```

type Fig = [(Origem, Caixa)]
type Origem = (Float, Float)

```

“Helpers”:

```

col_blue = G.azure
col_green = darkgreen
darkgreen = G.dark (G.dark G.green)

```

Exemplos:

```

ex1Caixas = G.display (G.InWindow "Problema 4" (400,400) (40,40)) G.white $
  crCaixa (0,0) 200 200 "Caixa azul" col_blue
ex2Caixas = G.display (G.InWindow "Problema 4" (400,400) (40,40)) G.white $
  caixasAndOrigin2Pict ((Comp Hb bbox gbox), (0.0,0.0)) where
    bbox = Unid ((100,200), ("A", col_blue))
    gbox = Unid ((50,50), ("B", col_green))
ex3Caixas = G.display (G.InWindow "Problema 4" (400,400) (40,40)) G.white mtest where
  mtest = caixasAndOrigin2Pict $ (Comp Hb (Comp Ve bot top) (Comp Ve gbox2 ybox2), (0.0,0.0))
  bbox1 = Unid ((100,200), ("A", col_blue))
  bbox2 = Unid ((150,200), ("E", col_blue))
  gbox1 = Unid ((50,50), ("B", col_green))
  gbox2 = Unid ((100,300), ("F", col_green))
  rbox1 = Unid ((300,50), ("C", G.red))
  rbox2 = Unid ((200,100), ("G", G.red))
  wbox1 = Unid ((450,200), ("", G.white))
  ybox1 = Unid ((100,200), ("D", G.yellow))
  ybox2 = Unid ((100,300), ("H", G.yellow))
  bot = Comp Hb wbox1 bbox2
  top = (Comp Ve (Comp Hb bbox1 gbox1) (Comp Hb rbox1 (Comp H ybox1 rbox2)))

```

A seguinte função cria uma caixa a partir dos seguintes parâmetros: origem, largura, altura, etiqueta e cor de preenchimento.

```

crCaixa :: Origem → Float → Float → String → G.Color → G.Picture
crCaixa (x,y) w h l c = G.Translate (x + (w / 2)) (y + (h / 2)) $ G.pictures [caixa, etiqueta] where
  caixa = G.color c (G.rectangleSolid w h)
  etiqueta = G.translate calc_trans_x calc_trans_y $
    G.Scale calc_scale calc_scale $ G.color G.black $ G.Text l
  calc_trans_x = -((fromIntegral (length l)) * calc_scale) / 2 * base_shift_x
  calc_trans_y = (-calc_scale / 2) * base_shift_y
  calc_scale = bscale * (min h w)
  bscale = 1 / 700

```

```
base_shift_y = 100
base_shift_x = 64
```

Função para visualizar resultados gráficos:

```
display = G.display (G.InWindow "Problema 4" (400,400) (40,40)) G.white
```

Problema 4

Funções para gestão de sistemas de ficheiros:

```
concatFS = inFS ·  $\widehat{(\text{++})}$  · (outFS × outFS)
mkdir (x, y) = FS [(x, Dir y)]
mkfile (x, y) = FS [(x, File y)]
joinDupDirs :: (Eq a) ⇒ (FS a b) → (FS a b)
joinDupDirs = anaFS (prepOut · (id × proc) · prepIn) where
  prepIn = (id × (map (id × outFS))) · sls · (map distr) · outFS
  prepOut = (map undistr) ·  $\widehat{(\text{++})}$  · ((map i1) × (map i2)) · (id × (map (id × inFS)))
  proc = concat · (map joinDup) · groupByName
  sls = ⟨lefts, rights⟩
joinDup :: [(a, [b])] → [(a, [b])]
joinDup = cataList [nil, g] where g = return · ⟨π1 · π1, concat · (map π2) ·  $\widehat{(\text{·})}$ ⟩
createFSfromFile :: (Path a, b) → (FS a b)
createFSfromFile ([a], b) = mkfile (a, b)
createFSfromFile (a : as, b) = mkdir (a, createFSfromFile (as, b))
```

Funções auxiliares:

```
checkFiles :: (Eq a) ⇒ FS a b → Bool
checkFiles = cataFS ( $\widehat{(\text{·})}$  · ⟨f, g⟩) where
  f = nr · (fmap π1) · lefts · (fmap distr)
  g = and · rights · (fmap π2)
groupByName :: (Eq a) ⇒ [(a, [b])] → [[(a, [b])]]
groupByName = (groupBy (curry p)) where
  p =  $\widehat{(\text{·})}$  · (π1 × π1)
filterPath :: (Eq a) ⇒ Path a → [(Path a, b)] → [(Path a, b)]
filterPath = filter · (λp → λ(a, b) → p ≡ a)
```

Dados para testes:

- Sistema de ficheiros vazio:

```
efs = FS []
```

- Nível 0

```
f1 = FS [("f1", File "hello world")]
f2 = FS [("f2", File "more content")]
f00 = concatFS (f1, f2)
f01 = concatFS (f1, mkdir ("d1", efs))
f02 = mkdir ("d1", efs)
```

- Nível 1

```
f10 = mkdir ("d1", f00)
f11 = concatFS (mkdir ("d1", f00), mkdir ("d2", f00))
f12 = concatFS (mkdir ("d1", f00), mkdir ("d2", f01))
f13 = concatFS (mkdir ("d1", f00), mkdir ("d2", efs))
```

- Nível 2

```
f20 = mkdir ("d1", f10)
f21 = mkdir ("d1", f11)
f22 = mkdir ("d1", f12)
f23 = mkdir ("d1", f13)
f24 = concatFS (mkdir ("d1", f10), mkdir ("d2", f12))
```

- Sistemas de ficheiros inválidos:

```
ifs0 = concatFS (f1, f1)
ifs1 = concatFS (f1, mkdir ("f1", efs))
ifs2 = mkdir ("d1", ifs0)
ifs3 = mkdir ("d1", ifs1)
ifs4 = concatFS (mkdir ("d1", ifs1), mkdir ("d2", f12))
ifs5 = concatFS (mkdir ("d1", f1), mkdir ("d1", f2))
ifs6 = mkdir ("d1", ifs5)
ifs7 = concatFS (mkdir ("d1", f02), mkdir ("d1", f02))
```

Visualização em **Graphviz**:

```
dotFS :: FS String b → IO ExitCode
dotFS = dotpict · bmap "_" id · (cFS2Exp "root")
```

Outras funções auxiliares

Lógicas:

```
infixr 0 ⇒
(⇒) :: (Testable prop) ⇒ (a → Bool) → (a → prop) → a → Property
p ⇒ f = λa → p a ⇒ f a

infixr 0 ⇔
(⇔) :: (a → Bool) → (a → Bool) → a → Property
p ⇔ f = λa → (p a ⇒ property (f a)) .&&. (f a ⇒ property (p a))

infixr 4 ≡
(≡) :: Eq b ⇒ (a → b) → (a → b) → (a → Bool)
f ≡ g = λa → f a ≡ g a

infixr 4 ≤
(≤) :: Ord b ⇒ (a → b) → (a → b) → (a → Bool)
f ≤ g = λa → f a ≤ g a

infixr 4 ∧
(∧) :: (a → Bool) → (a → Bool) → (a → Bool)
f ∧ g = λa → ((f a) ∧ (g a))
```

Compilação e execução dentro do interpretador:⁸

```
run = do { system "ghc cp1819t"; system "./cp1819t" }
```

D Soluções dos alunos

Os alunos devem colocar neste anexo as suas soluções aos exercícios propostos, de acordo com o “layout” que se fornece. Não podem ser alterados os nomes ou tipos das funções dadas, mas pode ser adicionado texto e/ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

⁸Pode ser útil em testes envolvendo **Gloss**. Nesse caso, o teste em causa deve fazer parte de uma função *main*.

Problema 1

1. Começamos por definir o inExpr através do seu diagrama:

$$\begin{array}{c} \text{Int} + (\text{Op} \times (\text{Expr} \times \text{Expr})) \\ \downarrow [f,g] \\ \text{Expr} \end{array}$$

Sendo assim, f define-se simplesmente como Num :

$$\begin{array}{c} \text{Int} \\ \downarrow \text{Num} \\ \text{Expr} \end{array}$$

Para obter g , sabemos que vamos precisar que g primeiro transforme o input para o tipo de entrada de Bop Expr Op Expr :

$$\begin{array}{c} \text{Op} \times (\text{Expr} \times \text{Expr}) \\ \downarrow \text{assocl} \\ (\text{Op} \times \text{Expr}) \times \text{Expr} \\ \downarrow \text{swap} \times \text{id} \\ (\text{Expr} \times \text{Op}) \times \text{Expr} \end{array}$$

Fica assim, só a faltar ao invés de receber pares, receber um elemento de cada vez, que obtemos através da função uncurry.uncurry , logo:

$$\begin{array}{c} \text{Op} \times (\text{Expr} \times \text{Expr}) \\ \downarrow ((\hat{\cdot}) \text{Bop}) \cdot ((\text{swap} \times \text{id}) \cdot \text{assocl}) \\ \text{Expr} \end{array}$$

E inExpr fica assim definido:

$$\begin{aligned} \text{inExpr} &:: \text{Int} + (\text{Op}, (\text{Expr}, \text{Expr})) \rightarrow \text{Expr} \\ \text{inExpr} &= [\text{Num}, ((\hat{\cdot}) \text{Bop}) \cdot ((\text{swap} \times \text{id}) \cdot \text{assocl})] \end{aligned}$$

Para definir outExpr como se analisa a Expr por casos, basta fazer as injeções respetivas, tendo em atenção de no caso de Bop trocar a ordem dos elementos:

$$\begin{aligned} \text{outExpr} &:: \text{Expr} \rightarrow \text{Int} + (\text{Op}, (\text{Expr}, \text{Expr})) \\ \text{outExpr} (\text{Num } a) &= i_1 a \\ \text{outExpr} (\text{Bop } e_1 \text{ o } e_2) &= i_2 (o, (e_1, e_2)) \end{aligned}$$

Para definir recExpr , cataExpr , anaExpr , hyloExpr , estes são imediatos tendo baseExpr definido:

$$\begin{aligned} \text{recExpr } f &= \text{baseExpr } \text{id } f \\ \text{cataExpr } g &= g \cdot (\text{recExpr } (\text{cataExpr } g)) \cdot \text{outExpr} \\ \text{anaExpr } g &= \text{inExpr} \cdot (\text{recExpr } (\text{anaExpr } g)) \cdot g \\ \text{hyloExpr } h \text{ g} &= \text{cataExpr } h \cdot \text{anaExpr } g \end{aligned}$$

2.

Começamos por definir calcula como um catamorfismo, visto que pretendemos perder informação, transformar uma expressão no seu resultado:

$$\begin{array}{ccc} \text{Expr} & \xleftarrow{\text{inExpr}} & \text{Int} + (\text{Op} \times (\text{Expr} \times \text{Expr})) \\ \downarrow \text{calcula} & & \downarrow \text{id} + (\text{id} \times (\text{calcula} \times \text{calcula})) \\ \text{Int} & \xleftarrow{[\text{id}, \text{calcop}]} & \text{Int} + (\text{Op} \times (\text{Int} \times \text{Int})) \end{array}$$

```

calcula :: Expr → Int
calcula = cataExpr [id, calcop]
  where calcop (Op "+", (e1, e2)) = e1 + e2
        calcop (Op "*", (e1, e2)) = e1 * e2
-- versao alternativa pointfree
calcula' :: Expr → Int
calcula' = cataExpr [id, cond (((Op "+") ≡) · π1)
  (fromIntegral · add · (toInteger × toInteger) · π2)
  (fromIntegral · mul · (toInteger × toInteger) · π2)]

```

3.

```

compile :: String → Codigo
compile = hyloExpr conqCompile divCompile
-- versao alternativa pointfree
compile' :: String → Codigo
compile' = hyloExpr conqCompile' divCompile'

```

A função compile define-se como um hilomorfismo:

----- - - - -
- por aqui diagrama do hilo
- - - - -

pois queremos primeiramente transformar a String, através do anamorfismo divCompile, numa estrutura que representa uma árvore binária de expressões em que as operações se encontram na raiz e nas folhas os números, sendo que as operações vão aumentando de prioridade assim que se desce na árvore.

Para definir divCompile começamos por dividir em 2 casos: se a String só tiver um elemento estamos na presença de um número; caso contrário estamos perante uma expressão e para tal temos de partir a String em 3 substrings:

- operação menos prioritária;
- lado esquerdo da operação;
- lado direito da operação.

Para tal definimos auxDivComp que retorna um par contendo a posição da operação menos prioritária e qual o carater da operação, e de seguida através da função slice retiramos as substrings à esquerda e direita da operação, tirando os parêntesis.

```

divCompile :: String → Int + (Op, (String, String))
divCompile [x] = i1 (digitToInt x)
divCompile l = i2 ((Op [c]), (slice 0 p l, slice (p + 1) (length l) l))
  where (p, c) = auxDivComp l 0 0
auxDivComp :: String → Int → Int → (Int, Char)
auxDivComp (h : t) c p
  | (h ≡ ' (' ) = auxDivComp t (c + 1) (p + 1)
  | (h ≡ ' ) ' ) = auxDivComp t (c - 1) (p + 1)
  | (h ≡ ' + ' ∨ h ≡ ' * ' ) ∧ c ≡ 0 = (p, h)
  | otherwise = auxDivComp t c (p + 1)
slice :: Int → Int → String → String
slice start end string = if (head (firstslice) ≡ ' (' ) then (slice (start + 1) (end - 1) string) else firstslice
  where firstslice = take (end - start) (drop start string)
-- versao alternativa pointfree divcompile e slice
divCompile' :: String → Int + (Op, (String, String))
divCompile' [x] = i1 (digitToInt x)
divCompile' l = i2 ((Op [c]), (slice' (l, (0, p)), slice' (l, ((p + 1), (length l))))))
  where (p, c) = auxDivComp l 0 0

```



```

substring :: (String, (Int, Int)) → String
substring = (take · swap · (id × subtract)) · ⟨drop · swap · (id × π1), π2⟩
slice' :: (String, (Int, Int)) → String
slice' = (cond ((' (' ≡) · head · π1) (slice' · (id × (succ × pred)) · π2) π1) · ⟨substring, id⟩

```

De seguida definimos o catamorfismo conqCompile que apenas tem de transformar o resultado do anamorfismo no Código correspondente, caso seja número ou operação:

```

conqCompile :: Int + (Op, (Codigo, Codigo)) → Codigo
conqCompile = [auxNum, auxOp]
auxNum :: Int → Codigo
auxNum a = ["PUSH " ++ show (a)]
auxOp (op, (c1, c2))
  | op ≡ (Op "+") = c1 ++ c2 ++ ["ADD"]
  | op ≡ (Op "*") = c1 ++ c2 ++ ["MUL"]
-- versao alternativa pointfree conqcompile e auxiliares
conqCompile' = [singl · conc · ⟨"PUSH ", show⟩, cond (((Op "+") ≡) · π1) (conc · swap · (["ADD"] × conc)) (conc

```

Para definir o show' começamos por desenhar o seu diagrama como um catamorfismo:

$$\begin{array}{ccc}
 Expr & \xleftarrow{inExpr} & Int + (Op \times (Expr \times Expr)) \\
 \downarrow show' & & \downarrow id + (id \times (show' \times show')) \\
 String & \xleftarrow{\{shownum, showop\}} & Int + (Op \times (String \times String))
 \end{array}$$

e temos assim de definir showNum e showOp.

Para showNum apenas temos de fazer o show desse mesmo número, e caso seja negativo, colocar parênteses à volta do mesmo.

Em showOp temos de verificar de que tipo de operação se trata e apenas colocar as expressões já calculadas pela ordem correta.

```

show' :: Expr → String
show' = cataExpr [showNum, showOp]
showNum a = if (a < 0) then [' (' ] ++ (show a) ++ [' ) ' ] else (show a)
showOp :: (Op, (String, String)) → String
showOp (op, (s1, s2))
  | op ≡ (Op "+") = [' (' ] ++ s1 ++ [' + ' ] ++ s2 ++ [' ) ' ]
  | otherwise = [' (' ] ++ s1 ++ [' * ' ] ++ s2 ++ [' ) ' ]

```

Problema 2

```

inL2D :: a + (b, (X a b, X a b)) → X a b
inL2D = [Unid, (· · Comp)]
outL2D :: X a b → a + (b, (X a b, X a b))
outL2D (Unid a) = i1 (a)
outL2D (Comp a b c) = i2 (a, (b, c))
baseL2D f g h = f + (g × (h × h))
recL2D f = baseL2D id id f
cataL2D g = g · (recL2D (cataL2D g)) · outL2D
anaL2D g = inL2D · (recL2D (anaL2D g)) · g
hyloL2D h g = cataL2D h · anaL2D g
collectLeafs = cataL2D [singl, conc · π2]
{-----}

```

```

dimen :: X Caixa Tipo → (Float, Float)
dimen = ⊥
calcOrigins :: ((X Caixa Tipo), Origem) → X (Caixa, Origem) ()
calcOrigins = ⊥
calc :: Tipo → Origem → (Float, Float) → Origem
calc = ⊥
caixasAndOrigin2Pict = ⊥
{-----}

```

Problema 3

Seguindo o Anexo B:

$$\cos x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i}$$

Seja:

$$\cos x n = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i}$$

Então:

$$\cos x 0 = 1$$

$$\cos x (n+1) = \cos x n + \frac{(-1)^{(n+1)}}{(2(n+1))!} * x^{2(n+1)}$$

Se $h x n = \frac{(-1)^{(n+1)}}{(2(n+1))!} * x^{2(n+1)}$, obtemos então:

$$h x 0 = -\frac{x^2}{2}$$

$$h x (n+1) = \frac{(-1)^{(n+1+1)}}{(2(n+1+1))!} * x^{2(n+1+1)}$$

Desenvolvendo $h x (n+1)$:

$$h x (n+1) = \frac{(-1)^{(n+1)} * (-1)}{(2(n+1))! * (2n+3) * (2n+4)} * x^{2(n+1)} * x^2$$

$$h x (n+1) = h x n + \frac{(-x)^2}{(2n+3) * (2n+4)}$$

Definindo as funções auxiliares a e b , que correspondem a $2n+3$ e $2n+4$ respectivamente, obtemos no final:

$$\begin{aligned}
\cos x 0 &= 1 \\
\cos x (n+1) &= \cos x n + h x n \\
h x 0 &= ((-x) \uparrow 2) / 2 \\
h x (n+1) &= h x n * ((-x) \uparrow 2) / ((a n) * (b n)) \\
a 0 &= 3 \\
a (n+1) &= 2 + a n \\
b 0 &= 4 \\
b (n+1) &= 2 + b n
\end{aligned}$$

E obtemos assim a solução:

```

coss x 0 = 1
coss x (n + 1) = (coss x n) + (h x n)
h x 0 = -(x ↑ 2) / 2
h x (n + 1) = (h x n) * (-(x ↑ 2)) / ((a n) * (b n))
a 0 = 3
a (n + 1) = 2 + a n
b 0 = 4
b (n + 1) = 2 + b n
cos' x = prj · for loop init where
  loop (coss, h, a, b) = (coss + h, h * (-(x ↑ 2)) / (a * b), 2 + a, 2 + b)
  init = (1, -(x ↑ 2) / 2, 3, 4)
  prj (coss, h, a, b) = coss

```

Valorização:

```

double coss(double x, int n){

    double res = 1;
    double h = -(x*x)/2;
    double a = 3;
    double b = 4;

    for (int i = 1; i <= n; i++){

        res = res + h;
        h = h * (-(x*x)) / (a*b);
        a = a + 2;
        b = b + 2;
    }

    return res;
}

int main(int argc, char const *argv[]){
    if(argc != 3)
        return 0;

    double r = coss(atof(argv[1]), atoi(argv[2]));
    printf("%.16f\n", r);

    return 0;
}

```

Problema 4

1.

Para definir a função `outFS` recorreremos a uma função auxiliar que apenas faz uma injeção à esquerda ou à direita, consoante o parâmetro for um `Ficheiro(File)` ou uma `Diretoria(Dir)`, respetivamente. Definida esta função auxiliar, o `outFS` é um map com o produto da função identidade e da função `outNode`, definida por nós.

$$\begin{aligned}
 outFS (FS l) &= (map (id \times outNode)) l \\
 outNode (File f) &= (i_1 f) \\
 outNode (Dir f) &= (i_2 f)
 \end{aligned}$$

Como o `baseFS` vai ser aplicado a cada elemento que sai do `outFS`, temos um map do produto da função `f` com a soma das funções `g` e `h`.

$$baseFS f g h = map (f \times (g + h))$$

Após definir o `baseFS`, obtemos de forma imediata o `cataFS`, o `anaFS` e o `hyloFS`.

```

cataFS :: ([ (a, b + c)] → c) → FS a b → c
cataFS g = g · (recFS (cataFS g)) · outFS
anaFS :: (c → [(a, b + c)]) → c → FS a b
anaFS g = inFS · (recFS (anaFS g)) · g
hyloFS g h = cataFS g · anaFS h

```

2.

$$\begin{array}{ccc}
 FS\ a\ b & \xleftarrow{inFS} & (a \times (b + FS\ a\ b))^* \\
 \downarrow cataFS\ g & & \downarrow \text{map } (id \times (id + (cataFS\ g)))^* \\
 c & \xleftarrow{g} & (a \times (b + c))^*
 \end{array}$$

3.

Outras funções pedidas:

a)

```

check :: (Eq a) ⇒ FS a b → Bool
check = cataFS (parbool · ⟨repetidos · map (π1), check' · map ([true, id] · π2)⟩)
parbool (a, b) = if (a ≡ False ∨ b ≡ False) then False else True
check' [] = True
check' (x : xs) = if (x ≡ False) then False else check' xs
repetidos [] = True
repetidos (h : t) = if (x h t) then False else repetidos t
where
  x h [] = False
  x h (y : ys) = if (h ≡ y) then True else x h ys

```

Diagrama de `check` definido como um catamorfismo:

$$\begin{array}{ccc}
 FS\ a\ b & \xleftarrow{inFS} & (a \times (b + FS\ a\ b))^* \\
 \downarrow check & & \downarrow \text{map } (id \times (id + check))^* \\
 Bool & \xleftarrow{f} & (a \times (b + Bool))^*
 \end{array}$$

Diagrama de `f`:

$$\begin{array}{c}
 (a \times (b + Bool))^* \\
 \downarrow \langle \text{repetidos} \cdot \text{map } (\pi_1), \text{check}' \cdot (\text{map } ([true, id] \cdot \pi_2)) \rangle \\
 Bool \times Bool \\
 \downarrow parbool \\
 Bool
 \end{array}$$

b)

```

tar :: FS a b → [(Path a, b)]
tar = cataFS (disc · map (auxtar))
auxtar (a, (i1 b)) = [( [a], b)]
auxtar (a, (i2 [])) = []
auxtar (a, (i2 ((x, y) : xs))) = ([a] ++ x, y) : auxtar (a, i2 xs)
disc [] = []
disc (x : xs) = x ++ disc xs

```

Diagrama de tar:

$$\begin{array}{ccc}
 FS\ a\ b & \xleftarrow{inFS} & (a \times (b + FS\ a\ b))^* \\
 \downarrow tar & & \downarrow \text{map } (id \times (id + tar))^* \\
 (Path\ a \times b)^* & \xleftarrow{disc \cdot \text{map } (auxtar)} & (a \times (b + (Path\ a \times b)^*))^*
 \end{array}$$

c)

$untar :: (Eq\ a) \Rightarrow [(Path\ a, b)] \rightarrow FS\ a\ b$
 $untar = joinDupDirs \cdot anaFS\ (\text{map } (intar))$
 $intar\ [(a), b] = (a, i_1\ b)$
 $intar\ ((x : xs), b) = (x, i_2\ [(xs, b)])$

Diagrama do anamorfismo presente em untar:

$$\begin{array}{ccc}
 (a \times (b + (Path\ a \times b)^*))^* & \xleftarrow{\text{map } (intar)} & (Path\ a \times b)^* \\
 \downarrow \text{map } (id \times (id + untar))^* & & \downarrow untar \\
 (a \times (b + FS\ a\ b))^* & \xleftarrow{outFS} & FS\ a\ b
 \end{array}$$

d)

$\{\text{—feito—}\}$
 $find :: (Eq\ a) \Rightarrow a \rightarrow FS\ a\ b \rightarrow [Path\ a]$
 $find = \text{curry } (teste1 \cdot (id \times tar))$
 $teste1 :: (Eq\ a) \Rightarrow (a, [(Path\ a, b)]) \rightarrow [Path\ a]$
 $teste1\ (a, []) = []$
 $teste1\ (a, (l, -) : xs) = \text{if } (last\ (l) \equiv a) \text{ then } l : teste1\ (a, xs) \text{ else } teste1\ (a, xs)$
 $\{\text{—feito—}\}$
 $new :: (Eq\ a) \Rightarrow Path\ a \rightarrow b \rightarrow FS\ a\ b \rightarrow FS\ a\ b$
 $new = \text{uncurriedNew}$
 $\text{uncurriedNew } p\ b\ fs = untar\ ([(p, b)] \text{++ } tar\ (fs))$
 $\{\text{—feito—}\}$
 $cp :: (Eq\ a) \Rightarrow Path\ a \rightarrow Path\ a \rightarrow FS\ a\ b \rightarrow FS\ a\ b$
 $cp = cpaux$
 $cpaux\ s\ d\ f = \text{if } (s \equiv [] \vee d \equiv []) \text{ then } f \text{ else } untar\ ([(d, \text{conteudo})] \text{++ } ltar)$
 where
 $ltar = tar\ (f)$
 $\text{conteudo} = \text{getconteudo } s\ ltar$
 $\text{getconteudo} :: (Eq\ a) \Rightarrow Path\ a \rightarrow [(Path\ a, b)] \rightarrow b$
 $\text{getconteudo } d\ [(l, b)] = b$
 $\text{getconteudo } d\ ((l, b) : xs) = \text{if } (l \equiv d) \text{ then } b \text{ else } (\text{getconteudo } d\ xs)$
 $\{\text{—faltam fazer—}\}$
 $rm :: (Eq\ a) \Rightarrow (Path\ a) \rightarrow (FS\ a\ b) \rightarrow FS\ a\ b$
 $rm = \perp$
 $auxJoin :: [(a, b + c), d] \rightarrow [(a, b + (d, c))]$
 $auxJoin = \perp$
 $\{\text{—feito—}\}$
 $cFS2Exp :: a \rightarrow FS\ a\ b \rightarrow (Exp\ ())\ a$
 $cFS2Exp = \text{curry } (\text{rootTerm} \cdot (id \times \text{map } (\text{anaExp } (\text{inTerm})) \cdot \text{noFS}))$
 $\text{noFS } (FS\ l) = l$
 $\text{inTerm} :: (a, Node\ a\ b) \rightarrow () + (a, [(a, Node\ a\ b)])$
 $\text{inTerm } (a, File\ b) = i_2\ (a, [])$

$$\begin{aligned}
inTerm\ (a, Dir\ (FS\ c)) &= i_2\ (a, c) \\
rootTerm\ (a, b) &= Term\ a\ b
\end{aligned}$$

Índice

LaTeX, 1
 lhs2TeX, 1

Cálculo de Programas, 1, 2, 6
 Material Pedagógico, 1

Combinador “pointfree”
 cata, 10
 either, 3, 7, 13, 15

Função
 π_1 , 3, 6, 8–11, 13
 π_2 , 7–10, 13
 for, 6, 10, 16
 length, 8, 9, 12, 15
 map, 7, 11, 13
 uncurry, 3, 8, 9, 13, 15

Functor, 2, 5, 6, 14

GCC, 2

Graphviz, 9, 14

Haskell, 1–3
 “Literate Haskell”, 1
 Gloss, 2, 5, 14
 interpretador
 GHCi, 2
 QuickCheck, 2

HTML, 4

Números naturais (\mathbb{N}), 6, 10

Programação dinâmica, 6

Programação literária, 1

Stack machine, 3

U.Minho
 Departamento de Informática, 1

Utilitário
 LaTeX
 bibtex, 2
 makeindex, 2

Referências

- [1] D.E. Knuth. *Literate Programming*. CSLI Lecture Notes Number 27. Stanford University Center for the Study of Language and Information, Stanford, CA, USA, 1992.
- [2] J.N. Oliveira. *Program Design by Calculation*, 2018. Draft of textbook in preparation. viii+297 pages. Informatics Department, University of Minho.