

## **Sistema 1:**

### **Resumo do que se pretende fazer:**

- Considerar três tanques (T1, T2 e T0), que no seu conjunto são um sistema isolado. Coloca-se uma resistência diretamente ligada ao tanque 2 de forma a podermos aquecê-lo.
- Elaborar equações matemáticas que regem o Sistema .
- Realizar a montagem do sistema em malha aberta no Simulink.
- Realizar diversas simulações, com parâmetros diferentes e analisar o comportamento em malha aberta.
- Realizar a montagem em malha fechada no Simulink.
- Através do sistema em malha fechada , realizar um controlo adequado de forma a colocar o tanque 1 a 40°C.
- Conclusão

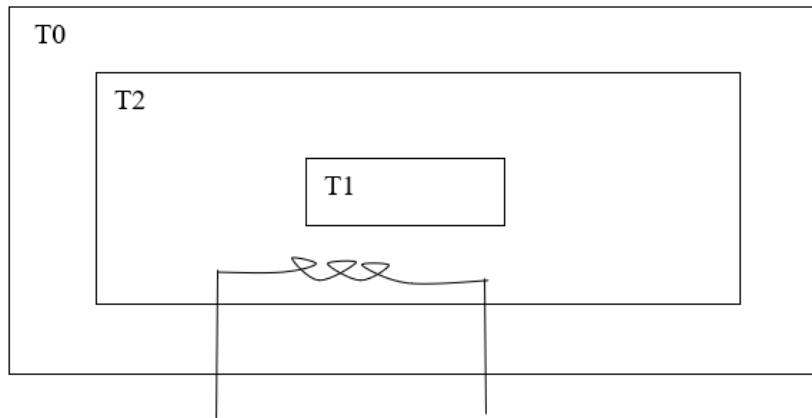
Nota: Na malha fechada, caso não se obtenha os resultados pretendidos, irá se trocar a resistência do tanque 2 para tanque 1. Esta alteração é efetuada dado o objetivo em cima referido. Isto porque se  $T_1 > 40^\circ$  (com a resistência no tanque 1), as dissipações de energia para os outros tanques vão permitir que  $T_1$  diminua e se obtenha os 40°.

### **Considerações iniciais :**

- Considera-se o tanque 1 + tanque 2 + tanque 0 um sistema isolado de forma a podermos aplicar a equação de conservação da energia térmica.
- Há transferência de energia entre os tanques, através das suas paredes. A energia tanto flui do tanque T0 para T2, como de T2 para T1, etc.
- A resistência apenas aquece diretamente o T2/T1.
- Considera-se uma temperatura homogênea, ou seja, a temperatura em diferentes locais do tanque é igual.

**Lei de controlo:** Calor que entra = calor acumulado + calor que sai

**Esquema:**



NOTA: ao contrário do que a imagem de cima indica, os tanques 1 , 2 e 0 têm forma cúbica.

**Equações que regem o sistema:**

**Tanque 1:**

$$m_1 * C_1 \frac{dT_1}{dt} = k_{12} * (T_2 - T_1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dT_1}{dt} = \frac{k_{12}}{m_1 * C_1} (T_2 - T_1)$$

**Tanque 2:**

$$m_2 * C_2 \frac{dT_2}{dt} = -k_{12}(T_2 - T_1) - k_{20}(T_2 - T_0) + u(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dT_2}{dt} = \frac{-k_{12}}{m_2 * C_2} (T_2 - T_1) - \frac{k_{20}}{m_2 * C_2} (T_2 - T_0) + \frac{1}{m_2 * C_2} u(t)$$

**Tanque 0:**

$$m_0 * C_0 \frac{dT_0}{dt} = k_{20}(T_2 - T_0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dT_0}{dt} = \frac{k_{20}}{m_0 * C_0} (T_2 - T_0)$$

**Notação:**

$k_{ij}$ =representa a condutância térmica, sendo dado por  $k * A / L$ , em que  $k$  é condutividade térmica ( $W / (m * K)$ ),  $A$  é a área da superfície e  $L$  é a espessura do material que separa os meios  $i$  e  $j$  (Unidades :  $W / K$ ).

$m_j$ = massa do meio  $j$  (Unidades:  $kg$ ).

$c_j$ = calor específico do meio  $j$  (Unidades:  $J / (kg * K)$ ).

**Notação espaço de estados:  $\dot{X}=AX+BU$**

$$\begin{bmatrix} \frac{dT_1}{dt} \\ \frac{dT_2}{dt} \\ \frac{dT_0}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-k_{12}}{m_1 * C_1} & \frac{k_{12}}{m_1 * C_1} & 0 \\ \frac{k_{12}}{m_2 * C_2} & \left( \frac{-k_{12}}{m_2 * C_2} - \frac{k_{20}}{m_2 * C_2} \right) & \frac{k_{20}}{m_2 * C_2} \\ 0 & \frac{k_{20}}{m_0 * C_0} & \frac{-k_{20}}{m_0 * C_0} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

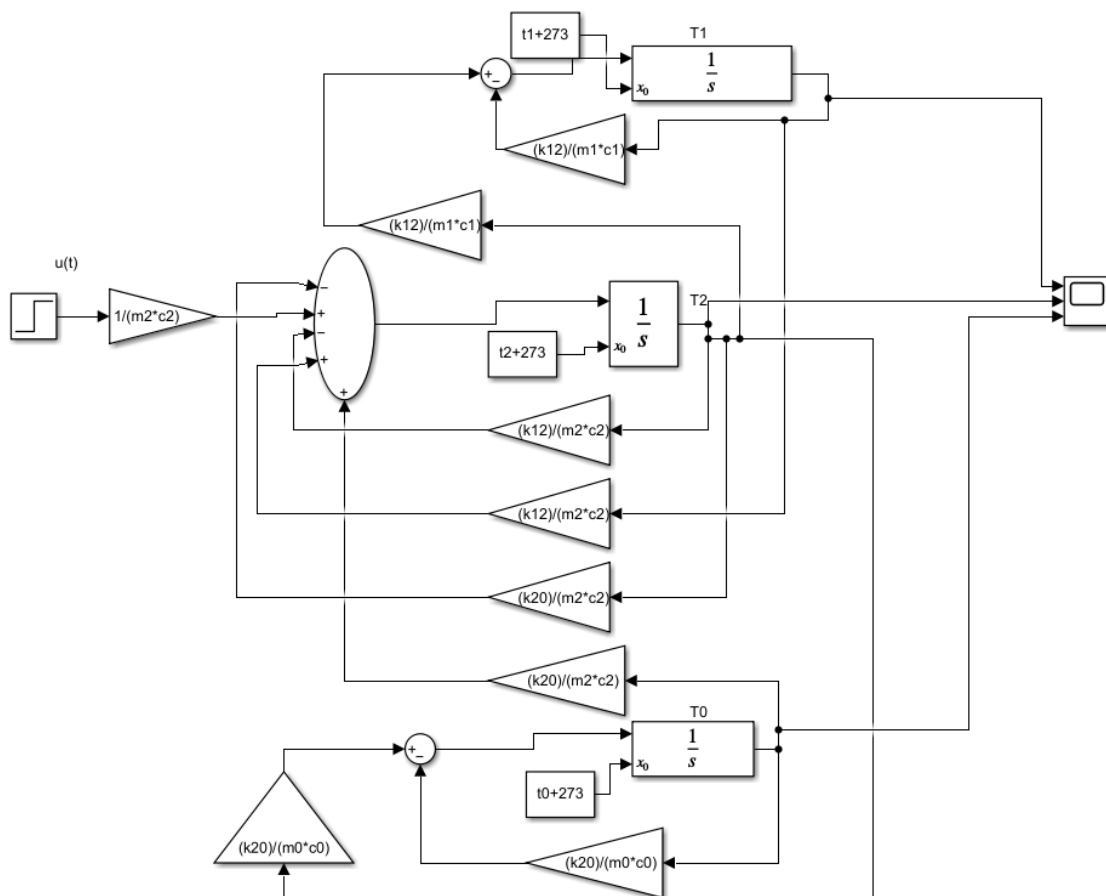
Se quisermos analisar somente o  $T_1$ :

$$Y = CX$$

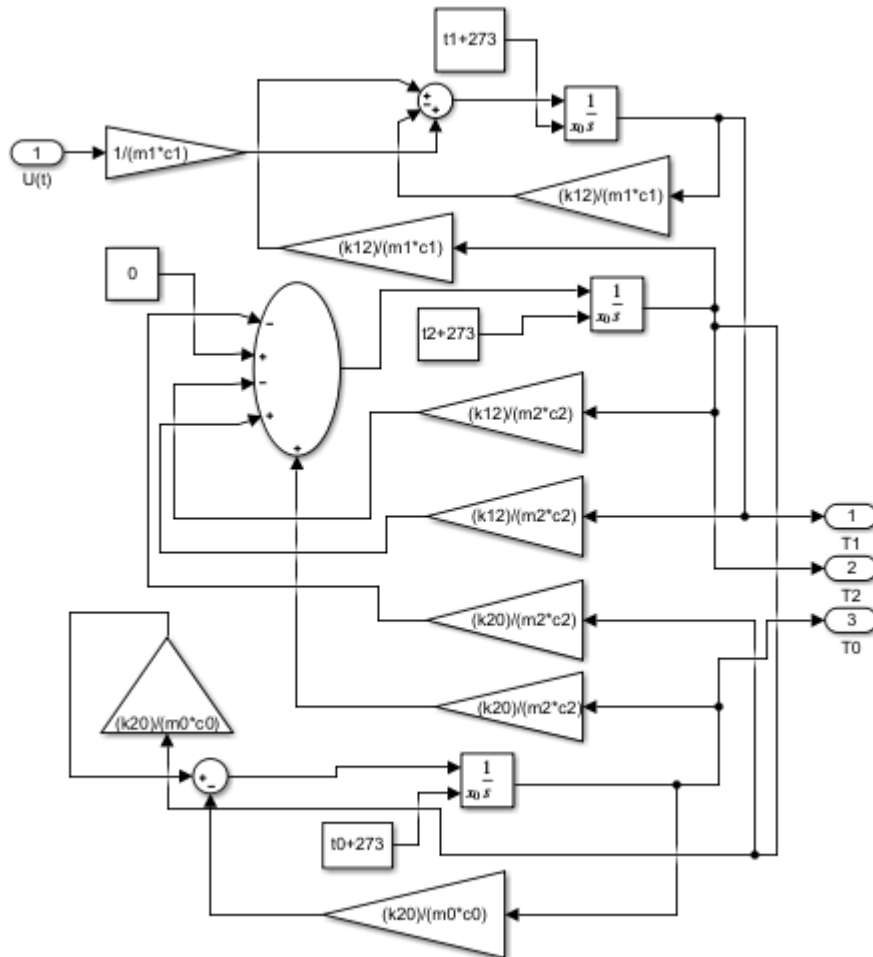
$$Y = T_1$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_0 \end{bmatrix}$$

**Esquemático da montagem em simulink em malha aberta (resistência no tanque 2):**



**Esquemático da montagem em simulink em malha aberta  
(resistência no tanque 1):**



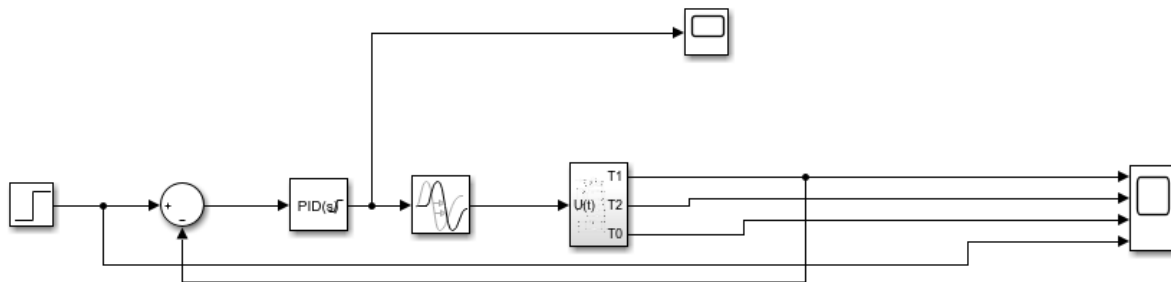
## Esquemático da montagem em simulink em malha fechada :

Dado a montagem anterior ser em malha aberta, ser um sistema isolado e fornecer constantemente energia, a variável a controlar nunca irá estabilizar.

Sendo assim, aplicamos um controlador PID que irá na simulação regular a quantidade de potência fornecida ao sistema, em função do erro que resulta da subtração entre a temperatura de referência e a temperatura do tanque T1.

Com isto tentaremos encontrar um controlador que consiga regular a temperatura do tanque 1 para 40 graus.

A montagem em malha fechada é a seguinte:



### Descrição dos elementos:

O bloco "PID" representa o controlador PID.

O bloco à direita do PID é um bloco de atraso pois a resistência não consegue aquecer instantaneamente ( o seu valor foi durante o trabalho todo 2 segundos).

O bloco que está à direita do bloco de atraso representa a montagem em malha aberta que está acima desta imagem, porém reduzida a uma caixa mais pequena para ser mais fácil de analisar.

Os "scopes" são aquelas mini televisões que servem para representar os sinais.

O bloco que está à esquerda de todo é um step que indica o valor da referência pretendida.

Denotar também que durante a análise em malha fechada vamos considerar 2 possíveis casos:

- Considerando uma resistência real (só há emissão de energia) => Não há perdas de energia, logo o conjunto nunca vai arrefecer. **Caso 1**
- Resistência que tanto absorve como emite energia .  
Um exemplo é um tubo onde passa água fria e quente. Este tubo está em contacto com o tanque, logo tanto consegue "retirar" energia do tanque(diminui a temperatura do tanque) como fornece energia ao mesmo(aumenta a temperatura). **Caso 2**

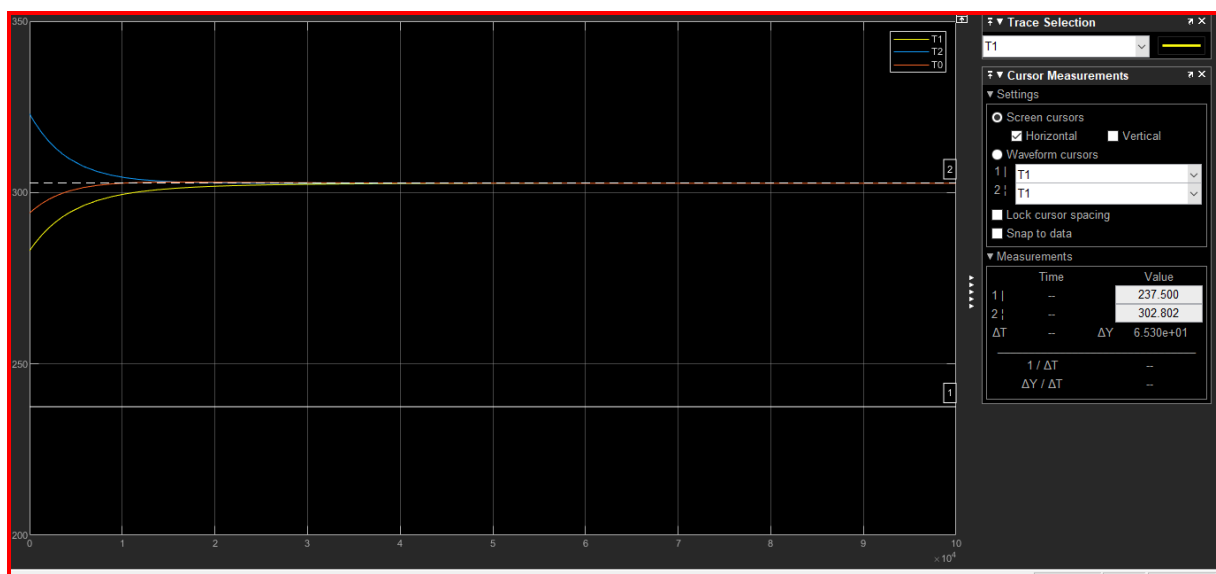
**Nota:** Todas as simulações em malha aberta do **Sistema 1** foram realizadas com a resistência diretamente ligada no tanque 2, porém para o caso em que a resistência se encontra no tanque 2, não conseguimos ter um sistema de controle que faça T1 estabilizar para 40° (sem contabilizar o caso em que apenas há a presença da constante de proporcionalidade).

Realizou-se várias tentativas:

- Aumentar I e P constante
- Aumentar P e I constante
- Diminuir P e aumentar I
- Diminuir I e aumentar P

Em nenhuma destas conseguimos estabilizar. Devido a isso, em malha fechada todas as simulações foram feitas com a resistência diretamente ligada no tanque 1.

Dizer porque no T1 do sistema 1 o objetivo é 40° e no sistema 2 o objetivo é 25°C: A razão é porque no sistema 1, dada as condições iniciais e dado que o sistema é isolado, quando o sistema fica em equilíbrio, ou seja, não há transferência de energia entre os tanques, a temperatura de estabilização é aproximadamente 30° (equivalente a aprox 302K). Assim, nunca iremos conseguir atingir os 25°C. (Não esquecer que não temos nada que faça a energia “sair” do sistema => a temperatura nunca vai diminuir).



**1ª simulação---Paredes de cimento (tanque 1) e tijolo (tanque 2), com água no interior de todos os tanques**

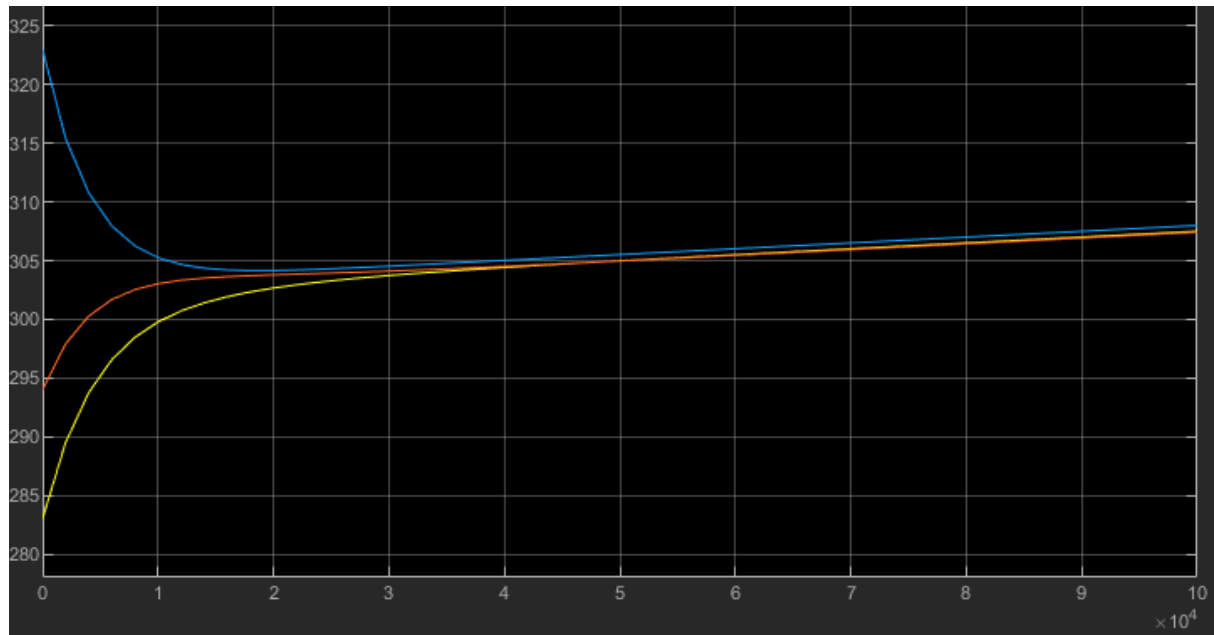
**Considerações:**

- Substância do Tanque 0: água
- Substância do Tanque 1: água
- Substância do Tanque 2: água
- Calor específico da substância do Tanque 0 ( $C_0$ ): 4180 J/(kg\*K)
- Calor específico da substância do Tanque 1 ( $C_2$ ): 4180 J/(kg\*K)
- Calor específico da substância do Tanque 2 ( $C_2$ ): 4180 J/(kg\*K)
- Massa da substância do Tanque 0 ( $m_0$ ): 2000 kg
- Massa da substância do Tanque 1 ( $m_1$ ): 1000 kg
- Massa da substância do Tanque 2 ( $m_2$ ): 1830 kg
- Área de cada placa do Tanque 1 ( $A_1$ ): 1 m<sup>2</sup>
- Área de cada placa do Tanque 2 ( $A_2$ ): 2 m<sup>2</sup>
- Espessura da placa do Tanque 1 ( $L_1$ ): 0.01 m
- Espessura da placa do Tanque 2 ( $L_2$ ): 0.01 m
- Condutibilidade térmica do material da placa do Tanque 1 ( $k_{12}$ ): cimento- 0.7 W/(m\*K)
- Condutibilidade térmica do material da placa do Tanque 2 ( $k_{20}$ ): tijolo-0.6 W/(m\*K)
- Temperatura inicial do tanque 1: 10°C (283K)
- Temperatura inicial do tanque 2: 50°C (323K)
- Temperatura inicial do tanque 0: 21°C (294K)
- Calor emitido pela resistência : 1000 J/s (em malha aberta)

$$K_{12} = \frac{k_{12} * 6 * A_1}{L_1} = 420 \text{ W/K}$$

$$K_{20} = \frac{k_{20} * 6 * A_2}{L_2} = 720 \text{ W/K}$$

**Malha aberta:**



**Amarelo:** Temperatura T1

**Vermelho:** Temperatura T0

**Azul:** Temperatura T2

**Escala do x:** segundos

**Escala do y:** Kelvin

### **Análise da simulação:**

Inicialmente verifica-se que a temperatura do tanque 1 sobe a um ritmo um pouco mais lento do que a descida da temperatura do tanque 2 devido ao maior K do tanque 2 face ao do tanque 1 ( $K_{20} > K_{12}$ ).

Também ocorrem transferências de calor do tanque 2 para o tanque 0 de modo que a temperatura do mesmo varie. À medida que o tempo passa, os três tanques tendem a ficar à mesma temperatura, pois as transferências de calor procuram uniformizar a temperatura do sistema, porém o calor constante emitido pela resistência faz aumentar progressivamente a temperatura do sistema  $T_1 + T_2 + T_0$ , uma vez que o sistema é isolado e por isso não há perdas de calor (devido a isto não se atinge equilíbrio térmico).

### **Malha fechada:**

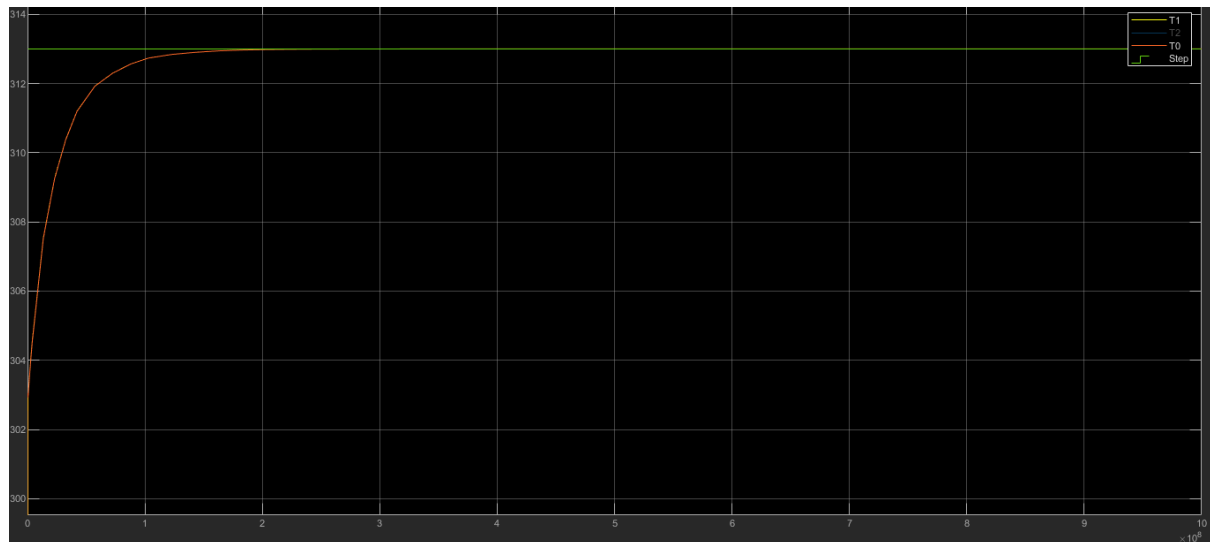


### Parâmetros do Caso 1:

Potência de saturação mínima = 0 W

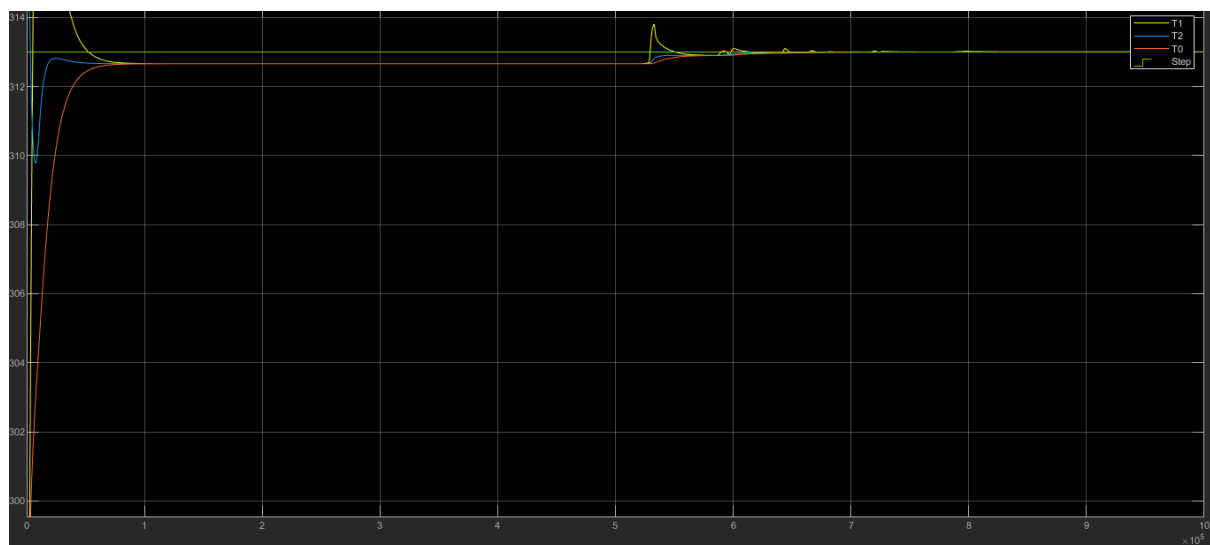
Potência de saturação máxima=18885 W

Resultados da simulação:



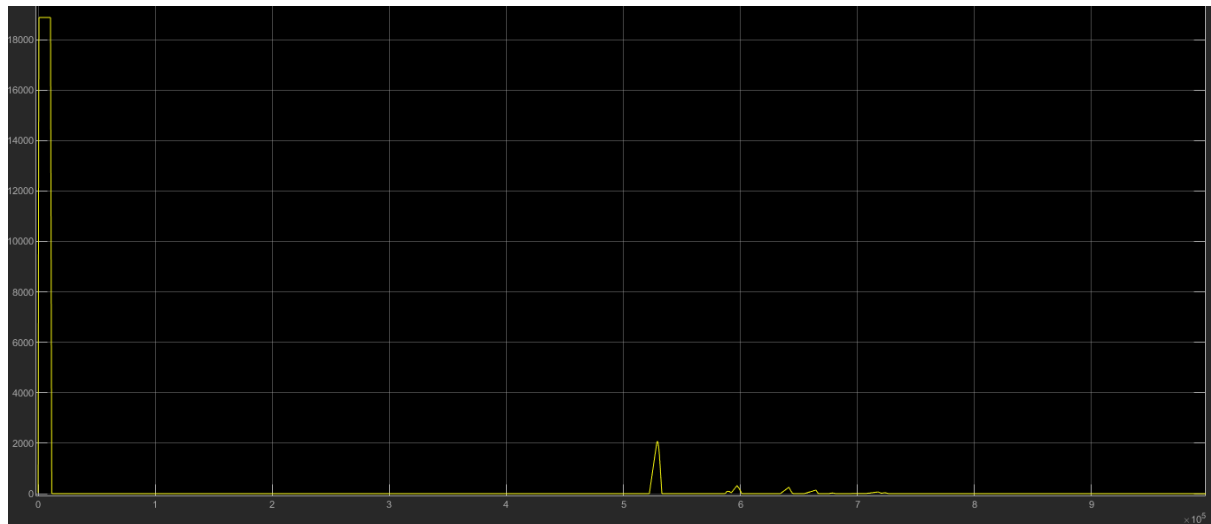
### (Parâmetros PID: $P=1, I=0, D=0$ )

Como vemos na imagem com o controlador proporcional conseguimos estabilizar a temperatura na referência pretendida, porém demora bastante tempo, o que em termos práticos é intolerável para qualquer aplicação. Sendo assim vamos adicionar uma componente integral de forma a conseguir reduzir o tempo de estabilização. Com estes novos parâmetros obtemos os seguintes resultados:



### (Parâmetros do PID: $P=1, I=1, D=0$ )

Resposta do PID:



Verificamos que a temperatura estabiliza mais rapidamente com a parte integral, porém denotar que, se porventura colocássemos uma potência maior no limite superior de saturação do PID, este estabilizaria numa temperatura superior à de referência, uma vez que se trata de um sistema isolado e como a potência coloca os sistemas, inicialmente, numa temperatura superior à pretendida, não consegue perder a energia em excesso. De forma a resolver este problema teríamos de ter uma espécie de permutador de calor que permitisse eliminar esses excessos.

Sendo assim passaremos ao **caso 2** onde vamos retratar esta mesma situação.

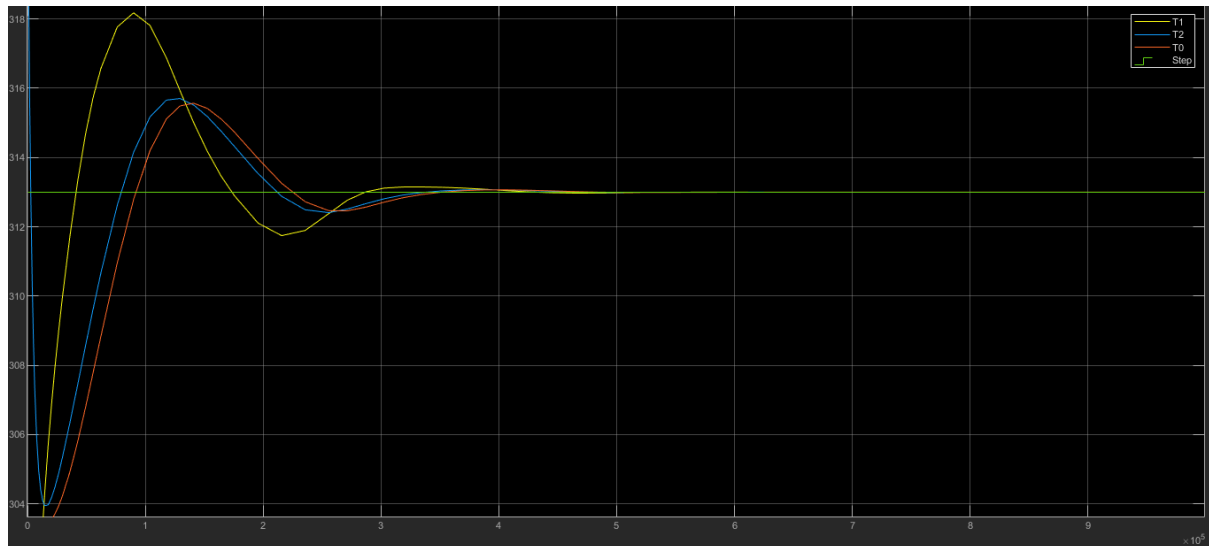
### **Parâmetros do Caso 2:**

Potência de saturação mínima= -18885

Potência de saturação máxima= 18885

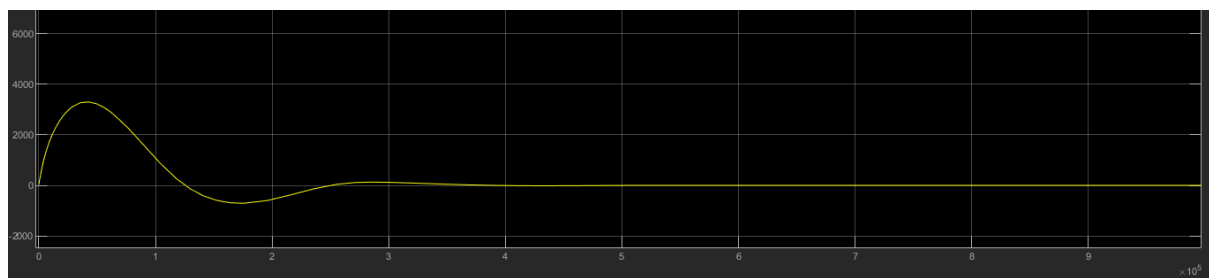
Passaremos ao segundo caso onde consideramos o limite inferior do PID como sendo -18885, ou seja, a resistência pode ter uma potência negativa e deste modo pode dissipar o calor que está a mais. Este é o tal permutador que procurávamos ter anteriormente, porém uma resistência com potência negativa é algo fisicamente impossível, logo devemos ter em mente que este plano posto em prática é algo puramente teórico e se o quiséssemos aplicar no mundo real teríamos de recorrer a um radiador ou a uma tubagem de aquecimento e refrigeração, por exemplo.

Sendo assim obtemos a seguinte resposta:



(Parâmetros PID:  $P=1, I=0.01, D=0$ )

Obtemos assim uma resposta melhor com os novos parâmetros e como podemos verificar com o sinal na saída do PID este já assume valores negativos o que ajuda no controle da temperatura do tanque 1:



## ***2ª simulação---Paredes de cimento (tanque 1) e tijolo (tanque 2), com água no interior dos tanques e resistência desligada***

### **Considerações:**

Da 1ª simulação para esta, alterou-se a potência calorífica/calor emitido pela resistência, mantendo-se as restantes variáveis constantes.

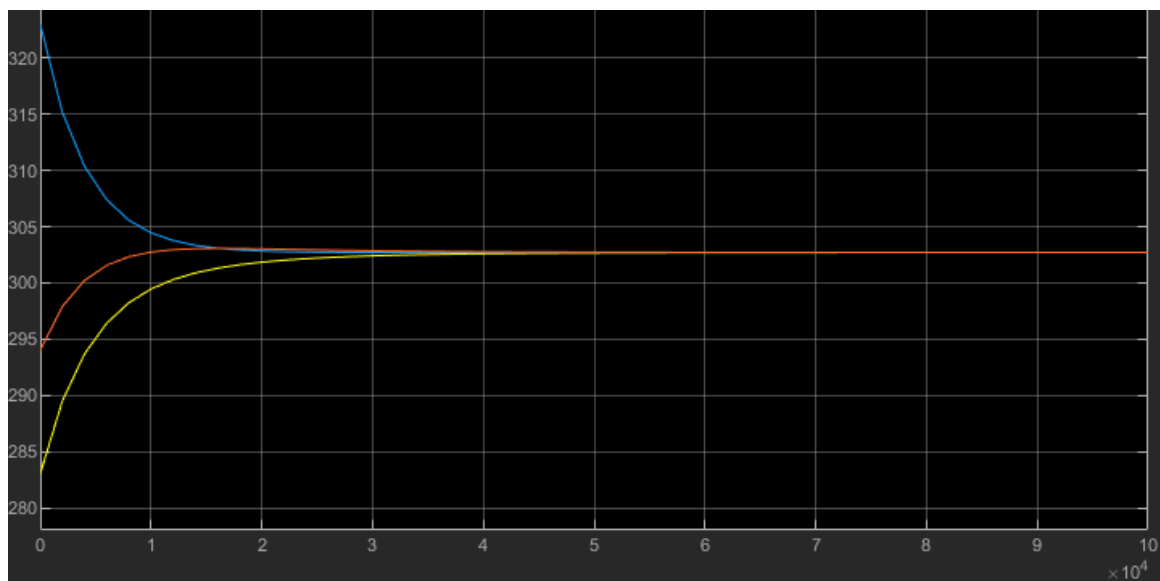
- **Substância do Tanque 0:** água
- **Substância do Tanque 1:** água
- **Substância do Tanque 2:** água
- **Calor específico da substância do Tanque 0 ( $C_0$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Calor específico da substância do Tanque 1 ( $C_1$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Calor específico da substância do Tanque 2 ( $C_2$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Massa da substância do Tanque 0 ( $m_0$ ):** 2000 kg

- Massa da substância do Tanque 1( $m_1$ ): 1000 kg
- Massa da substância do Tanque 2( $m_2$ ): 1830 kg
- Área de cada placa do Tanque 1( $A_1$ ): 1 m<sup>2</sup>
- Área de cada placa do Tanque 2( $A_2$ ): 2 m<sup>2</sup>
- Espessura da placa do Tanque 1( $L_1$ ): 0.01 m
- Espessura da placa do Tanque 2 ( $L_2$ ): 0.01 m
- Condutibilidade térmica do material da placa do Tanque 1 ( $k_{12}$ ): cimento- 0.7 W/(m\*K)
- Condutibilidade térmica do material da placa do Tanque 2 ( $k_{20}$ ) : tijolo-0.6 W/(m\*K)
- Temperatura inicial do tanque 1: 10°C (283K)
- Temperatura inicial do tanque 2: 50°C (323K)
- Temperatura inicial do tanque 0: 21°C (294K)
- Calor emitido pela resistência : 0 J/s (em malha aberta)

$$K_{12} = \frac{k_{12} * 6 * A_1}{L_1} = 420 \text{ W/K}$$

$$K_{20} = \frac{k_{20} * 6 * A_2}{L_2} = 720 \text{ W/K}$$

### Malha aberta:



**Amarelo:** Temperatura T1

**Vermelho:** Temperatura T0

**Azul:** Temperatura T2

**Escala do x:** segundos

**Escala do y:** Kelvin

### **Análise da simulação:**

Relativamente à simulação 1, apenas se desligou a resistência para ver o seu impacto no sistema.

Deste modo as várias temperaturas vão-se aproximar de um meio termo, neste caso fazendo a média obtemos aproximadamente 300 K (27°C) como vemos na figura. Sendo assim a temperatura do sistema  $T1+T2+T0$  vai tender a estabilizar em torno desse valor. Isto acontece pois não há nenhuma fonte externa a emitir calor para o sistema, e devido a isso o sistema procura sempre atingir o seu estado de equilíbrio térmico. Quando esse estado é atingido, as transferências de calor desaparecem.

### **Malha fechada:**

Não se realizou pois não tinha interesse (as condições iniciais são as mesmas da simulação 1, exceto a potência calorífica da resistência que passa a ser 0, sendo que num controlo em malha fechada não faz muito sentido considerar esse aspecto).

## ***3ª simulação---Paredes de cimento (tanque 1) e ferro (tanque 2), com água no seu interior.***

### **Considerações:**

Da 1ª simulação para esta, alterou-se o material da placa do tanque 2, mantendo-se as restantes variáveis constantes.

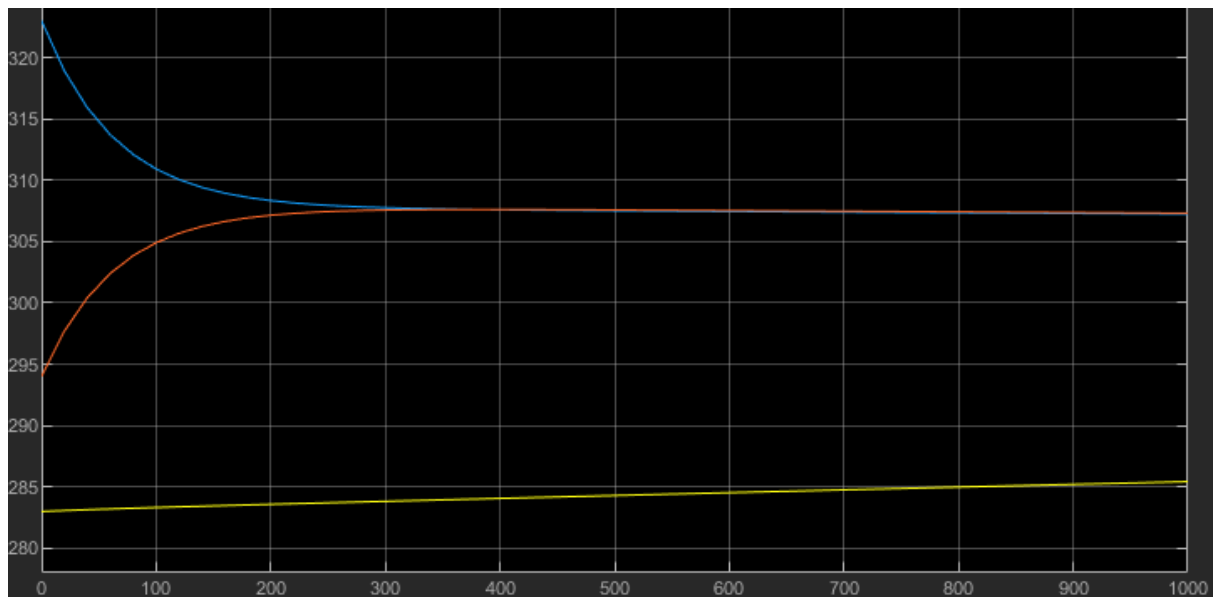
- **Substância do Tanque 0:** água
- **Substância do Tanque 1:** água
- **Substância do Tanque 2:** água
- **Calor específico da substância do Tanque 0 ( $C_0$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Calor específico da substância do Tanque 1 ( $C_1$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Calor específico da substância do Tanque 2 ( $C_2$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Massa da substância do Tanque 0 ( $m_0$ ):** 2000 kg

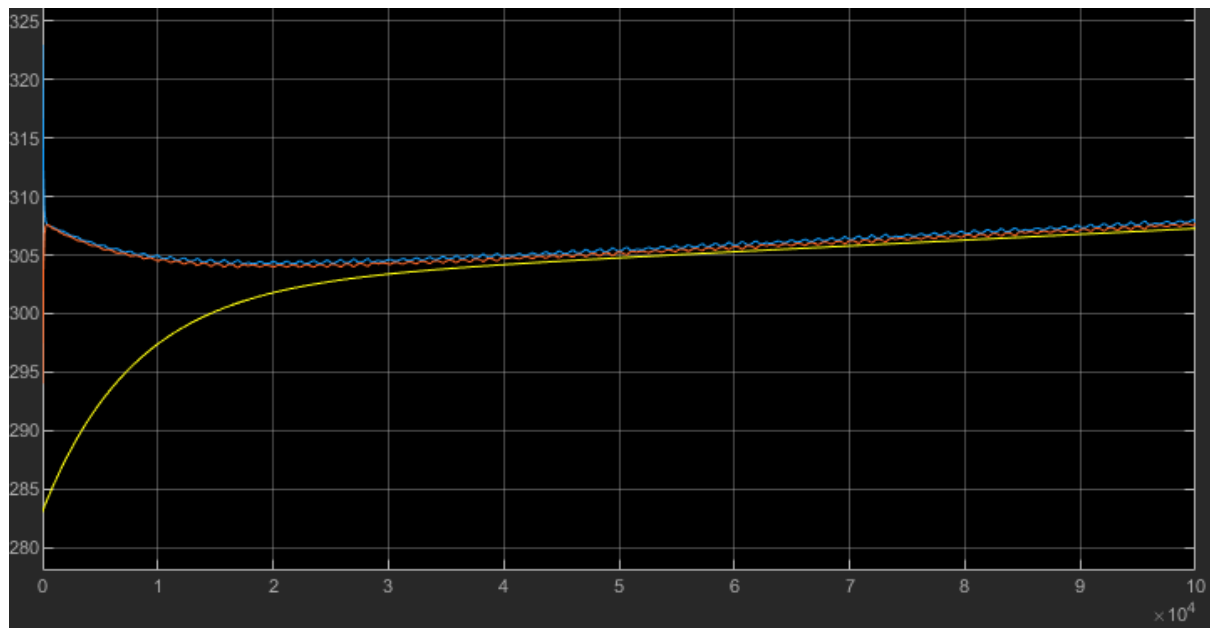
- Massa da substância do Tanque 1( $m_1$ ): 1000 kg
- Massa da substância do Tanque 2( $m_2$ ): 1830 kg
- Área de cada placa do Tanque 1( $A_1$ ): 1 m<sup>2</sup>
- Área de cada placa do Tanque 2( $A_2$ ): 2 m<sup>2</sup>
- Espessura da placa do Tanque 1( $L_1$ ): 0.01 m
- Espessura da placa do Tanque 2 ( $L_2$ ): 0.01 m
- Condutibilidade térmica do material da placa do Tanque 1 ( $k_{12}$ ): cimento- 0.7 W/(m\*K)
- Condutibilidade térmica do material da placa do Tanque 2 ( $k_{20}$ ) : ferro-52 W/(m\*K)
- Temperatura inicial do tanque 1: 10°C (283K)
- Temperatura inicial do tanque 2: 50°C (323K)
- Temperatura inicial do tanque 0: 21°C (294K)
- Calor emitido pela resistência : 1000 J/s (em malha aberta)

$$K_{12} = \frac{k_{12} * 6 * A_1}{L_1} = 420 \text{ W/K}$$

$$K_{20} = \frac{k_{20} * 6 * A_2}{L_2} = 62400 \text{ W/K}$$

### Malha aberta:





**Amarelo:** Temperatura T1

**Vermelho:** Temperatura T0

**Azul:** Temperatura T2

**Escala do x:** segundos

**Escala do y:** Kelvin

#### **Análise da simulação:**

Face à 1ª simulação, apenas se mudou a constituição do tanque 2 para uma material bem mais condutor face ao cimento, que é o ferro.

Essa mudança proporcionou uma troca de calor mais acentuada entre o tanque 2 e o tanque 0, levando a que estes dois tanques atingissem rapidamente a mesma temperatura. O efeito da diferença de constituição dos materiais de ambos os tanques verifica-se logo nos primeiros minutos, nos quais a temperatura do tanque 2 baixa rapidamente pois o calor passa rapidamente pela parede de ferro para o tanque 0, e o tanque 1 vai aumentando ligeiramente até que os três tanques fiquem aproximadamente à mesma temperatura. Como a resistência liberta calor, e o sistema é isolado, então as temperaturas dos 3 tanques vão estar sempre a subir.

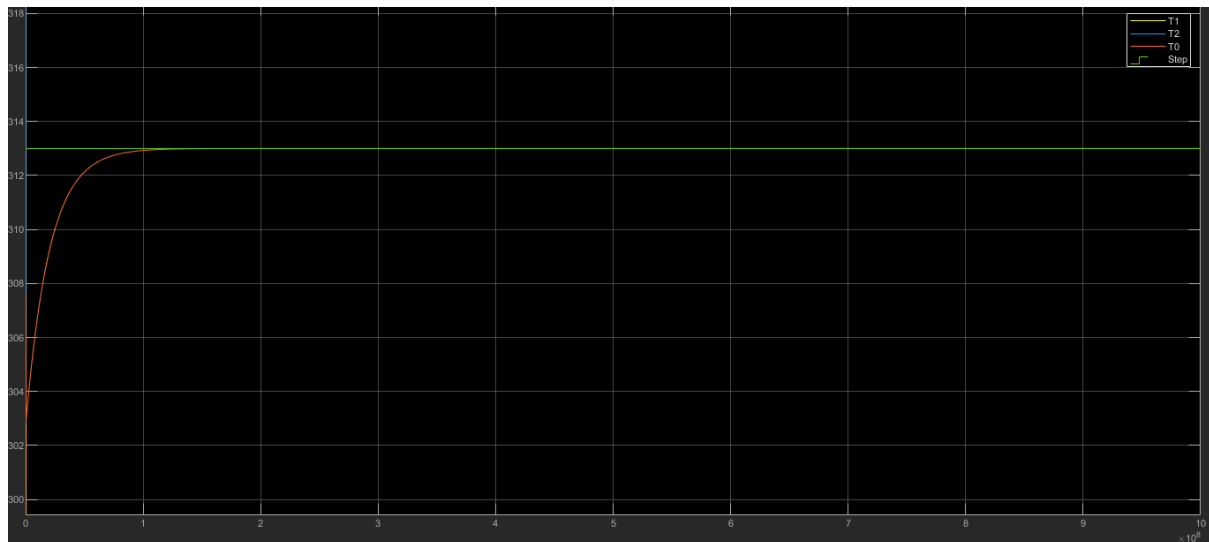
#### **Malha fechada:**

##### **Parâmetros do Caso 1:**

Potência de saturação mínima = 0 W

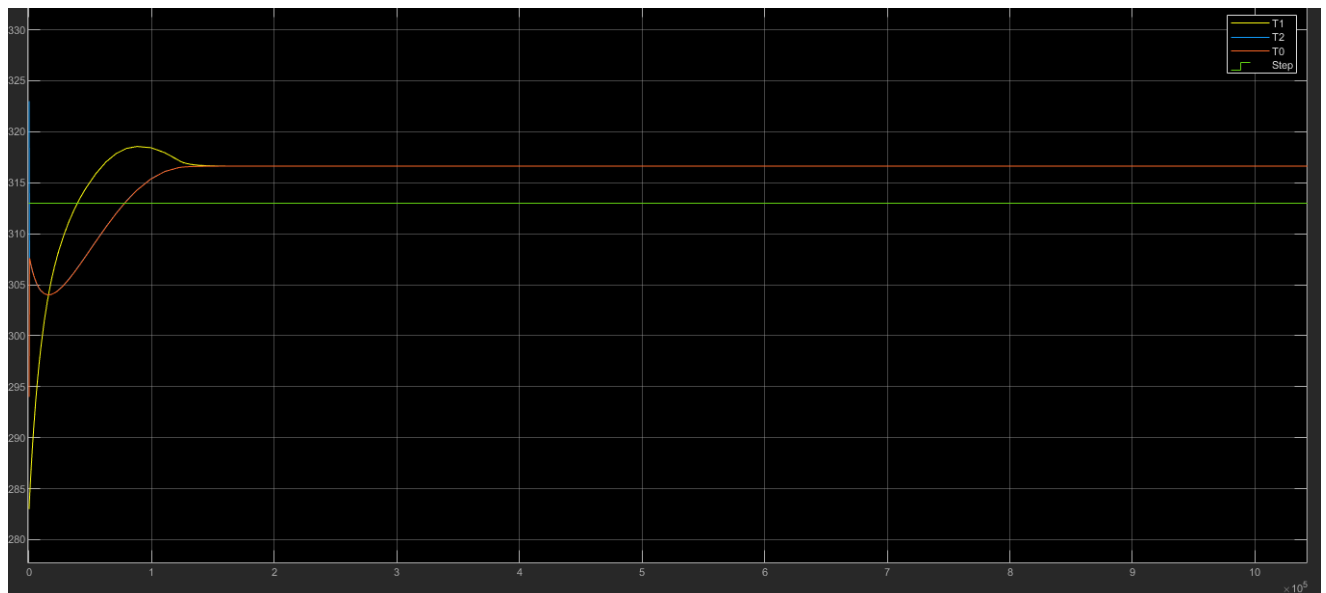
Potência de saturação máxima=18885 W

Começamos por colocar apenas o parâmetro proporcional no PID e vamos verificar que conseguimos estabilizar no valor pretendido porém vai demorar bastante tempo como indica a figura:



**(Parâmetros PID:  $P=1, I=0, D=0$ )**

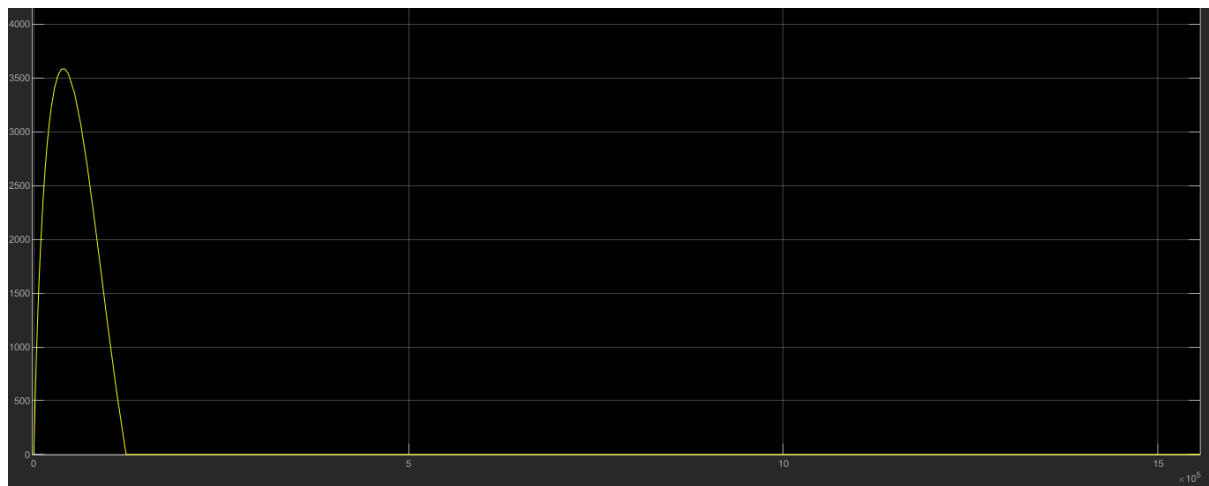
Sendo assim vamos acrescentar novos parâmetros no PID mais propriamente uma componente integral e uma derivativa e assim obtemos o seguinte na saída:



**(Parâmetros PID:  $P=0.01, I=2.1, D=0$ )**

A resposta do PID é a seguinte:



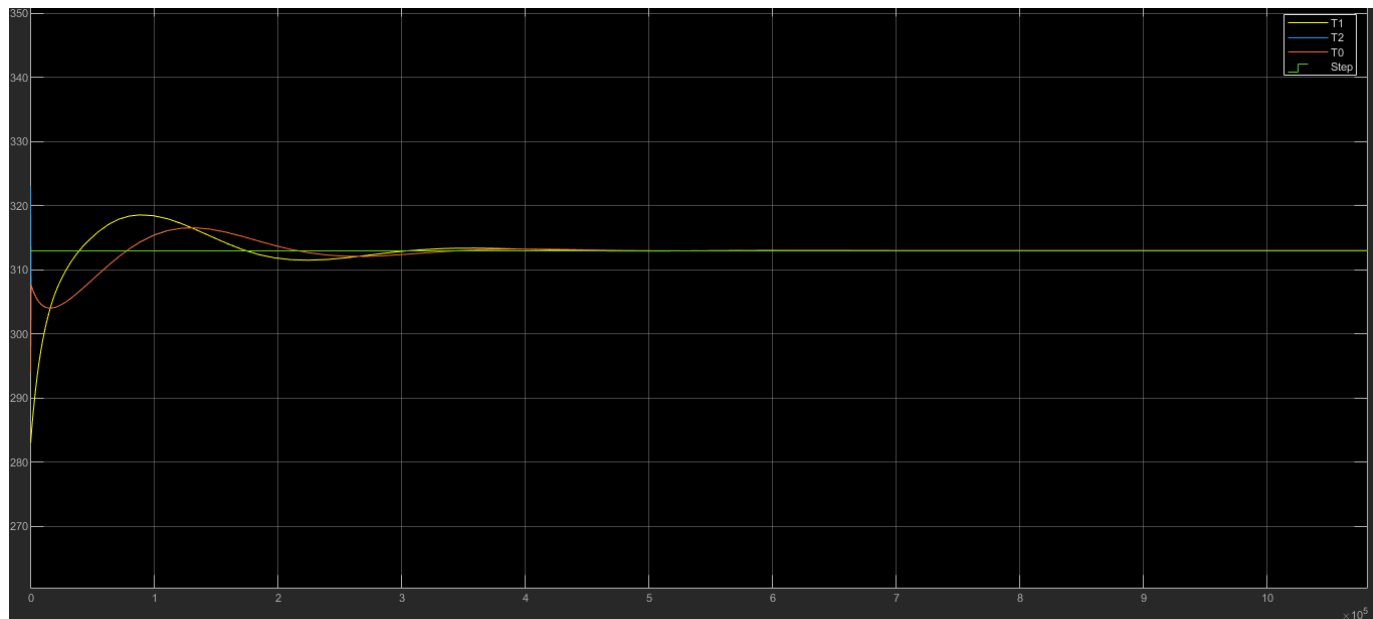


Rapidamente verificamos que existe um pequeno “desfasamento” entre as temperaturas dos tanques e a referência. Como sabemos a resistência de aquecimento encontra-se dentro do tanque 1, que por sua vez partilha uma barreira de baixa condutividade com o tanque 2. Contrariamente, o tanque 2 e 0 têm uma barreira de altíssima condutividade o que faz com que atinjam a mesma temperatura rapidamente. Porém, como a barreira do tanque 1 deixa passar o calor mais lentamente, assistimos primeiramente a um aquecimento deste e ao longo do tempo o calor passa para os outros 2 tanques, resultando numa estabilização da temperatura dos 3 tanques ao fim de algum tempo. Neste caso, não vai estabilizar na temperatura de referência, pois a diferença entre o calor que foi armazenado em 1 e o calor dissipado para os outros 2 tanques não chegou a um patamar, por assim dizer, inferior à de referência, ficando inclusive acima desta. Sendo assim e como o sistema não pode dissipar o calor em excesso estamos perante um problema que vamos resolver utilizando o **caso 2**.

**Parâmetros do Caso 2:**

Potência de saturação mínima= -18885

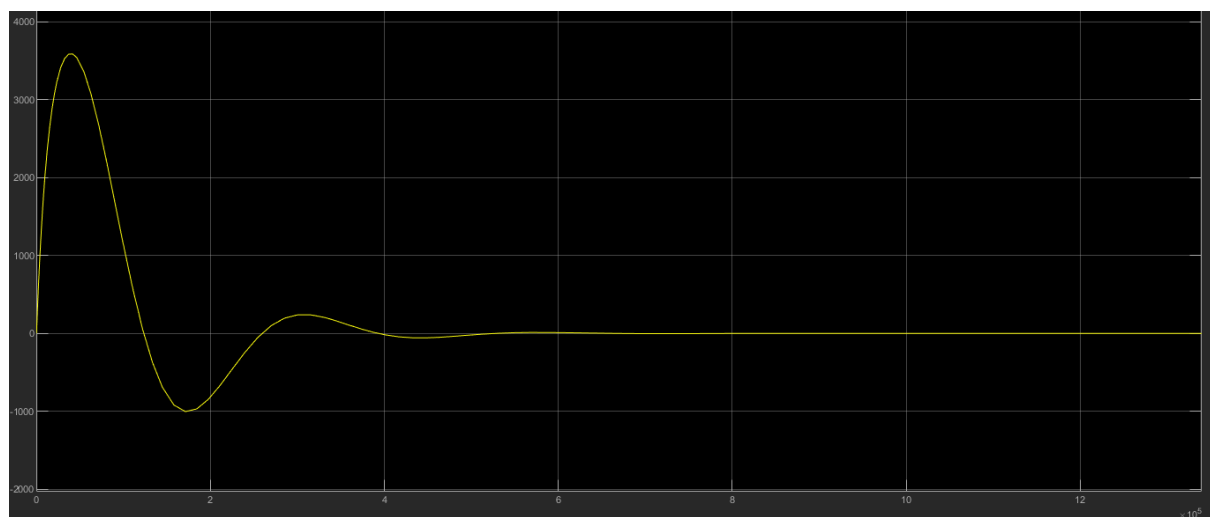
Potência de saturação máxima=18885



**(Parâmetros PID:  $P=0.01, I=2.1, D=0$ )**

Como podemos ver, definindo agora potências negativas, o sistema pode perder o calor em excesso. Tal como já tínhamos justificado anteriormente, como a barreira que separa o tanque 1 dos outros 2 sistemas tem baixa condutividade, o calor que passa por esta é muito menor comparado com aquele que recebe, por isso é natural haver um certo desfasamento entre a temperatura do tanque 1 e a dos outros 2 visto que a resistência encontra-se dentro do tanque 1. Sendo assim, passado algum tempo e com auxílio do PID a temperatura vai estabilizar na referência tal como pretendemos.

**A resposta do PID:**



#### **4ª simulação---Paredes de ferro (tanque 1) e tijolo (tanque 2), com água no interior dos tanques.**

##### **Considerações:**

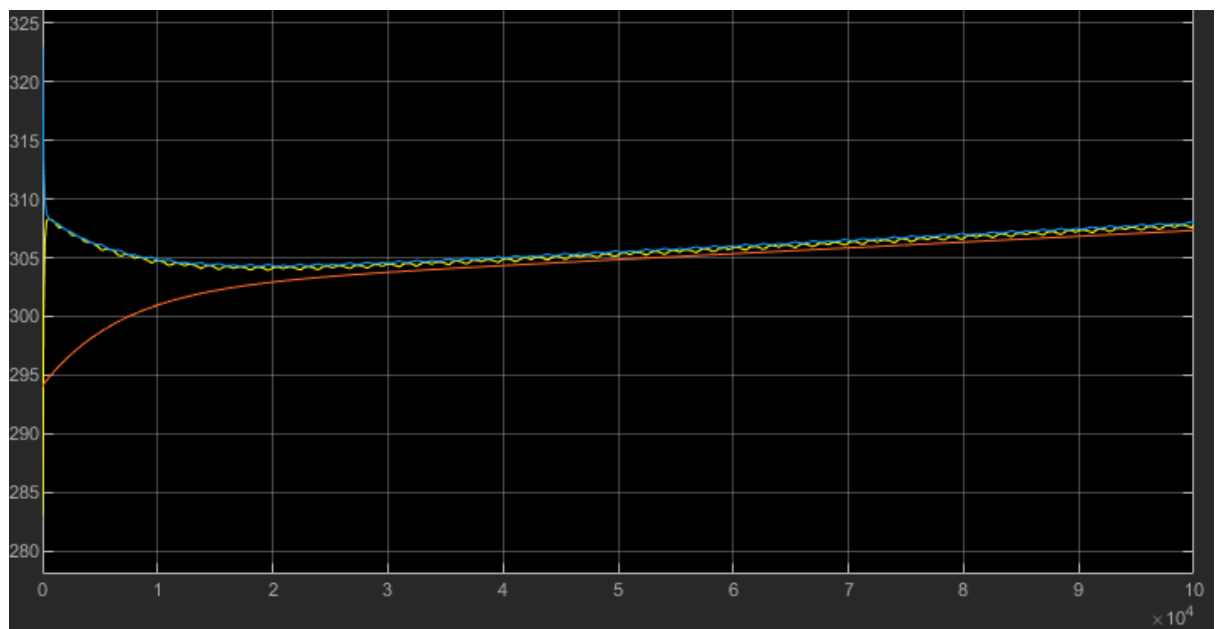
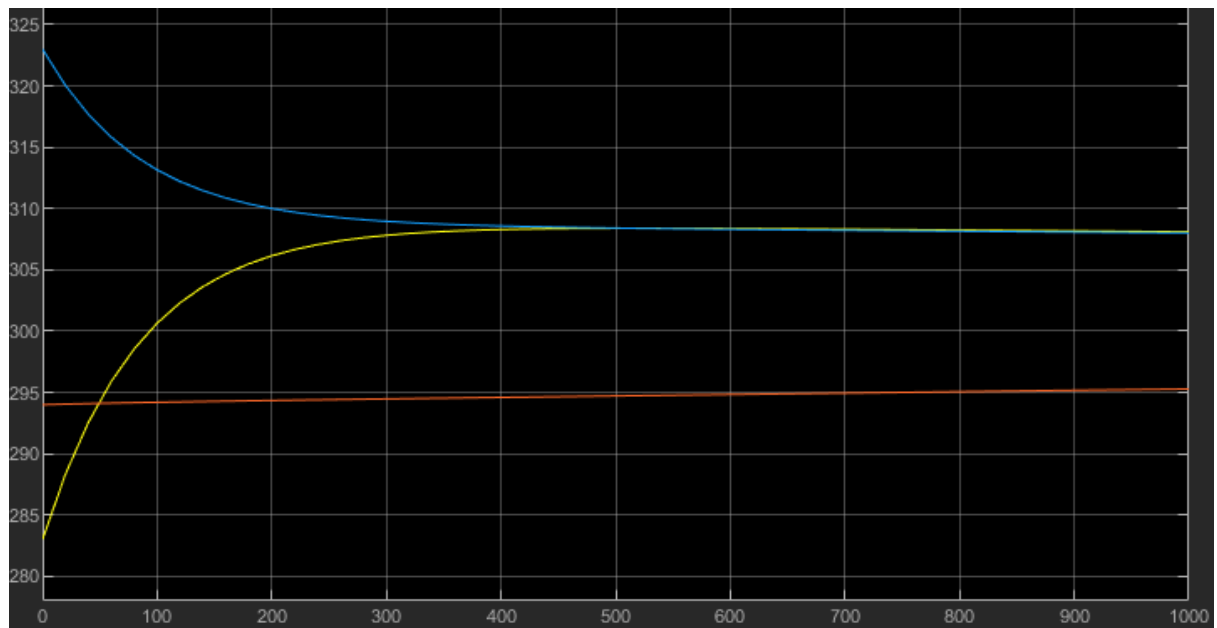
Da 1ª simulação para esta, alterou-se o material da placa do tanque 1, mantendo-se as restantes variáveis constantes.

- **Substância do Tanque 0:** água
- **Substância do Tanque 1:** água
- **Substância do Tanque 2:** água
- **Calor específico da substância do Tanque 0 ( $C_0$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Calor específico da substância do Tanque 1 ( $C_1$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Calor específico da substância do Tanque 2 ( $C_2$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Massa da substância do Tanque 0 ( $m_0$ ):** 2000 kg
- **Massa da substância do Tanque 1 ( $m_1$ ):** 1000 kg
- **Massa da substância do Tanque 2 ( $m_2$ ):** 1830 kg
- **Área de cada placa do Tanque 1 ( $A_1$ ):** 1 m<sup>2</sup>
- **Área de cada placa do Tanque 2 ( $A_2$ ):** 2 m<sup>2</sup>
- **Espessura da placa do Tanque 1 ( $L_1$ ):** 0.01 m
- **Espessura da placa do Tanque 2 ( $L_2$ ):** 0.01 m
- **Condutibilidade térmica do material da placa do Tanque 1 ( $k_{12}$ ):** ferro- 52 W/(m\*K)
- **Condutibilidade térmica do material da placa do Tanque 2 ( $k_{20}$ ):** tijolo-0.6 W/(m\*K)
- **Temperatura inicial do tanque 1:** 10°C (283K)
- **Temperatura inicial do tanque 2:** 50°C (323K)
- **Temperatura inicial do tanque 0:** 21°C (294K)
- **Calor emitido pela resistência :** 1000 J/s (em malha aberta)

$$K_{12} = \frac{k_{12} * 6 * A_1}{L_1} = 31200 \text{ W/K}$$

$$K_{20} = \frac{k_{20} * 6 * A_2}{L_2} = 720 \text{ W/K}$$

##### **Malha aberta:**



**Amarelo:** Temperatura T1

**Vermelho:** Temperatura T0

**Azul:** Temperatura T2

**Escala do x:** segundos

**Escala do y:** Kelvin

**Análise da simulação:**

Relativamente à simulação 1 mudou-se o material do tanque 1 para ferro que possui uma elevada capacidade de conduzir calor. Deste modo, mal o sistema inicie haverá uma forte dissipação de calor do tanque 2 para o 1 o que resultará em que estes fiquem com a mesma temperatura. Como se trata de um sistema isolado, e a resistência emite calor, essa temperatura vai estar sempre a subir. Já o material do tanque 2 possui menor capacidade de conduzir calor, logo a temperatura do tanque 0 vai aumentar mais devagar, mas ao fim de bastante tempo atingirá aproximadamente o mesmo valor que as outras temperaturas.

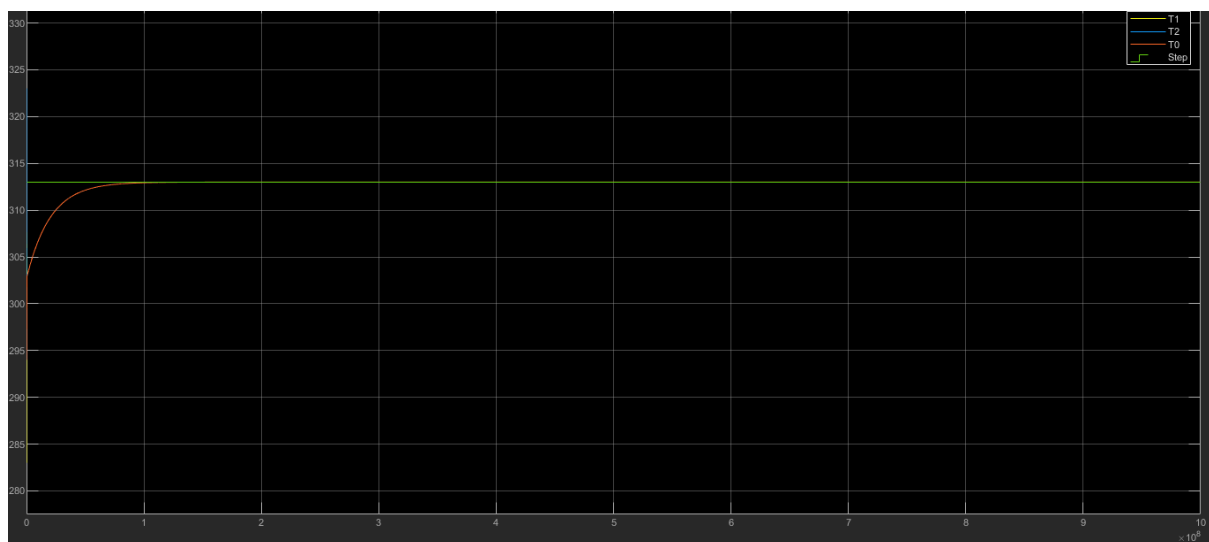
### **Malha fechada:**

#### **Parâmetros do Caso 1:**

Potência de saturação mínima = 0 W

Potência de saturação máxima=18885 W

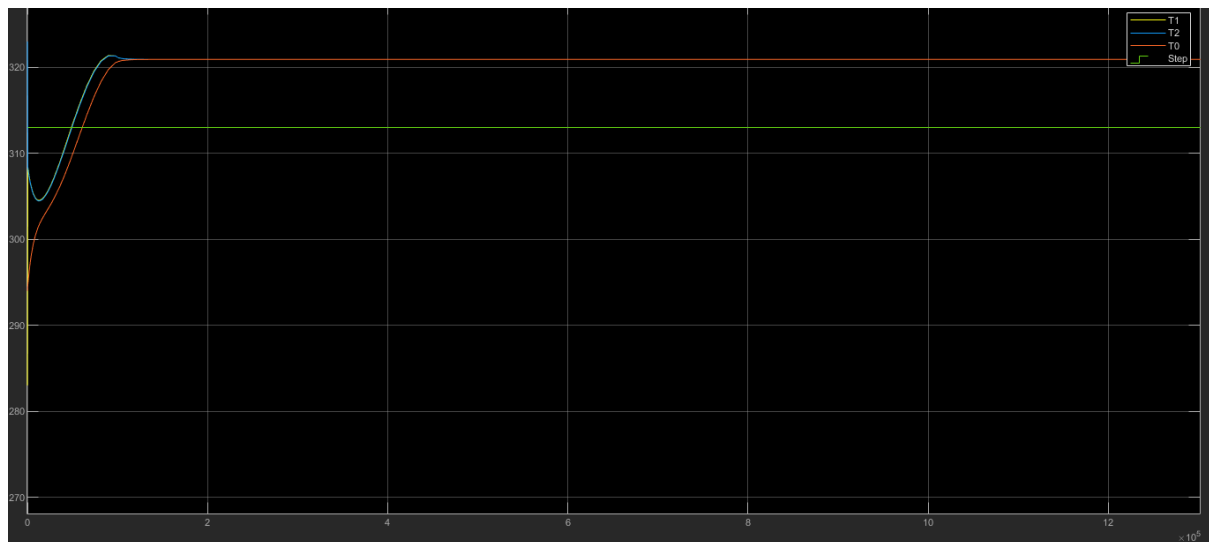
Como no caso anterior vamos começar por apenas aplicar o controlador proporcional.



**(Parâmetros PID: P=1,I=0,D=0)**

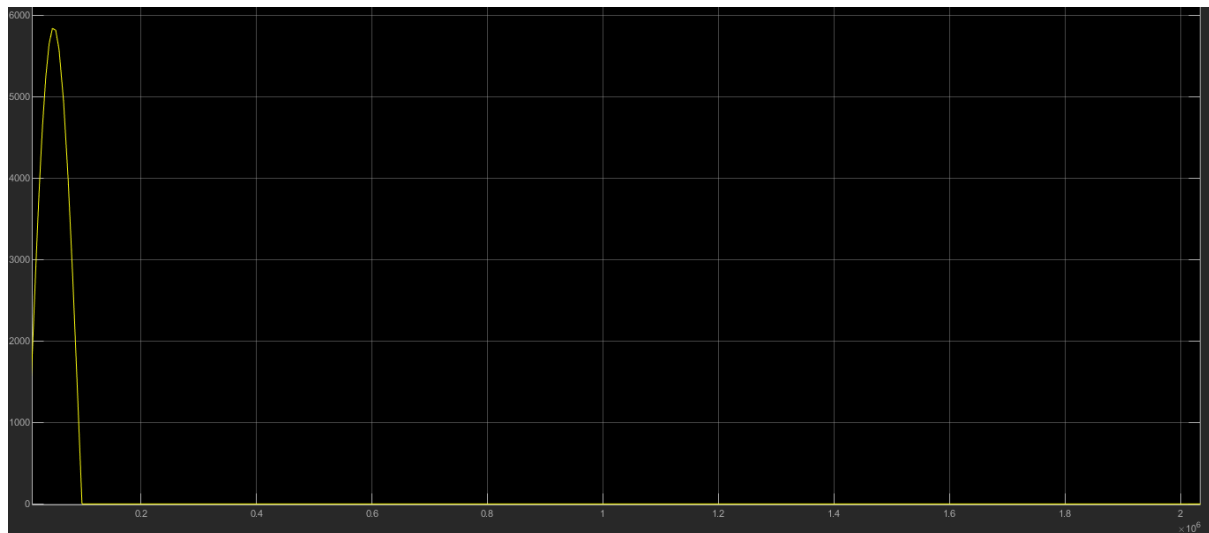
Tal como esperado a temperatura vai estabilizar porém usando só o controlador proporcional este processo vai demorar bastante tempo.

Sendo assim vamos acrescentar uma componente integral ao nosso controlador para ver se conseguimos reduzir este tempo.



(Parâmetros PID:  $P=0.1, I=1, D=0$ )

**Resposta do PID:**



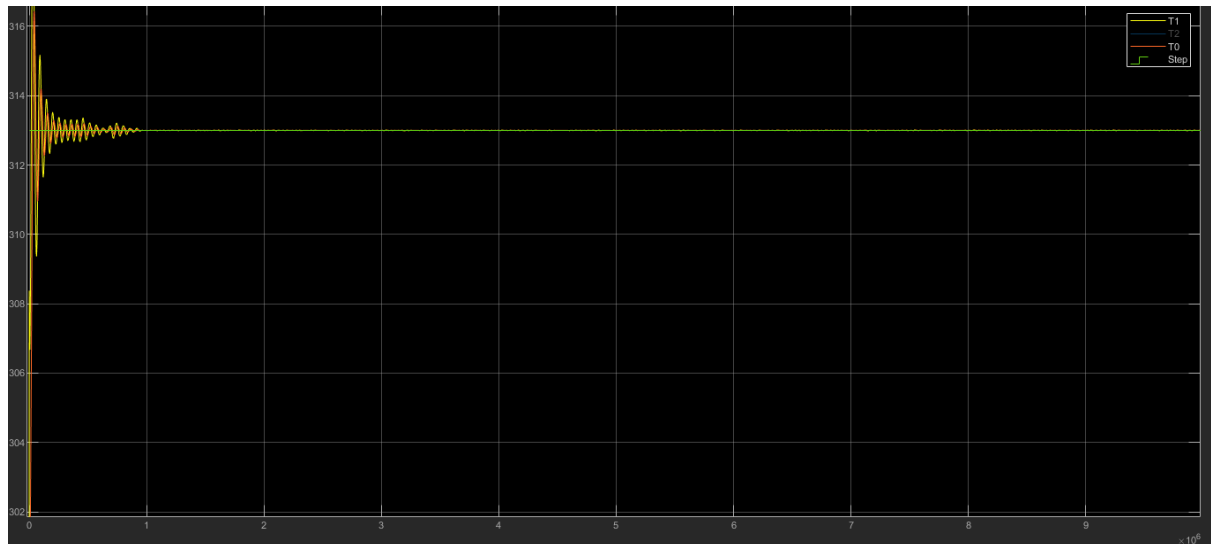
A temperatura estabiliza mais rapidamente porém num patamar superior à de referência pois, visto estarmos perante um sistema isolado, o tanque não consegue, por assim dizer, expulsar o calor a mais.

Para corrigir isso vamos utilizar potências negativas, o que fisicamente corresponde a usar um mecanismo de permutação de calor.

**Parâmetros do Caso 2:**

Potência de saturação mínima= -18885

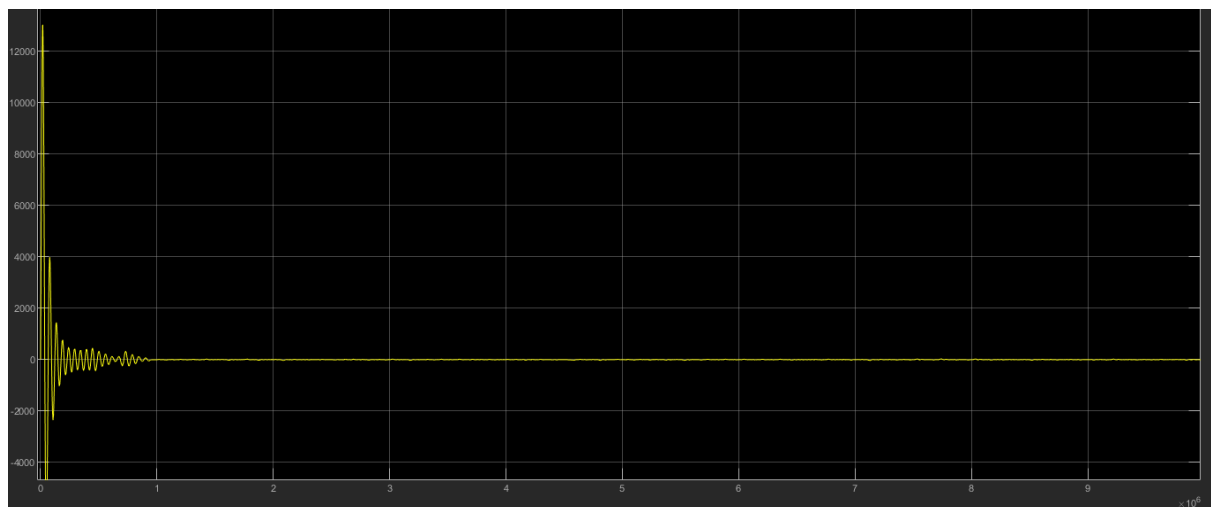
Potência de saturação máxima=18885



(Parâmetros PID:  $P=0.9, I=1.9, D=1$ )

Tal como previsto, a temperatura vai estabilizar na de referência visto que são “permitidas” permutações de calor e estabiliza mais rapidamente comparativamente com o caso em que apenas há componente proporcional.

A resposta do PID é a seguinte:



**5ª simulação---Paredes de ferro em ambos os tanques e água no interior de ambos.**

**Considerações:**

Da 1ª simulação para esta, alterou-se os materiais das placas dos tanques 1 e 2, mantendo-se as restantes variáveis constantes.

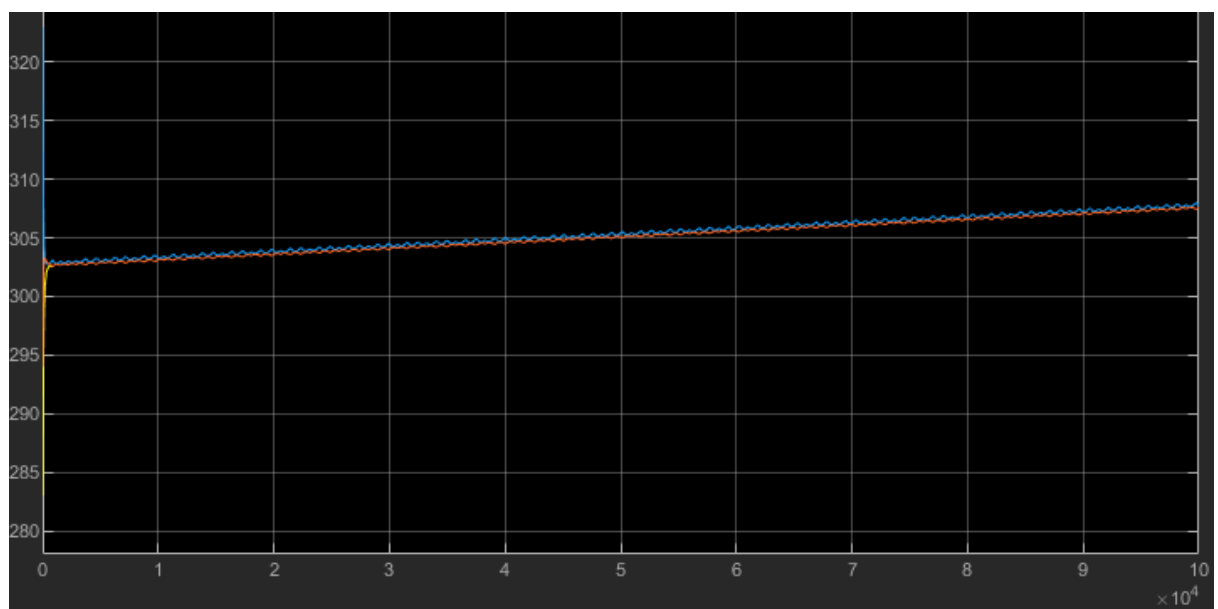
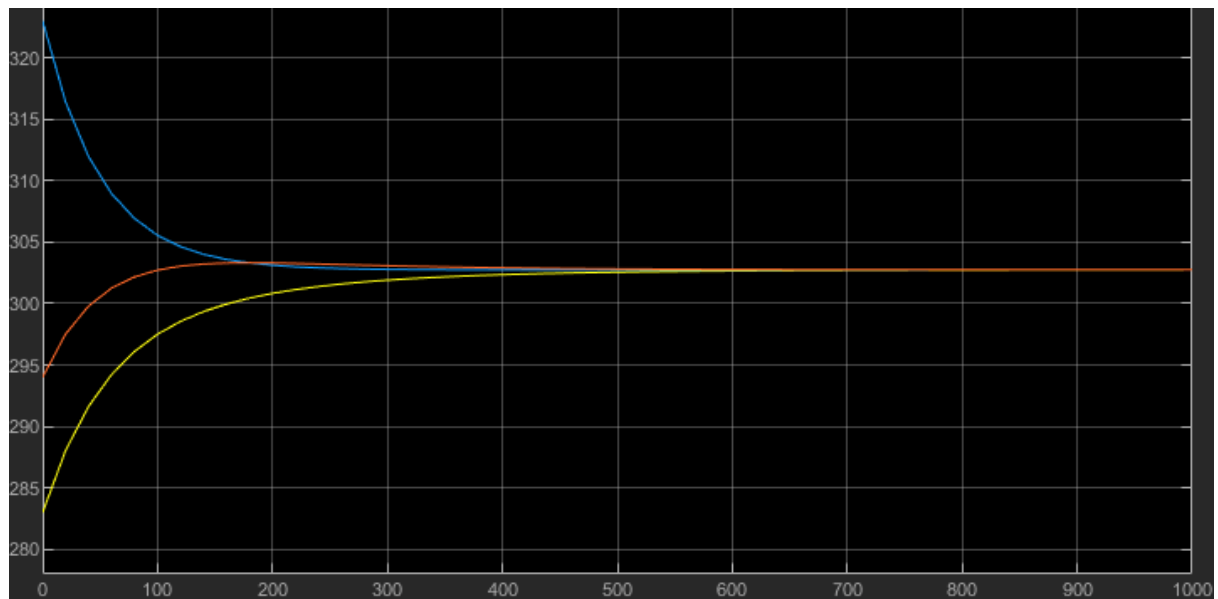
- **Substância do Tanque 0:** água
- **Substância do Tanque 1:** água
- **Substância do Tanque 2:** água
- **Calor específico da substância do Tanque 0 ( $C_0$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Calor específico da substância do Tanque 1 ( $C_1$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Calor específico da substância do Tanque 2 ( $C_2$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Massa da substância do Tanque 1 ( $m_1$ ):** 2000 kg
- **Massa da substância do Tanque 1 ( $m_1$ ):** 1000 kg
- **Massa da substância do Tanque 2 ( $m_2$ ):** 1830 kg
- **Área de cada placa do Tanque 1 ( $A_1$ ):** 1 m<sup>2</sup>
- **Área de cada placa do Tanque 2 ( $A_2$ ):** 2 m<sup>2</sup>
- **Espessura da placa do Tanque 1 ( $L_1$ ):** 0.01 m
- **Espessura da placa do Tanque 2 ( $L_2$ ):** 0.01 m
- **Condutibilidade térmica do material da placa do Tanque 1 ( $k_{12}$ ):** ferro- 52 W/(m\*K)
- **Condutibilidade térmica do material da placa do Tanque 2 ( $k_{20}$ ):** ferro-52 W/(m\*K)
- **Temperatura inicial do tanque 1:** 10°C (283K)
- **Temperatura inicial do tanque 2:** 50°C (323K)
- **Temperatura inicial do tanque 0:** 21°C (294K)
- **Calor emitido pela resistência :** 1000 J/s (em malha aberta)

$$K_{12} = \frac{k_{12} * 6 * A_1}{L_1} = 31200 \text{ W/K}$$

$$K_{20} = \frac{k_{20} * 6 * A_2}{L_2} = 62400 \text{ W/K}$$

**Malha aberta:**





**Amarelo:** Temperatura T0

**Vermelho:** Temperatura T2

**Azul:** Temperatura T1

**Escala do x:** segundos

**Escala do y:** Kelvin

**Análise da simulação:**

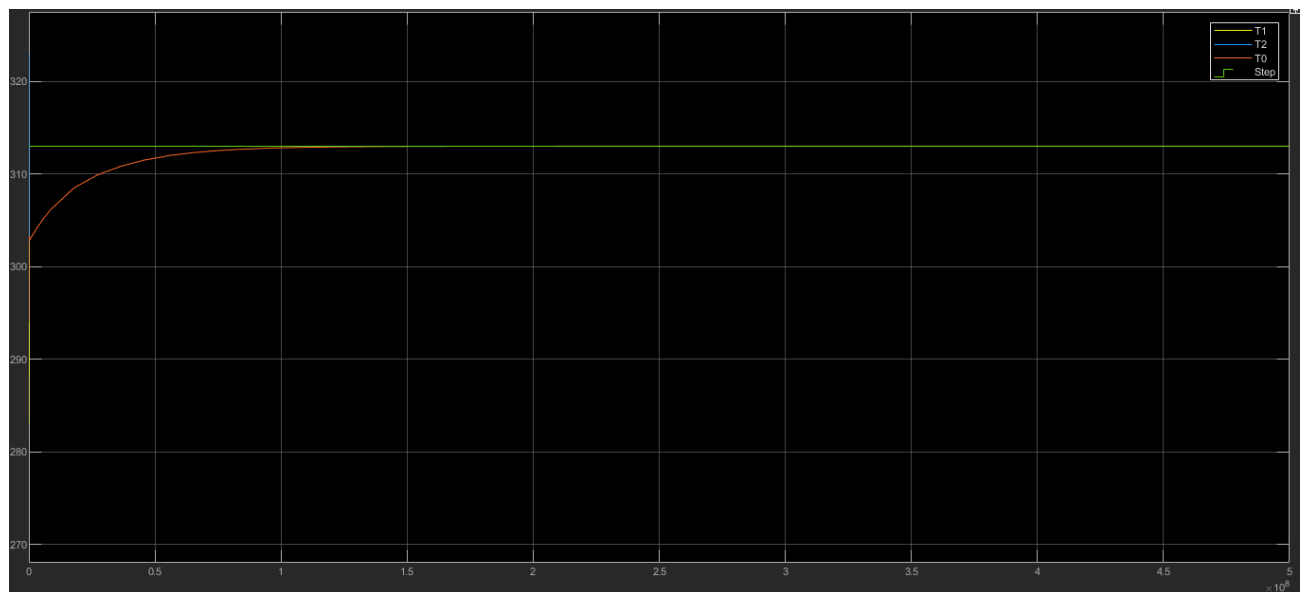
Face à 1ª simulação, passamos agora a ter os materiais dos tanques 1 e 2 constituídos por ferro, o que proporciona uma elevada transferência de calor entre os meios. Deste modo os 3 tanques vão trocar uma elevada taxa de calor uns com os outros, levando a que rapidamente atinjam a mesma temperatura. Mais uma vez refere-se o facto de o sistema ser isolado e existir uma fonte de calor constante, levando a um aumento constante da temperatura do sistema.

### **Malha fechada:**

#### **Parâmetros do Caso 1:**

Potência de saturação mínima = 0 W

Potência de saturação máxima=18885 W



Analisando este gráfico em comparação com a simulação 1, notamos que este estabiliza mais rapidamente do que na situação 1 uma vez que estamos a usar ferro para separar os tanques, e sendo um material de elevada condutividade as temperaturas dos 3 tanques vão estabilizar mais rapidamente.

Apenas com a componente proporcional, a resposta vai ser mais lenta, mas o sistema vai estabilizar.

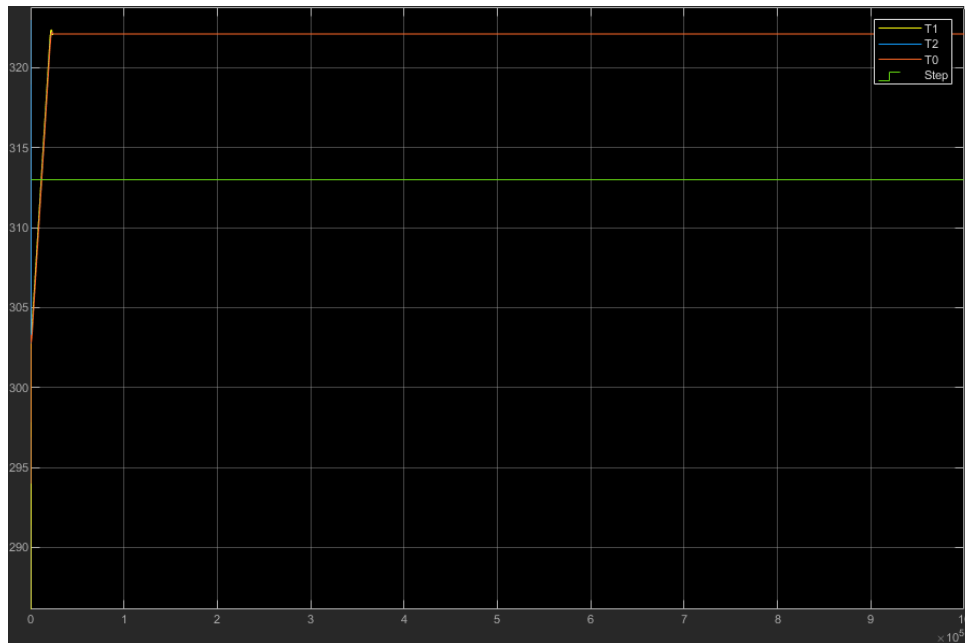
Podemos ver que o sistema estabiliza passado  $1 \times 10^8 \text{ s} \approx 27777 \text{ horas}$ . Embora estejamos a tratar de casos em que as massas são muito elevadas, não é de esperar que demore tanto tempo para estabilizar, dado as paredes serem de ferro (bom condutor), ou seja, era de esperar que a diferença de tempo em comparação com a simulação 1 (aproximadamente  $2.3 \times 10^8 \text{ s}$ ) fosse maior.

Podemos aumentar o P para 10 para a estabilização ser mais rápida, no entanto, segundo os gráficos, essa diferença não é muito significativa comparado com o tempo que temos. (Para  $P=10$  a estabilização ocorre em  $9 \times 10^7 \text{ s}$ , no entanto, continua a ser um valor muito elevado e que é incompreensível).

Adicionando a componente integral, a resposta vai estabilizar num valor (para Potência Mínima de saturação=0), embora diferente da referência, muito mais rapidamente. Isto porque adicionando-a, a diferença entre a saída e a referência vai ser minimizada ao longo do tempo.

No entanto, com potência de saturação mínima=0, seja qual for o valor de I, a resposta nunca vai tender para a temperatura de referência, isto porque como a potência é muito alta (18885 J/s) as temperaturas vão subir muito rapidamente, de tal modo que ultrapassam a temperatura de referência. Depois de atingir esta, o PID vai-se desligar e a temperatura não desce mais.

Dado que ultrapassamos a temperatura de referência, nunca mais vamos conseguir convergir para ela por se tratar de um sistema isolado (não há perdas de energia). Assim, o valor de estabilização mantém-se constante, mas superior ao de referência.



(Este exemplo é para  $P=1$  e  $I=1$ .)

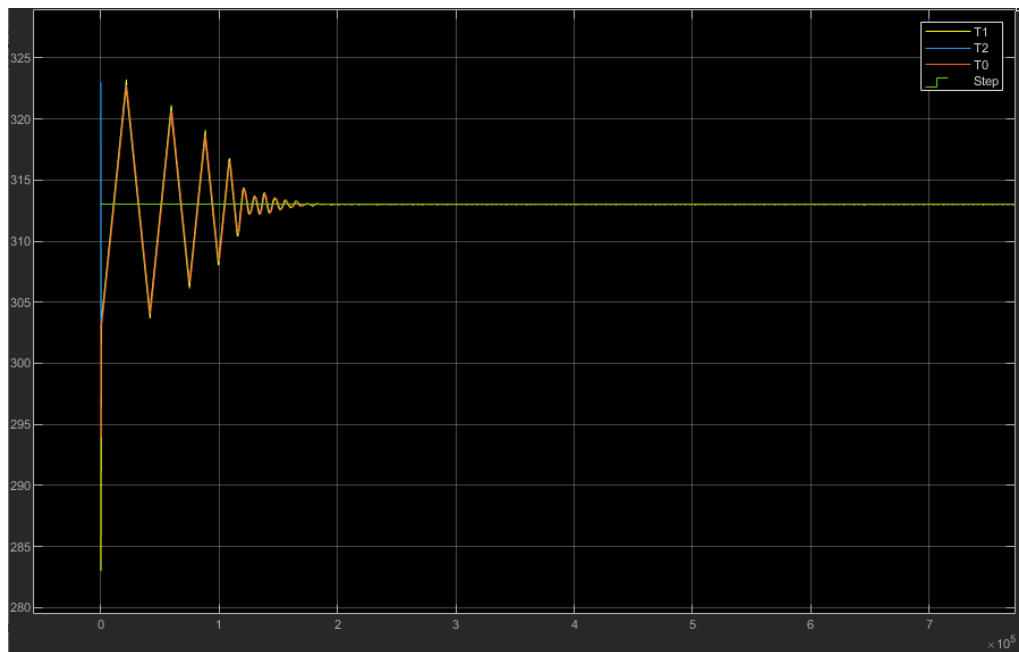
Devido a não conseguirmos realizar o controlo tivemos de avançar para o **Caso 2**

### Parâmetros do **Caso 2**:

Potência de saturação mínima= -18885

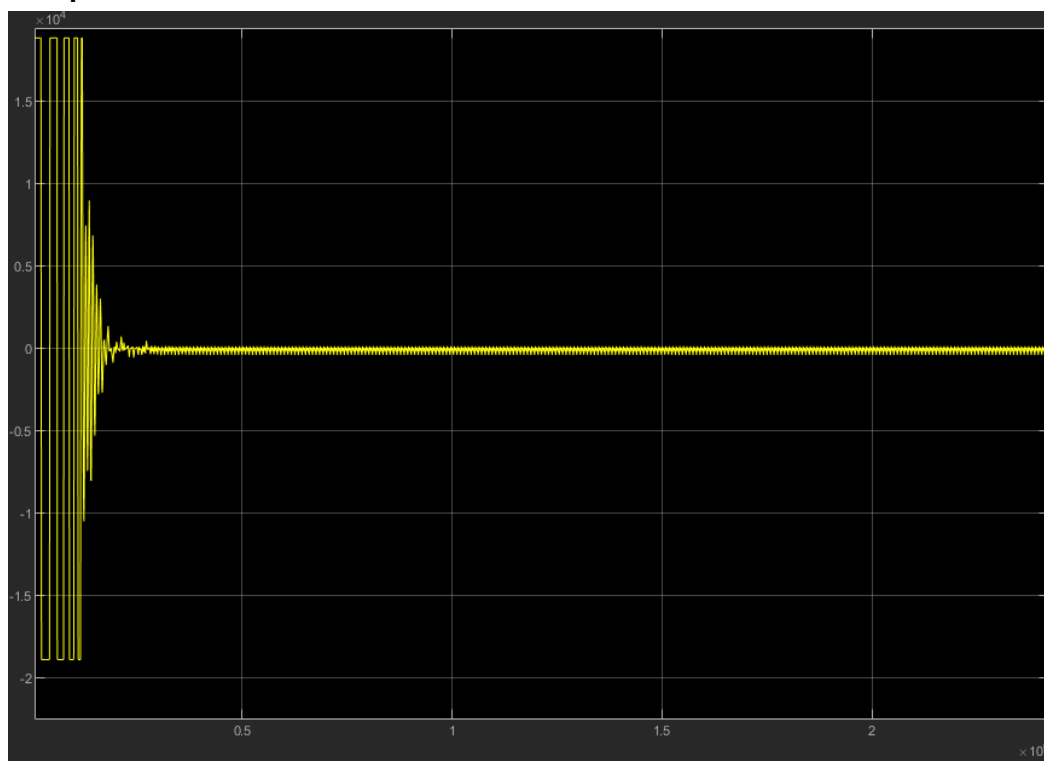
Potência de saturação máxima=18885

Colocando uma potência de saturação mínima<0, significa que o sistema já pode perder energia, ou seja, a sua temperatura diminui quando o controlador assim o pretender.



(Parâmetros PID:  $P=2, I=4, D=0$ )

Comportamento do PID:



Depois de várias tentativas, a nossa saída quase estabiliza, mas não completamente.

**6ª simulação---Paredes de ferro em ambos os tanques, água no interior de ambos e uma resistência mais potente**

Da 5ª simulação para esta, alterou-se a potência calorífica emitida pela resistência, mantendo-se as restantes variáveis constantes.

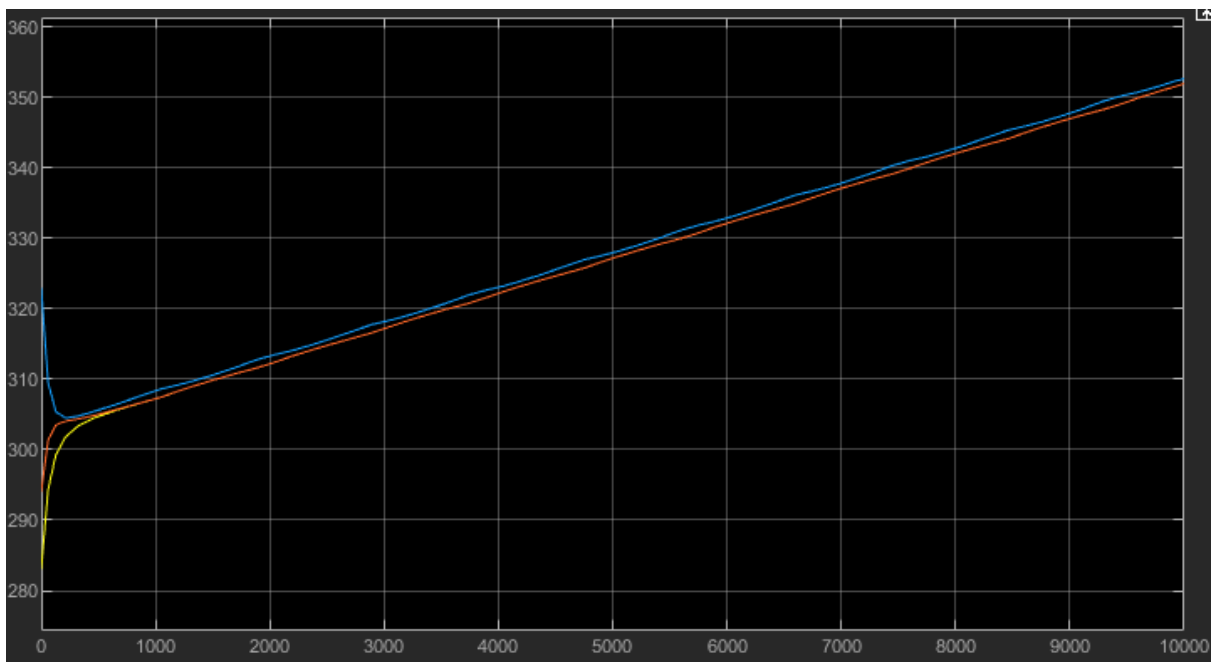
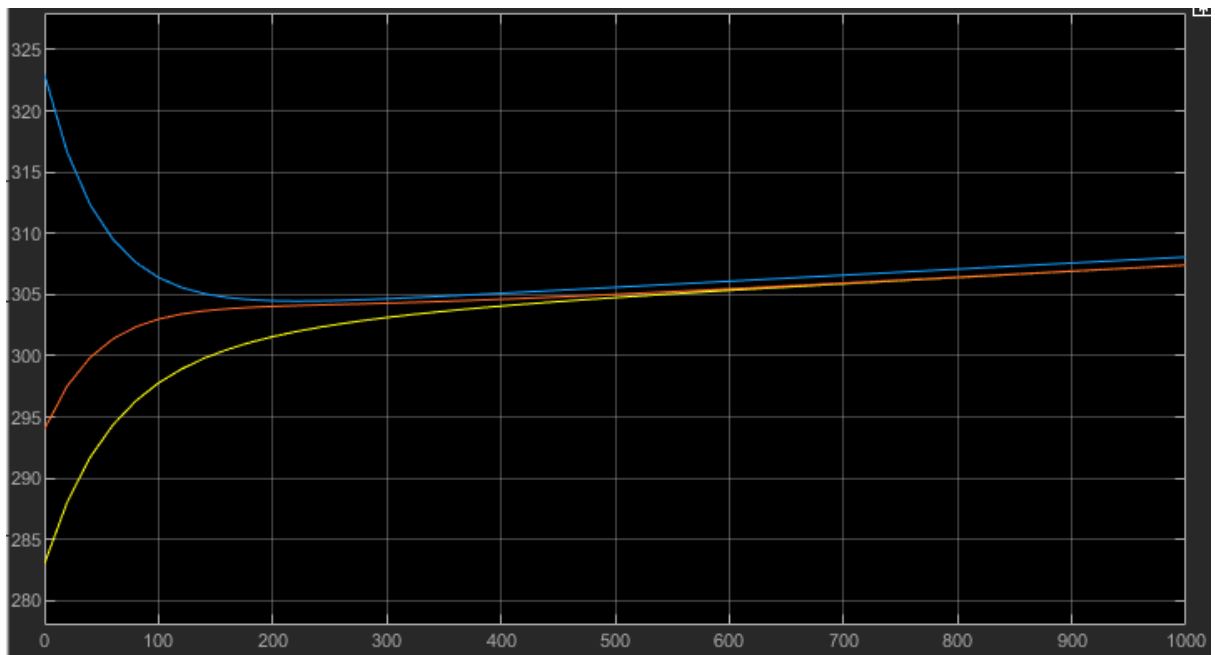
#### Considerações:

- **Substância do Tanque 0:** água
- **Substância do Tanque 1:** água
- **Substância do Tanque 2:** água
- **Calor específico da substância do Tanque 0 ( $C_0$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Calor específico da substância do Tanque 1 ( $C_1$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Calor específico da substância do Tanque 2 ( $C_2$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Massa da substância do Tanque 0 ( $m_0$ ):** 2000 kg
- **Massa da substância do Tanque 1 ( $m_1$ ):** 1000 kg
- **Massa da substância do Tanque 2 ( $m_2$ ):** 1830 kg
- **Área de cada placa do Tanque 1 ( $A_1$ ):** 1 m<sup>2</sup>
- **Área de cada placa do Tanque 2 ( $A_2$ ):** 2 m<sup>2</sup>
- **Espessura da placa do Tanque 1 ( $L_1$ ):** 0.01 m
- **Espessura da placa do Tanque 2 ( $L_2$ ):** 0.01 m
- **Condutibilidade térmica do material da placa do Tanque 1 ( $k_{12}$ ):** ferro- 52 W/(m\*K)
- **Condutibilidade térmica do material da placa do Tanque 2 ( $k_{20}$ ):** ferro-52 W/(m\*K)
- **Temperatura inicial do tanque 0:** 21°C (294K)
- **Temperatura inicial do tanque 1:** 10°C (283K)
- **Temperatura inicial do tanque 2:** 50°C (323K)
- **Calor emitido pela resistência :** 100000 J/s = 100 kJ/s (em malha aberta)

$$K_{12} = \frac{k_{12} * 6 * A_1}{L_1} = 31200 \text{ W/K}$$

$$K_{20} = \frac{k_{20} * 6 * A_2}{L_2} = 62400 \text{ W/K}$$

#### Malha aberta:



**Amarelo:** Temperatura T1

**Vermelho:** Temperatura T0

**Azul:** Temperatura T2

**Escala do x:** segundos

**Escala do y:** Kelvin

### **Análise da simulação:**

Comparativamente à simulação anterior verificamos que as temperaturas atuais vão subir muito mais rapidamente, isto porque a potência da resistência é maior, ou seja, fornecemos uma maior quantidade de calor para um dado tempo.

Dado que tratamos de um sistema isolado, não vão existir perdas de energia, ou seja, toda a energia fornecida pela resistência vai ficar no sistema. Isto, obviamente, vai implicar um aumento da temperatura até infinito. (Fisicamente, isto não acontece porque não conseguimos ter sistemas isolados, mas se conseguíssemos, provavelmente íamos chegar a um ponto em que os tanques iam ceder.)

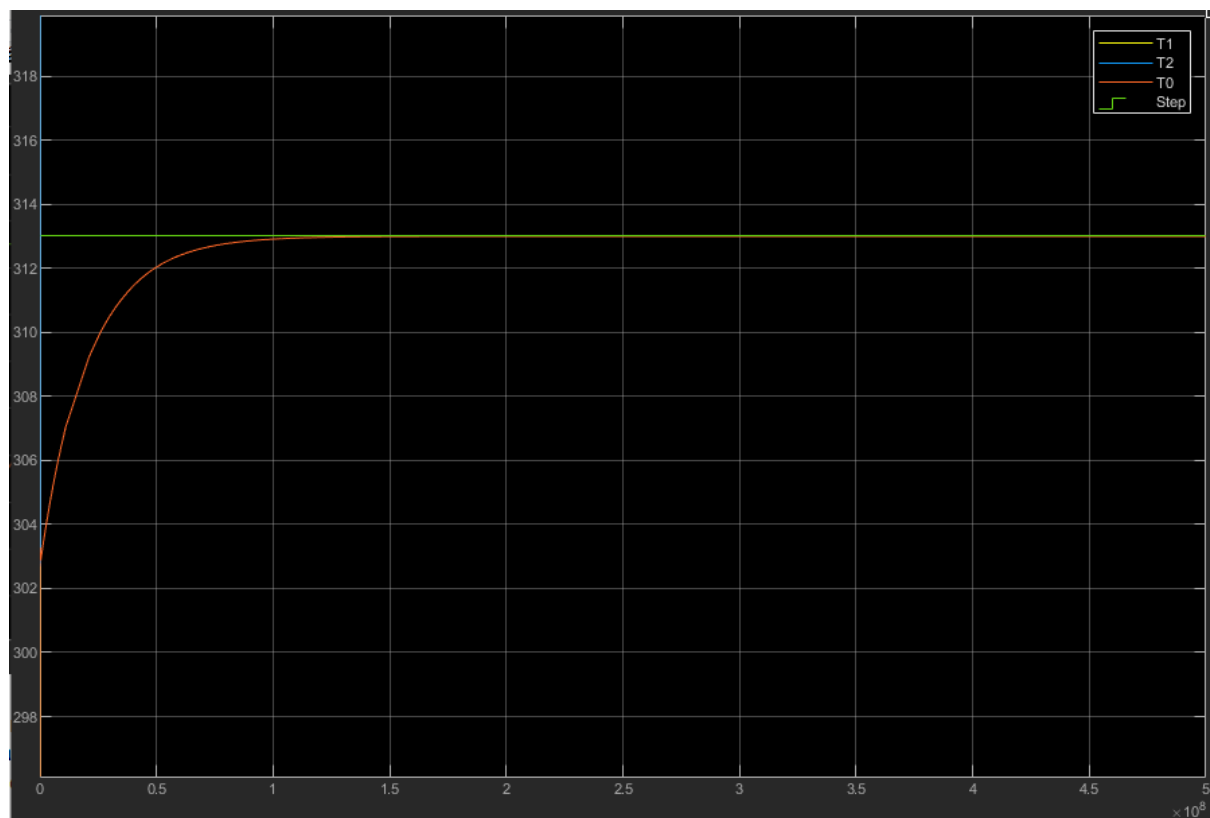
### **Malha fechada:**

#### **Parâmetros do Caso 1:**

Potência de saturação mínima = 0 W

Potência de saturação máxima=100000 W

#### **Parâmetros do PID:P=1 e I=0:**



Apenas com a componente proporcional, a resposta é muito lenta, mas o sistema vai estabilizar.

Podemos ver que o sistema estabiliza aproximadamente passado  $1.5 \times 10^8 \text{ s} \approx 41666.67 \text{ horas}$ . Comparado com o caso anterior (simulação 5), notamos que o tempo de estabilização é o mesmo, o que é incompreensível. O previsto, era um tempo de estabilização menor dada a potência ser muito superior à anterior.

De modo a conseguirmos diminuir o tempo de estabilização vai-se inserir a componente integral.

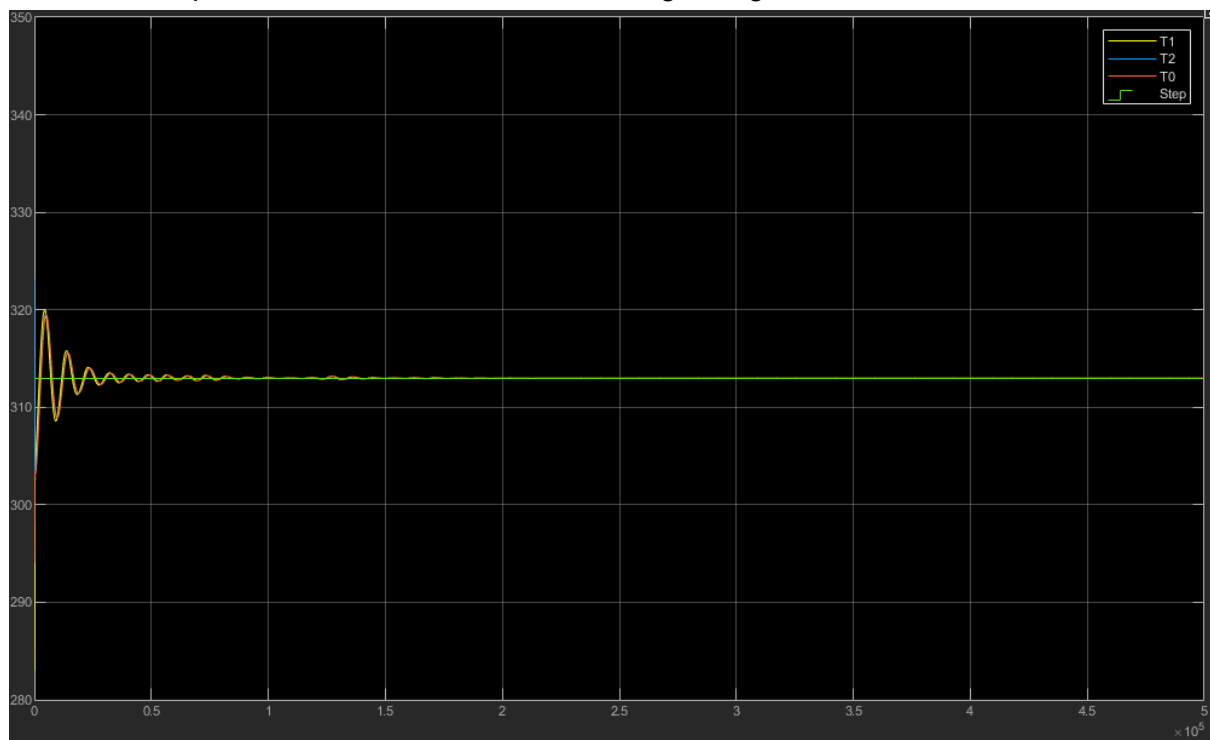
### Parâmetros do **Caso 2**:

Potência de saturação mínima= -100000 W

Potência de saturação máxima= 100000 W

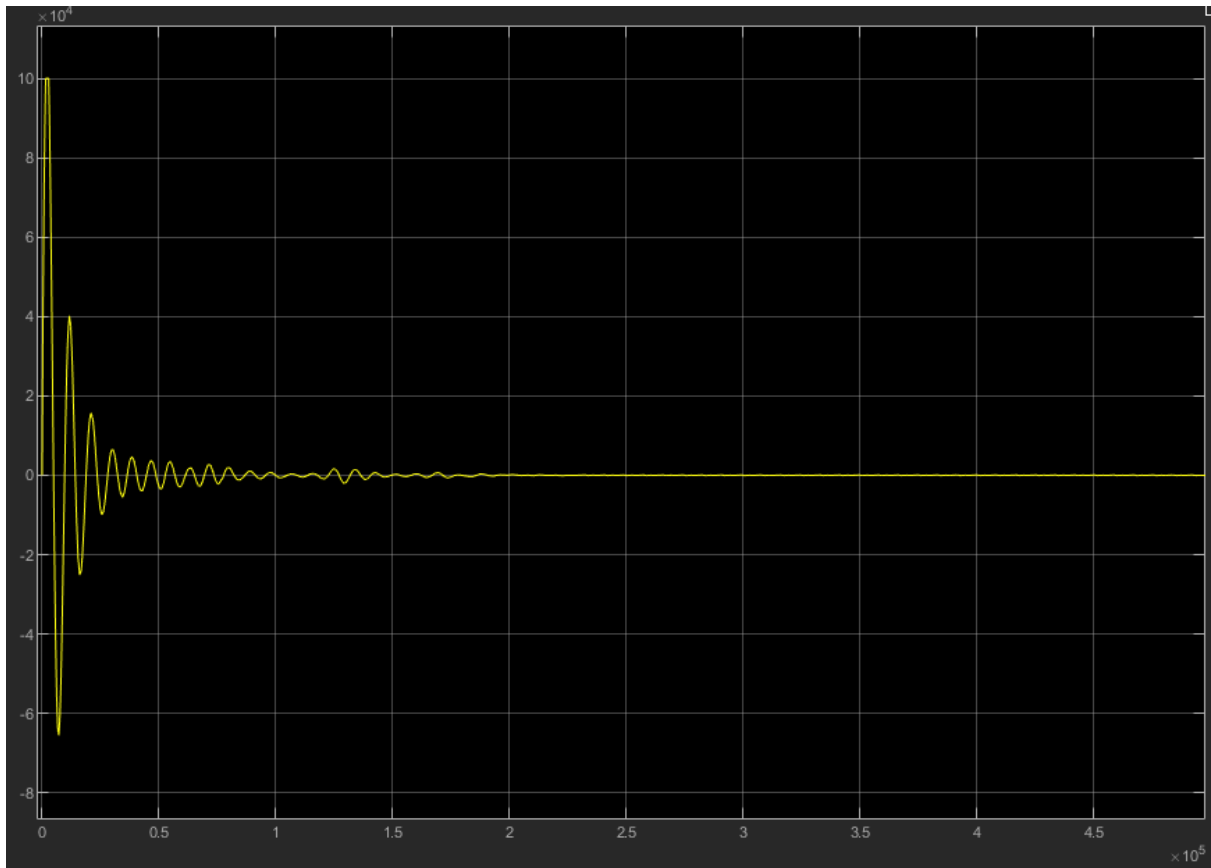
Colocando uma potência de saturação mínima < 0, significa que o sistema já pode perder energia, ou seja, ver a sua temperatura diminuir.

Colocando os parâmetros **P=2** e **I=4** obtemos o seguinte gráfico:



### Comportamento do PID:





Tal como podemos observar, existe estabilização para  $2 \times 10^5 \text{s} \approx 55.55 \text{ horas}$ .

**7ª simulação---Paredes de cimento (tanque 1) e tijolo (tanque 2), com água no interior de ambos, e com a massa no interior do tanque 2 aumentada**

#### Considerações:

Da 1ª simulação para esta, alterou-se a área de cada placa do tanque 2, bem como a massa da substância dentro deste tanque, mantendo-se as restantes variáveis constantes.

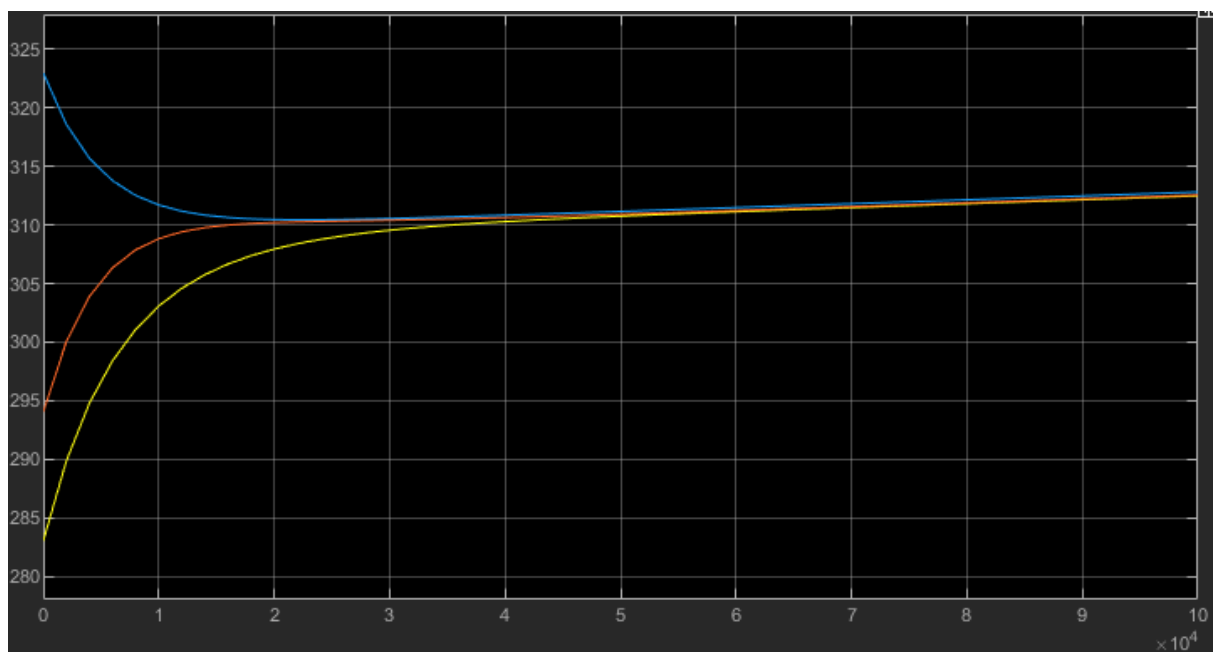
- **Substância do Tanque 0:** água
- **Substância do Tanque 1:** água
- **Substância do Tanque 2:** água
- **Calor específico da substância do Tanque 0 ( $C_0$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Calor específico da substância do Tanque 1 ( $C_1$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Calor específico da substância do Tanque 2 ( $C_2$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Massa da substância do Tanque 0 ( $m_0$ ):** 2000 kg

- Massa da substância do Tanque 1( $m_1$ ): 1000 kg
- Massa da substância do Tanque 2( $m_2$ ): 4196 kg
- Área de cada placa do Tanque 1( $A_1$ ): 1 m<sup>2</sup>
- Área de cada placa do Tanque 2( $A_2$ ): 3 m<sup>2</sup>
- Espessura da placa do Tanque 1( $L_1$ ): 0.01 m
- Espessura da placa do Tanque 2 ( $L_2$ ): 0.01 m
- Condutibilidade térmica do material da placa do Tanque 1 ( $k_{12}$ ): cimento- 0.7 W/(m\*K)
- Condutibilidade térmica do material da placa do Tanque 2 ( $k_{20}$ ) : tijolo-0.6 W/(m\*K)
- Temperatura inicial do tanque 0: 21°C (294K)
- Temperatura inicial do tanque 1: 10°C (283K)
- Temperatura inicial do tanque 2: 50°C (323K)
- Calor emitido pela resistência : 1000 J/s (em malha aberta)

$$K_{12} = \frac{k_{12} * 6 * A_1}{L_1} = 420 \text{ W/K}$$

$$K_{20} = \frac{k_{20} * 6 * A_2}{L_2} = 1080 \text{ W/K}$$

### Malha aberta:



**Amarelo:** Temperatura T1

**Vermelho:** Temperatura T0

**Azul:** Temperatura T2

**Escala do x:** segundos

**Escala do y:** Kelvin

### **Análise da simulação:**

Comparando este caso com o primeiro, notamos que as temperaturas do tanque 1 e 0 sobem mais. A subida da temperatura do tanque 0 é mais repentina porque agora K20 é maior, ou seja, para a mesma diferença de temperatura entre o tanque 0 e 2, mais potência é transferida.

De notar que a temperatura mínima que T2 atinge, nesta simulação, é aproximadamente 310K, enquanto que na simulação 1 era aproximadamente 304K. Isto acontece porque a massa do tanque 2 é maior, logo a energia que o tanque tem é maior. Deste modo a energia que o tanque 2 “perde” para os outros tanques não é tão considerável em comparação com a simulação 1, logo a temperatura mínima vai ser maior.

Do mesmo modo que na simulação anterior, à medida que o tempo tende para infinito, as temperaturas também tendem para infinito.

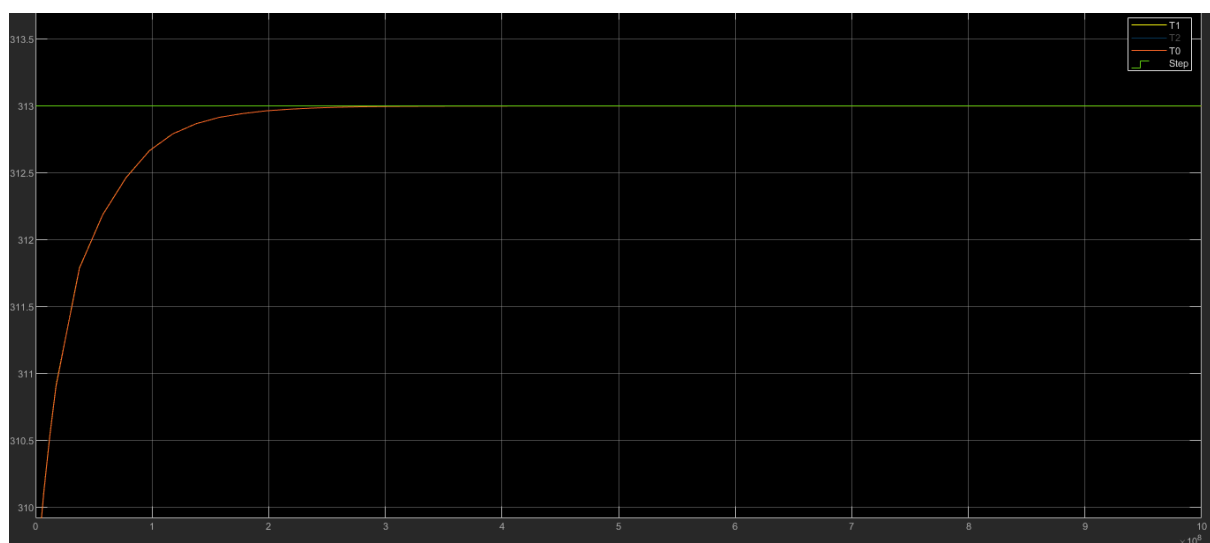
### **Malha fechada:**

#### **Parâmetros do Caso 1:**

Potência de saturação mínima = 0 W

Potência de saturação máxima=18885 W

#### **Parâmetros do PID:P=1 e I=0:**



Apenas com a componente proporcional, a resposta vai ser mais lenta, mas o sistema vai estabilizar porque a subida é mais lenta.

Podemos ver que o sistema estabiliza passado  $3.3 \times 10^8 \text{s} \approx 91666.67 \text{ horas}$ .

Dado o tanque 2 possuir uma massa maior, é de esperar que o gráfico estabilize num tempo maior. Isso é o que se verifica no gráfico.

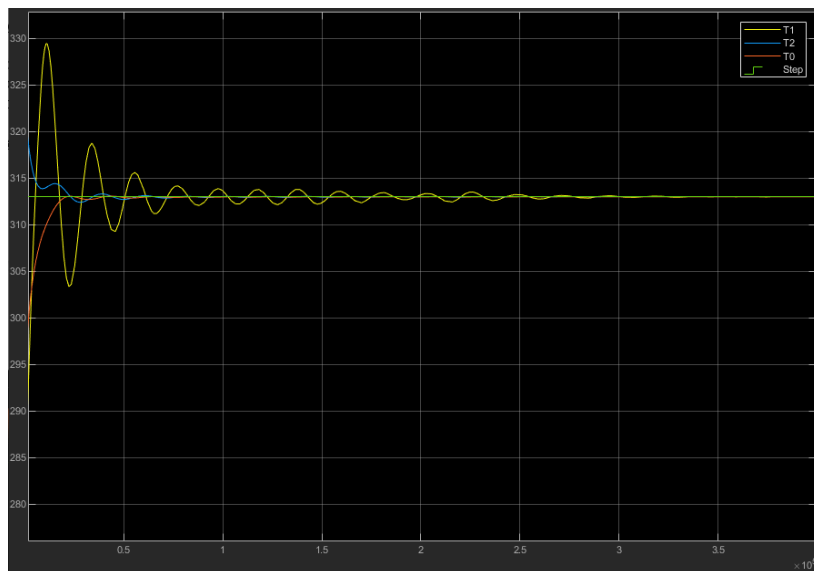
Embora estejamos a tratar de casos em que as massas são muito elevadas, não é de esperar que demore tanto tempo para estabilizar.

Devido a isso consideremos o **Caso 2**

### Parâmetros do **Caso 2**:

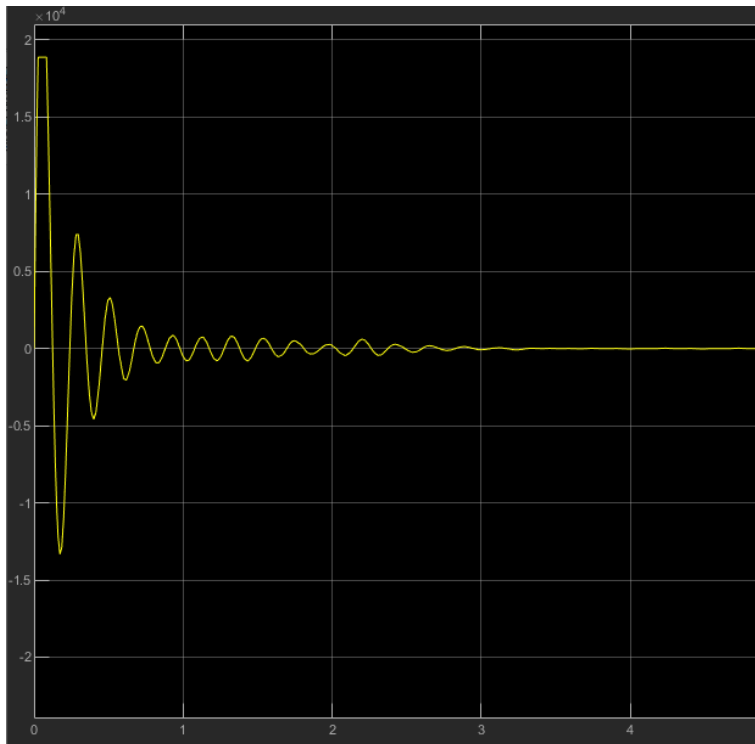
Potência de saturação mínima= -18885

Colocando uma potência de saturação mínima  $< 0$ , significa que o sistema já pode perder energia, ou seja, ver a sua temperatura diminuir.



(Parâmetros PID:  $P=0.05, I=6, D=0$ )

**Comportamento do PID:**



O sistema estabiliza a  $3.5 \times 10^5$ s, ou seja, demora 97.22 horas. Embora seja muito mais rápido, notamos que continua a ser bastante tempo ( $\approx 4$  dias), porém foi o melhor que se conseguiu.

**8ª simulação---Paredes de tijolo(tanque 2) e cimento(tanque 1), na qual a substância do tanque 1 e 0 é água e a do tanque 2 é gasolina.**

#### Considerações:

Da 1ª simulação para esta, alterou-se a substância do tanque 2, bem como a massa da substância dentro deste tanque, mantendo-se as restantes variáveis constantes.

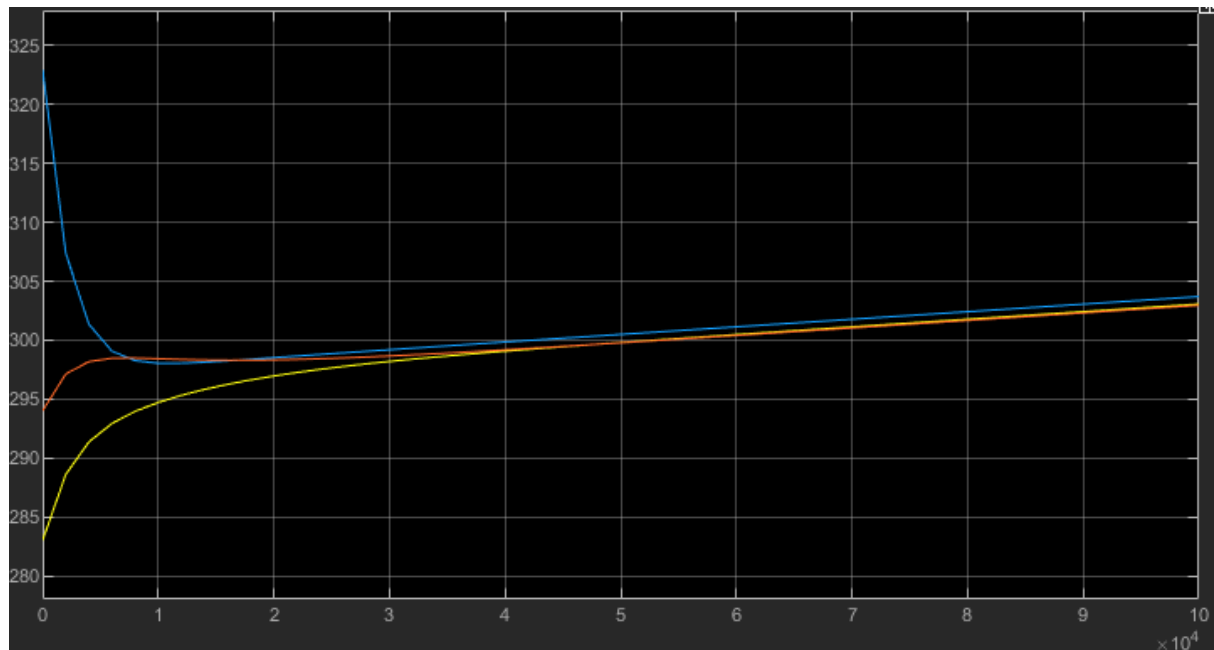
- **Substância do Tanque 0:** água
- **Substância do Tanque 1:** água
- **Substância do Tanque 2:** gasolina
- **Calor específico da substância do Tanque 0 ( $C_0$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Calor específico da substância do Tanque 1 ( $C_1$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Calor específico da substância do Tanque 2 ( $C_2$ ):** 2220 J/(kg\*K)

- Massa da substância do Tanque 0 ( $m_0$ ): 2000 kg
- Massa da substância do Tanque 1 ( $m_1$ ): 1000 kg
- Massa da substância do Tanque 2 ( $m_2$ ): 1371 kg
- Densidade da gasolina: 750 kg/m<sup>3</sup> (varia entre 715 e 780)
- Área de cada placa do Tanque 1 ( $A_1$ ): 1 m<sup>2</sup>
- Área de cada placa do Tanque 2 ( $A_2$ ): 2 m<sup>2</sup>
- Espessura da placa do Tanque 1 ( $L_1$ ): 0.01 m
- Espessura da placa do Tanque 2 ( $L_2$ ): 0.01 m
- Condutibilidade térmica do material da placa do Tanque 1 ( $k_{12}$ ): cimento- 0.7 W/(m\*K)
- Condutibilidade térmica do material da placa do Tanque 2 ( $k_{20}$ ): tijolo-0.6 W/(m\*K)
- Temperatura inicial do tanque 0: 21°C (294K)
- Temperatura inicial do tanque 1: 10°C (283K)
- Temperatura inicial do tanque 2: 50°C (323K)
- Calor emitido pela resistência : 1000 J/s (em malha aberta)

$$K_{12} = \frac{k_{12} * A_1}{L_1} = 420 \text{ W/K}$$

$$K_{20} = \frac{k_{20} * A_2}{L_2} = 720 \text{ W/K}$$

### Malha aberta:



**Amarelo:** Temperatura T1

**Vermelho:** Temperatura T0

**Azul:** Temperatura T2

**Escala do x:** segundos

**Escala do y:** Kelvin

### **Análise da simulação:**

Para este caso, diminuimos o C2, ou seja, para 1kg aumentar 1K é necessária menos energia. No entanto, também podemos pensar ao contrário, ou seja, para 1kg diminuir 1K só tem que transferir menos energia. Assim, como C2 é menor e como o tanque 2 tem menor massa (para a gasolina temos uma capacidade térmica e uma densidade menores em comparação com a água) é de esperar que a temperatura do tanque 2 desça muito mais rapidamente e que T0 e T1 não subam tanto (para  $\Delta t$  iguais) comparativamente à simulação 1, já que o tanque 2 passa a ter de ceder uma menor quantidade de calor para ter uma certa diminuição de temperatura.

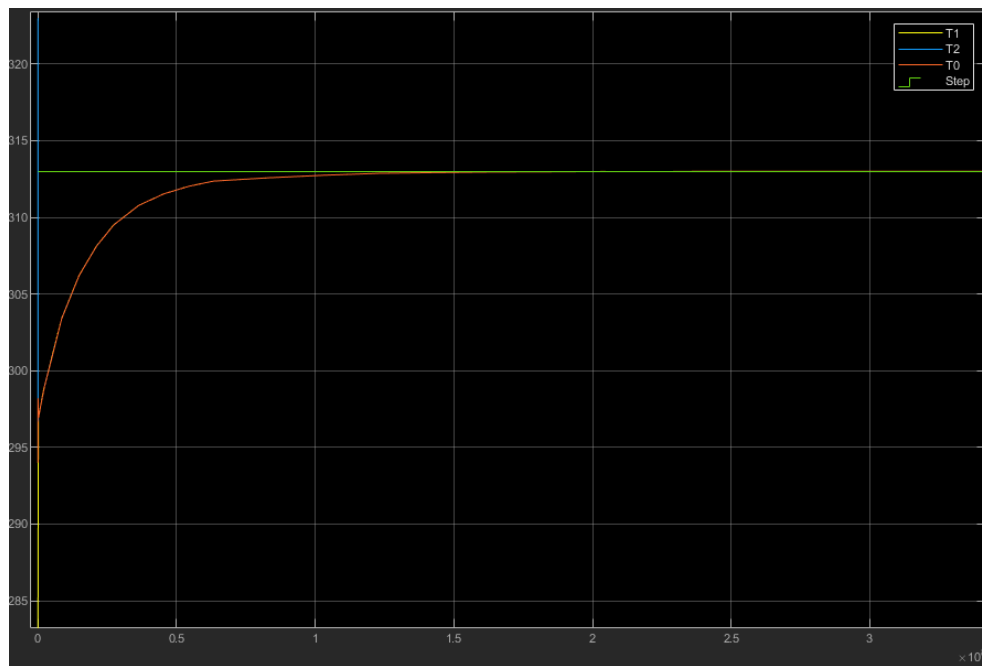
### **Malha fechada:**

Inicialmente vamos tentar controlar utilizando o **Caso 1**

### **Parâmetros do Caso 1:**

Potência de saturação mínima = 0w

Potência de saturação máxima=18885 w



**(Parâmetros PID:  $P=1, I=0, D=0$ )**

Apenas com a componente proporcional, a resposta mais uma vez vai ser mais lenta.

Podemos ver que o sistema estabiliza passado  $1.5 \times 10^8$  s (41666.67 horas).

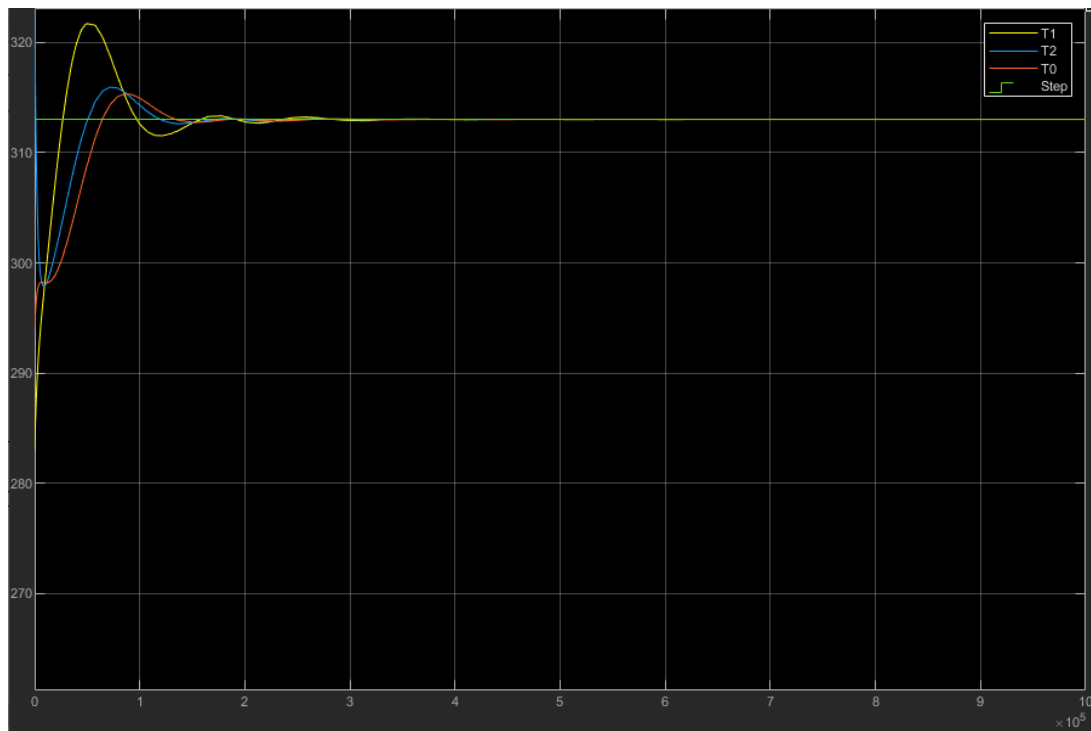
Era de esperar que este gráfico estabilizasse mais cedo (em relação à simulação 1) porque agora temos gasolina e esta “aquece mais rapidamente”, ou seja, para aumentar a mesma temperatura que a água, necessitamos de lhe fornecer menos energia.

Consideremos o **Caso 2**

**Parâmetros do Caso 2:**

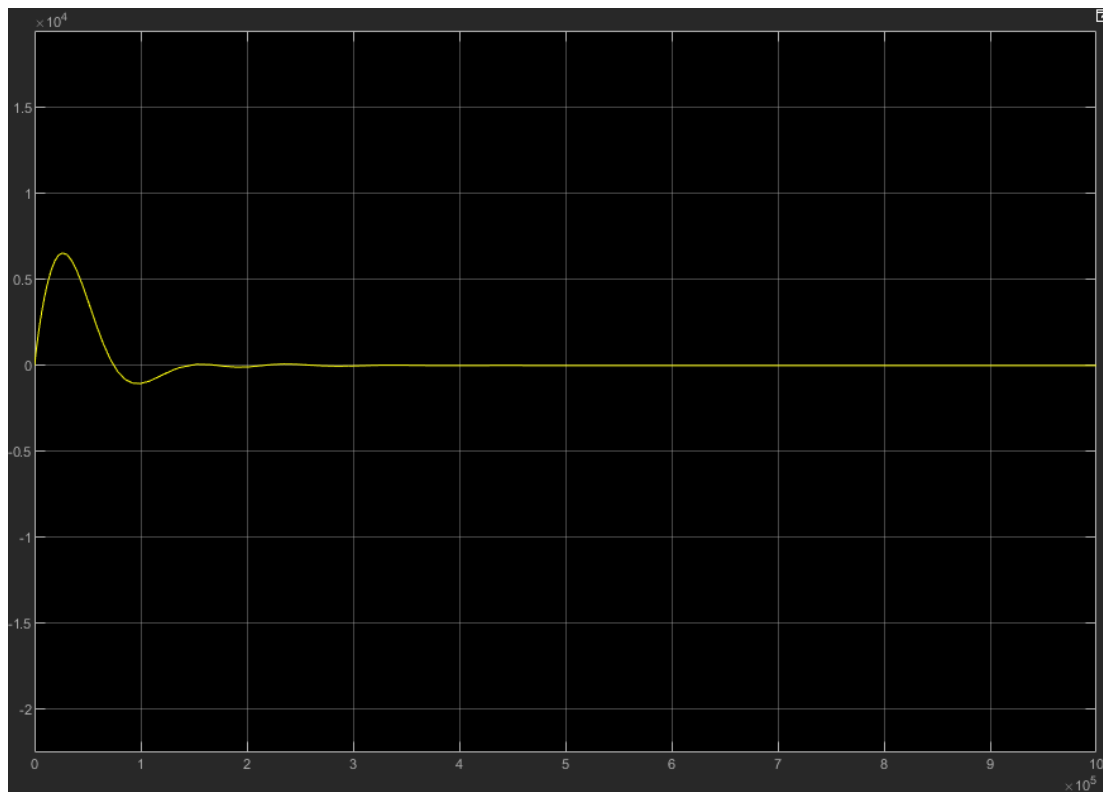
Potência de saturação mínima = -18885





(Parâmetros PID:  $P=0.01$ ,  $I=2.05$ ,  $D=0$ )

Comportamento do PID:



O sistema estabiliza a  $4 \times 10^5$ s, ou seja, demora 111 horas, o que é bem menos tempo que anteriormente.

**9ª simulação---Paredes de cimento (tanque 1) e tijolo (tanque 2), com água no interior dos tanques e temperatura inicial do tanque 2 menor relativamente às simulações anteriores.**

**Considerações:**

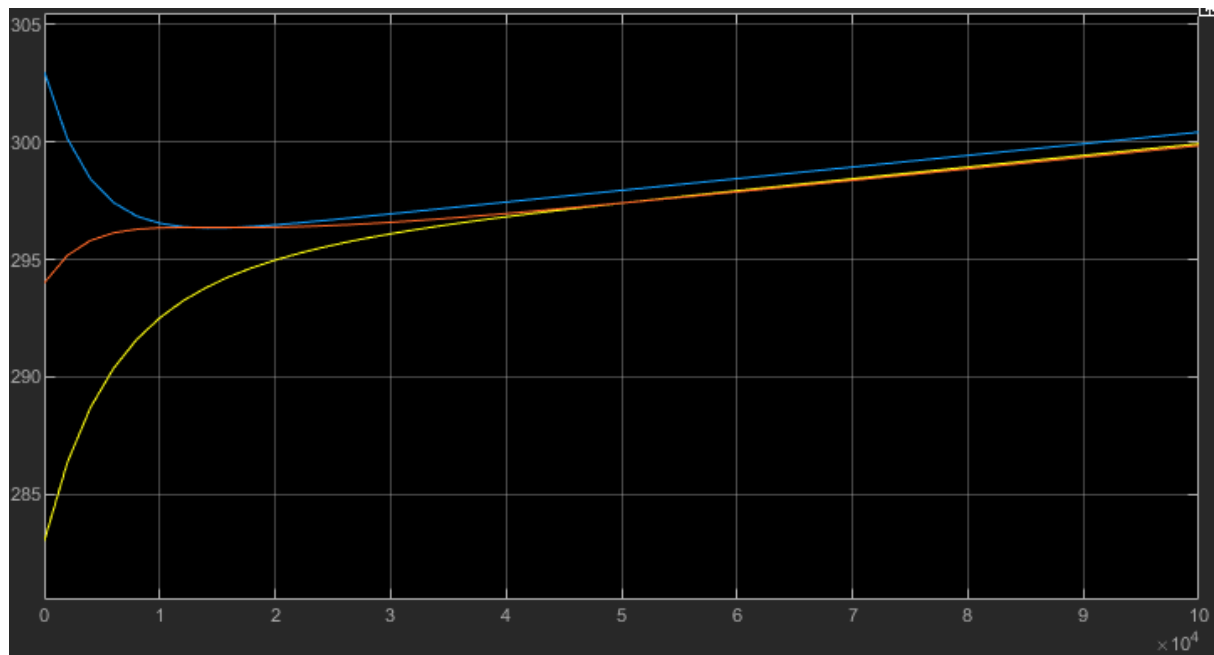
Da 1ª simulação para esta, alterou-se a temperatura inicial do tanque 2, mantendo-se as restantes variáveis constantes.

- **Substância do Tanque 0:** água
- **Substância do Tanque 1:** água
- **Substância do Tanque 2:** água
- **Calor específico da substância do Tanque 0 ( $C_0$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Calor específico da substância do Tanque 1 ( $C_1$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Calor específico da substância do Tanque 2 ( $C_2$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Massa da substância do Tanque 0 ( $m_0$ ):** 2000 kg
- **Massa da substância do Tanque 1 ( $m_1$ ):** 1000 kg
- **Massa da substância do Tanque 2 ( $m_2$ ):** 1830 kg
- **Área de cada placa do Tanque 1 ( $A_1$ ):** 1 m<sup>2</sup>
- **Área de cada placa do Tanque 2 ( $A_2$ ):** 2 m<sup>2</sup>
- **Espessura da placa do Tanque 1 ( $L_1$ ):** 0.01 m
- **Espessura da placa do Tanque 2 ( $L_2$ ):** 0.01 m
- **Condutibilidade térmica do material da placa do Tanque 1 ( $k_{12}$ ):** cimento- 0.7 W/(m\*K)
- **Condutibilidade térmica do material da placa do Tanque 2 ( $k_{20}$ ):** tijolo-0.6 W/(m\*K)
- **Temperatura inicial do tanque 0:** 21°C (294K)
- **Temperatura inicial do tanque 1:** 10°C (283K)
- **Temperatura inicial do tanque 2:** 30°C (303K)
- **Calor emitido pela resistência :** 1000 J/s (em malha aberta)

$$K_{12} = \frac{k_{12} * 6 * A_1}{L_1} = 420 \text{ W/K}$$

$$K_{20} = \frac{k_{20} * 6 * A_2}{L_2} = 720 \text{ W/K}$$

**Malha aberta:**



**Amarelo:** Temperatura T1

**Vermelho:** Temperatura T0

**Azul:** Temperatura T2

**Escala do x:** segundos

**Escala do y:** Kelvin

#### **Análise de Simulação:**

Neste problema, estamos a lidar com um caso onde o tanque 2 possui uma temperatura inicial inferior à da simulação 1, de forma a verificar o comportamento do sistema.

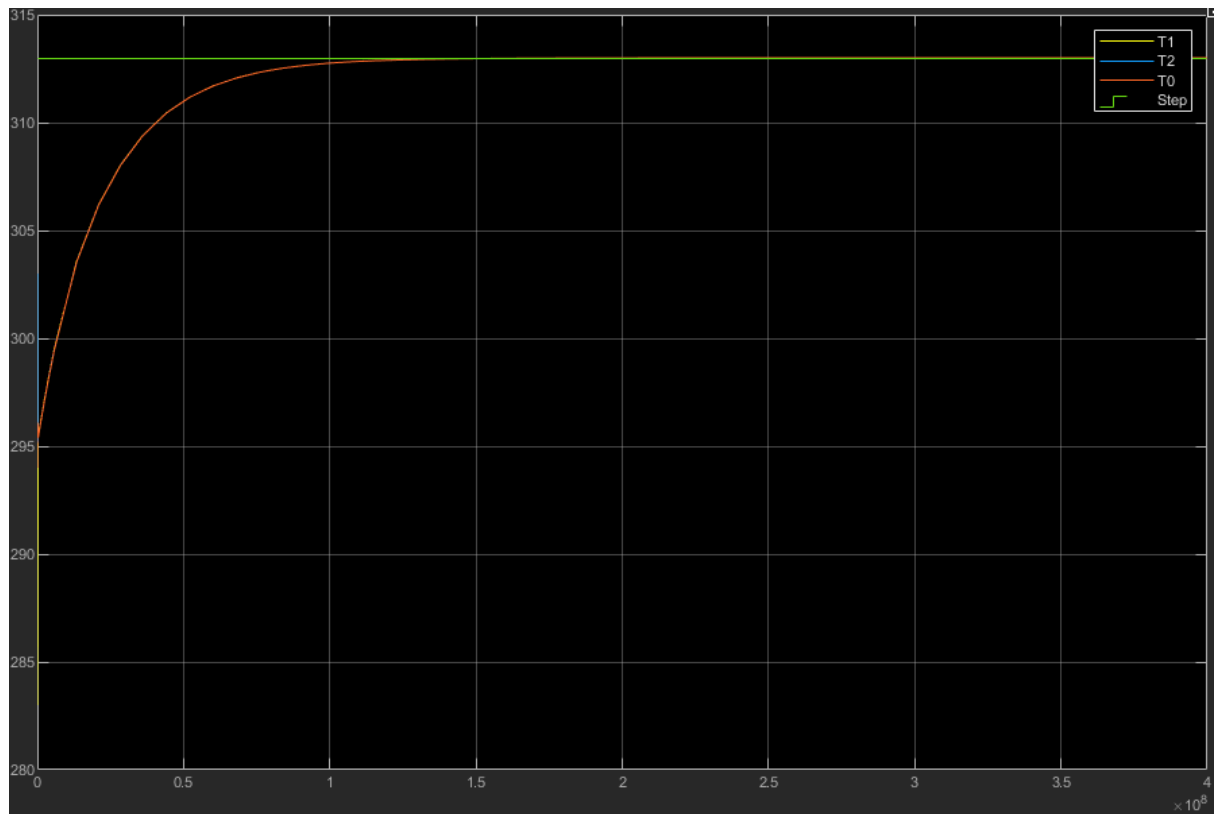
Comparando este caso com a simulação 1, notamos que para tempos iguais, T0 e T1 possuem menores valores, isto porque agora a diferença de temperatura entre eles e T2 é menor. Havendo diferenças de temperaturas menores, a energia por unidade de tempo que vai ser transferida entre os tanques também vai ser menor, logo podemos ver que isso se verificou.

#### **Malha fechada:**

##### **Parâmetros do Caso 1:**

Potência de saturação mínima = 0w

Potência de saturação máxima=18885 w



(Parâmetros PID:  $P=1, I=0, D=0$ )

Podemos ver que o sistema estabiliza passado  $1.85 \times 10^8$ s.

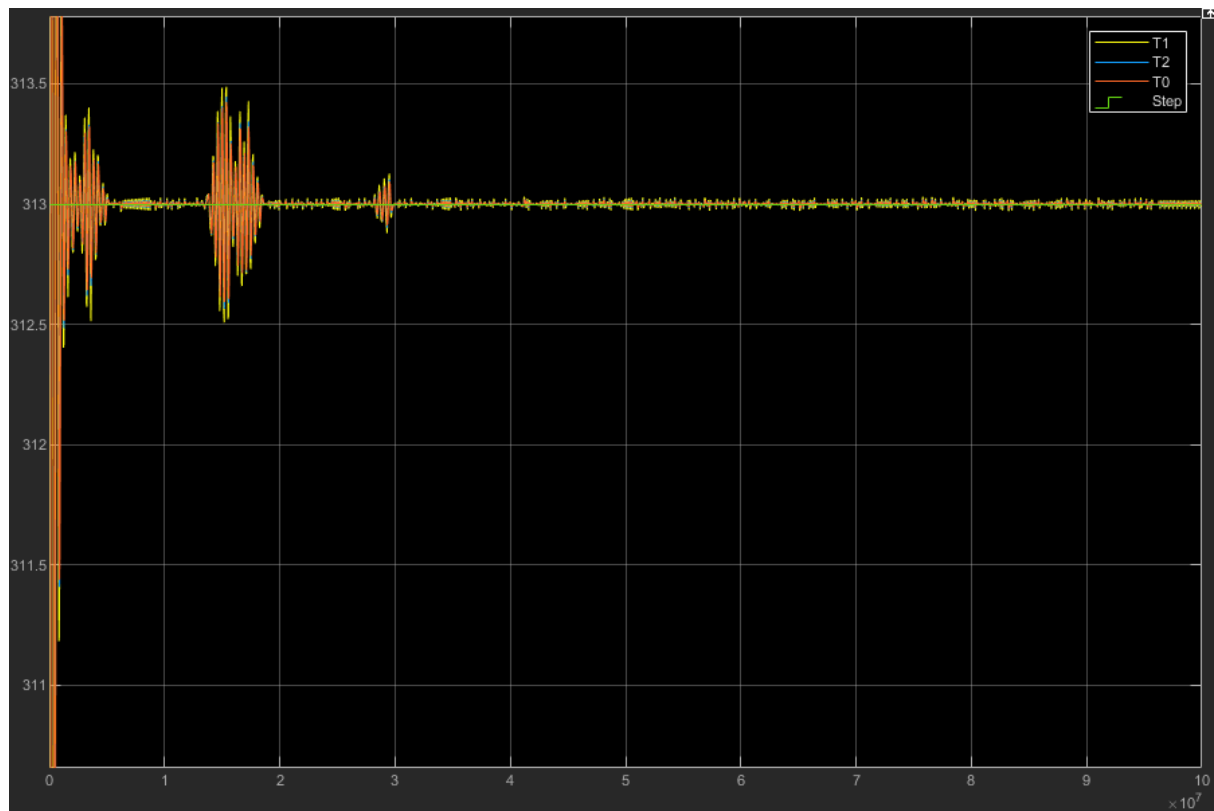
Diminuindo a temperatura do tanque 2, a temperatura média inicial é menor, logo para atingirmos os  $40^\circ\text{C}$  é necessário mais tempo.

De notar que se colocássemos o  $P$  maior, o  $T1$  estabiliza mais rapidamente para a temperatura de referência. No entanto, embora menor que o anterior, continua a ser um tempo bastante grande.

Consideremos o **Caso 2**

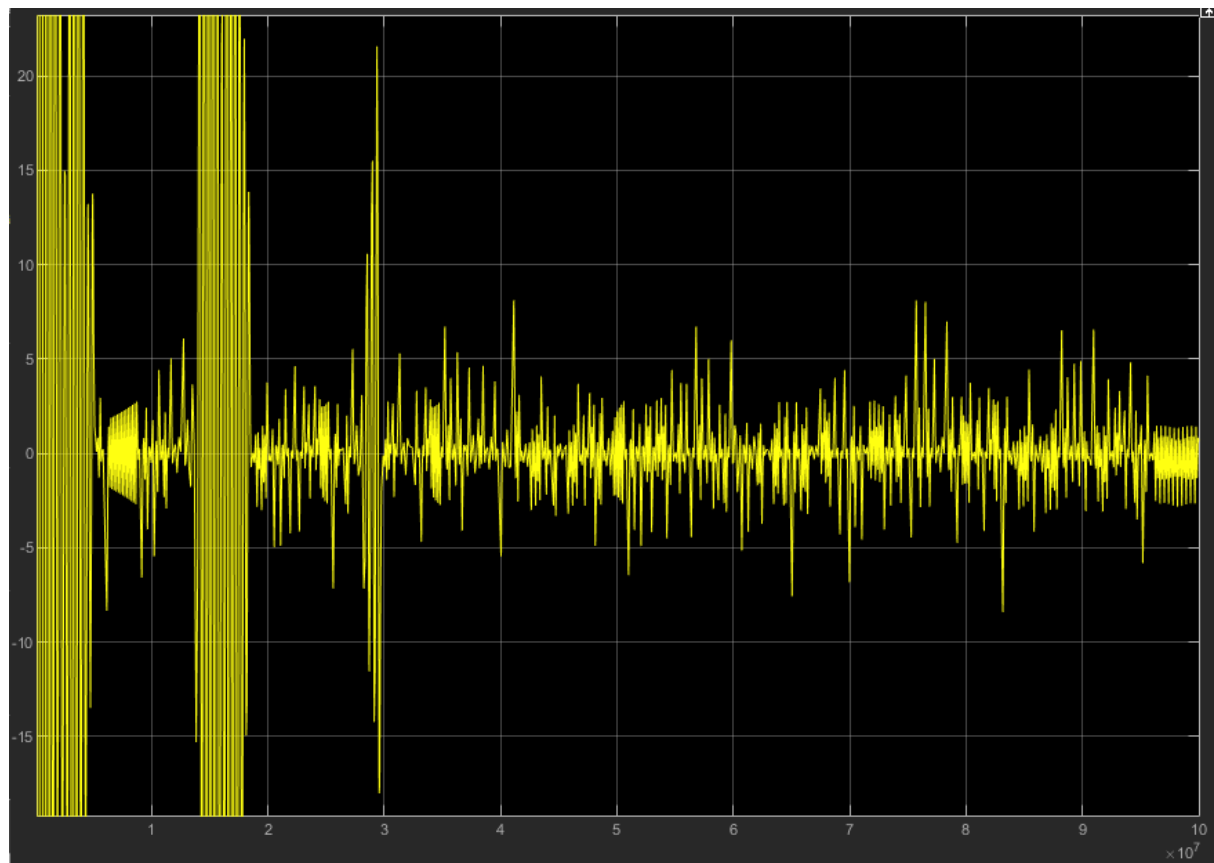
**Parâmetros do Caso 2:**

Potência de saturação mínima =  $-18885\text{w}$



(Parâmetros PID:  $P=0.001, I=2.05, D=0$ )

Comportamento do PID:



Como é possível observar, não conseguimos estabilizar o T1 para 40°. Podemos considerar que o sistema quase estabiliza para  $0.5 \times 10^7$ s porque a partir daí as variações de temperaturas são inferiores a 0.5°C. De notar, que essa “quase estabilização” demora bastante tempo(aproximadamente 1388horas)

## **O que podemos concluir com todas estas simulações em malha fechada?**

O experimento foi realizado alterando materiais, temperaturas, massas e a potência fornecida. Essa alteração veio implicar diferentes tempos de estabilização e para solucionar cada problema utilizou-se diferentes PID's. No entanto, nem sempre se conseguiu a estabilização porque as condições presentes no sistema afetam diretamente esse controlo.

Por sua vez, as simulações onde foi possível a estabilização viram os parâmetros do PID a variarem de caso para caso. Isto era algo bastante provável dadas as diferentes condições de cada sistema.

Além de tudo isto, existiram casos em que o obtido não correspondia ao previsto. Isto surgiu no caso da simulação 5 e da 6, onde era de esperar que o tempo de estabilização, apenas com a componente proporcional, da simulação 6 fosse menor(dada a presença de uma potência superior). Verificou-se várias vezes os parâmetros de modo a detectar algum possível erro, mas os valores encontravam-se corretos. Deste modo, não conseguimos explicar o porquê de se obter este resultado.

Em suma, a malha fechada permite-nos controlar a resposta do sistema em função da nossa referência enquanto que em malha aberta não conseguimos. Assim, caso haja uma alteração, como por exemplo, um aumento excessivo da temperatura, o nosso PID “vai responder” de forma a que haja uma diminuição da temperatura(caso seja possível, ou seja, com a presença de algo que diminuía a temperatura como um tubo onde passa algo com uma temperatura inferior) e conseqüentemente uma convergência para a temperatura pretendida. No entanto, há casos em que é muito difícil conseguir obter o PID “correto” para o nosso sistema e aí temos de ter em atenção o problema com que estamos a lidar. Por fim e realçando mais uma vez, os parâmetros do PID vão variar de caso para caso.

## **Sistema 2**

**Resumo do que se vai fazer:**

- Considerar 2 tanques (T2 e T1) sendo T2 englobado por um “ambiente” a temperatura sempre constante (21°C)
- Elaborar equações matemáticas que regem o Sistema .
- Realizar a montagem do sistema em malha aberta no Simulink.
- Realizar diversas simulações, com parâmetros diferentes e analisar o comportamento em malha aberta.
- Realizar a montagem em malha fechada no Simulink.
- Através do sistema em malha fechada , realizar um controlo adequado de forma a colocar o tanque 1 a 25°C.
- Conclusão

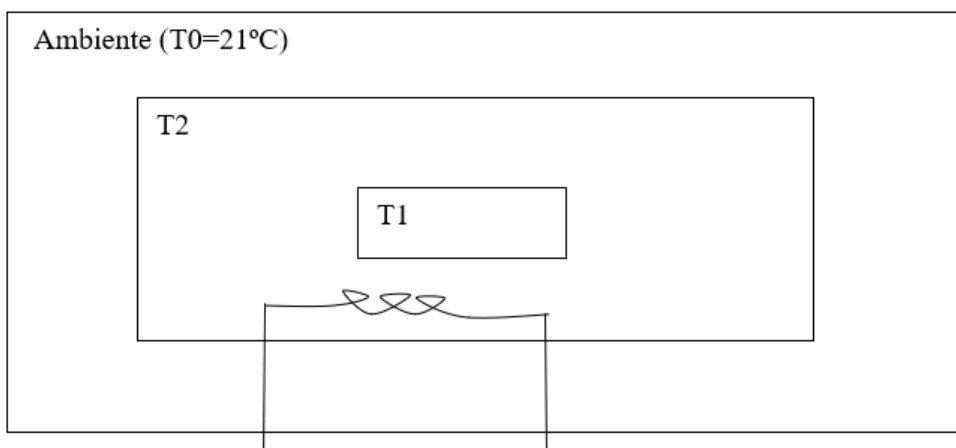
## Elaboração das equações matemáticas do sistema:

### Considerações:

- Considera-se a temperatura homogénea (igual em todo o volume em questão)
- Considera-se o tanque 1+ tanque 2 + ambiente um sistema isolado de forma a podermos aplicar a equação de conservação da energia térmica.
- Os tanques deixam passar calor pelas suas paredes, ou seja pode haver perdas de calor do tanque 2 para o ambiente, tanque 1 para tanque 2, ou vice-versa.
- A resistência apenas aquece diretamente o tanque 2.
- O ambiente é enorme, devido a isso impõe-se a sua temperatura constante, uma vez que a trocas de calor não o vão afetar.

**Lei de controlo:** Calor que entra= calor acumulado + calor que sai

### Esquema:



**NOTA:** ao contrário do que a imagem de cima indica, os tanques 1 e 2 têm forma cúbica. Além disso, o ambiente tem, na realidade, dimensões enormes.



**Tanque 1:**

$$m_1 * C_1 \frac{dT_1}{dt} = k_{12} * (T_2 - T_1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dT_1}{dt} = \frac{k_{12}}{m_1 * C_1} (T_2 - T_1)$$

**Tanque 2:**

$$m_2 * C_2 \frac{dT_2}{dt} = -k_{12}(T_2 - T_1) - k_{20}(T_2 - T_0) + u(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dT_2}{dt} = \frac{-k_{12}}{m_2 * C_2} (T_2 - T_1) - \frac{k_{20}}{m_2 * C_2} (T_2 - T_0) + \frac{1}{m_2 * C_2} u(t)$$

**Notação:**

$k_{ij}$ =representa a condutância térmica, sendo dado por  $k \cdot A/L$ , em que  $k$  é condutividade térmica ( $W/(m \cdot K)$ ),  $A$  é a área da superfície e  $L$  é a espessura do material que separa os meios  $i$  e  $j$  (Unidades :  $W/K$ ).

$m_j$ = massa do meio  $j$  (Unidades:  $kg$ ).

$c_j$ = calor específico do meio  $j$  (Unidades:  $J/(kg \cdot K)$ ).

**Notação espaço de estados:  $X' = AX + BU + LW$** 

$$\begin{bmatrix} \frac{dT_1}{dt} \\ \frac{dT_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-k_{12}}{m_1 * C_1} & \frac{k_{12}}{m_1 * C_1} \\ \frac{k_{12}}{m_2 * C_2} & \left( \frac{-k_{12}}{m_2 * C_2} - \frac{k_{20}}{m_2 * C_2} \right) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_2 * C_2} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_{20}}{m_2 * C_2} \end{bmatrix} T_0$$

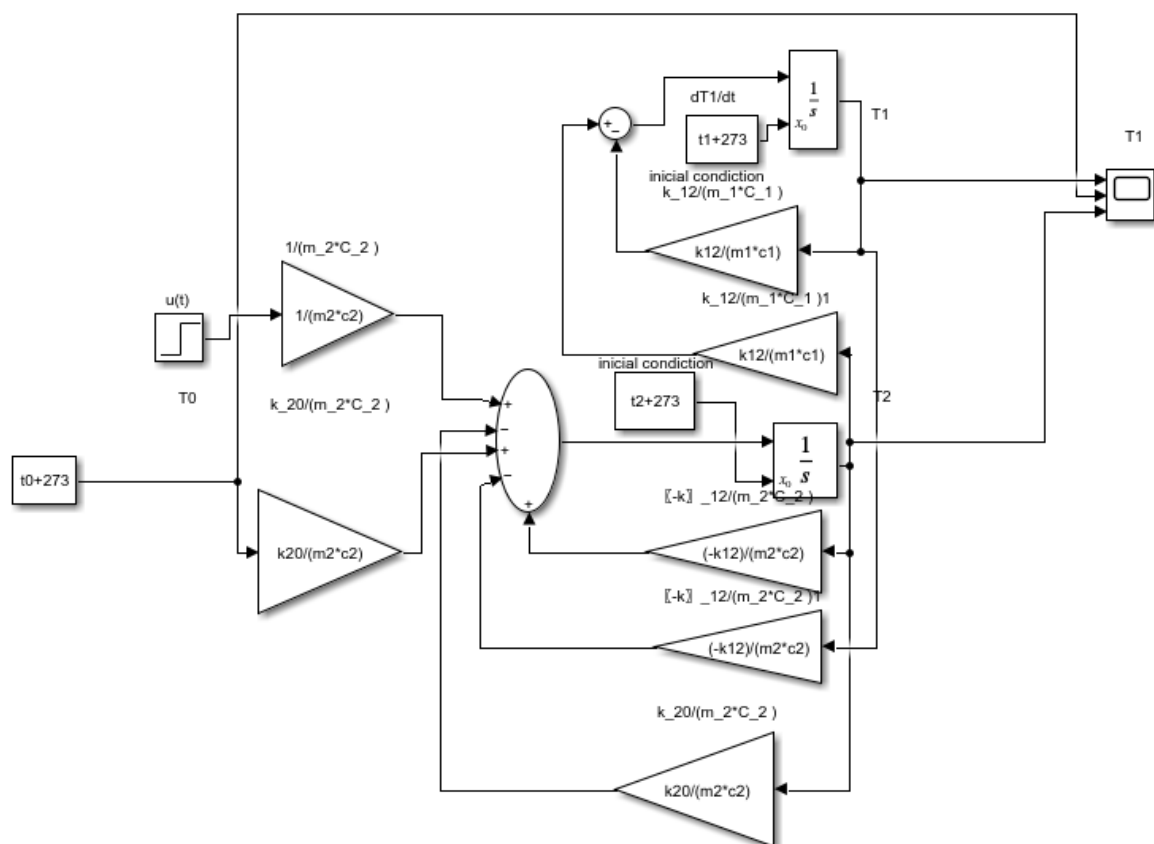
Se quisermos analisar a temperatura  $T_1$ :

$$Y = CX$$

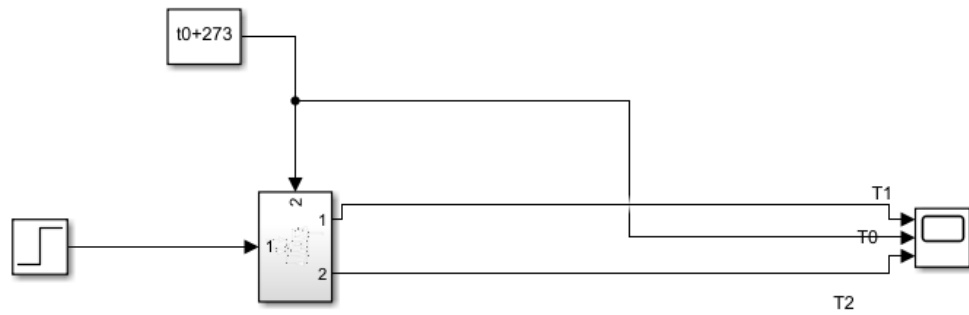
$$Y = T_1$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

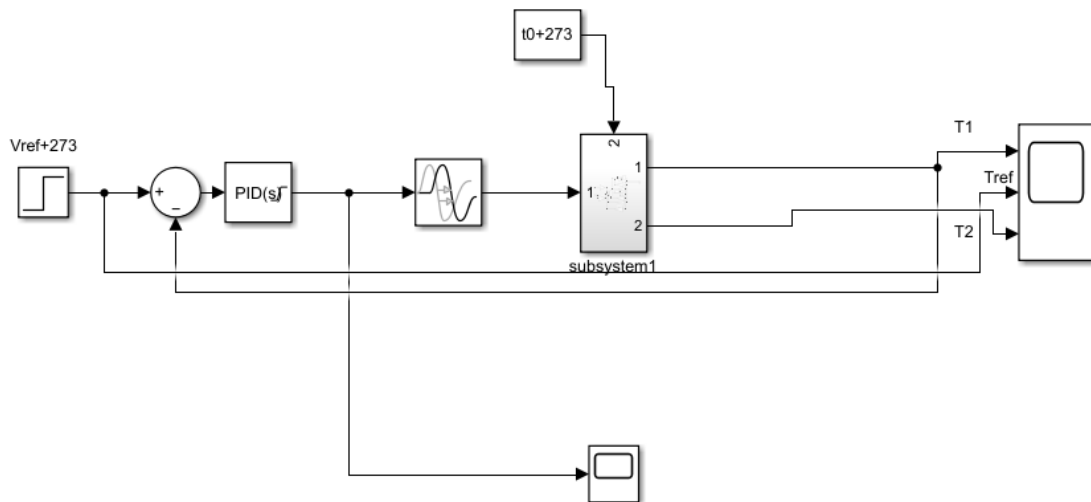
**Montagem em malha aberta no Simulink (resistência em T2):**



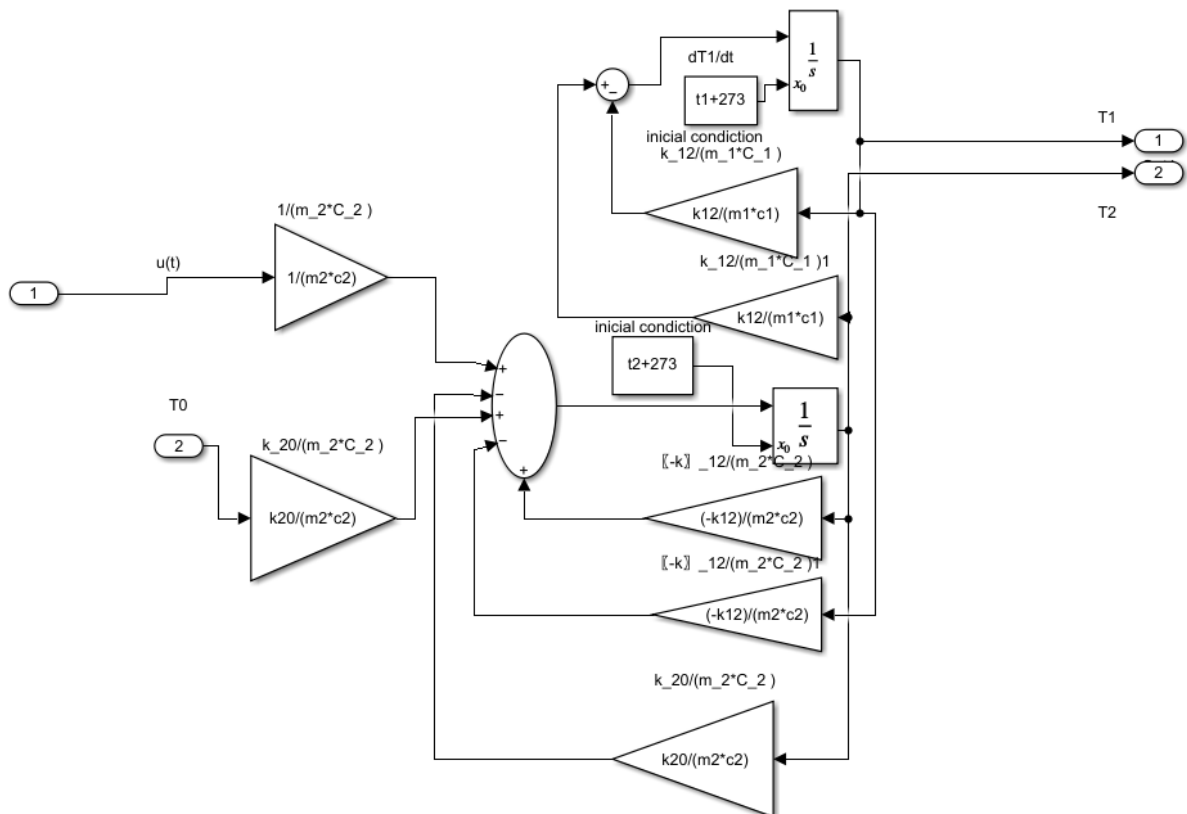
**Reduzindo todos aqueles blocos num subsistema:**



### Montagem em malha fechada no Simulink:



### subsystem1:



**Nota:** Todas as montagens em malha aberta foram realizadas com a resistência diretamente ligada ao tanque 2.

**Realização de diversas simulações (mudando parâmetros relevantes) em malha aberta e elaboração de um controle adequado em malha fechada de forma a colocar a temperatura do tanque 1 a 25°C:**

**Nota:** A resistência utilizada tem um limite mínimo de potência de 0 e um limite máximo de 18885 (foi a resistência à venda no mercado com maior potência que encontramos).

**1ª simulação---Paredes de cimento (tanque 1) e tijolo (tanque 2), com água no interior de todos os tanques**

**Considerações:**

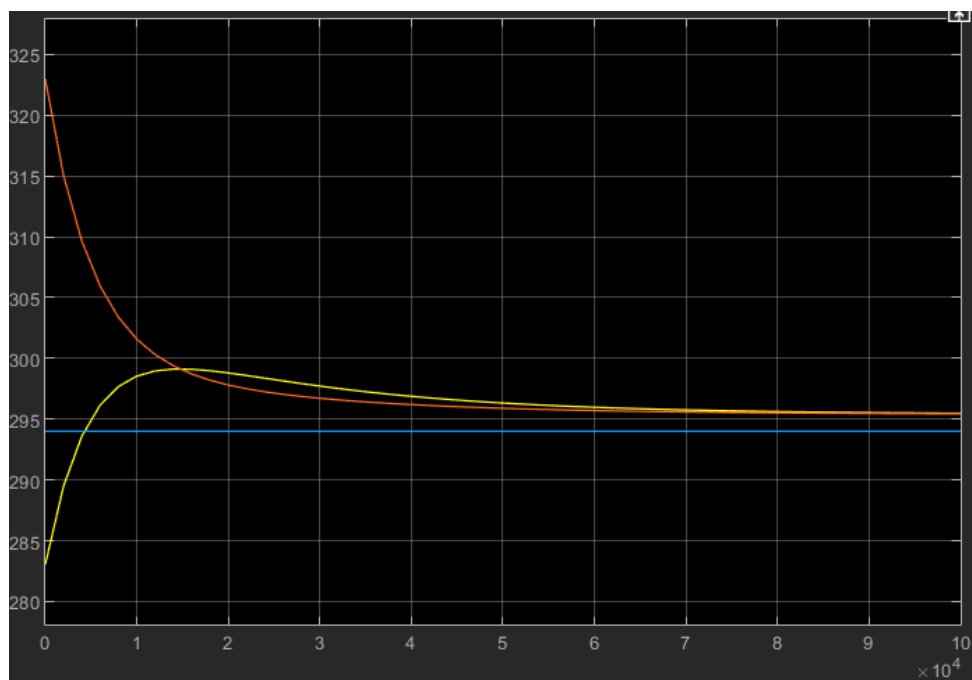
- Substância do Tanque 1: água
- Substância do Tanque 2: água
- Calor específico da substância do Tanque 1( $C_1$ ): 4180 J/(kg\*K)
- Calor específico da substância do Tanque 2( $C_2$ ): 4180 J/(kg\*K)
- Massa da substância do Tanque 1( $m_1$ ): 1000 kg

- Massa da substância do Tanque 2( $m_2$ ): 1830 kg
- Área de cada placa do Tanque 1( $A_1$ ): 1 m<sup>2</sup>
- Área de cada placa do Tanque 2( $A_2$ ): 2 m<sup>2</sup>
- Espessura da placa do Tanque 1( $L_1$ ): 0.01 m
- Espessura da placa do Tanque 2 ( $L_2$ ): 0.01 m
- Condutibilidade térmica do material da placa do Tanque 1 ( $k_{12}$ ): cimento- 0.7 W/(m\*K)
- Condutibilidade térmica do material da placa do Tanque 2 ( $k_{20}$ ) : tijolo-0.6 W/(m\*K)
- Temperatura inicial do tanque 1: 10°C (283K)
- Temperatura inicial do tanque 2: 50°C (323K)
- Temperatura ambiente: 21°C (294K)
- Calor emitido pela resistência : 1000 J/s (em malha aberta)

$$K_{12} = \frac{k_{12} * 6 * A_1}{L_1} = 420 \text{ W/K}$$

$$K_{20} = \frac{k_{20} * 6 * A_2}{L_2} = 720 \text{ W/K}$$

### Malha aberta:



**Amarelo:** Temperatura T1

**Vermelho:** Temperatura T2

**Azul:** Temperatura ambiente

**Escala do x:** segundos

**Escala do y:** Kelvin

### **Análise da simulação:**

Inicialmente verificam-se as temperaturas iniciais de cada tanque, passando  $1 \cdot 10^4$  segundos (2 horas e 47 minutos) a temperatura do tanque 1 (T1) sobe a um ritmo mais lento do que a descida da temperatura do tanque 2 (T2) devido ao maior K (maior condutividade do material) do tanque 2 face ao do tanque 1 ( $K_{20} > K_{12}$ ).

A partir dos  $8 \cdot 10^4$  segundos (22 horas e 12 minutos) as temperaturas T1 e T2 tendem a um valor estável ( $22.4^\circ\text{C}$ ).

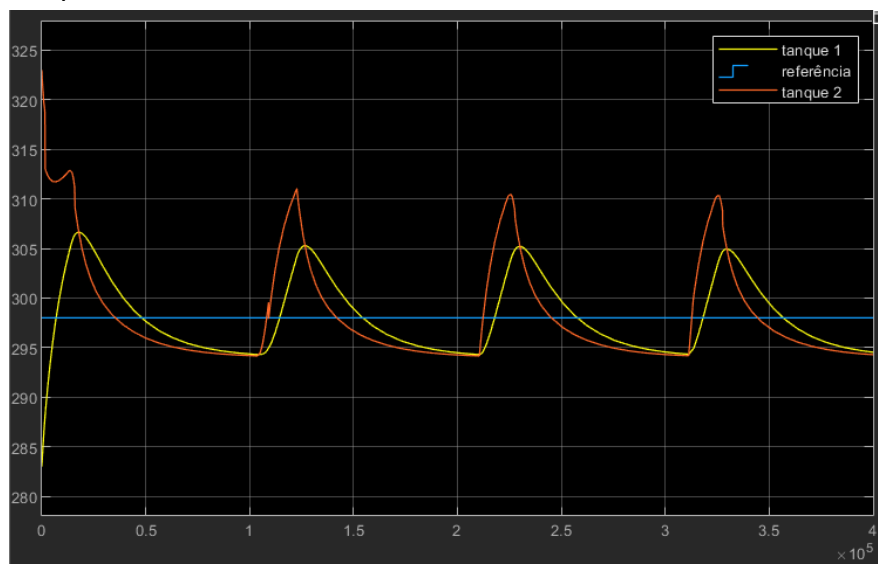
Verifica-se que o calor proveniente da resistência faz o sistema (tanque 1+ tanque 2) atingir o equilíbrio térmico a uma temperatura superior à do ambiente (a temperatura ambiente é sempre constante, isso causa uma restrição no sistema).

### **Malha fechada:**

#### **Objetivo de controlo:**

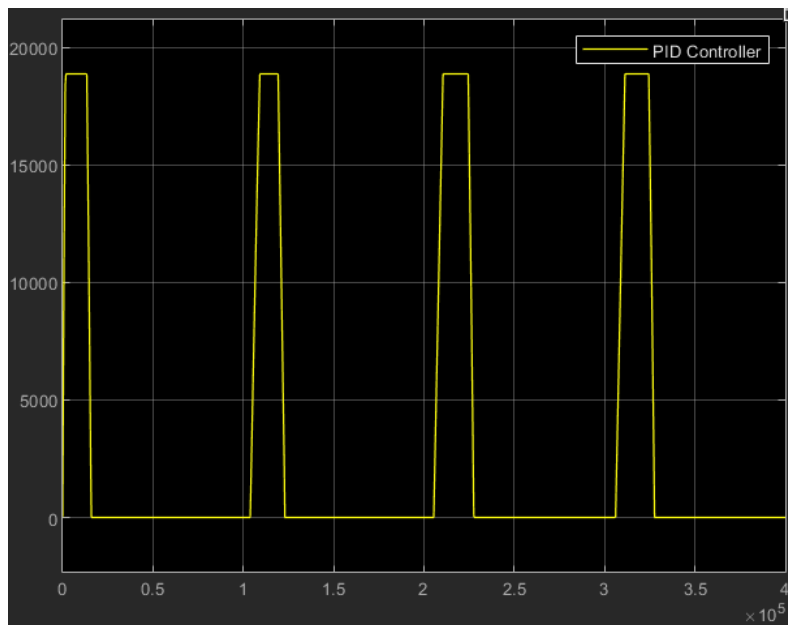
- Colocar a temperatura do tanque 1 a  $25^\circ\text{C}$ .

Depois de várias tentativas de melhorar o controlo, obteve-se nos melhores dos casos algo do tipo:



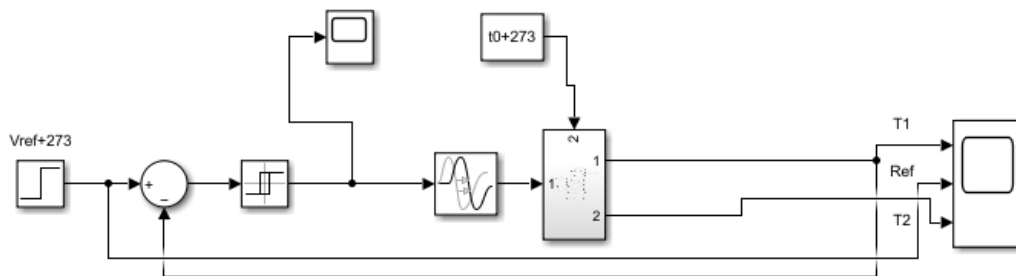
**(Parâmetros PID:  $P=1, I=0, D=1$ )**

Comportamento do PID:

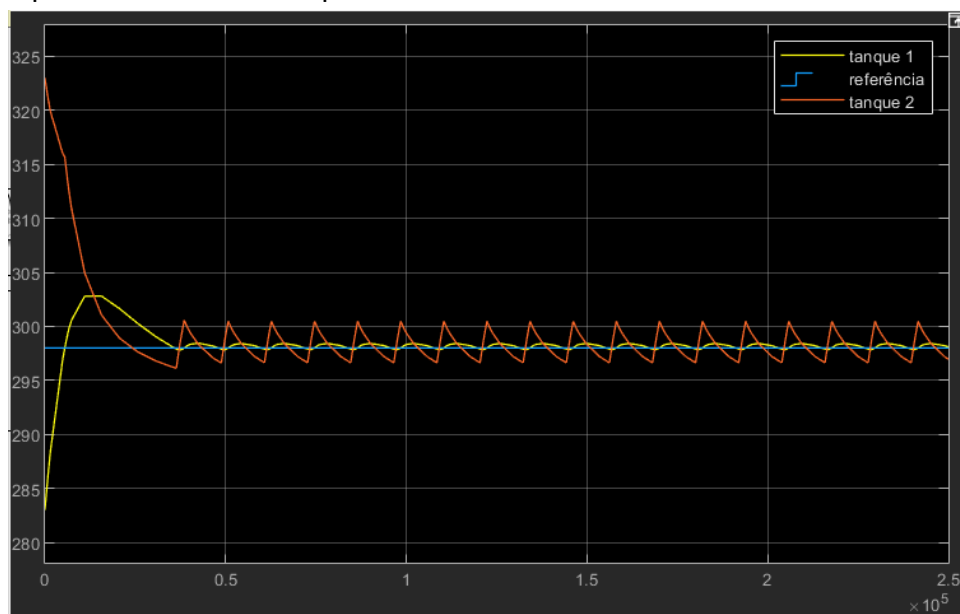


Podemos ver que a temperatura do tanque 1 oscila em torno dos 25°C e o PID comporta-se praticamente como um On-Off.

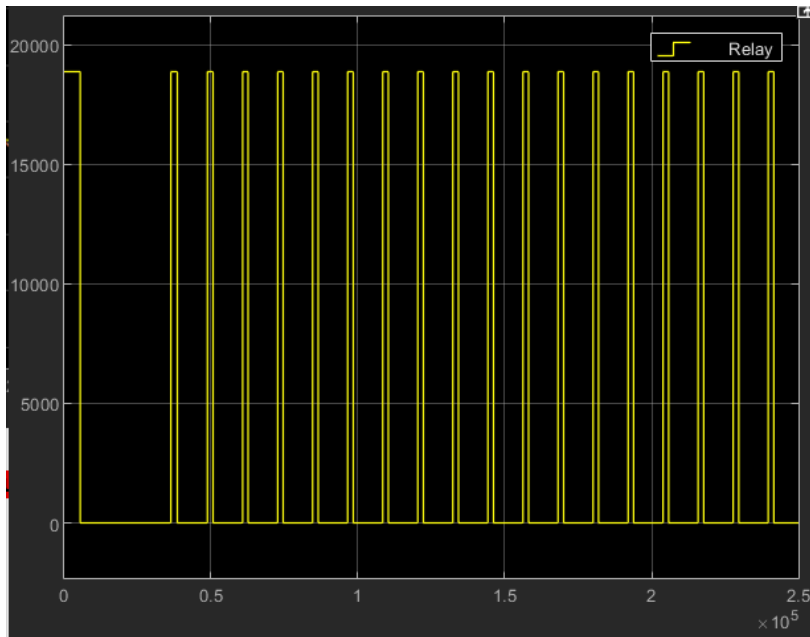
Então decidimos implementar um On-Off em lugar do PID:



E para uma histerese superior de 0.1 e inferior de 0:



Com uma resposta à saída do On-Off:



(cerca de 33 minutos em On e 2h e 46 min em Off)

Podemos ver que a utilização de um dispositivo de controlo que se baseia em ligar e desligar consegue controlar o sistema mais rapidamente e com oscilações muito menos acentuadas, em comparação com um dispositivo de controlo sofisticado tal como o PID. Controladores On-Off são mais baratos, então sempre que o seu uso compensa devemos utilizá-lo, tal como neste caso.

## ***2ª simulação---Paredes de cimento (tanque 1) e tijolo (tanque 2), com água no interior dos tanques e resistência desligada***

### **Considerações:**

Da 1ª simulação para esta, alterou-se a potência calorífica emitida pela resistência (desligou-se), mantendo-se as restantes variáveis constantes.

- **Substância do Tanque 1:** água
- **Substância do Tanque 2:** água
- **Calor específico da substância do Tanque 1( $C_1$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Calor específico da substância do Tanque 2( $C_2$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Massa da substância do Tanque 1( $m_1$ ):** 1000 kg
- **Massa da substância do Tanque 2( $m_2$ ):** 1830 kg
- **Área de cada placa do Tanque 1( $A_1$ ):** 1 m<sup>2</sup>
- **Área de cada placa do Tanque 2( $A_2$ ):** 2 m<sup>2</sup>
- **Espessura da placa do Tanque 1( $L_1$ ):** 0.01 m
- **Espessura da placa do Tanque 2 ( $L_2$ ):** 0.01 m

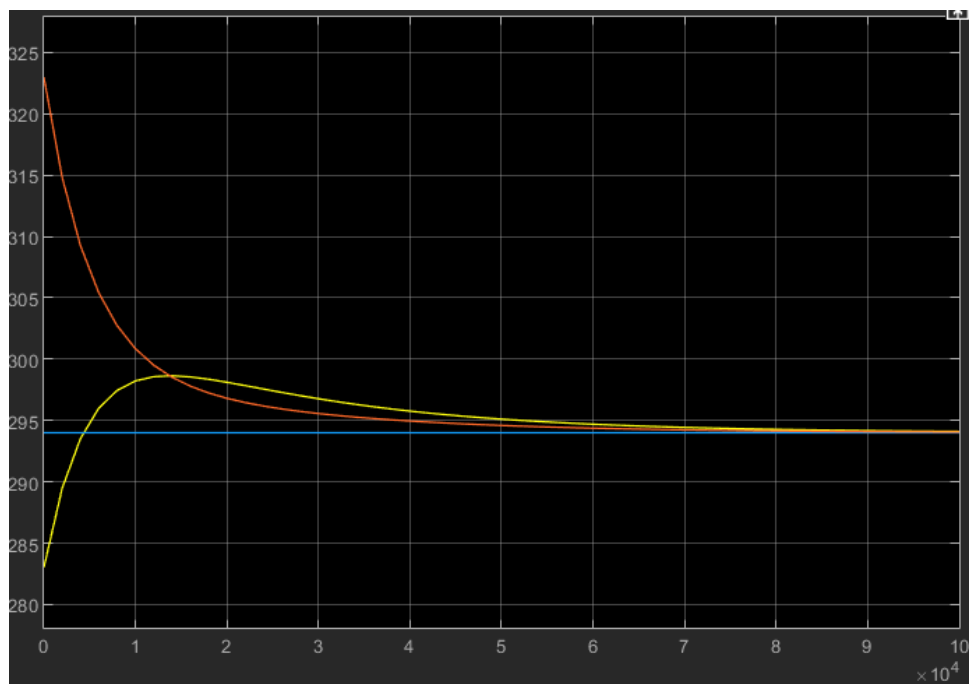


- **Condutibilidade térmica do material da placa do Tanque 1 ( $k_{12}$ ):** cimento- 0.7 W/(m\*K)
- **Condutibilidade térmica do material da placa do Tanque 2 ( $k_{20}$ ):** tijolo-0.6 W/(m\*K)
- **Temperatura inicial do tanque 1:** 10°C (283K)
- **Temperatura inicial do tanque 2:** 50°C (323K)
- **Temperatura ambiente:** 21°C (294K)
- **Calor emitido pela resistência :** 0 J/s (em malha aberta)

$$K_{12} = \frac{k_{12} * 6 * A_1}{L_1} = 420 \text{ W/K}$$

$$K_{20} = \frac{k_{20} * 6 * A_2}{L_2} = 720 \text{ W/K}$$

### Malha aberta:



**Amarelo:** Temperatura T1

**Vermelho:** Temperatura T2

**Azul:** Temperatura ambiente

**Escala do x:** segundos

**Escala do y:** Kelvin

### **Análise da simulação:**

Relativamente à simulação 1, apenas se desligou a resistência para ver o seu impacto no sistema.

A diferença verificada na simulação foi que as temperaturas de ambos os tanques estabilizaram à temperatura ambiente (21°C) já que não foi fornecido calor extra ao sistema e por isso o sistema procurou atingir o equilíbrio térmico.

Uma vez que se impôs que o ambiente tem sempre 21°C, os tanques 1 e 2 vão tender a se aproximar desse valor, uma vez que o sistema (caso seja possível), procura sempre o equilíbrio.

### **Malha fechada:**

Não se realizou pois não tinha interesse (as condições iniciais são as mesmas da simulação 1, exceto a potência calorífica da resistência que passa a ser 0, sendo que num controlo em malha fechada não faz muito sentido considerar esse aspecto).

## ***3ª simulação---Paredes de cimento (tanque 1) e ferro (tanque 2), com água no seu interior.***

### **Considerações:**

Da 1ª simulação para esta, alterou-se o material da placa do tanque 2, mantendo-se as restantes variáveis constantes.

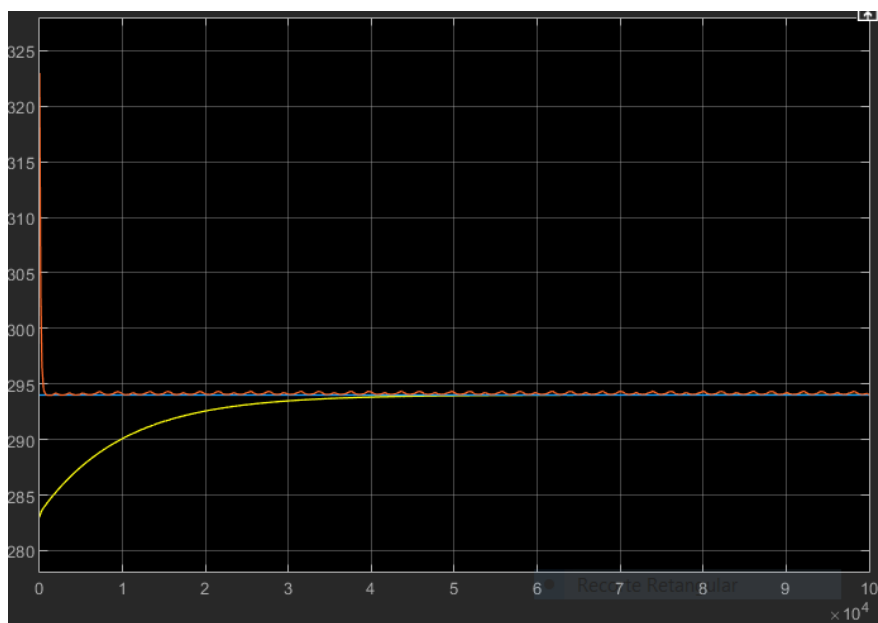
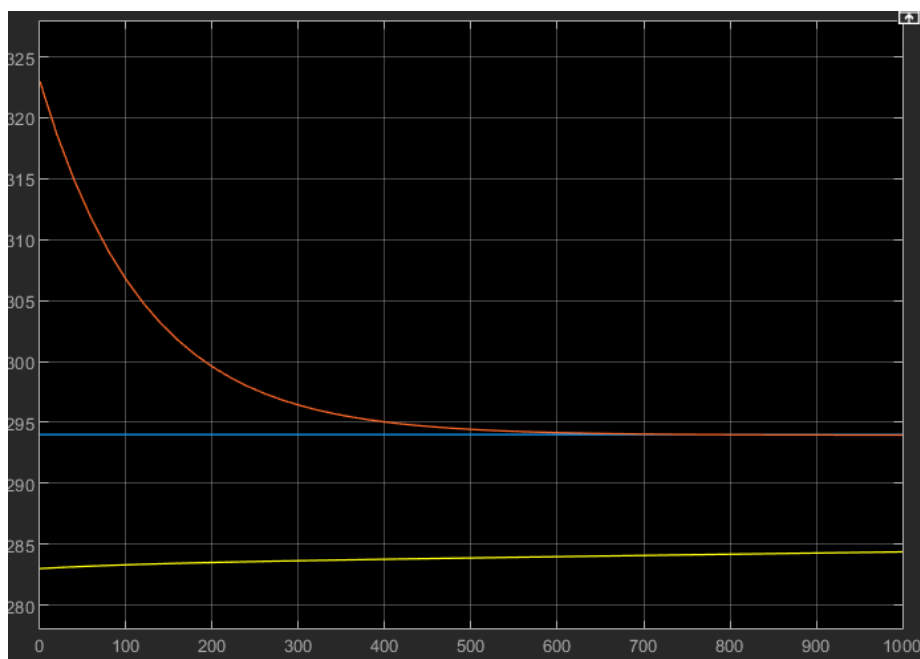
- **Substância do Tanque 1:** água
- **Substância do Tanque 2:** água
- **Calor específico da substância do Tanque 1 ( $C_1$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Calor específico da substância do Tanque 2 ( $C_2$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Massa da substância do Tanque 1 ( $m_1$ ):** 1000 kg
- **Massa da substância do Tanque 2 ( $m_2$ ):** 1830 kg
- **Área de cada placa do Tanque 1 ( $A_1$ ):** 1 m<sup>2</sup>
- **Área de cada placa do Tanque 2 ( $A_2$ ):** 2 m<sup>2</sup>
- **Espessura da placa do Tanque 1 ( $L_1$ ):** 0.01 m
- **Espessura da placa do Tanque 2 ( $L_2$ ):** 0.01 m
- **Condutibilidade térmica do material da placa do Tanque 1 ( $k_{12}$ ):** cimento- 0.7 W/(m\*K)
- **Condutibilidade térmica do material da placa do Tanque 2 ( $k_{20}$ ):** ferro-52 W/(m\*K)
- **Temperatura inicial do tanque 1:** 10°C (283K)

- Temperatura inicial do tanque 2: 50°C (323K)
- Temperatura ambiente: 21°C (294K)
- Calor emitido pela resistência : 1000 J/s (em malha aberta)

$$K_{12} = \frac{k_{12} * 6 * A_1}{L_1} = 420 \text{ W/K}$$

$$K_{20} = \frac{k_{20} * 6 * A_2}{L_2} = 62400 \text{ W/K}$$

### Malha aberta:



**Amarelo:** Temperatura T1

**Vermelho:** Temperatura T2

**Azul:** Temperatura ambiente

**Escala do x:** segundos

**Escala do y:** Kelvin

### **Análise da simulação:**

Face à 1ª simulação, apenas se mudou a constituição do tanque 2 para uma material bem mais condutor face ao cimento, que neste caso é o ferro.

Essa mudança proporcionou uma troca de calor mais acentuada entre o Tanque 2 e o ambiente, relativamente à troca de calor entre o tanque 1 e o tanque 2, pois o tanque 1 é feito de cimento, que é um fraco condutor. O efeito da diferença de constituição dos materiais de ambos os tanques verifica-se logo nos primeiros minutos, na qual a temperatura de T2 baixa rapidamente até ficar à temperatura ambiente, pois o calor passa rapidamente pela parede de ferro para o ambiente, e o tanque 1 vai aumentando ligeiramente, até que atinge o equilíbrio térmico que é aproximadamente aos 21 °C.

Um aspecto interessante é o facto de mesmo tendo a resistência a libertar 1000 J/s, o tanque 2 liberta calor para o ambiente a uma taxa maior do que o calor enviado pela resistência.

A oscilação presente na temperatura de T2 é devido a receber e a perder o calor vindo da resistência, sucessivamente, para o ambiente.

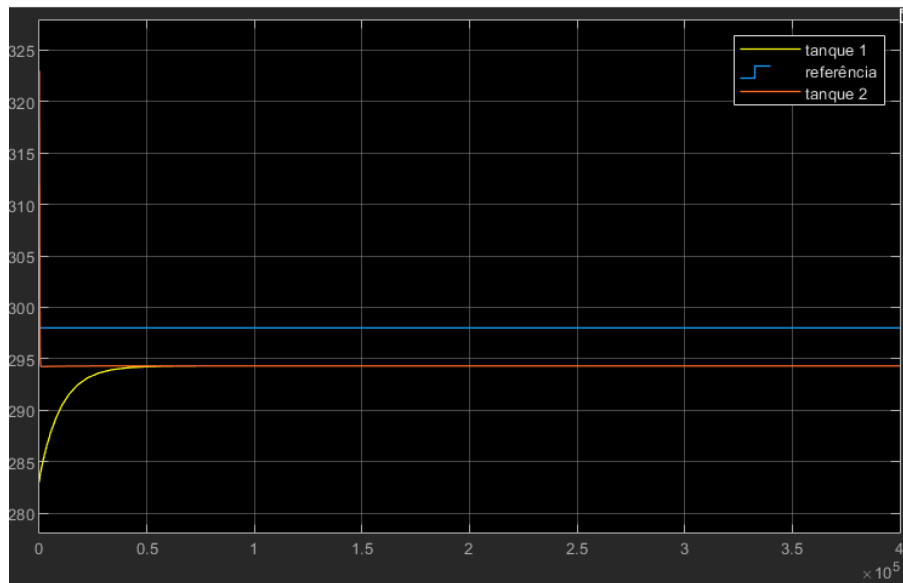
### **Malha fechada:**

#### **Objetivo de controlo:**

- Colocar a temperatura do tanque 1 a 25°C.

Realizou-se diversas tentativas de forma a tentarmos estabelecer um sistema de controlo que conseguisse colocar o tanque 1 a 25°C.

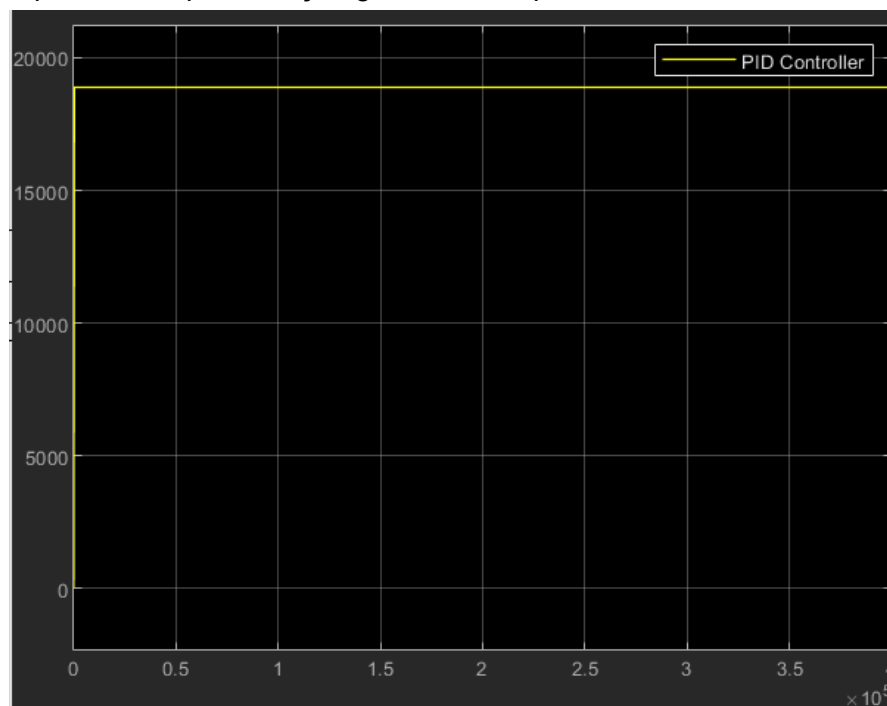
Porém por mais que se mudasse os parâmetros do PID obtinha-se sempre algo do tipo:



(Parâmetros PID:  $P=1, I=1, D=1$ )

Com a análise do gráfico, podemos ver que a malha de realimentação não conseguiu controlar a temperatura do Tanque 1 até ao valor pretendido (referência).

Aqui está a representação gráfica da resposta do controlador PID:



Podemos visualizar que ele mesmo colocando a resistência a produzir a sua potência máxima não conseguiu colocar a temperatura do tanque 1 no valor suposto!

Apesar de parecer uma missão falhada, este comportamento era mais que esperado! Como é que se ia aquecer um compartimento blindado por cimento (tanque 1) sendo que a fonte de aquecimento estava no compartimento exterior, na qual a sua parede externa era

constituída por FERRO, e se não bastasse do outro lado tem um ambiente com uma temperatura inalterável!!!!????

Se não ficaram convencidos basta pensar no seguinte:

Vamos supor que queremos aquecer um quarto!

- Durante a construção dele teve-se o cuidado de colocar paredes térmicas de forma a minimizar trocas de calor com o exterior.
- Colocou-se o aquecedor inteligente fora do quarto (que controla o calor emitido conforme a temperatura do quarto), num compartimento revestido por paredes muito condutoras.
- No exterior do compartimento está um dia normal a uma temperatura de 21°C.
- Vamos supor que o quarto e o compartimento são relativamente grandes.

Mesmo sem percebermos nada de física e termodinâmica, fica evidente o erro que foi colocar o aquecedor fora do quarto! Podemos ter o aquecedor mais incrível do mercado, ele não vai conseguir aquecer o quarto, pois as perdas de calor para o ambiente são muito grandes, não possibilitando o aquecimento do compartimento de forma a que esse calor passe por difusão e a temperatura do quarto seja controlada à temperatura que desejamos. Claro que ao fim de um tempo as temperaturas do compartimento e do quarto vão ficar à temperatura do ambiente, e o aquecedor vai estar em vão a tentar fazer um milagre!! O mesmo se passou na nossa simulação!

O que podíamos tentar fazer para melhorar o sistema, era colocar a resistência de aquecimento diretamente ligada ao tanque T1, para isso foi necessário desenvolver novas equações e formular um sistema novo:

Sistema 2, com a resistência de aquecimento dentro do tanque 1:

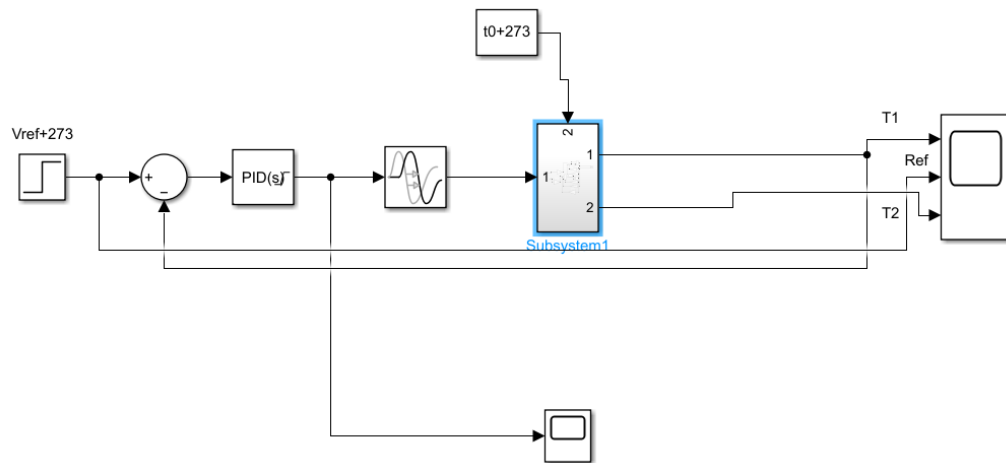
**Tanque 1:**

$$m_1 C_1 \frac{dT_1}{dt} = u(t) + k_{12}(T_2 - T_1)$$
$$\Leftrightarrow \frac{dT_1}{dt} = \frac{1}{m_1 C_1} u(t) + \frac{k_{12}}{m_1 C_1} (T_2 - T_1)$$

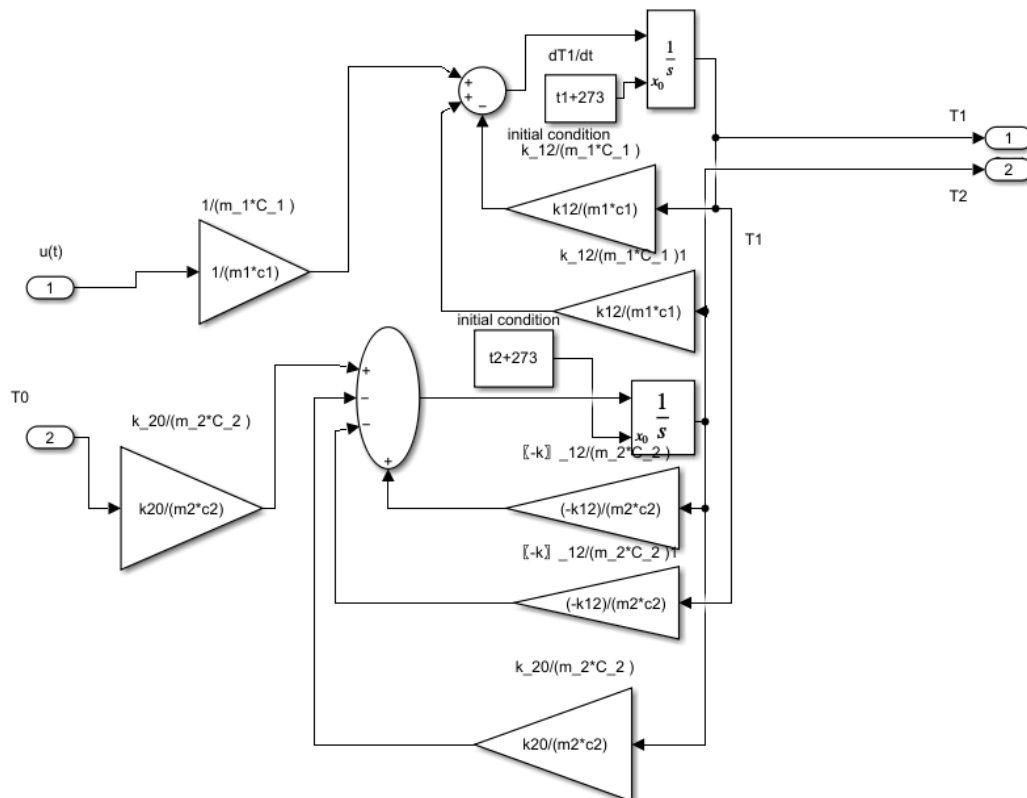
**Tanque 2:**

$$m_2 C_2 \frac{dT_2}{dt} = -k_{12}(T_2 - T_1) - k_{20}(T_2 - T_0)$$
$$\Leftrightarrow \frac{dT_2}{dt} = -\frac{k_{12}}{m_2 C_2} (T_2 - T_1) - \frac{k_{20}}{m_2 C_2} (T_2 - T_0)$$

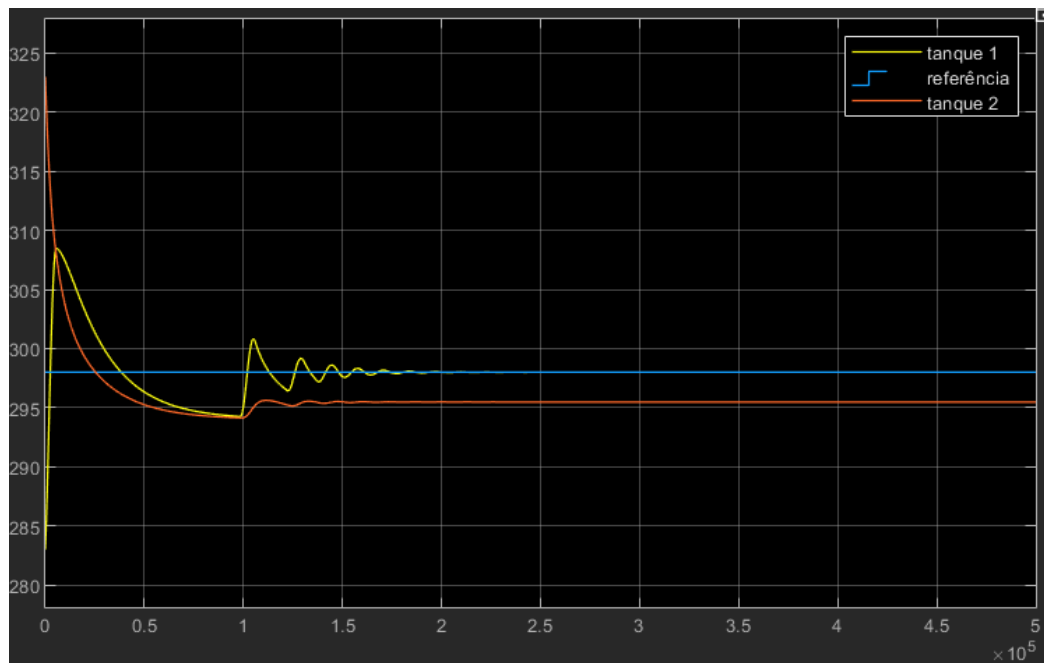
Montagem:



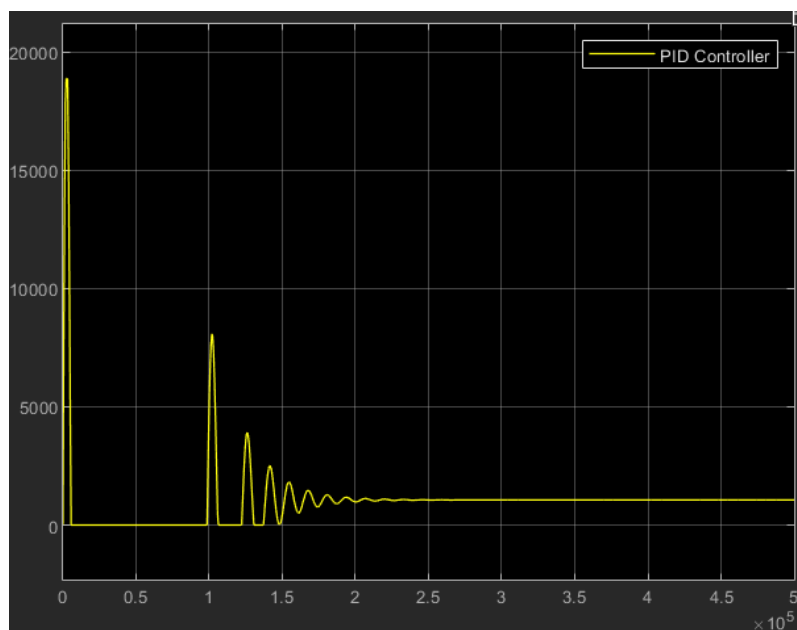
Subsystem1 (Esquema):



Resultados da simulação:



(Parâmetros PID:  $P=1, I=1, D=1$ )



Com um PID de  $P=1, I=1$  e  $D=1$ , o controle foi um sucesso.

Apesar de ser praticamente impossível fazer o controle adequado da temperatura do tanque 1 quando a resistência estava diretamente ligada ao tanque 2, quando se mudou a sua localização para o tanque 1 o controle foi feito facilmente.

Utilizando a analogia feita anteriormente, é a mesma coisa que mudar o aquecedor para o quarto, sendo por isso muito mais fácil controlar a sua temperatura do que na situação anterior.



#### **4ª simulação---Paredes de ferro (tanque 1) e tijolo (tanque 2), com água no interior dos tanques.**

##### **Considerações:**

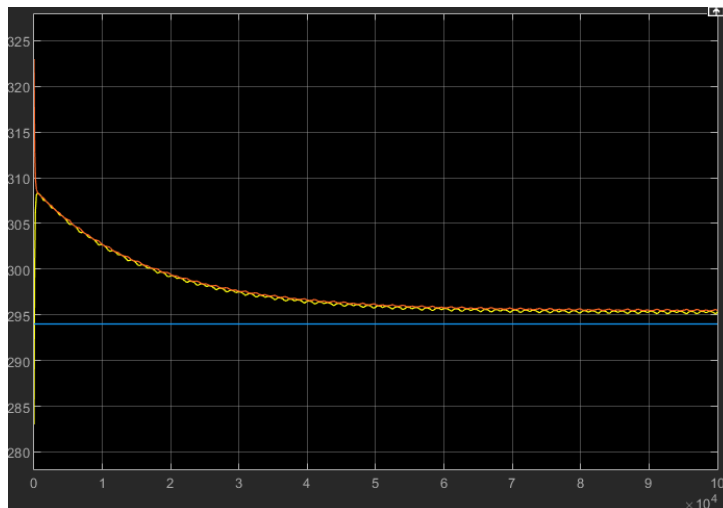
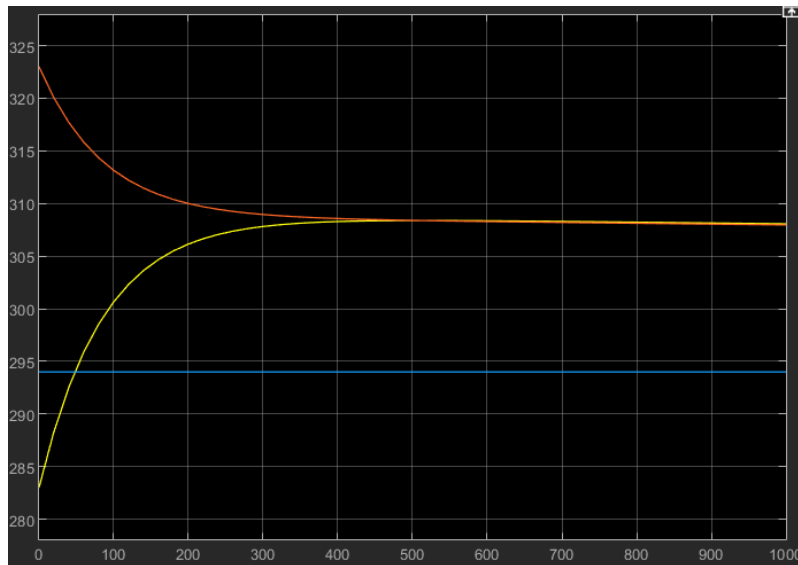
Da 1ª simulação para esta, alterou-se o material da placa do tanque 1, mantendo-se as restantes variáveis constantes.

- **Substância do Tanque 1:** água
- **Substância do Tanque 2:** água
- **Calor específico da substância do Tanque 1 ( $C_1$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Calor específico da substância do Tanque 2 ( $C_2$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Massa da substância do Tanque 1 ( $m_1$ ):** 1000 kg
- **Massa da substância do Tanque 2 ( $m_2$ ):** 1830 kg
- **Área de cada placa do Tanque 1 ( $A_1$ ):** 1 m<sup>2</sup>
- **Área de cada placa do Tanque 2 ( $A_2$ ):** 2 m<sup>2</sup>
- **Espessura da placa do Tanque 1 ( $L_1$ ):** 0.01 m
- **Espessura da placa do Tanque 2 ( $L_2$ ):** 0.01 m
- **Condutibilidade térmica do material da placa do Tanque 1 ( $k_{12}$ ):** ferro- 52 W/(m\*K)
- **Condutibilidade térmica do material da placa do Tanque 2 ( $k_{20}$ ):** tijolo-0.6 W/(m\*K)
- **Temperatura inicial do tanque 1:** 10°C (283K)
- **Temperatura inicial do tanque 2:** 50°C (323K)
- **Temperatura ambiente:** 21°C (294K)
- **Calor emitido pela resistência :** 1000 J/s (em malha aberta)

$$K_{12} = \frac{k_{12} * 6 * A_1}{L_1} = 31200 \text{ W/K}$$

$$K_{20} = \frac{k_{20} * 6 * A_2}{L_2} = 720 \text{ W/K}$$

##### **Malha aberta:**



**Amarelo:** Temperatura T1

**Vermelho:** Temperatura T2

**Azul:** Temperatura ambiente

**Escala do x:** segundos

**Escala do y:** Kelvin

#### **Análise da simulação:**

Relativamente à simulação 1, apenas se trocou a constituição do material do Tanque 1, para um material de maior condutibilidade térmica, que é o ferro.

Podemos verificar que nos primeiros minutos (6 minutos e 40 segundos) a temperatura do tanque 1 aproxima-se rapidamente da temperatura do tanque 2, pois o ferro permite uma fácil troca de calor entre ambos os tanques, e de seguida ambos tendem lentamente (passando 19 horas e 27 minutos) para 22°C, atingindo o equilíbrio térmico, tal como

acontecia na 1ª simulação, uma vez que o tanque 2 se manteve feito de tijolo e com as mesmas dimensões.

Verifica-se pequenas oscilações nas temperaturas dos tanques, mas isso deve-se ao facto da resistência fornecer 1000 J/s de potência calorífica e essa tender a ser dissipada tanto para o ambiente como para o tanque 1.

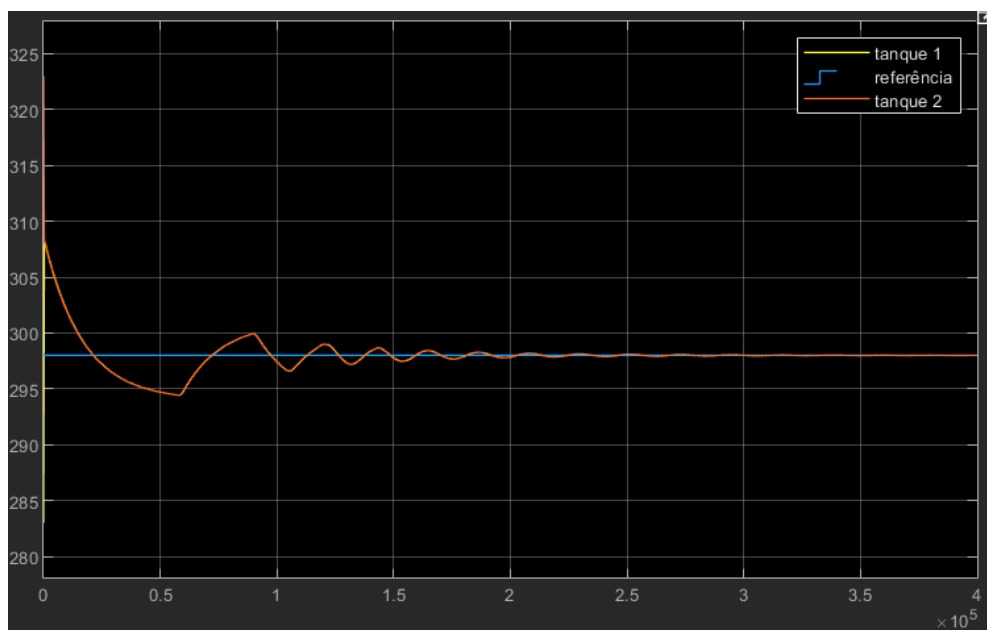
### **Malha fechada:**

#### **Objetivo de controlo:**

- Colocar a temperatura do tanque 1 a 25°C.

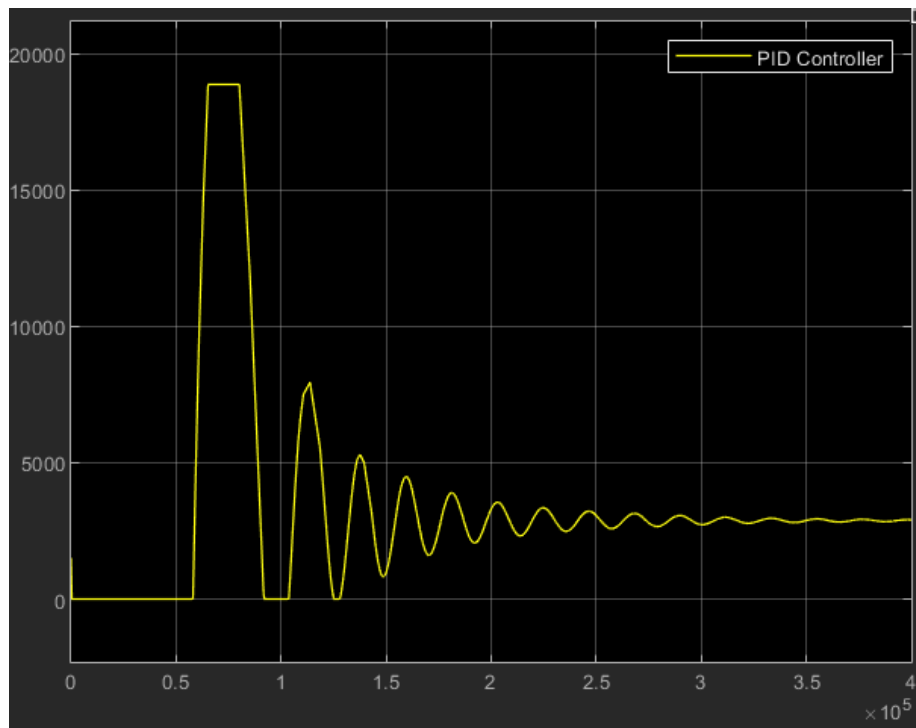
Nesta simulação, não foi possível implementar as estratégias de “Ziegler-Nichols em malha fechada”, pois para  $I=0$ ,  $D=0$ , e aumentando o  $P$ , o sinal de saída nunca ficava com um comportamento sinusoidal constante, devido ao facto deste sistema ser extremamente estável. Devido a isto tivemos de ir por tentativa e erro tal como nos outros casos.

Colocando  $P=1$ ,  $I=1$  e  $D=1$  foi possível obter um ótimo controlo no nosso sistema, conseguindo-se colocar a temperatura do tanque 1 a 25°C. Demorou cerca de 55 horas a conseguir que isso acontecesse, porém é comum sistemas que funcionam à base de difusões de calor (sem entradas e saídas, tal como buracos e assim) demorarem algum tempo a conseguir estabilizar.



**(Parâmetros PID:  $P=1, I=1, D=1$ )**

Aqui está o comportamento do controlador PID:



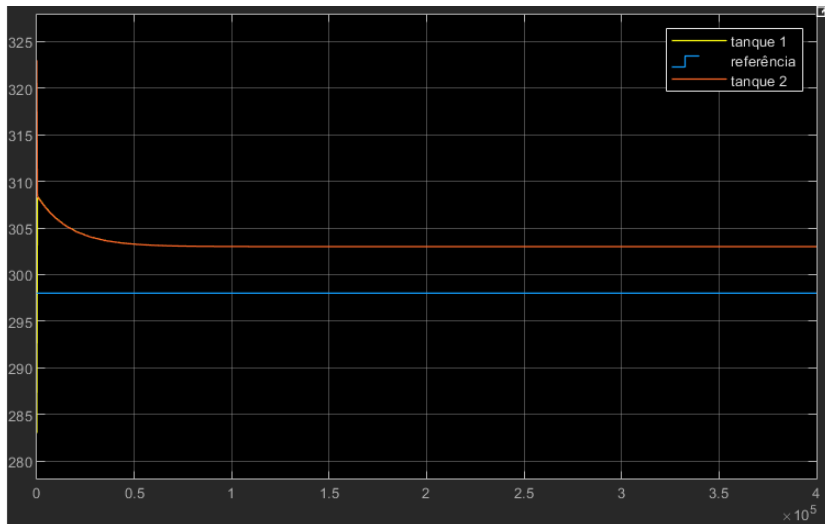
### Explicação do fenômeno:

Uma vez que a parede do tanque 1 é de elevada condutividade, e a parede do tanque 2 é de baixa condutividade, o controlador PID conseguiu controlar o sistema com sucesso. Isto deve-se ao facto do tanque 2 estar mais isolado do ambiente, e as difusões de calor entre o tanque 1 e 2 serem elevadas, permitindo um ótimo controlo.

Voltando àquela analogia de aquecer o quarto através de um aquecedor num compartimento exterior, agora as paredes entre esse compartimento e o ambiente são pouco condutoras, deixando passar pouquíssimo calor, porém as paredes do quarto são boas condutoras e o calor difunde-se bastante. Devido a isso torna-se fácil ajustar o aquecedor de forma a colocarmos o quarto à temperatura desejada. O mesmo se passou na nossa simulação.

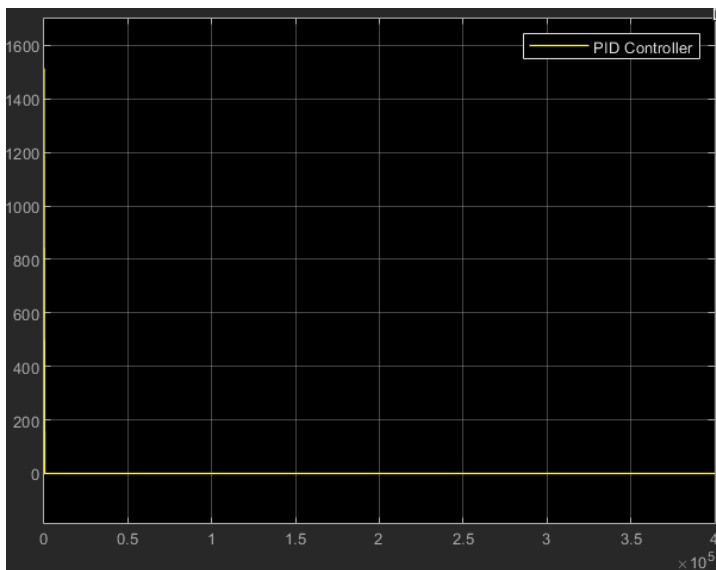
**E se a temperatura ambiente for diferente de 21°C para a mesma simulação?? Como o sistema se comportaria?**

Decidimos experimentar mudar a temperatura ambiente para 30°.



Podemos ver que o controlador não foi capaz de colocar a temperatura ao valor pretendido (25°C).

Isto acontece pois a temperatura ambiente era mais alta do que a referência, e mesmo sendo uma parede muito isolada, e o PID sempre desligado como podemos ver na imagem abaixo:

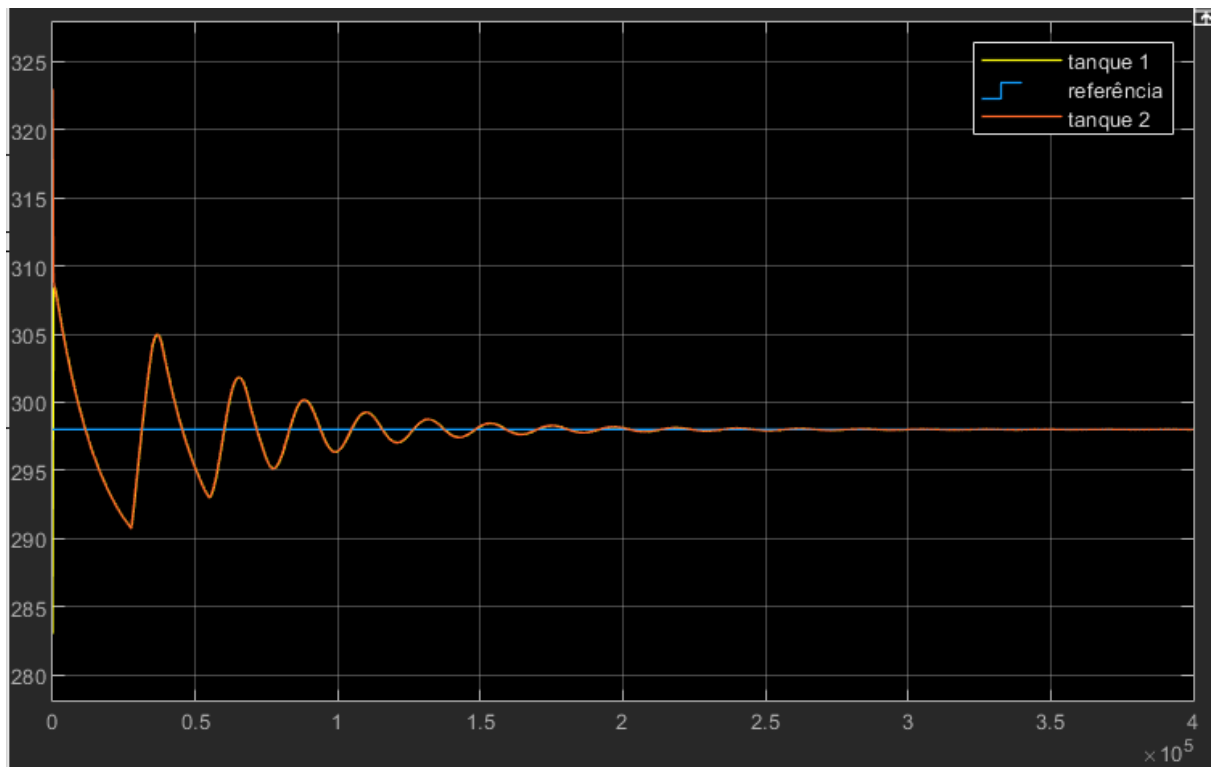


O sistema tendeu a um equilíbrio térmico com o ambiente e não havia nada que o PID pudesse fazer para contrariar isto, uma vez que a resistência só aquecia e mesmo desligada o efeito da perturbação do ambiente era incontornável para a situação em questão.

Para resolver este problema, utilizou-se um dispositivo também capaz de colocar graus negativos de forma a conseguir baixar a temperatura:

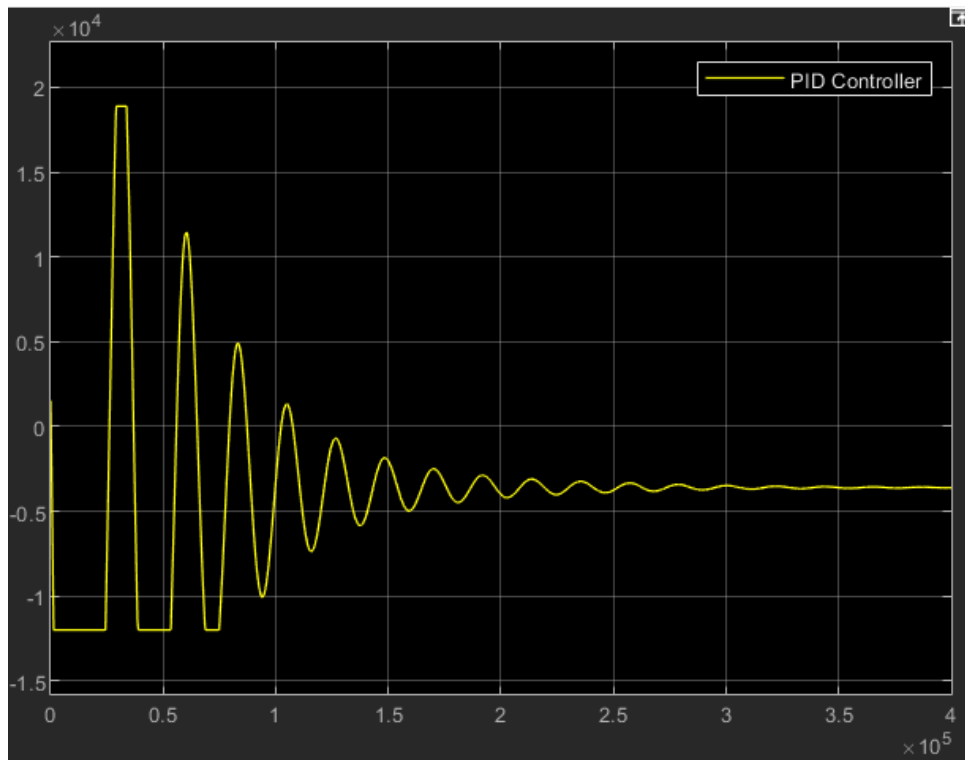
(limite de potência mínimo: -12000 limite de potência máximo: 18885)

Nota: esta simulação é apenas para efeitos académicos, não representando exatamente um aquecedor/refrescador real)

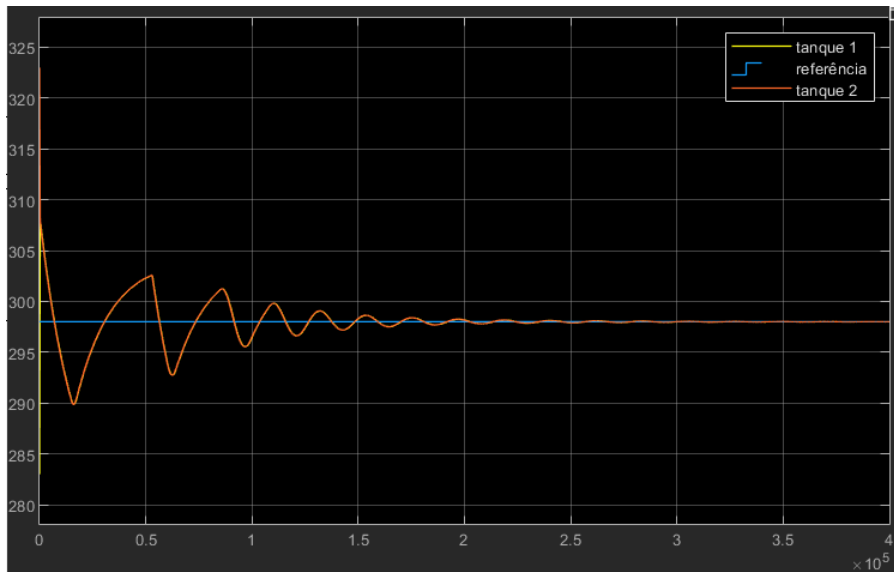


Agora, devido à capacidade de refrescar do PID, este já foi capaz de controlar a temperatura do tanque 1.

Em baixo encontra-se a resposta do PID ( $I=1, P=1$  e  $D=1$ ):

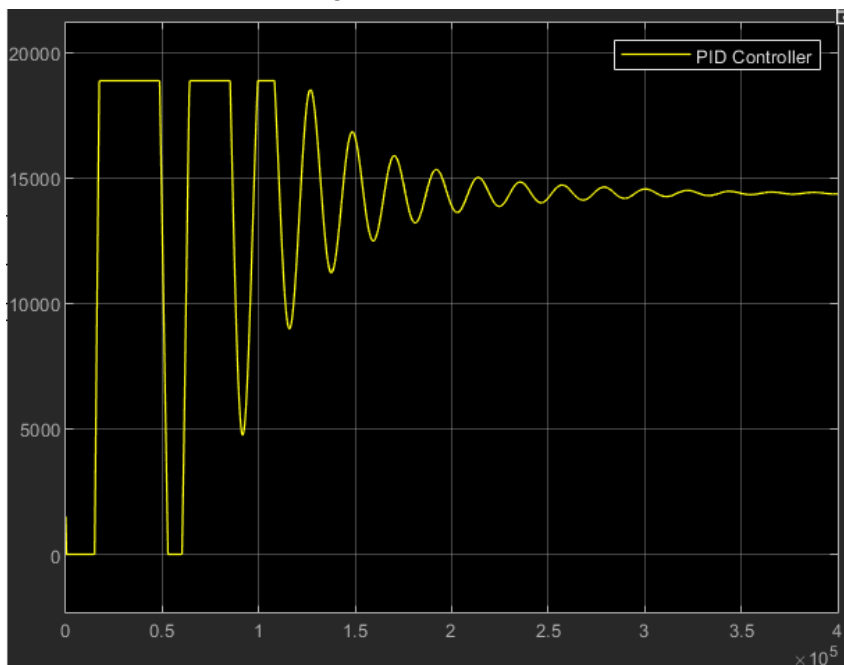


E se agora colocássemos o ambiente a 5°C ? Será que o PID que usamos na simulação 4 (sem refrescamento) seria capaz de controlar?



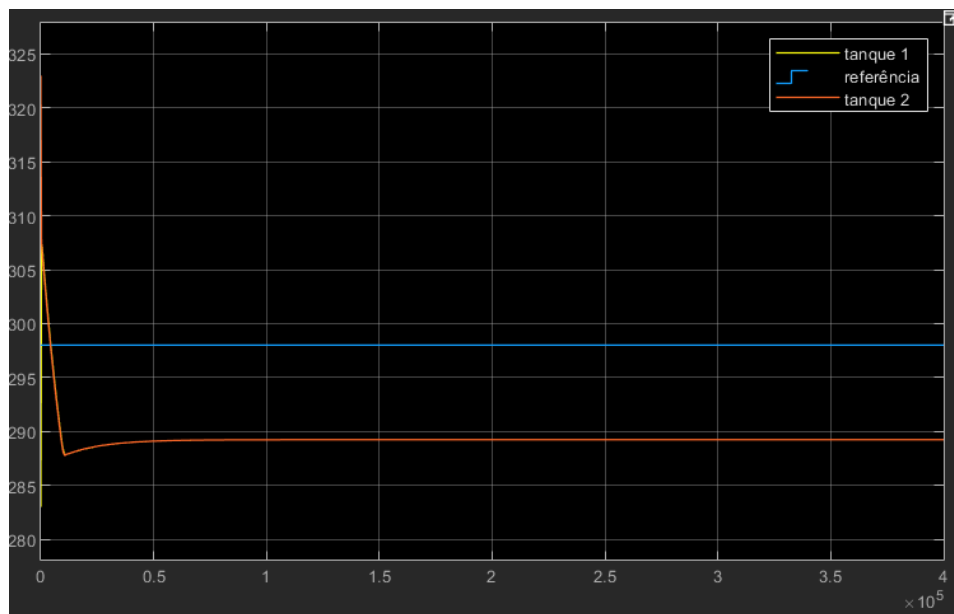
Como podemos visualizar, o controlador teve bastante sucesso no controle, ou seja mesmo o ambiente estando a temperaturas mais baixas que a referência, o PID foi capaz de regular a temperatura do tanque 2, de forma às difusões de calor para o tanque 1 o colocarem a 25°C.

Porém podemos ver o seguinte:



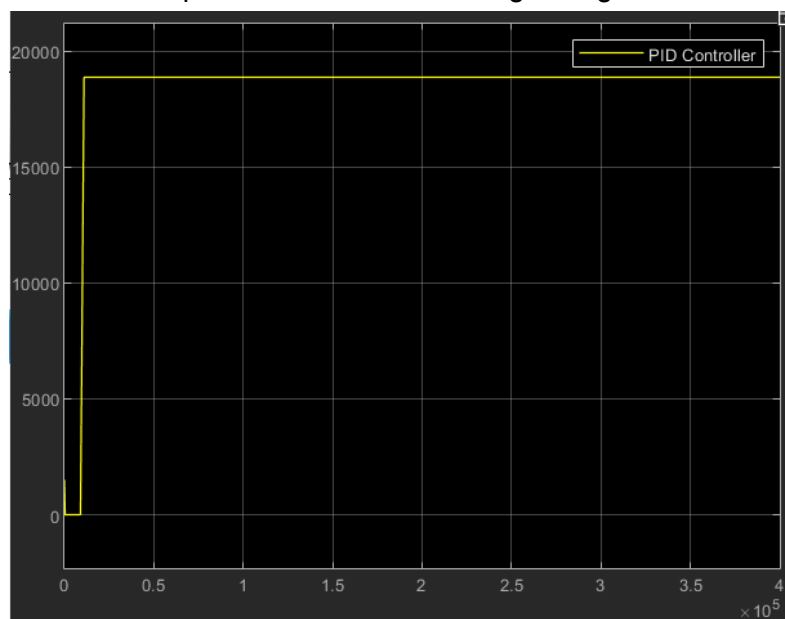
O controlador não ficou muito longe do seu limite de potência quando estabilizou, o que significa que caso baixemos mais a temperatura ambiente, este pode não ser capaz de colocar o tanque 1 a 25°C.

Para verificar isso baixamos ainda mais a temperatura ambiente para  $-10^{\circ}\text{C}$ :



Agora o PID, mesmo no seu limite superior máximo, já não foi capaz de colocar o tanque 1 a  $25^{\circ}\text{C}$ .

Vemos o comportamento do PID no seguinte gráfico:



Podemos então concluir, que mesmo em situações em que os materiais das paredes dos tanques são favoráveis para a situação em questão, o valor da temperatura ambiente é crucial.

Num sistema deste tipo, na qual a resistência tem uma potência limitada, só é possível controlar adequadamente entre uma baixa gama de valores de temperaturas ambientes. Para aumentar essa gama, era necessário o desenvolvimento de resistências mais



potentes, porém como bem sabemos tudo tem um limite, sendo que, neste caso, o principal é a temperatura de fusão.

### ***5ª simulação---Paredes de ferro em ambos os tanques e água no interior de ambos***

#### **Considerações:**

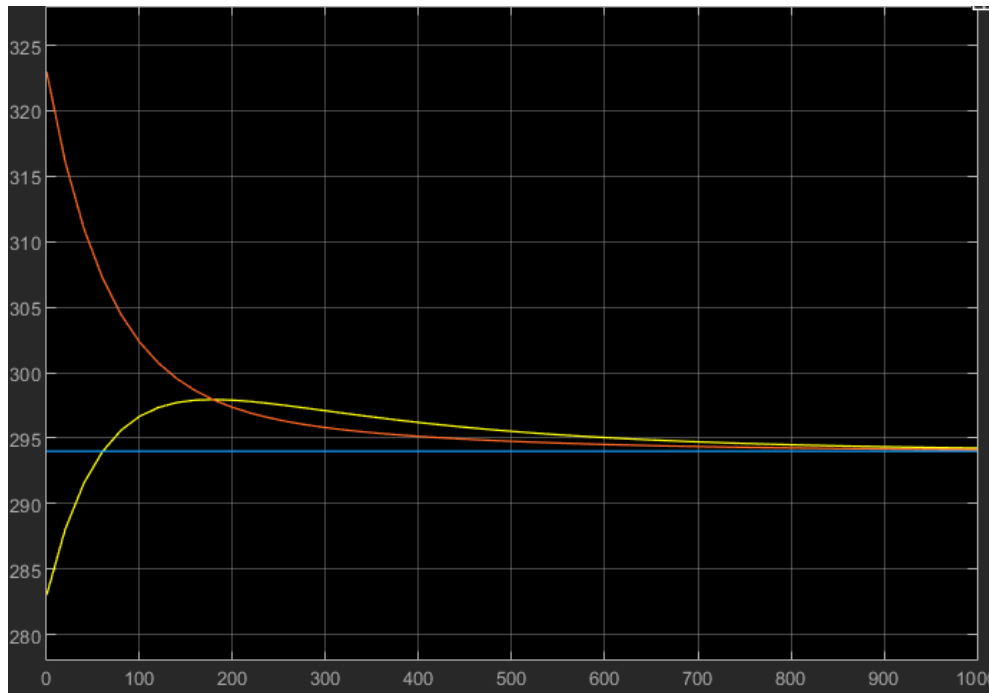
Da 1ª simulação para esta, alterou-se os materiais das placas dos tanques 1 e 2, mantendo-se as restantes variáveis constantes.

- **Substância do Tanque 1:** água
- **Substância do Tanque 2:** água
- **Calor específico da substância do Tanque 1 ( $C_1$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Calor específico da substância do Tanque 2 ( $C_2$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Massa da substância do Tanque 1 ( $m_1$ ):** 1000 kg
- **Massa da substância do Tanque 2 ( $m_2$ ):** 1830 kg
- **Área de cada placa do Tanque 1 ( $A_1$ ):** 1 m<sup>2</sup>
- **Área de cada placa do Tanque 2 ( $A_2$ ):** 2 m<sup>2</sup>
- **Espessura da placa do Tanque 1 ( $L_1$ ):** 0.01 m
- **Espessura da placa do Tanque 2 ( $L_2$ ):** 0.01 m
- **Condutibilidade térmica do material da placa do Tanque 1 ( $k_{12}$ ):** ferro- 52 W/(m\*K)
- **Condutibilidade térmica do material da placa do Tanque 2 ( $k_{20}$ ):** ferro-52 W/(m\*K)
- **Temperatura inicial do tanque 1:** 10°C (283K)
- **Temperatura inicial do tanque 2:** 50°C (323K)
- **Temperatura ambiente:** 21°C (294K)
- **Calor emitido pela resistência :** 1000 J/s (em malha aberta)

$$K_{12} = \frac{k_{12} * 6 * A_1}{L_1} = 31200 \text{ W/K}$$

$$K_{20} = \frac{k_{20} * 6 * A_2}{L_2} = 62400 \text{ W/K}$$

#### **Malha aberta:**



**Amarelo:** Temperatura T1

**Vermelho:** Temperatura T2

**Azul:** Temperatura ambiente

**Escala do x:** segundos

**Escala do y:** Kelvin

#### **Análise da simulação:**

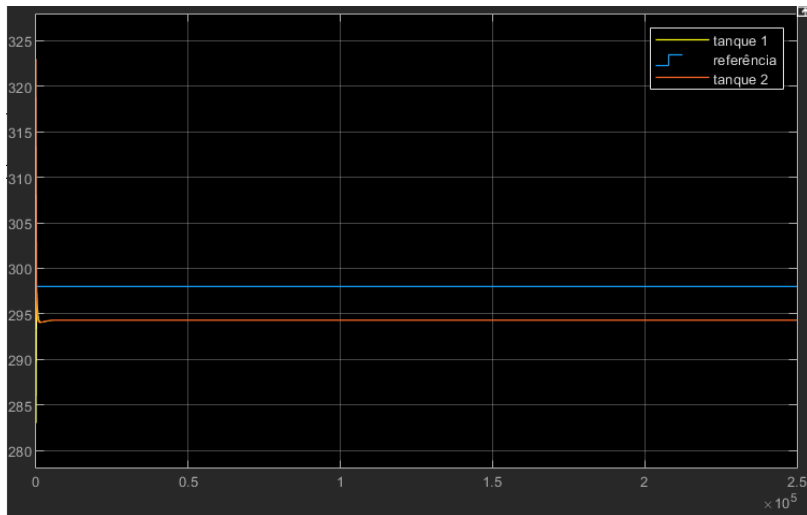
Face à 1ª simulação, passamos agora a ter os dois tanques constituídos por ferro o que proporciona uma elevada transferência de calor entre os meios.

Como era de esperar, o tanque 1 e 2 vão rapidamente atingir a mesma temperatura devido ao facto de haver uma elevada condutibilidade entre ambos, porém mesmo tendo a resistência a fornecer 1000 J/s essa potência não é capaz de contrariar a rápida perda de calor do tanque 2 para o ambiente, uma vez que o ambiente está a 21°C e isso nunca muda, por isso os tanques atingem o equilíbrio térmico a aproximadamente 21°C (passando 15 minutos).

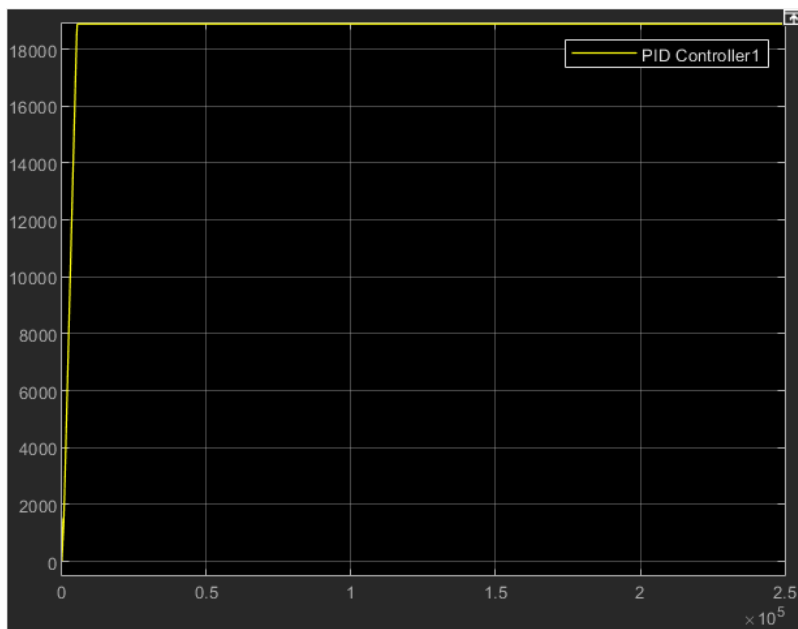
#### **Malha fechada:**

##### **Objetivo de controlo:**

- Colocar a temperatura do tanque 1 a 25°C.



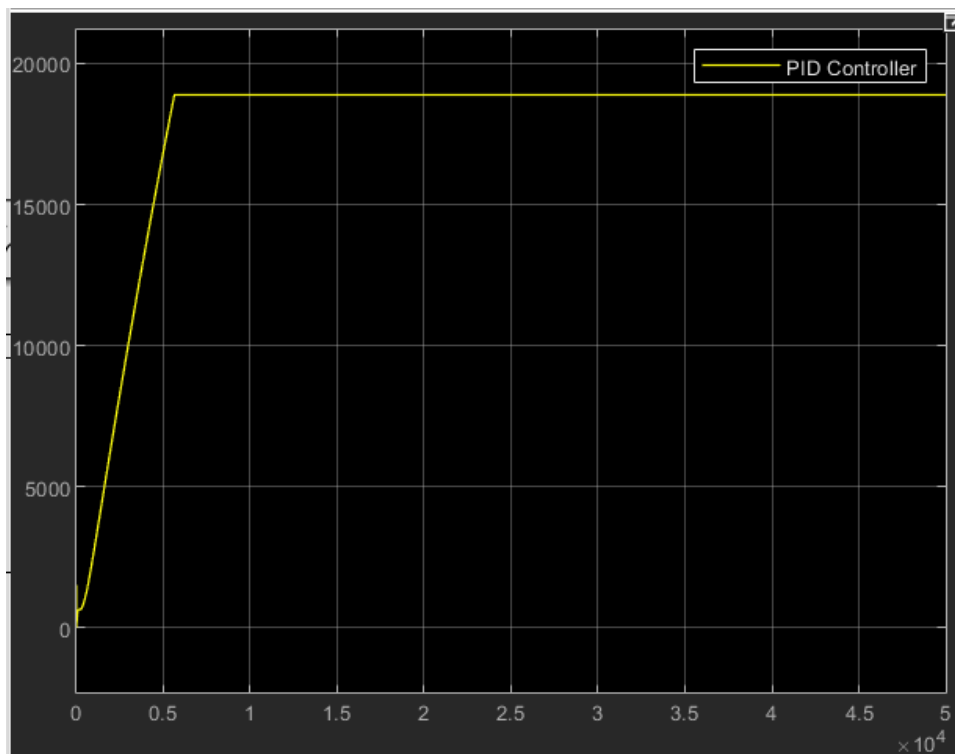
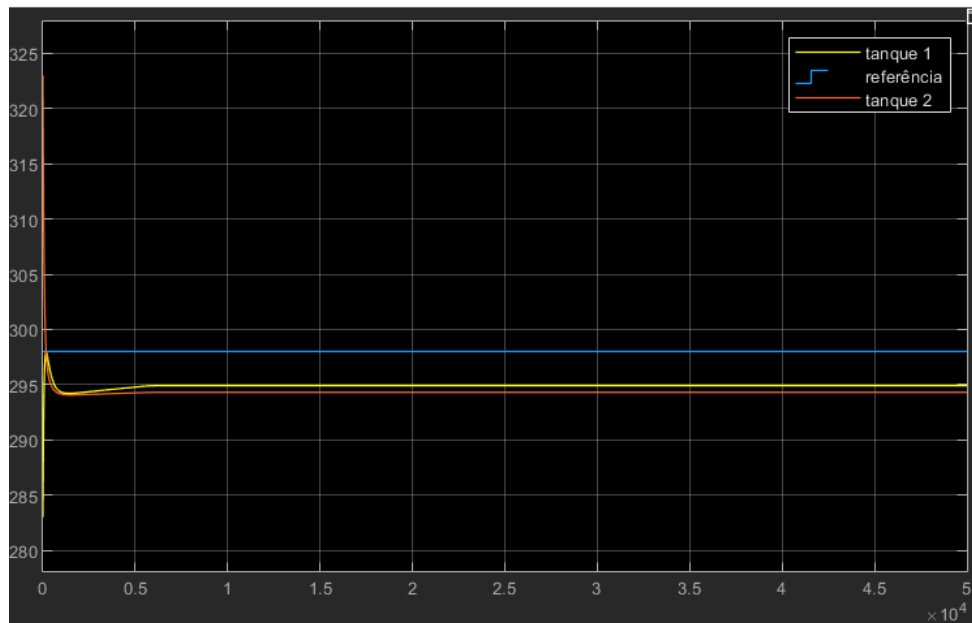
(Parâmetros PID:  $P=1, I=1, D=1$ )



Depois de mudar os parâmetros do PID para várias combinações, não se conseguiu obter o controle desejado para nenhuma delas, e podemos ver que o PID levou a resistência a emitir o máximo de potência que conseguia.

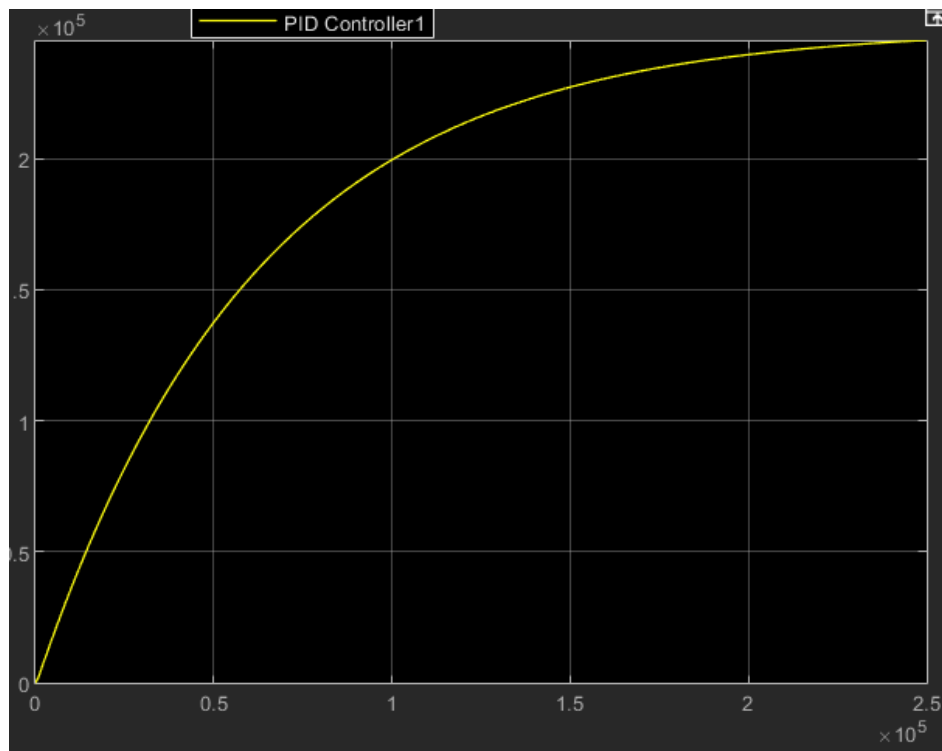
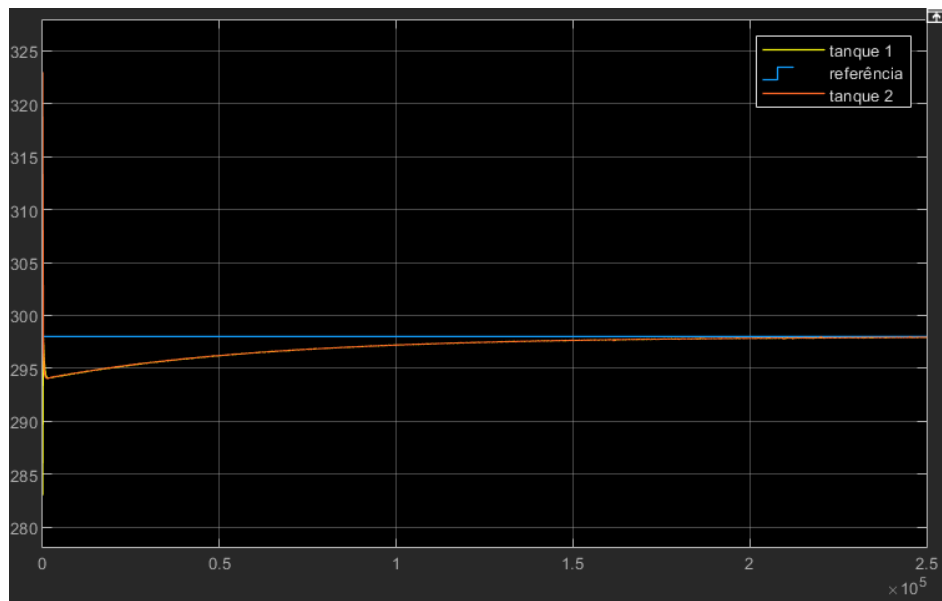
Podemos ver que o que se passou aqui foi exatamente o mesmo do que na 3ª simulação. Mas será que se colocarmos a resistência dentro do tanque 1 obtemos sucesso??

Aqui vai:



Podemos ver que mesmo mudando a localização da resistência, o controle não consegue ter sucesso.

Apesar de poder parecer incompreensível, a explicação é que todas as paredes conduzem imenso, o que leva o sistema a tender para um equilíbrio térmico próximo da temperatura ambiente, sendo que grande parte da potência emitida pela resistência acaba por ser dissipada para o ambiente, cuja temperatura é inalterável. Para vencer o efeito do ambiente numa situação destas, a única solução possível é a resistência emitir mais potência:



Para se ter uma ideia, foi necessário aumentar o limite máximo de potência da resistência, de 18885 para 250000, e possivelmente não existe uma resistência à venda no mercado para conseguir emitir tal potência.

## **6ª simulação---Paredes de ferro em ambos os tanques, água no interior de ambos e uma resistência mais potente**

### **Considerações:**

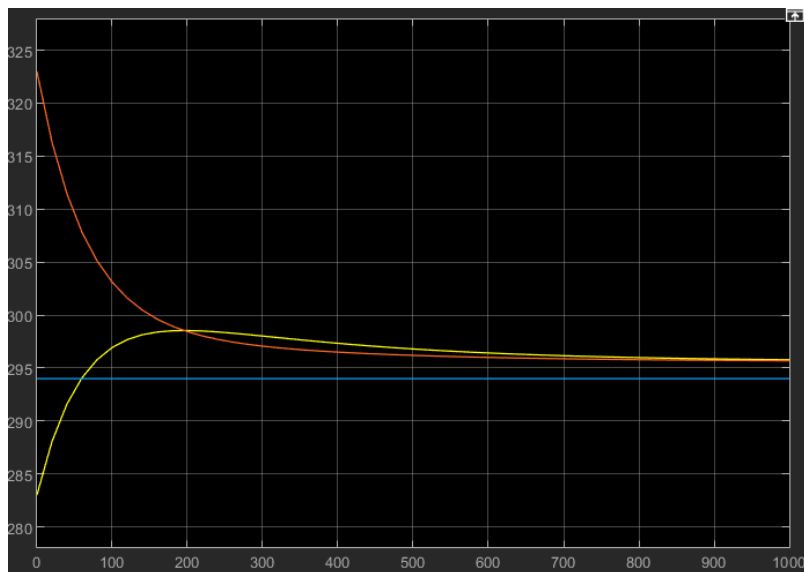
Da 5ª simulação para esta, alterou-se a potência calorífica emitida pela resistência, mantendo-se as restantes variáveis constantes.

- **Substância do Tanque 1:** água
- **Substância do Tanque 2:** água
- **Calor específico da substância do Tanque 1 ( $C_1$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Calor específico da substância do Tanque 2 ( $C_2$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Massa da substância do Tanque 1 ( $m_1$ ):** 1000 kg
- **Massa da substância do Tanque 2 ( $m_2$ ):** 1830 kg
- **Área de cada placa do Tanque 1 ( $A_1$ ):** 1 m<sup>2</sup>
- **Área de cada placa do Tanque 2 ( $A_2$ ):** 2 m<sup>2</sup>
- **Espessura da placa do Tanque 1 ( $L_1$ ):** 0.01 m
- **Espessura da placa do Tanque 2 ( $L_2$ ):** 0.01 m
- **Condutibilidade térmica do material da placa do Tanque 1 ( $k_{12}$ ):** ferro- 52 W/(m\*K)
- **Condutibilidade térmica do material da placa do Tanque 2 ( $k_{20}$ ):** ferro-52 W/(m\*K)
- **Temperatura inicial do tanque 1:** 10°C (283K)
- **Temperatura inicial do tanque 2:** 50°C (323K)
- **Temperatura ambiente:** 21°C (294K)
- **Calor emitido pela resistência :** 100000 J/s = 100 kJ/s (em malha aberta)

$$K_{12} = \frac{k_{12} * 6 * A_1}{L_1} = 31200 \text{ W/K}$$

$$K_{20} = \frac{k_{20} * 6 * A_2}{L_2} = 62400 \text{ W/K}$$

### **Malha aberta:**



**Amarelo:** Temperatura T1

**Vermelho:** Temperatura T2

**Azul:** Temperatura ambiente

**Escala do x:** segundos

**Escala do y:** Kelvin

#### **Análise da simulação:**

Face à simulação anterior, colocamos a resistência a fornecer mais calor (100000 J/s) e observamos que o equilíbrio térmico se deu em aproximadamente 22°C, ou seja, esta potência foi capaz de contrariar as perdas de calor para o ambiente e fazer a temperatura dos tanques 1 e 2 subirem para 22°C no seu estado de equilíbrio.

Com a análise desta simulação, da primeira e da quarta podemos chegar à conclusão de um aspecto bastante interessante, que é o facto de todas estas simulações atingirem um valor de equilíbrio 1°C acima da temperatura do ambiente. Porém esta simulação necessitou de 100 vezes mais potência na resistência para fazer o conjunto subir 1°C no seu ponto de equilíbrio. Na 1ª e na 4ª, o tanque 2 era feito de tijolo e como é um fraco condutor as perdas para o ambiente são reduzidas, e necessitamos de menos potência da resistência para fazer subir 1°C.

(Uma situação bastante comum no nosso dia a dia é quando pretendemos aquecer uma divisão da nossa casa com o uso de um aquecedor. Acontece que caso queiramos subir por exemplo 5°C face à temperatura inicial, e houver uma enorme dissipação para o exterior, a temperatura do quarto pouco irá variar quando o equilíbrio térmico se verificar, levando-nos a ter de aumentar a potência do aquecedor para atingirmos o nosso objetivo, gastando por sua vez mais luz e dinheiro. Por isso é que deve haver pouca dissipação.

Caso a dissipação fosse nula (o que nunca acontece) a temperatura, idealmente, tendia ao infinito.)

**Nota:** O efeito de aumentar a área das placas dos tanques, ou diminuir a sua espessura é equivalente a substituir o material por um mais condutor, por isso os efeitos são semelhantes àquilo que já analisamos, e por isso não vamos colocar essas simulações.

### **Malha fechada:**

Não se realizou pois já foi feito algo análogo acima, na simulação 5, sendo que a única condição inicial que foi alterada da simulação 5 para a 6 foi a potência da resistência.

### ***7ª simulação---Paredes de cimento (tanque 1) e tijolo (tanque 2), com água no interior de ambos, e com a massa no interior do tanque 2 aumentada***

#### **Considerações:**

Da 1ª simulação para esta, alterou-se a área de cada placa do tanque 2, bem como a massa da substância dentro deste tanque, mantendo-se as restantes variáveis constantes.

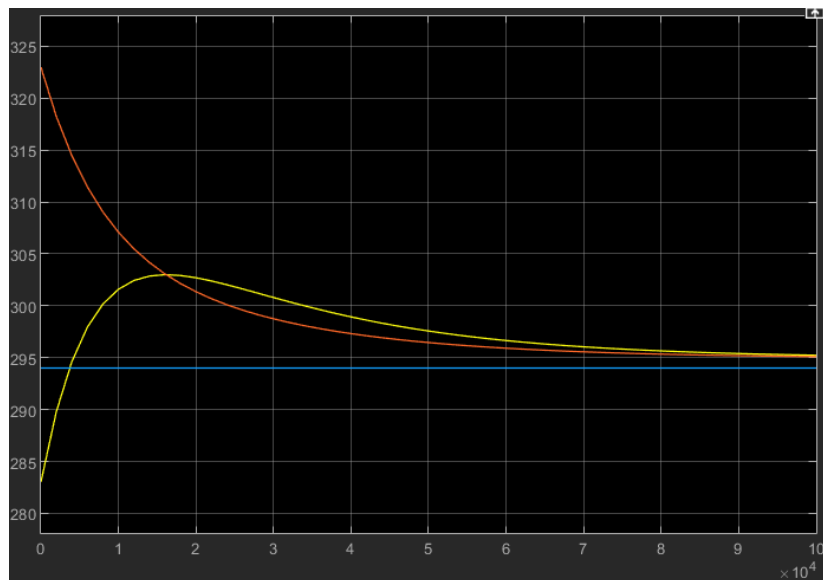
- **Substância do Tanque 1:** água
- **Substância do Tanque 2:** água
- **Calor específico da substância do Tanque 1 ( $C_1$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Calor específico da substância do Tanque 2 ( $C_2$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Massa da substância do Tanque 1 ( $m_1$ ):** 1000 kg
- **Massa da substância do Tanque 2 ( $m_2$ ):** 4196 kg
- **Área de cada placa do Tanque 1 ( $A_1$ ):** 1 m<sup>2</sup>
- **Área de cada placa do Tanque 2 ( $A_2$ ):** 3 m<sup>2</sup>
- **Espessura da placa do Tanque 1 ( $L_1$ ):** 0.01 m
- **Espessura da placa do Tanque 2 ( $L_2$ ):** 0.01 m
- **Condutibilidade térmica do material da placa do Tanque 1 ( $k_{12}$ ):** cimento- 0.7 W/(m\*K)
- **Condutibilidade térmica do material da placa do Tanque 2 ( $k_{20}$ ):** tijolo-0.6 W/(m\*K)
- **Temperatura inicial do tanque 1:** 10°C (283K)
- **Temperatura inicial do tanque 2:** 50°C (323K)
- **Temperatura ambiente:** 21°C (294K)
- **Calor emitido pela resistência :** 1000 J/s (em malha aberta)

$$K_{12} = \frac{k_{12} * 6 * A_1}{L_1} = 420 \text{ W/K}$$

$$K_{20} = \frac{k_{20} * 6 * A_2}{L_2} = 1080 \text{ W/K}$$



### Malha aberta:



**Amarelo:** Temperatura T1

**Vermelho:** Temperatura T2

**Azul:** Temperatura ambiente

**Escala do x:** segundos

**Escala do y:** Kelvin

“A **capacidade térmica (C)** é a grandeza que resulta da razão entre a quantidade de calor recebida por um corpo e a variação de temperatura. Ela ainda pode ser determinada pelo produto da massa do corpo pelo calor específico. Essa grandeza mostra o comportamento de um corpo ao receber calor, indicando se ele variará muito ou pouco a sua temperatura.”

#### **Análise da simulação:**

Em relação à primeira simulação, aumentamos significativamente a massa da substância do tanque 2, o que levou a uma necessidade de aumentar a área da placa do tanque e por sua vez a um aumento em K20. Esse aumento de massa de água corresponde a aumentar a capacidade térmica da substância, e como indica a definição acima, para uma mesma quantidade de calor fornecido, uma maior massa causa uma menor variação da temperatura.

Verificamos então que, nesta simulação, o declive do gráfico da temperatura do tanque 2 é menor que o da simulação 1, como era de esperar. Podemos ver que a implicação de termos de aumentar a área das placas do tanque 2, e consequentemente aumentar a condutância térmica da parede desse tanque, teve um efeito reduzido no sistema comparado com o efeito do aumento da massa.

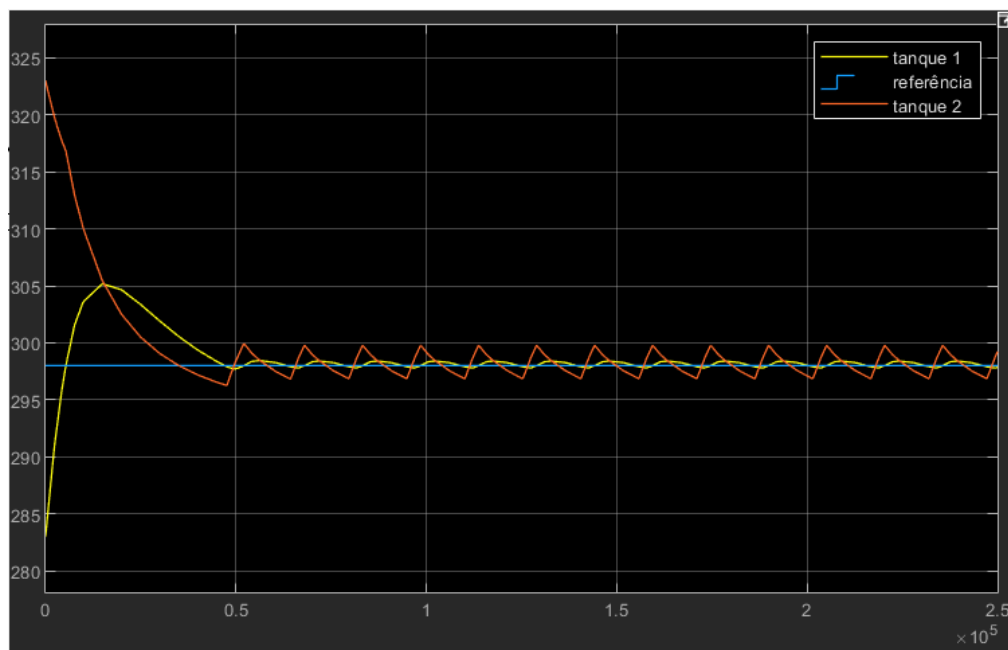
### **Malha fechada:**

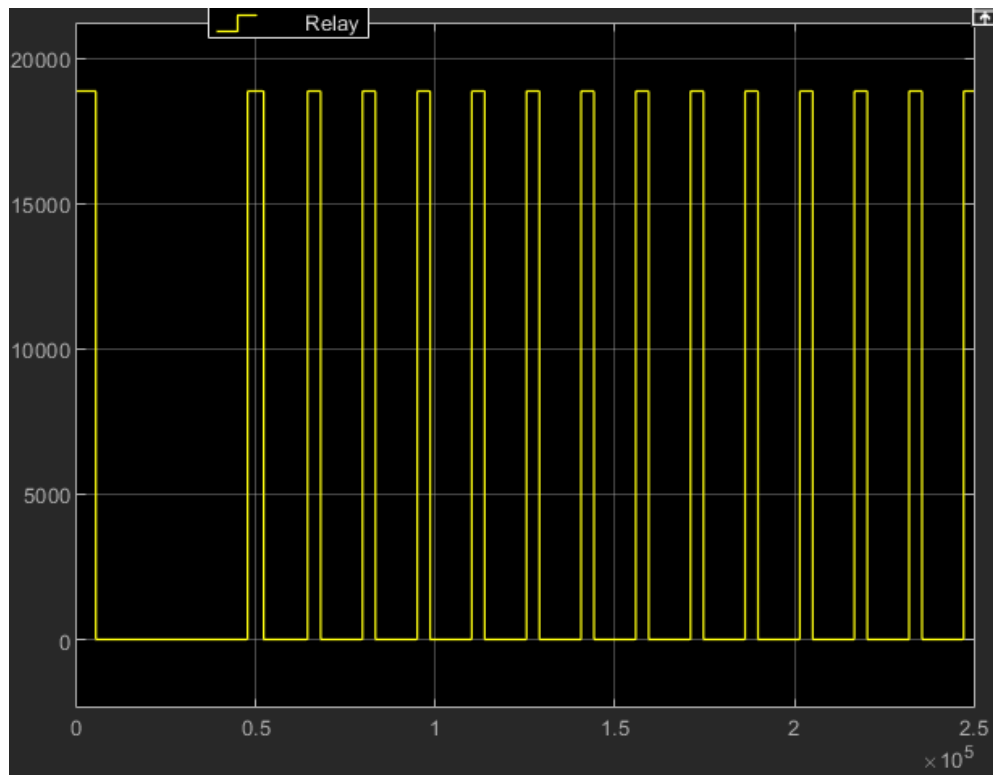
#### **Objetivo de controlo:**

- Colocar a temperatura do tanque 1 a 25°C.

Como vimos no controlo da “1ª simulação”, uma ótima forma de controlar a temperatura do tanque 1 quando as duas paredes são de baixa condutividade é utilizando um simples On-Off, porém agora temos uma maior massa de água no tanque 2, o que provocou um aumento da sua capacidade calorífica, e o efeito foi o seguinte:

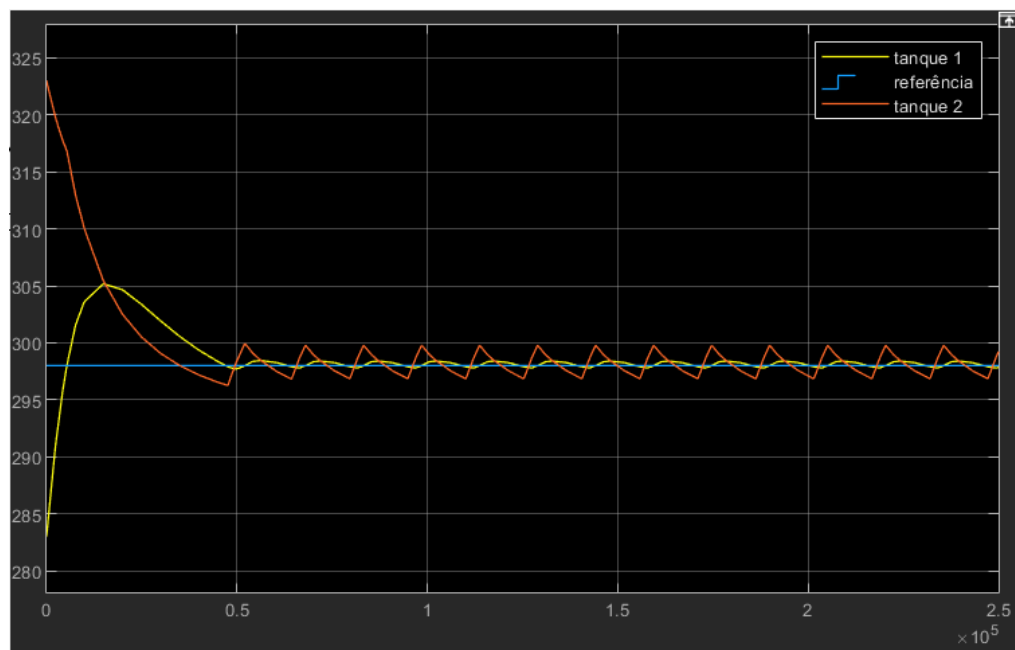
**Nota:** o On-Off utilizado tem os mesmos parâmetros que na simulação 1.



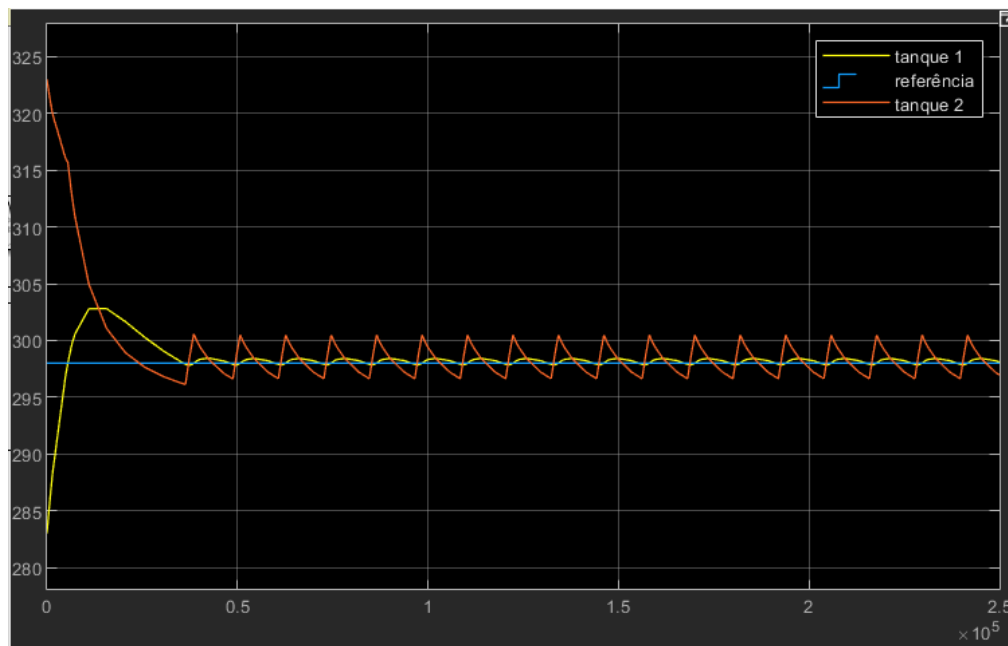


Podemos ver que o controlo foi realizado com a mesma facilidade.

Os contraste que existe é visível nas duas imagens seguintes:  
(7<sup>o</sup> simulação)



(1º simulação)



Podemos ver que na simulação 1 o controle é feito mais rapidamente. Isso deve-se ao facto de, nessa simulação, a substância do tanque 2 ter menos capacidade calorífica, e por isso variar mais rápido a sua temperatura, o que facilitou o controle por parte do PID, já que, como o tanque 2 se aproxima mais rapidamente da temperatura de referência, T1 não aumenta tanto antes de também se começar a aproximar dessa referência, no caso da simulação 1.

### ***8ª simulação---Paredes de cimento (tanque 1) e tijolo (tanque 2), com água no interior do tanque 1 e gasolina no interior do tanque 2***

#### **Considerações:**

Da 1ª simulação para esta, alterou-se a substância do tanque 2, bem como a massa da substância dentro deste tanque, mantendo-se as restantes variáveis constantes.

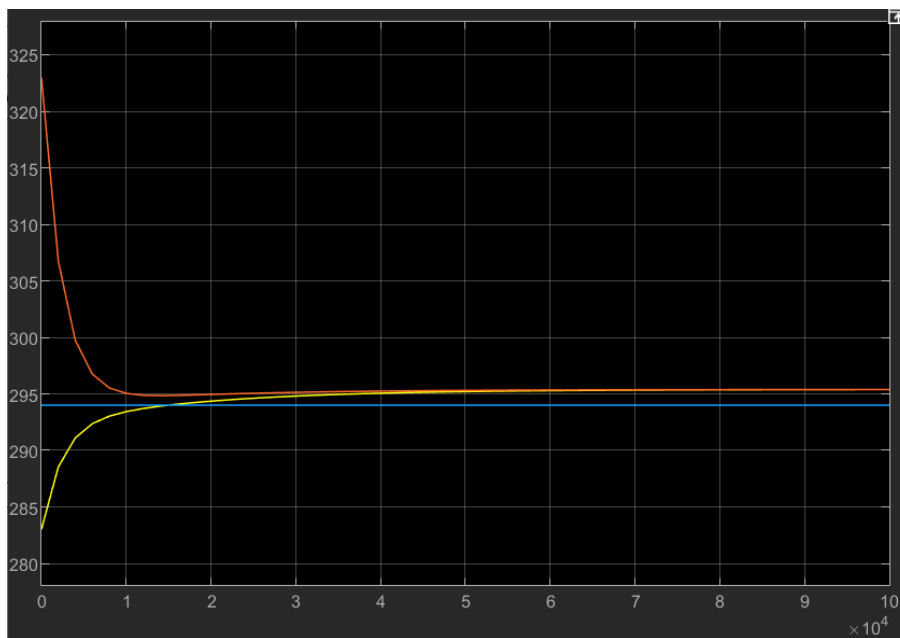
- **Substância do Tanque 1:** água
- **Substância do Tanque 2:** gasolina
- **Calor específico da substância do Tanque 1 ( $C_1$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Calor específico da substância do Tanque 2 ( $C_2$ ):** 2220 J/(kg\*K)
- **Massa da substância do Tanque 1 ( $m_1$ ):** 1000 kg
- **Massa da substância do Tanque 2 ( $m_2$ ):** 1371 kg
- **Densidade gasolina:** 750 kg/m<sup>3</sup> (varia entre 715 e 780)
- **Área de cada placa do Tanque 1 ( $A_1$ ):** 1 m<sup>2</sup>

- Área de cada placa do Tanque 2 ( $A_2$ ): 2 m<sup>2</sup>
- Espessura da placa do Tanque 1 ( $L_1$ ): 0.01 m
- Espessura da placa do Tanque 2 ( $L_2$ ): 0.01 m
- Condutibilidade térmica do material da placa do Tanque 1 ( $k_{12}$ ): cimento- 0.7 W/(m\*K)
- Condutibilidade térmica do material da placa do Tanque 2 ( $k_{20}$ ) : tijolo-0.6 W/(m\*K)
- Temperatura inicial do tanque 1: 10°C (283K)
- Temperatura inicial do tanque 2: 50°C (323K)
- Temperatura ambiente: 21°C (294K)
- Calor emitido pela resistência : 1000 J/s (em malha aberta)

$$K_{12} = \frac{k_{12} * 6 * A_1}{L_1} = 420 \text{ W/K}$$

$$K_{20} = \frac{k_{20} * 6 * A_2}{L_2} = 720 \text{ W/K}$$

### Malha aberta:



**Amarelo:** Temperatura T1

**Vermelho:** Temperatura T2

**Azul:** Temperatura ambiente

**Escala do x:** segundos

**Escala do y:** Kelvin

### **Análise da simulação:**

Em relação à simulação 1, variou-se a substância do tanque 2 para gasolina, sendo que esta tem um calor específico menor que a da água, e também uma densidade menor, o que nos obrigou a calcular a massa de gasolina necessária para encher o volume do tanque 2, de forma a obtermos resultados mais realistas.

Uma vez que o calor específico da substância do tanque 2 e a massa da mesma necessária para encher esse tanque são menores nesta simulação do que na simulação 1, então a capacidade térmica da substância no tanque 2 diminui, ou seja, a temperatura dessa substância varia mais para uma dada quantidade de calor que lhe é fornecida. Isto pode-se ver analisando o gráfico desta simulação, na qual a temperatura do tanque 2 tem uma variação mais acentuada face à da 1ª simulação.

**Nota:**  $C=m \cdot c$ , onde C é a capacidade térmica, c é o calor específico e m é a massa da substância.

### **Malha fechada:**

#### **Objetivo de controlo:**

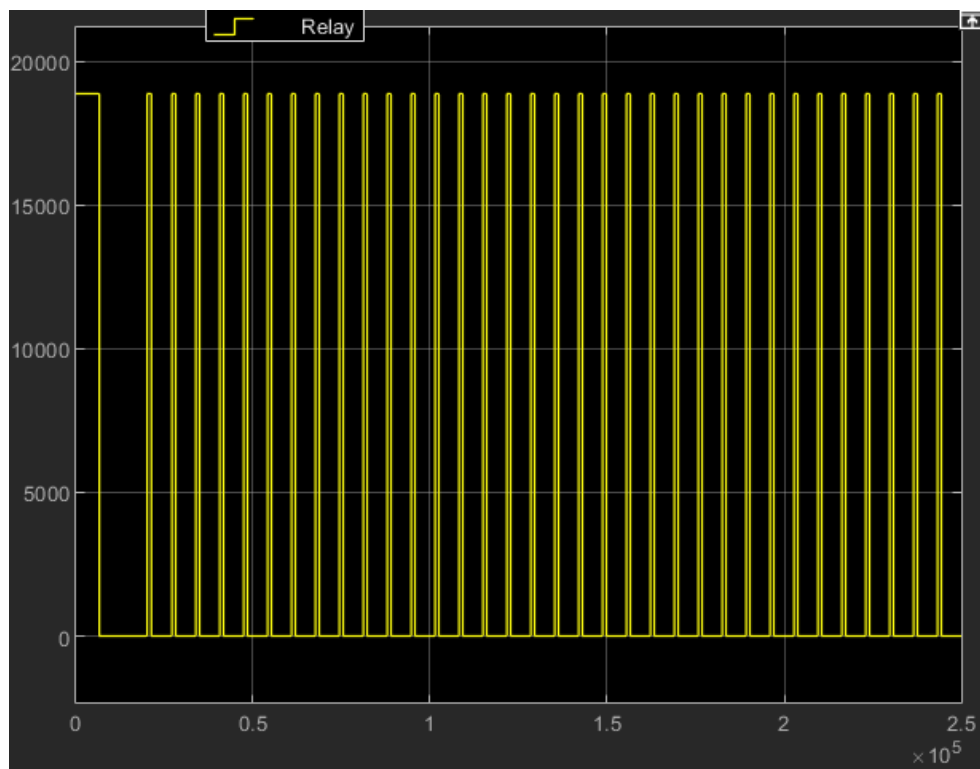
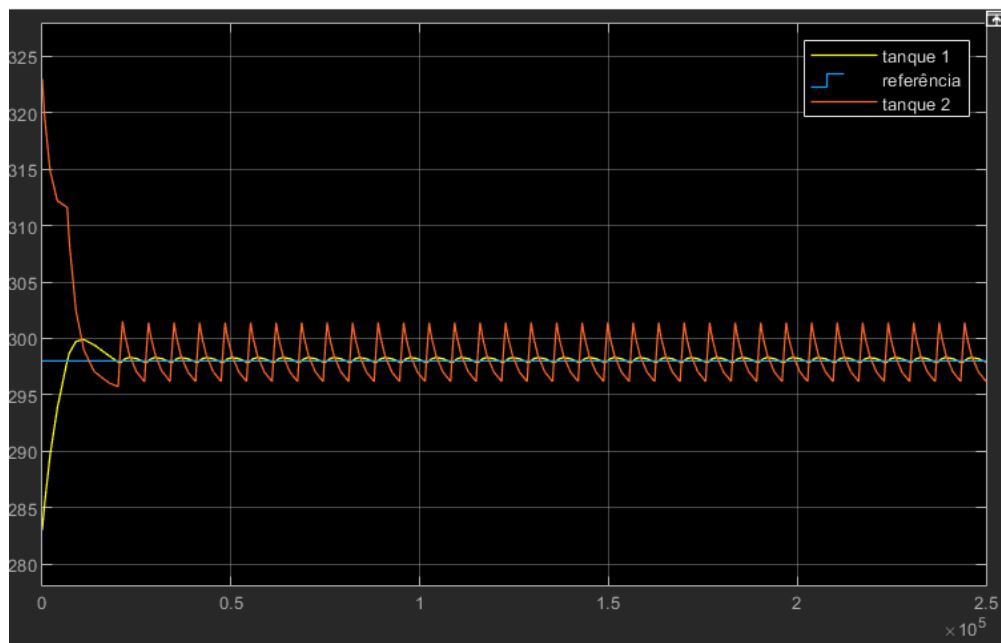
- Colocar a temperatura do tanque 1 a 25°C.

Neste caso, em relação à 1ª simulação, apenas se mudou a substância do tanque 2 para gasolina, como também a massa de substância no interior deste.

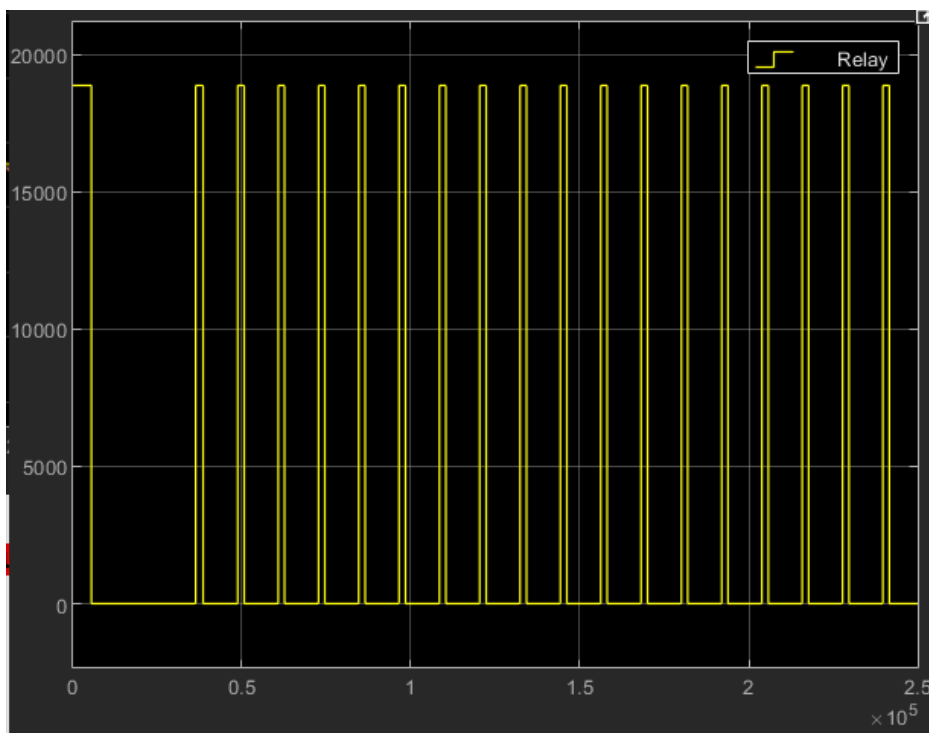
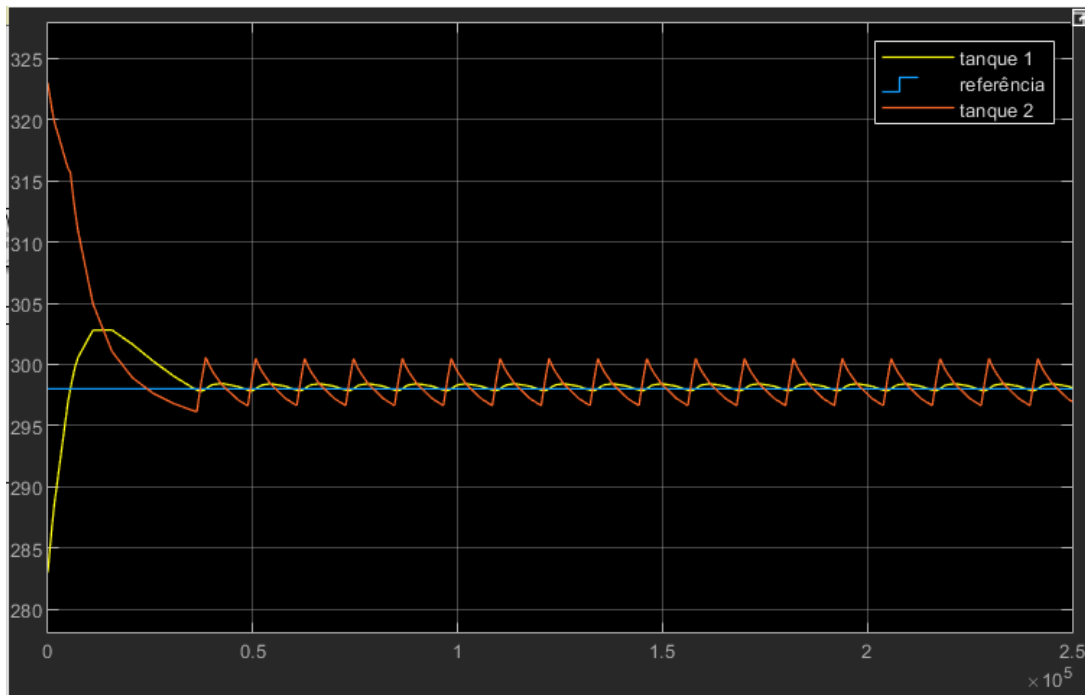
Como essas mudanças diminuem a capacidade calorífica, então o tanque 2 fica mais propenso a mudanças de temperatura (a sua temperatura fica mais sensível a variações de energia).

O resultado foi o seguinte:

**Nota:** o On-Off é o mesmo que na 1ª simulação.



Se compararmos com o da 1ª simulação:



O que notamos de diferente é uma variação mais rápida da temperatura do tanque 2 (devido à menor capacidade calorífica) e um maior esforço por parte do On-Off do sistema da 8ª simulação.

Com estas duas últimas simulações, podemos ver que o comportamento do sistema também pode ser alterado com mudanças da capacidade calorífica de um dos meios, porém esta não é tão crucial como o efeito da perturbação do ambiente.



**9ª simulação---Paredes de cimento (tanque 1) e tijolo (tanque 2), com água no interior dos tanques e temperatura inicial do tanque 2 menor relativamente às simulações anteriores.**

**Considerações:**

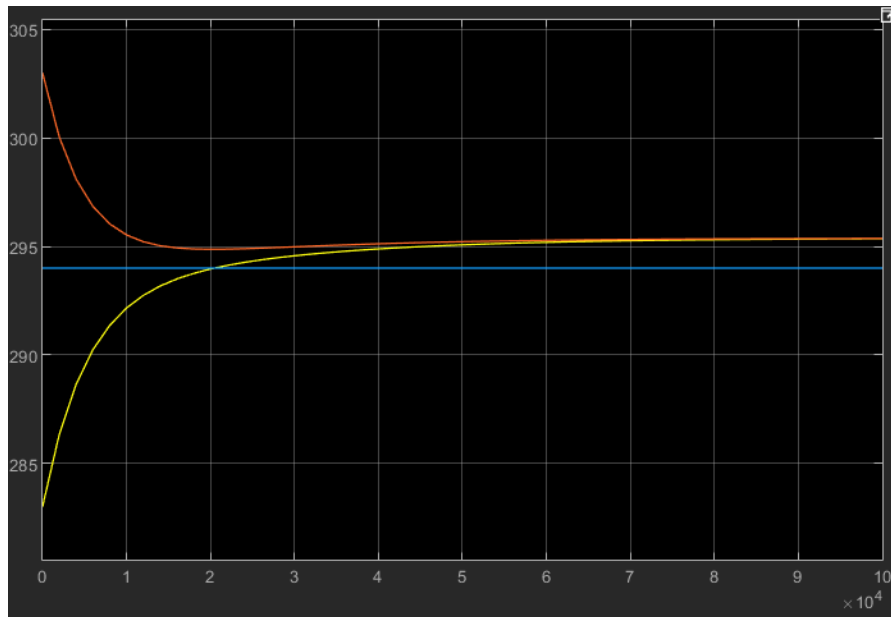
Da 1ª simulação para esta, alterou-se a temperatura inicial do tanque 2, mantendo-se as restantes variáveis constantes.

- **Substância do Tanque 1:** água
- **Substância do Tanque 2:** água
- **Calor específico da substância do Tanque 1 ( $C_1$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Calor específico da substância do Tanque 2 ( $C_2$ ):** 4180 J/(kg\*K)
- **Massa da substância do Tanque 1 ( $m_1$ ):** 1000 kg
- **Massa da substância do Tanque 2 ( $m_2$ ):** 1830 kg
- **Área de cada placa do Tanque 1 ( $A_1$ ):** 1 m<sup>2</sup>
- **Área de cada placa do Tanque 2 ( $A_2$ ):** 2 m<sup>2</sup>
- **Espessura da placa do Tanque 1 ( $L_1$ ):** 0.01 m
- **Espessura da placa do Tanque 2 ( $L_2$ ):** 0.01 m
- **Condutibilidade térmica do material da placa do Tanque 1 ( $k_{12}$ ):** cimento- 0.7 W/(m\*K)
- **Condutibilidade térmica do material da placa do Tanque 2 ( $k_{20}$ ):** tijolo-0.6 W/(m\*K)
- **Temperatura inicial do tanque 1:** 10°C (283K)
- **Temperatura inicial do tanque 2:** 30°C (303K)
- **Temperatura ambiente:** 21°C (294K)
- **Calor emitido pela resistência :** 1000 J/s (em malha aberta)

$$K_{12} = \frac{k_{12} * 6 * A_1}{L_1} = 420 \text{ W/K}$$

$$K_{20} = \frac{k_{20} * 6 * A_2}{L_2} = 720 \text{ W/K}$$

**Malha aberta:**



**Amarelo:** Temperatura T1

**Vermelho:** Temperatura T2

**Azul:** Temperatura ambiente

**Escala do x:** segundos

**Escala do y:** Kelvin

### **Análise da simulação:**

Face à 1ª simulação, apenas se alterou a temperatura inicial do tanque 2 para 30°C. Isso proporcionou uma variação mais lenta da temperatura do tanque 1 e do tanque 2 devido à menor diferença de temperatura inicial (menor gradiente térmico entre os dois tanques) entre ambos.

### **Malha fechada:**

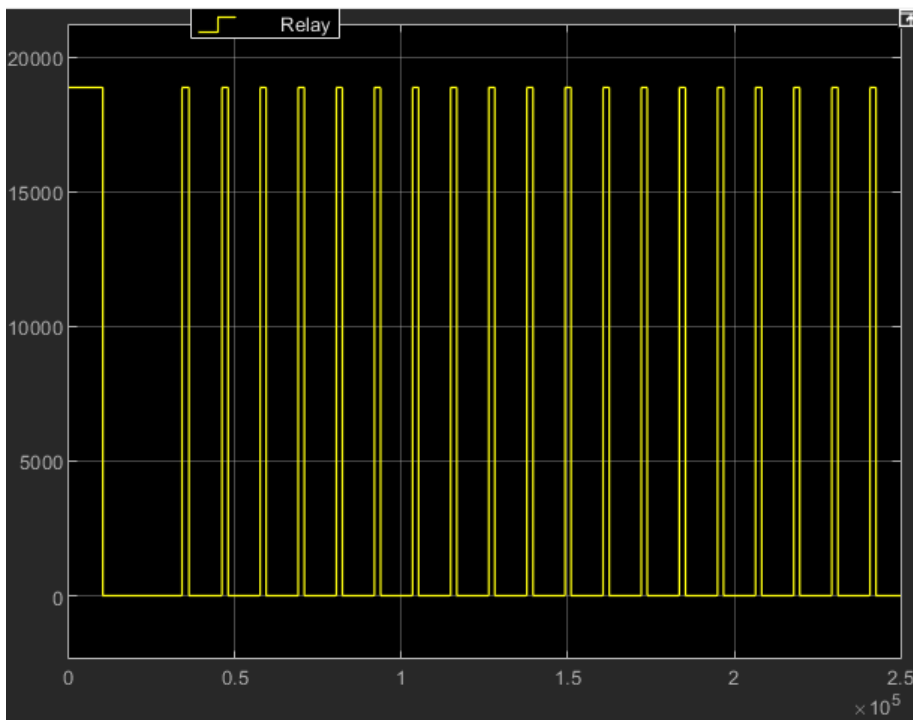
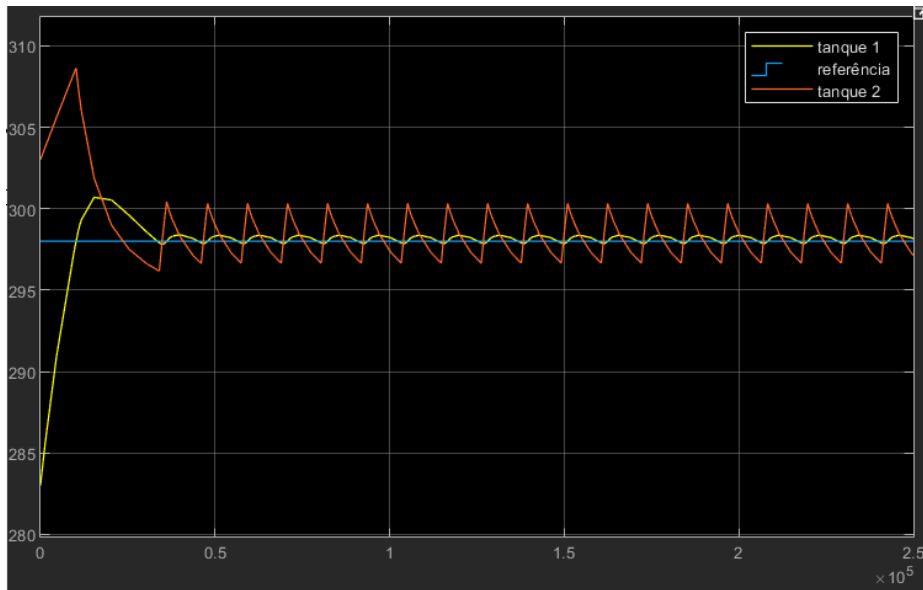
#### **Objetivo de controlo:**

- Colocar a temperatura do tanque 1 a 25°C.

Agora iremos analisar o efeito que mudanças de temperatura inicial do tanque 2 têm no controlo.

Nota: o On-Off utilizando é o mesmo que na 1ª simulação.

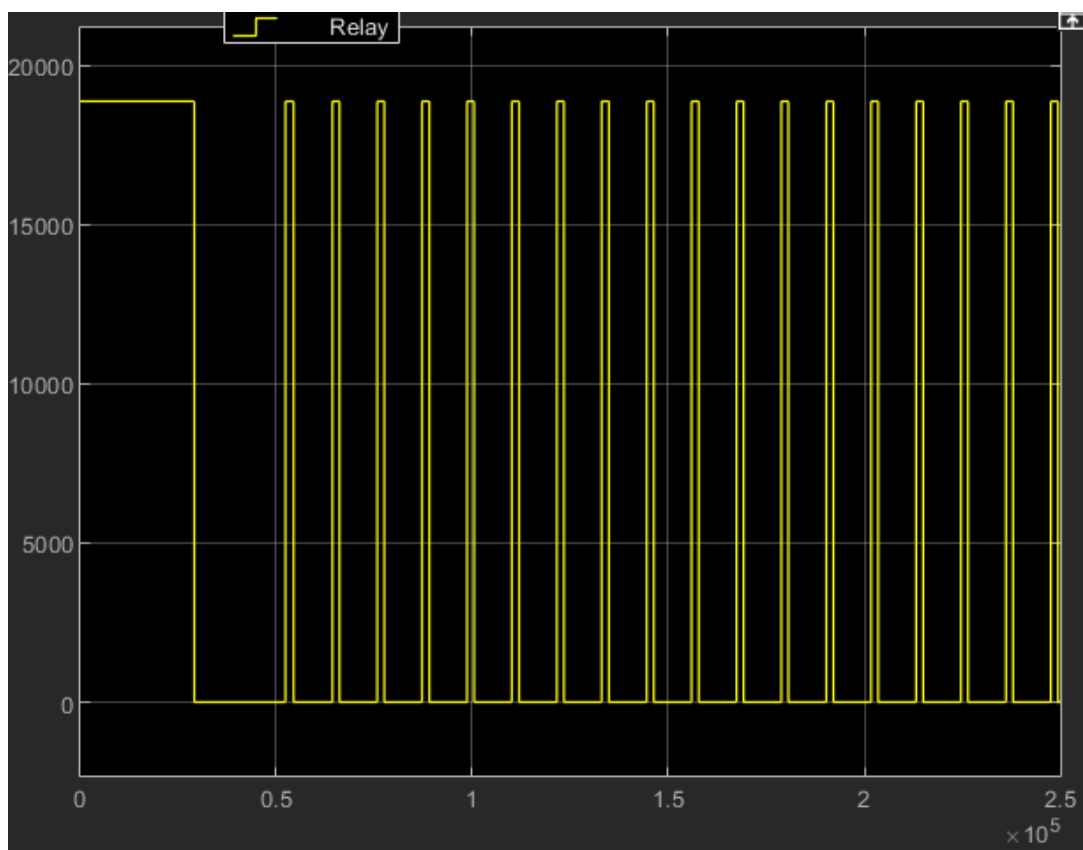
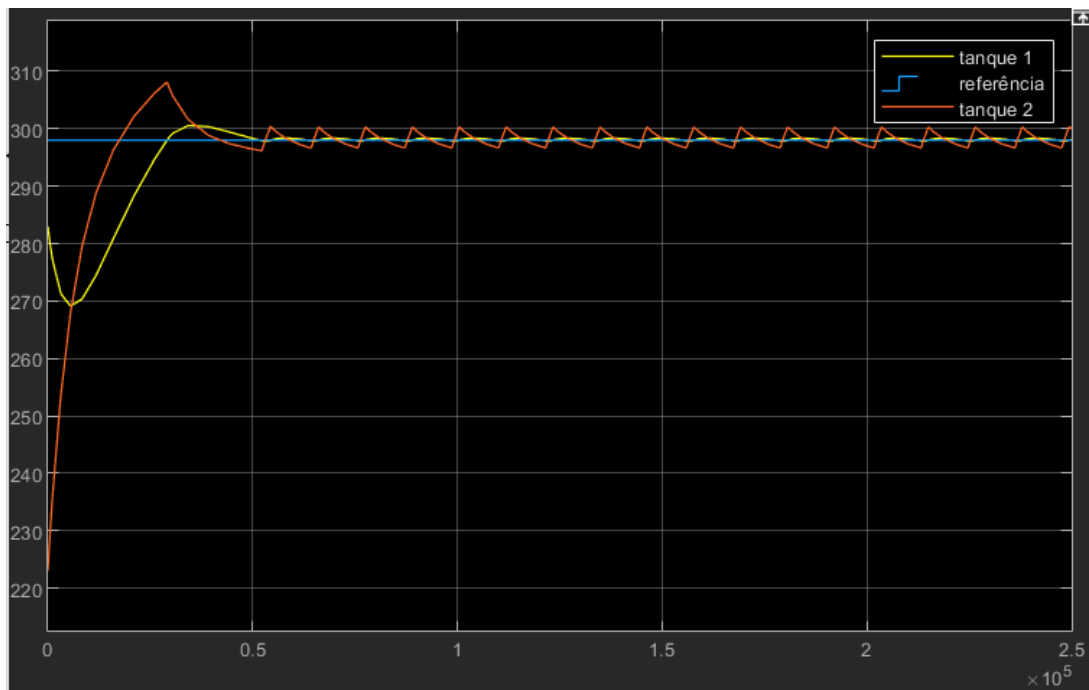
Para temperatura inicial igual a 30°:



Podemos ver que o controlo do sistema foi feito com bastante êxito, tal como o controlo da 1ª simulação.

Mas será que se baixarmos muito a temperatura inicial do tanque 2 o controlo fica invalidado??

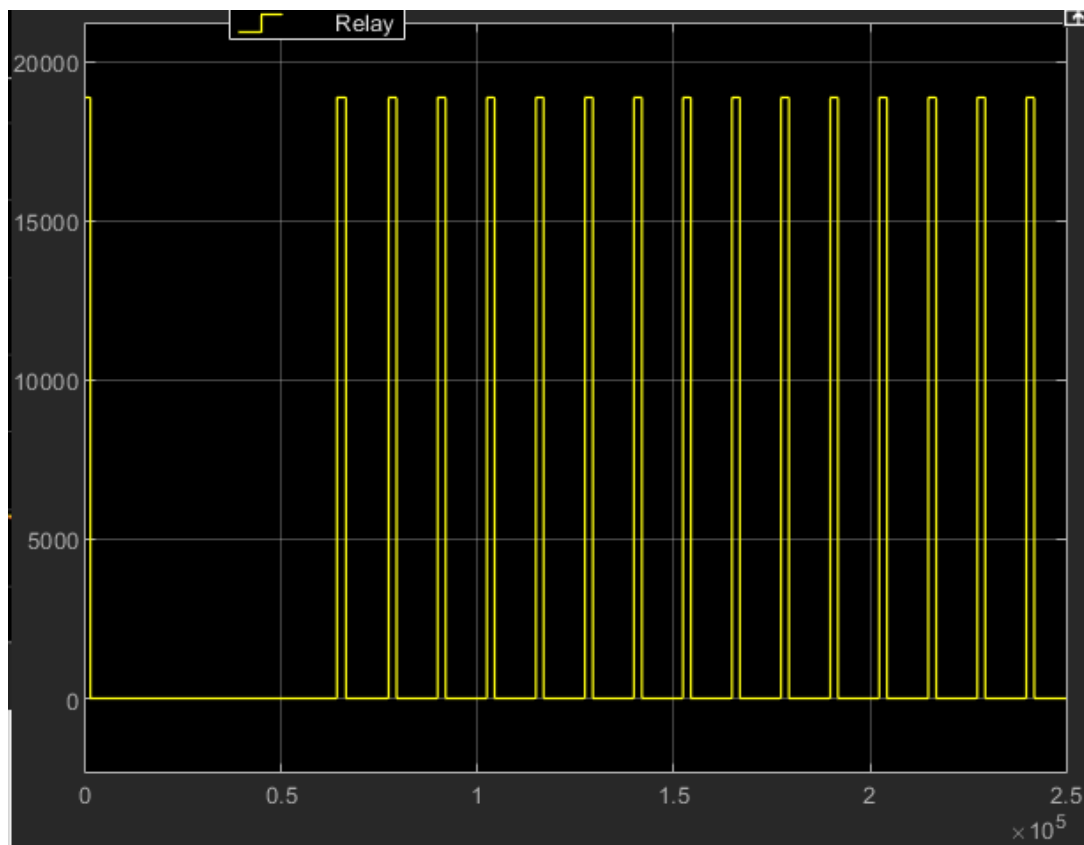
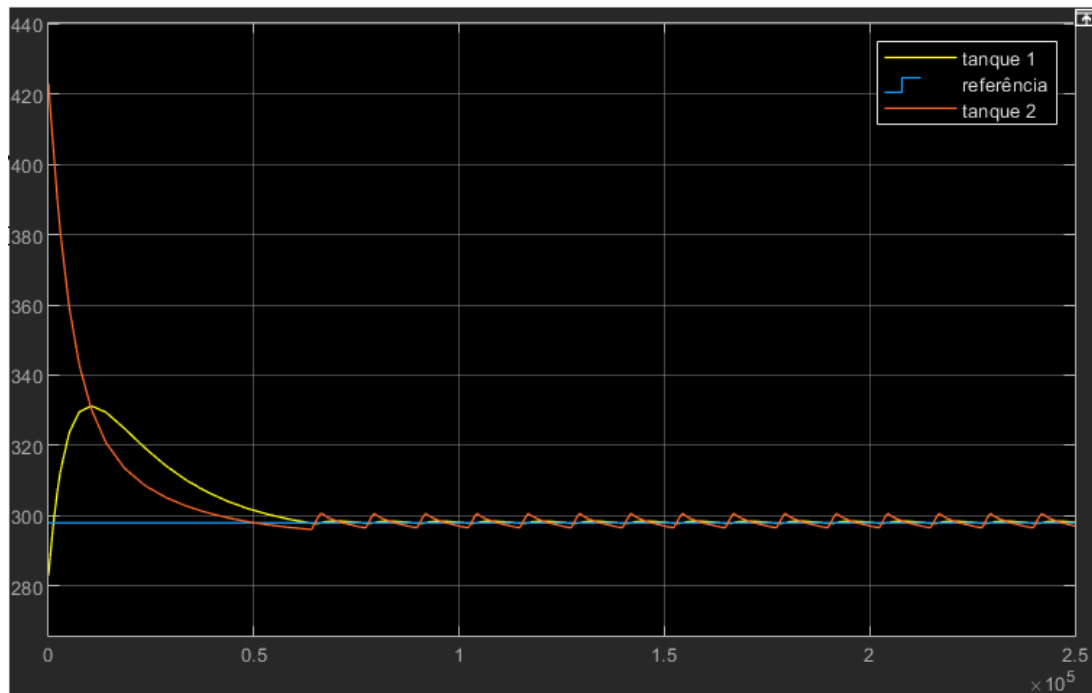
Veremos para uma temperatura inicial de  $-50^{\circ}\text{C}$ :



Como podemos ver apenas foi necessário o On-Off estar mais tempo a On no início, e a temperatura do tanque 1 foi controlada com a mesma facilidade.

E se subirmos muito?

Veremos para uma temperatura inicial de 150°C:



Apenas foi necessário que o On-Off estivesse mais tempo desligado no início e o controle foi feito facilmente. Mais uma vez, devido às grandes dimensões do ambiente, foi possível que o tanque 2 dissipasse para este o calor necessário para a sua temperatura se aproximar da referência, e permitir assim que T1 se aproximasse da referência.

Logo, se mantivermos os outros parâmetros constantes, uma alteração na temperatura inicial do tanque 2 não vai impedir o controle, apenas pode vir a atrasá-lo ou adiantá-lo, pois facilmente ele aquece ou deixa passar calor para o ambiente, permitindo um controle fácil.

## **O que podemos concluir com todas estas simulações em malha fechada?**

Conclui-se que o controle está bastante dependente da constituição do material das paredes e também da temperatura ambiente, como também de outros fatores, tais como a temperatura inicial dos tanques e a capacidade calorífica dos materiais que se encontram no seu interior.

Muitas vezes é necessário inovar quando o material das paredes muda ou o valor da temperatura ambiente muda, como foi feito ao utilizar um controlador On-Off, mudar a localização da resistência, colocar um aparelho que também possa arrefecer em lugar da resistência, ou colocar uma resistência que tenha uma potência maior.

Ou seja, não é possível utilizar um controle universal que funcione adequadamente para todos os casos, é necessário implementar um controle adequado conforme a situação.

A modelização matemática do sistema é, sem dúvida, de grande importância, para que seja possível prever o comportamento do sistema quando lhe é aplicado um determinado tipo de controle, e assim possibilitar a implementação de sistemas de controle reais.

Com estas simulações e a sua respetiva análise adquirimos uma maior compreensão acerca de como efetuar o controle de sistemas térmicos com diversas condições iniciais.

