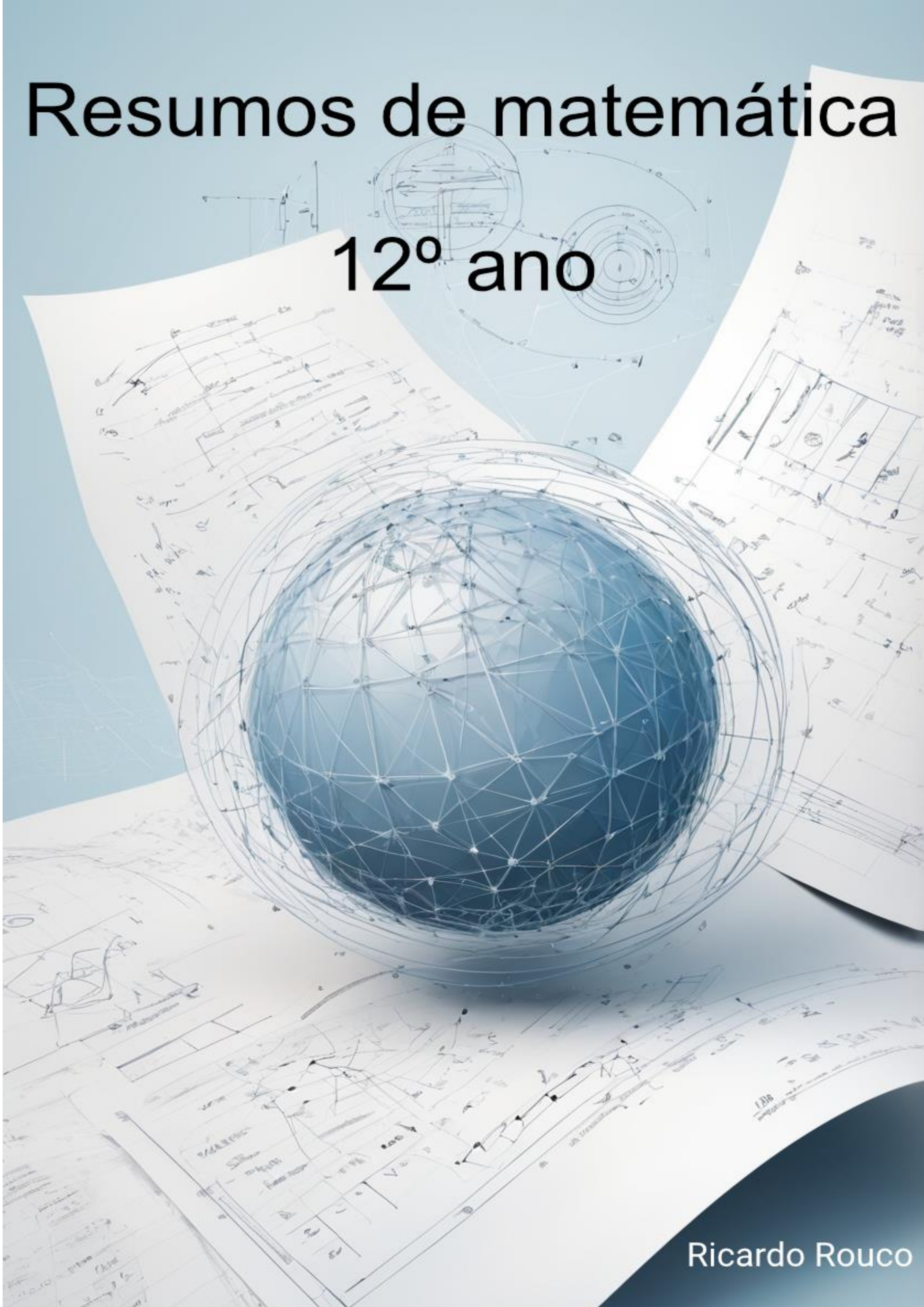
Resumos de matemática

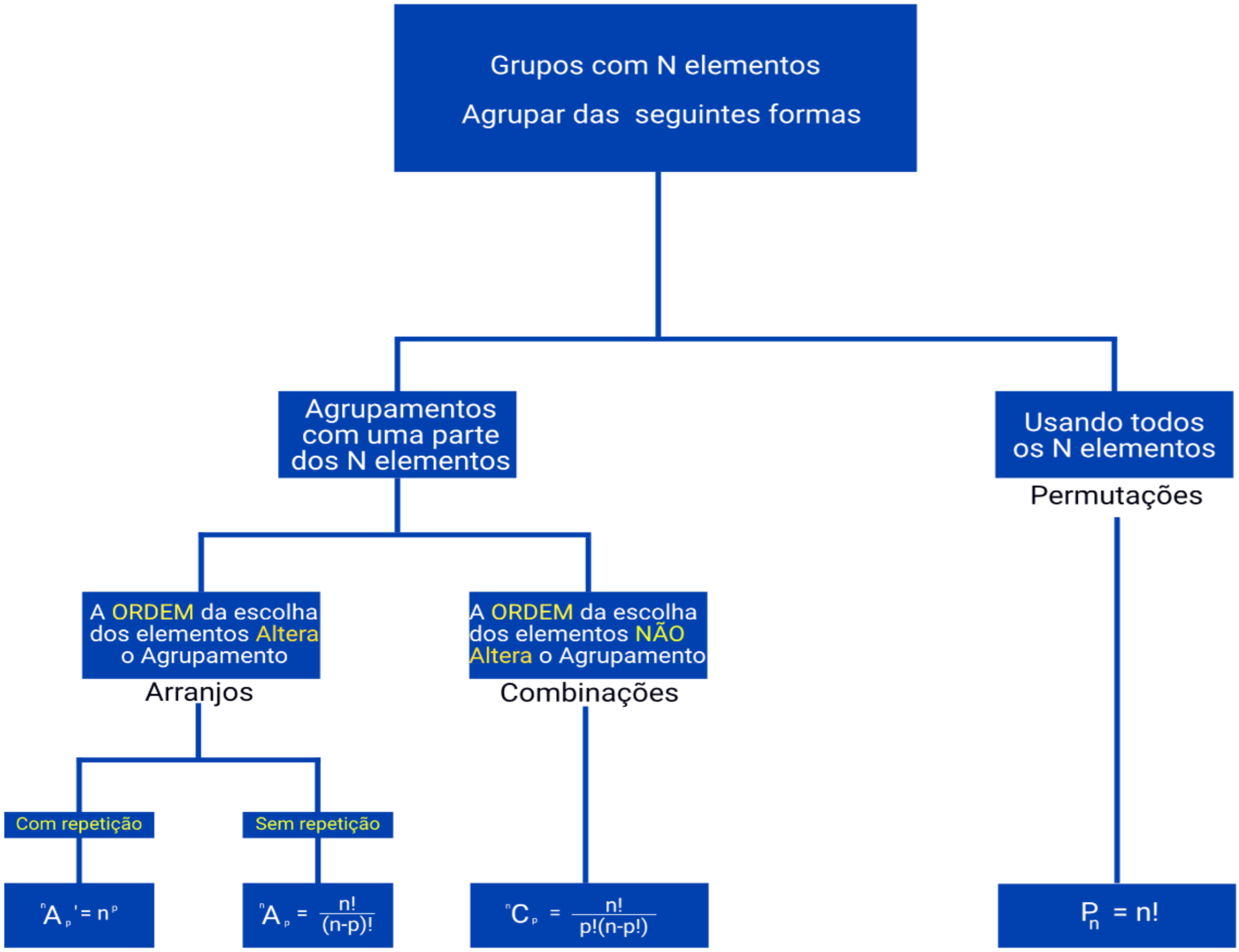
12º ano



Ricardo Rouco

Conteúdo

Análise Combinatória



Triângulo de pascal

Linha 0 $\quad C\frac{0}{0}$

Linha 1 $\quad C\frac{1}{0} \quad C\frac{1}{1}$

Linha 1 $\quad C\frac{2}{0} \quad C\frac{2}{1} \quad C\frac{2}{2}$

Propriedades do triângulo de Pascal

- $C_0^n = C_n^n = 1$ $\qquad$ n ∈ ℕ0
- $C_p^n = C_{n-p}^n$ $\qquad$ n, p ∈ ℕ0 e p ≤ n
- $C_p^n + C_{n+p}^n = C_{p+1}^{n+1}$ $\qquad$ n, p ∈ ℕ0 e p ≤ n
- $C_0^n + C_1^n + C_2^n + \dots + C_n^n = 2^n$ $\qquad$ n ∈ ℕ0

Binómio de Newton

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$$

$(a+b)^n = C_0^n\, a^n + C_1^n\, a^{n-1} b^2 + \dots + C_{n-1}^n\, a\, b^{n-1}$, $\qquad$ n ∈ $\mathbb{N}_0$

O termo de ordem p+1

$T_{p+1}^n = C_p^n\, a^{n-p} b^p$, $\qquad$ 0 ≤ p ≤ n

Probabilidades

Elemento Neutro

- $A \cap \Omega = A$
- $A \cup \emptyset = A$

Elemento Absorvente

- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cup \Omega = \Omega$

Tabela de Propriedades

Propriedade	Intersecção	União
Comutativa	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Associativa	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	

Acontecimentos B ⊂ C

$$B \subset C \Rightarrow \begin{cases} \overline{B} \cap \overline{C} = \overline{C} \\ \overline{B} \cup \overline{C} = \overline{B} \\ B \cap C = B \\ B \cup C = C \end{cases}$$

Teorema da probabilidade

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

As três formulas mais usadas

- $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Leis de Morgan

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Acontecimentos contrários

$P(A) = 1 - P(\overline{A})$

Acontecimentos disjuntos

$P(A \cap B) = 0$

Acontecimentos disjuntos

$P(A \cap B) = P(A)\, x\, P(B) \Rightarrow P\,(A \mid B) = P(A)$

Sucessões

Uma sucessão u de números reais é uma função real que vai de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{R}$.

Domínio

$$\boldsymbol{u}: \mathbb{N} - - - \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\boldsymbol{u}: n - - - \rightarrow f(n)$$

Contradomínio da sucessão de u_n é o conjunto $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$

Definição do limite finito de uma sucessão

$\lim u_n = a \in \mathbb{R}$ $(u_n \rightarrow a)$ se, para todo o número real δ positivo existir uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall_n \in \mathbb{N}, \mathrm{n} \leq \mathrm{p} \Longrightarrow |u_n - a| < \delta$$

NÚMERO DE NEPER

Neper é um número irracional e é representado por e ($\approx 2{,}7$)

Limites aplicáveis

$$Lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$k \in \mathbb{R} \text{ e } u_n \rightarrow \pm\infty$$

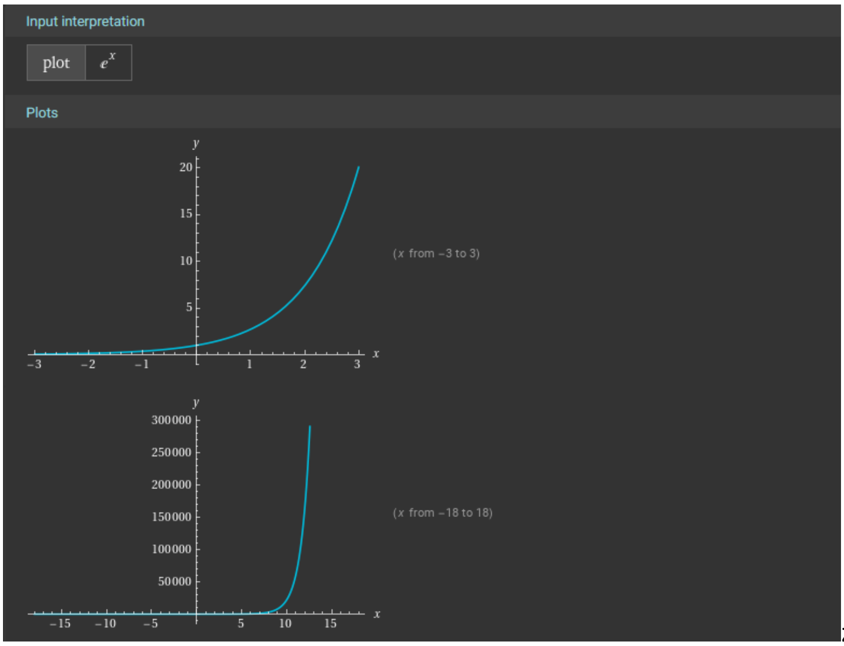
$$Lim(1+\frac{k}{u})^u = e^k$$

Exemplos para aplicar

- $\lim\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n+2} = \lim\left(1+\frac{3}{n}\right)^n x \lim\left(1+\frac{3}{n}\right)^2 = e^3\, x\, 1 = e^3$

- $\lim\,(1+\frac{1}{n})^{3n} = \lim\,[\,(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n)]^3 = (e^{-1})^3 = e^{-3}$

FUNÇÃO EXPONENCIAL



z

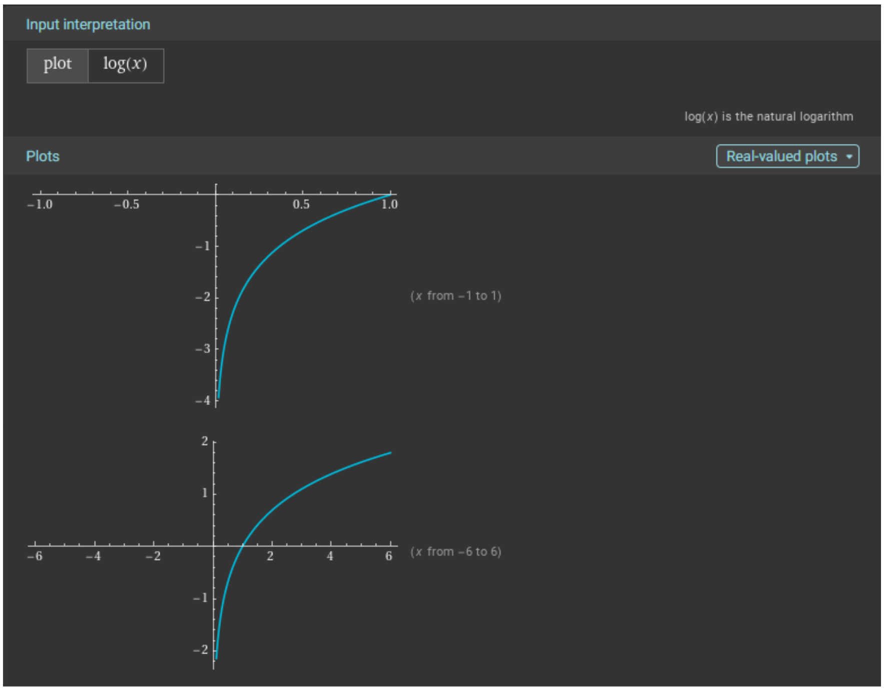
Propriedades da função exponencial (k >1)

- $k^x > 0 \, , \; \forall \, x \, \in \, \mathbb{R}$
- $k^x \, < \, k^y \, \Leftrightarrow x < y$
- $k^x \, = \, k^y \, \Leftrightarrow x = y$
- $k^x \, \times \, k^y \, \Leftrightarrow \, k^{x+y}$
- $\frac{k^x}{k^y} = \, k^{x-y}$
- $(k^x)^y = k^{x \times y}$
- $k^{-x} = \frac{1}{k^x}$

Relação entre Função exponencial e logarítmica

$$k^y = x \; \Leftrightarrow \; y = \; \log_k x$$

FUNÇÃO LOGARÍTMICA



Propriedades da função logarítmica (k >1)

- $\log_k k^x = x$
- $k^{\log_k x} = x$
- $\log_k k = 1$
- $\log_k 1 = 0$
- $\log_k (x \times y) = \log_k x + y$
- $\log_k (\frac{x}{y}) = \log_k x - y$
- $\log_k x^p = p \log_k x$

Relação entre Função exponencial e logarítmica

$$k^y = x \Leftrightarrow y = \log_k x$$

Teoremas Importantes

Teorema de Bolzano-Cauchy

Seja f uma função real de variável real contínua num intervalo $[a, b] \subset D_f$

Então para qualquer $k \in \mathbb{R}$ do intervalo aberto de extremos $f(a)\ e\ f(b)$, existe pelo menos um $c \in\ ]a, b[$, tal que $f(c) = k$.

Compreensão:

- Se uma função contínua assume dois valores distintos em um intervalo fechado, então ela deve assumir todos os valores entre esses dois valores no mesmo intervalo.
- A função "cruza" o eixo x em algum ponto do intervalo aberto entre os pontos onde ela assume os dois valores distintos.

Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy

Se f é contínua num intervalo $[a, b] \subset D_f$ e se $f(a) \rightarrowbar f(b) < 0$, então existe pelo menos um c ∈]a, b[, tal que $f(c) = 0$.

Teorema de Weiertrass

Uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua num intervalo $[a, b] \subset D_f$ admite um máximo e um mínimo absolutos em $[a, b]$.

Compreensão:

- Toda função contínua em um intervalo fechado possui um ponto onde ela atinge seu maior valor (máximo) e outro ponto onde ela atinge seu menor valor (mínimo).
- Esses valores máximo e mínimo não precisam necessariamente ocorrer nas extremidades do intervalo.

Teorema de Lagrange

Dados uma função $f\,:\, D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e um intervalo $[a, b] \subset D_f$

(a < b) tais que:

- f é contínua em $[a, b]$;

- f é diferenciável em $]a, b[$.

Então existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Compreensão:

- A taxa média de variação da função $f(x)$ no intervalo fechado $[a, b]$ é igual à derivada da função em um ponto c dentro do intervalo aberto (a, b).
- A derivada da função em um ponto dentro do intervalo nos fornece a inclinação da reta secante que passa pelas extremidades do intervalo, e essa inclinação é igual à taxa média de variação da função no intervalo.

Limites e Indeterminações Numéricas

Tipos de indeterminações

Funções Polinomiais

- $\infty - \infty$ -> Por em evidencia o termo de maior grau

Funções Racionais

- $\frac{0}{0}$ -> Fatorizar o numerador e denominador

- $\frac{\infty}{\infty}$ -> Fazer o limite do termo de maior grau

Funções irracionais

- $\infty - \infty$ -> Multiplicar e dividir pelo conjugado e usar o caso notável
- $\frac{\infty}{\infty}$ -> Pôr em evidência x^2 dentro da raiz e usar $\sqrt{x^2}$ = |x|

- $\frac{0}{0}$ -> Multiplicar e dividir pelo conjugado e usar o caso notável

Funções exponenciais e logarítmicas (Usar os limites notáveis)

- $\lim_{x \to 0} \frac{e-1}{x} = 1$

- $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$

- $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Funções trigonométricas (Usar os limites notáveis)

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Assíntotas

Assíntotas Verticais

A reta x = k é assíntota vertical da função f(x) se e só se:

- $\lim_{x \to k^-} f(x) = \pm\infty$
- $\lim_{x \to k^+} f(x) = \pm\infty$

Assíntotas Horizontais

A reta $y = b$ $(b \in \mathbb{R}$ e $b \neq \infty)$é assíntota horizontal da função f(x) se e só se:

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$

Assíntotas Não Verticais

A reta $\mathrm{y} = \mathrm{mx} + \mathrm{b}\ (\mathrm{m}, \mathrm{b} \in \mathbb{R})$ é assíntota oblíqua da função f(x) se e só se $m, b \neq \infty\ e\ m \neq 0$

onde:

- $$\begin{cases} m = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ b = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - mx \end{cases}$$

- $$\begin{cases} m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ b = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - mx \end{cases}$$

Se m = 0 e b ≠ ∞ então a reta y = b é assíntota da função f(x).

Continuidade de uma função

Continuidade de uma função num ponto

Uma função f definida no intervalo]a, b[e seja c ∈]a, b[
Então, f é contínua no ponto c se e só se:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$$

Continuidade lateral

- f é contínua à direita de c → $\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$
- f é contínua à esquerda de c → $\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$

Continuidade de uma função num intervalo

Uma função f é contínua num intervalo:

- aberto]a,b[, se é contínua em todos os pontos desse intervalo.

- fechado [a,b], se é contínua em]a,b[e f é contínua à direita em a e contínua à esquerda em b.

Derivadas

Derivada de uma função num ponto

- $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$f'(x_0)$ representa o declive da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto de coordenadas $(x_0, f(x_0))$

Importante

- $f(x)$ é derivável no ponto, quando os limites laterais são iguais, ou seja :
  $f'(x_0) = f'(x_0-) = f'(x_0+)$

- Toda a função com derivada finita num ponto é contínua nesse ponto.

Regras de derivação

- $(u \times v)' = u'v + v'u$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v\prime u}{v^2}$
- $(u^n)'$ = nu^{n-1}u'
- $(f\ o\ u)'(x) = \ u'(x) \times f'(u(x))$
- $(e^u)' = u'e^u$
- $(a^u)' = u'^{a^u} \ln a$
- $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
- $(\log_a u) = \frac{u'}{u \ln a}$

Importante

- Com a primeira derivada da função $f(x)' = 0$, obtemos os Máximos e Mínimos (absolutos e relativos) da função $f(x)$
- Com a segunda derivada da função $f(x)'' = 0$, obtemos os pontos de inflexão de $f(x)$

Trigonometria

Círculos Trigonométricos

- $cos\ (x) = cos\ (-x)$ → Função par
- $-sin\ x = sin\ (-x)$ → Função ímpar
- $-tan\ x = tan\ (-x)$ → Função ímpar

Fórmula Fundamental da Trigonometria

$$sin^2 x + cos^2\ x = 1$$

Fórmulas Trigonométricas

$\tan x = \dfrac{sen\ x}{\cos x}$	$\cos(a+b) = \cos a \cos b - sen\ a\ sen\ b$
$1 + \dfrac{1}{tan^2 x} = \dfrac{1}{sen^2 x}$	$\cos(a-b) = \cos a \cos b + sen\ a\ sen\ b$
$1 + tan^2 x = \dfrac{1}{cos^2 x}$	$\mathrm{sen}(a+b) = \mathrm{sen}\, a \cos b + sen\ b \cos a$
$\cos(2a) = cos^2 a - sin^2 a$	$\mathrm{sen}(a-b) = \mathrm{sen}\, a \cos b - sen\ b \cos a$
$\mathrm{sen}(2a) = sen\ a \cos a$	$tan(a\ +\ b)\ =\ \dfrac{tan\ a + tan\ b}{1 - tan\ a\ tan\ b}$
$\tan(2a)\ =\ \dfrac{2\tan a}{1 - tan^2 a}$	$tan(a\ -\ b)\ =\ \dfrac{tan\ a - tan\ b}{1 + tan\ a\ tan\ b}$

Equações trigonométricas

- $sin\, x = sin\, \alpha <=> x = \alpha + 2k\pi \vee x = \pi - \alpha + 2k\pi, k \in Z$
- $cos\, x = cos\, \alpha <=> x = \alpha + 2k\pi \vee x = -\alpha + 2k\pi, k \in Z$
- $tan\, x = tan\, \alpha <=> x = \alpha + k\pi, k \in Z$

Derivadas da funções trigonométricas

- $(sen\, u)' = u' \cos u$
- $(cos\, u)' = u' \operatorname{sen} u$
- $(\tan u)' = \frac{u\prime}{\cos^2 u}$

Tabela trigonométrica

	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$
Seno	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Limite Notável

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

Números Complexos

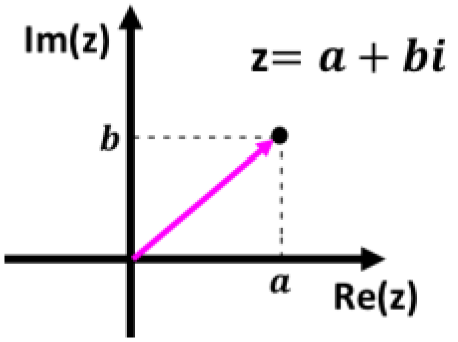
Forma Algébrica

Conjugado

- $z \to \bar{z} = a - bi$

Simétrico

- $z \to -z = -(a + bi) = -a - bi$



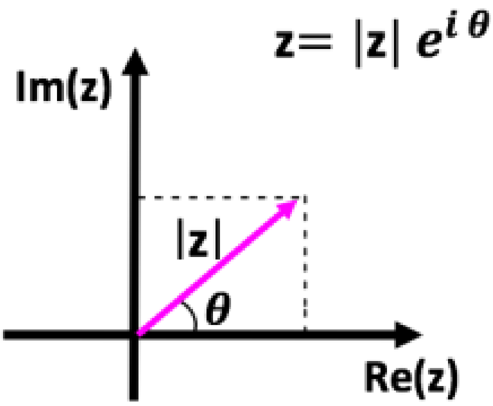
Número Real $\to z = a$

Imaginário Puro $\to z = bi$

Forma Trigonométrica

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\begin{cases} tg\,\theta = \frac{b}{a} \\ \theta \in Quadrante \end{cases}$$



Transformação de forma trigonométrica para forma algébrica:

$$z = |z|\, e^{i\theta} = |z|\,(\cos\theta + isen\theta)$$

Argumentos de um número complexo

- Argumento positivo mínimo → $[0{,}2\pi]$
- Argumento principal → $]-\pi, 0] \cup [0, \pi]$

Número Complexo	Argumento Principal $]-\pi, 0] \cup [0, \pi]$	Argumento positivo $[0{,}2\pi]$	Quadrante
$z_1 = 3 + \sqrt{3i}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	1º
$z_2 = 4e^{i\frac{4\pi}{3}}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	3º
$z_3 = 1 - i$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	4º
$z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	2º

Operações com números complexos na forma trigonométrica

$$z_1 = |z_1|\, e^{i\theta_1} \quad \text{e} \quad z_2 = |z_2|\, e^{i\theta_2}$$

- $z_1 \times z_2 = |z_1|.|z_2|\, e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$
- $z_1^n = |z_1|^n\, e^{i(n\theta_1)}$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\, e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$
- $\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{|z_1|}\, e^{i(\frac{\theta_1 + 2k\pi}{n})}, K \epsilon\, \mathbb{Z}$
- Conjugado de $z_1 \to \overline{z_1} = |z_1|\, e^{-i\theta_1}$
- Simétrico de $z_1 \to -z_1 = |z_1|\, e^{i(\theta_1 + \pi)}$

Auxiliar

- $z \times \bar{z} = a^2 + b^2$
- $\sqrt{-a} = i\sqrt{a}$
- $i^n = i^r$, $onde\ r$ é $o\ resto\ da\ divisão\ inteira\ de\ n\ por\ 4$

Raízes de Números Complexos

As raízes de índice n ∈ ℕ de um número complexo w são os números complexos z tais que:

$$z^n = w \quad \text{implica} \quad z = \sqrt[n]{w}$$

Geometria

Equação reduzida da reta

y = m*x +b

Formulas para calcular o declive de uma reta

- $m = \ (y_2 - y_1) \ / \ ((x_2 - x_1)$
- $m = \ tg\ \boldsymbol{\alpha}$
- $m = \ -(1/m)$

Equação vetorial da reta

(x, y) = (p_1 , p_2) + k (v_1 , v_2), k ∈ $\mathbb{R}$

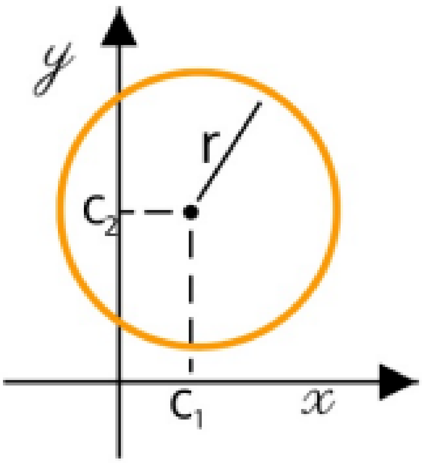
GEOMETRIA NO PLANO

Equações paramétricas da reta

$$\begin{cases} x = p_1 + k\, v_1 \\ y = p_2 + k\, v_2 \end{cases}, \ k \in \mathbb{R}$$

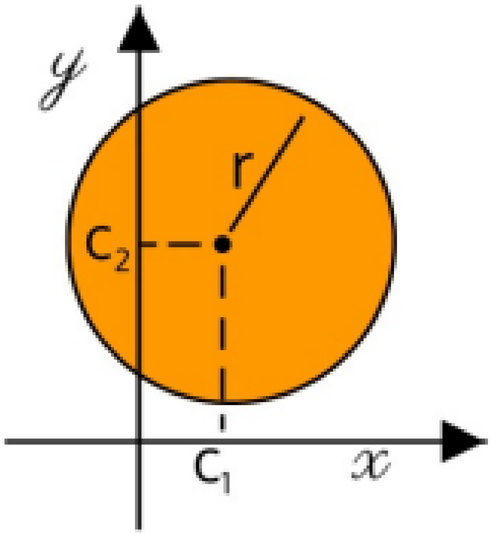
Equação da circunferência

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$$



Inequação do círculo

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 \leq r^2$$



Distancia entre dois pontos

- $P_1(x_1, y_1)$
- $P_2(x_2, y_2)$

$$d(P_1P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Ponto médio

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

GEOMETRIA NO ESPAÇO

Equação vetorial da reta

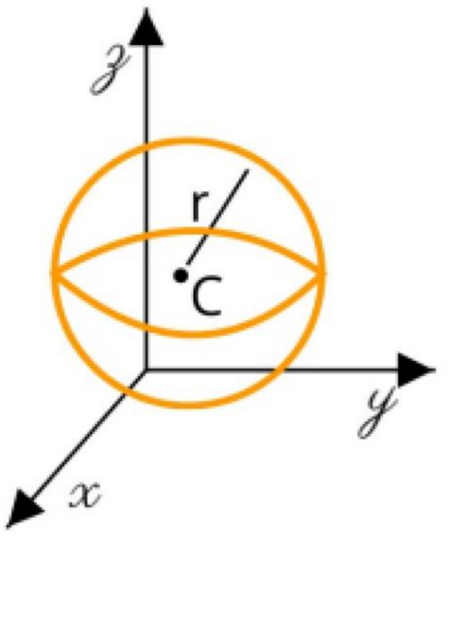
$$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + k\ (v_1, v_2, v_3), \mathrm{k}\ \in\ \mathbb{R}$$

Equações paramétricas da reta

$$\begin{cases} x = \ p_1 + k\ v_1 \\ y = \ p_2 + k\ v_2\ , \mathrm{k}\ \in\ \mathbb{R} \\ z = \ p_3 + k\ v_3 \end{cases}$$

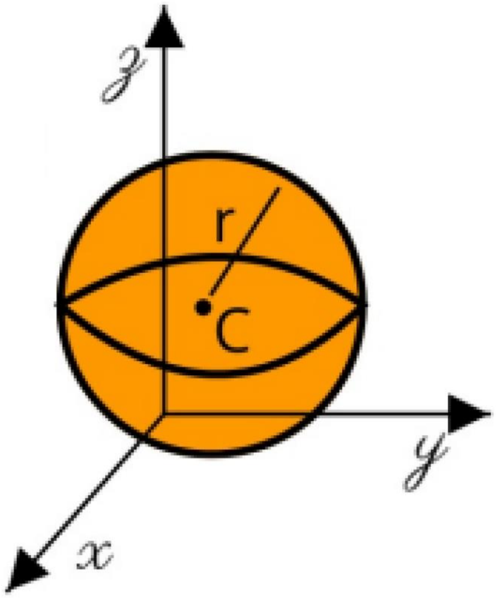
Equação da superfície esférica

$$(x - c_1)^2 + \ (y - c_2)^2 + (z - c_3)^2 = \ \ r^2$$



Inequação da esfera

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 + (z - c_3)^2 \leq r^2$$



Distancia entre dois pontos

- $P_1(x_1, y_1, z_1)$
- $P_2(x_2, y_2, z_2)$

$$d(P_1P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z1 - z2)}$$

Ponto médio

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

OUTROS

Produto escalar

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\alpha)$$

O produto escalar de vetores perpendiculares ∟ é igual a 0 !

Como saber o angulo entre dois vetores ?

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$$

Se possuirmos as coordenadas, então:

$$(u_1, u_2, u_3)\,.\,(v_1, v_2, v_3) = u_1\,v_1 + u_2\,v_2 + u_3\,v_3$$

Equação geral do plano

Para encontrar o d, basta substituir por um ponto do plano

$$ax + by + cz + d$$

Mapa Mental da matéria

https://ricardodsr.github.io