

Óptica Geométrica: Ecuación de las Lentes Delgadas y Relación de Magnificación*

Escobar Matzir, Ricardo José Manuel, 202002342^{1, **}

¹Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de San Carlos de Guatemala, Zona 12, Guatemala.

En este experimento, se estudió la ecuación de las lentes delgadas y la relación de magnificación mediante mediciones experimentales. Se registraron distancias objeto-lente e imagen-lente para diferentes configuraciones, permitiendo verificar la ecuación $\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f}$ a través de un ajuste lineal. Los resultados obtenidos muestran una excelente concordancia con la teoría, con un coeficiente de determinación de $R^2 \approx 0.997$ y una distancia focal experimental de (9.80 ± 0.2) cm, con un error relativo del 2%. Además, se analizó la relación de magnificación, observándose una coincidencia parcial con el modelo teórico, aunque con algunas discrepancias atribuibles a errores sistemáticos en las mediciones.

I. OBJETIVOS

- Verificar experimentalmente la ecuación de las lentes delgadas.
- Medir la distancia focal de una lente delgada.
- Verificar la magnificación en la imagen producida por una lente delgada.

II. MARCO TEÓRICO

La ecuación de lentes delgadas relaciona la distancia o entre un objeto que se coloca frente a una lente delgada con una distancia focal f y la distancia i a la imagen que se genera sobre una pantalla. Esta ecuación es

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f} \quad (1)$$

Esta ecuación se deriva a partir de la refracción de los rayos de luz en una lente delgada y es aplicable tanto a lentes convergentes como divergentes. Para lentes convergentes, la distancia focal es positiva, mientras que para lentes divergentes es negativa.

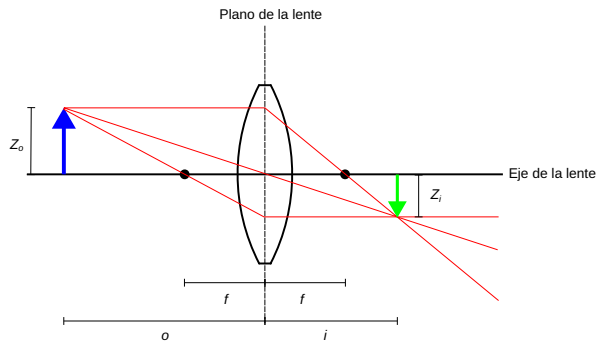


Figura 1: Diagrama que muestra las relaciones de distancias del objeto e imagen respecto a la lente delgada convergente.

La figura (1) muestra como se relacionan estas distancias del objeto e imagen respecto de la lente delgada. Asimismo podemos observar que Z_o es la distancia real del objeto mientras que Z_i es la distancia de la imagen formada. Estas últimas cantidades permiten también establecer una relación de *magnificación*, dado que, como se observa en la figura (1) las dimensiones de la imagen producida por la lente delgada no son las mismas del objeto. esta relación puede ser expresada como

$$M = \frac{Z_i}{Z_o} = -\frac{i}{o} \quad (2)$$

donde el signo $(-)$ en la expresión se debe a que las distancias Z_i y Z_o tienen signo diferente dado que se miden a partir del eje de la lente, pero, por convención, las distancias o e i son positivas si la imagen se forma al otro lado del plano de la lente de donde se coloca el objeto.

Relación lineal para la ecuación de lentes delgadas

En la ecuación de las lentes delgadas se puede hacer el siguiente cambio de variable, $x = 1/o$, $y = 1/i$ y $B = 1/f$, donde B es una constante y obtenemos la siguiente relación lineal

$$x + y = B$$

que convenientemente se puede escribir como

$$y = B - x \quad (3)$$

donde claramente se ve que esta ecuación posee pendiente -1 y un intercepto con el eje y en B . Esto es útil cuando se desea verificar experimentalmente esta ecuación, que es precisamente el propósito de este documento.

III. DISEÑO EXPERIMENTAL

En la figura (2) se muestra el montaje experimental de los componentes. Una vez realizado el montaje, se hacen mediciones de la distancia en la que se forma la imagen respecto a la lente delgada. Esto se realiza para cinco distancias distintas entre lente-objeto (o). El fin es verificar experimentalmente la validez de la ecuación de las lentes delgadas a través del uso de la ecuación lineal (3). Además, también se realizan mediciones de la altura de la imagen Z_i para verificar experimentalmente la relación de magnificación (2).

* Laboratorio Avanzado

** e-mail: ricardoemf03@gmail.com

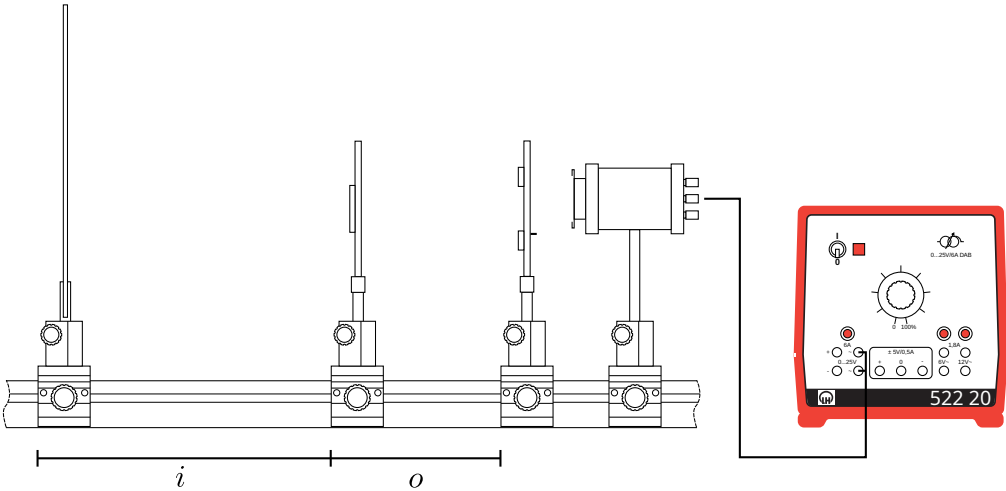


Figura 2: Disposición de los componentes del montaje experimental. De izquierda a derecha vemos, la pantalla, el lente de 100 mm, la posición del objeto, la lámpara y el transformador para alimentar la lámpara.

A. Componentes

- Transformador 0 a 25 V 6A AC/DC (LH 522 20).
- Lámpara 6V 30W (LH 450 60).
- Porta objetos.
- Objetos de una figura (triángulo).
- Lente de distancia focal de 100 mm.
- Pantalla traslucida.
- Jinetillos.
- Riel óptico.

B. Procedimiento

1. Colocar los componentes como se muestra en la figura (2).
2. Colocar el objeto (triángulo, ver anexo) en el porta objetos y tomar nota de su altura.
3. Encender la lámpara e iluminar el objeto lo más uniforme que sea posible. Se puede colocar un trozo de papel delgado en el objeto para mejorar la nitidez de la iluminación.
4. Fijar la distancia entre el objeto y la lente. Tomar nota de esta distancia y su incerteza.
5. Deslizar la pantalla hasta formar una imagen del objeto lo mas nítida posible. Tomar nota de esta distancia. Medir la altura de la imagen formada.

6. Repetir los dos pasos anteriores para tener un conjunto mínimo de cinco pares de datos i vs o .
7. Con los datos anteriores se realiza un gráfico con $x = 1/o$ y $y = 1/i$ para verificar la validez de la ecuación (7) mediante un ajuste lineal (3).
8. Con los datos de la recta ajustada obtener experimentalmente el valor de la distancia focal f .
9. Con los datos de las alturas de la imagen y objeto, determinar si se cumple experimentalmente la relación de magnificación (2).

IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

A. Mediciones

Las mediciones para los cinco conjuntos de datos están tabulados en el cuadro (I), estas mediciones representan posiciones en un marco de referencia donde el origen se encuentra atrás de la pantalla en la figura (2). De tal manera que para hallar las distancias o e i se realiza la diferencia entre las posiciones objeto-lente e imagen-lente, respectivamente. Estas

Cuadro I: Mediciones de posiciones dadas en centímetros (cm)

No.	Imagen ± 0.1	lente ± 0.1	objeto ± 0.1	altura imagen $Z_i \pm 0.001$
1	44.4	71.0	85.0	1.657
2	47.2	68.5	85.0	1.210
3	48.0	66.0	85.0	0.858
4	46.9	63.5	85.0	0.752
5	45.4	61.0	85.0	0.705

distancias se encuentran en el cuadro (II).

Cuadro II: Distancia imagen-lente (i) y lente-objeto (o) dado en centímetros (cm)

No.	$i \pm 0.1$	$o \pm 0.1$
1	26.6	14.0
2	21.3	16.5
3	18.0	19.0
4	16.6	21.5
5	15.6	24.0

Por otra parte, la altura del objeto medida es

$$Z_o = (1.087 \pm 0.001) \text{ cm} \quad (4)$$

B. Ecuación de las lentes delgadas

Para comprobar la validez de la ecuación de las lentes delgadas hacemos el gráfico del conjunto de cinco datos $1/o$ y $1/i$, estos datos se muestran en el cuadro (III) con sus respectivas incertezas calculadas como se describe en la sección de anexo.

Cuadro III: Datos para realizar el gráfico

No.	$1/o$	$1/i$
1	0.0714 ± 0.0005	0.0376 ± 0.0001
2	0.0606 ± 0.0004	0.0469 ± 0.0002
3	0.0526 ± 0.0003	0.0556 ± 0.0003
4	0.0465 ± 0.0002	0.0602 ± 0.0004
5	0.0417 ± 0.0002	0.0641 ± 0.0004

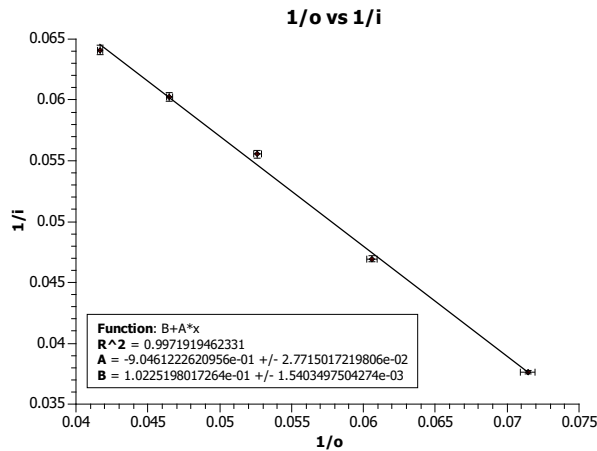


Figura 3: Gráfico de $1/i$ vs $1/o$ con un ajuste lineal.

El gráfico que resulta es el que se muestra en la figura (3), a este se le realiza un ajuste lineal que resulta con un coeficiente de determinación $R^2 \approx 0.997$ lo que indica un ajuste excelente en los datos. La ecuación de ajuste que brinda la regresión lineal es la ecuación (5).

$$y = (0.102 \pm 0.002) \text{ cm}^{-1} + (-0.905 \pm 0.03)x \quad (5)$$

Al comparar la ecuación de ajuste (5) con la ecuación (3) descrita en el marco teórico observamos lo siguiente

$$B = (0.102 \pm 0.002) \text{ cm}^{-1}$$

pero dado que $B = 1/f$, entonces la distancia focal tendrá un valor de $f = 1/B$, es decir,

$$f = (9.80 \pm 0.2) \text{ cm} \quad (6)$$

y ya que la distancia focal real de la lente es de 10 cm (100 mm), esto nos da un error relativo porcentual de 2 %, una diferencia relativamente pequeña.

Por otra parte, según la ecuación (3), la pendiente debe ser -1 , sin embargo, hemos encontrado que la pendiente m es

$$m = -0.905 \pm 0.03$$

un valor bastante cercano al esperado, sin embargo que posee un error relativo porcentual de $9.5\% \pm 3\%$. Este error es bastante más grande y significativo que podría asociarse en primera instancia a errores en la toma de datos.

C. Magnificación

En el cuadro (IV) se muestran las razones para la magnificación descritas por la ecuación (2), en la última columna tenemos la diferencia porcentual de ambos cálculos. Observamos que los primeros cuatro valores poseen un diferencia porcentual bastante alta y esto se puede contrastar con el gráfico (4) donde se observa una excelente concordancia para el quintal dato, mas no así para los otros cuatro datos. Sin embargo, en el gráfico se observa comportamiento similares pero ligeramente desplazados que pueden asociarse a una especie de error sistemático en las mediciones.

Cuadro IV: Relaciones de magnificación y diferencia porcentual

No.	Z_i/Z_o	i/o	Diferencia porcentual %
1	1.52	1.90	22
2	1.11	1.29	15
3	0.79	0.95	18
4	0.69	0.77	11
5	0.65	0.65	0

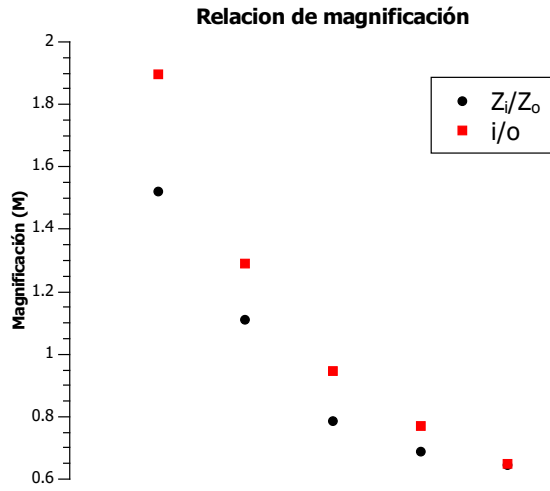


Figura 4: Valores de las razones de magnificación en el eje vertical.

V. CONCLUSIONES

En este experimento, se verificó experimentalmente la ecuación de las lentes delgadas y la relación de magnificación. A partir de las mediciones obtenidas, se construyó la gráfica $1/o$ vs. $1/i$, cuya regresión lineal arrojó un coeficiente de determinación de $R^2 \approx 0.997$, lo que indica una excelente concordancia con el modelo teórico. La distancia focal determinada experimentalmente fue (9.80 ± 0.2) cm, con un error relativo del 2 %, lo que confirma la validez del método empleado y la precisión del montaje experimental.

Por otro lado, la relación de magnificación presentó discrepancias en algunos valores, con diferencias porcentuales que alcanzaron hasta un 22 %. Esto sugiere la posible presencia de errores sistemáticos en la medición de las alturas de la imagen o en la alineación del sistema óptico. Sin embargo, el último conjunto de datos mostró una coincidencia exacta entre la magnificación teórica y experimental, lo que indica que, en condiciones óptimas, la ecuación de magnificación se cumple con buena precisión.

En conclusión, los resultados obtenidos validan la ecuación de las lentes delgadas y demuestran que la relación de magnificación es consistente con la teoría, aunque pueden existir desviaciones debido a errores experimentales. Mejoras en la precisión de las mediciones y en la alineación del sistema óptico podrían reducir estas discrepancias en futuras repeticiones del experimento.

VI. ANEXOS

A. Propagación de incertezas

La forma general para la propagación de incertezas estará dado por lo siguiente: [1] Supongamos que tenemos las mediciones x, \dots, z con incertezas $\delta x, \dots, \delta z$ y que estos valores los usamos para calcular la función $q(x, \dots, z)$. Si las incertezas son independientes y aleatorias, entonces la incerteza de q

es

$$\delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x} \delta x\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial q}{\partial z} \delta z\right)^2} \quad (7)$$

1. Sumas y restas

En dos mediciones $x + \delta x$, $y + \delta y$, haciendo uso de la fórmula general 7, la suma $q = x + y$ tiene incerteza

$$\delta q = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}$$

lo mismo para las restas.

2. Función $1/x$

En una medición $x + \delta x$, si $q = 1/x$, haciendo uso de la fórmula general 7, su incerteza será

$$\delta q = \frac{\delta x}{x^2}$$

3. Error relativo porcentual

Para un valor teórico V_{teo} , y uno experimental V_{exp} , el error relativo porcentual está dado por

$$E(\%) = \left| \frac{V_{teo} - V_{exp}}{V_{teo}} \right| \times 100\%$$

4. Diferencia porcentual

Para dos valores A y B , la diferencia porcentual se calcula como

$$\text{Diff}(\%) = \left| \frac{A - B}{\frac{(A+B)}{2}} \right|$$

B. Montaje experimental



Figura 5: Montaje experimental y objeto

-
- [1] John Robert Taylor. An introduction to error analysis: the study of uncertainties in physical measurements. 1980.