Modelado del Tiro de Proyectiles con y sin Resistencia del Aire: Implementación y Análisis Numérico usando Python y el Método de Euler*

Escobar Matzir, Ricardo José Manuel, 202002342[1, **]

[1] *Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de San Carlos de Guatemala, Zona 12, Guatemala.*

En este estudio, abordamos el problema del movimiento de proyectiles mediante la resolución numérica de ecuaciones diferenciales utilizando el método de Euler implementado en Python. La investigación explora el impacto de la resistencia del aire en la trayectoria y el alcance horizontal máximo de un proyectil. Se analizaron dos escenarios: uno sin resistencia del aire y otro con un coeficiente de arrastre específico de $B/m = 0.00004\ \mathrm{s}^{-1}$. Nuestros resultados muestran que, en ausencia de resistencia del aire, el ángulo teórico para lograr el alcance máximo horizontal es de 45 grados, conforme a los principios básicos de la física. Sin embargo, al considerar la resistencia del aire, el ángulo óptimo para el máximo alcance se reduce a aproximadamente 38.9 grados. Esta desviación subraya la influencia significativa de la resistencia del aire en el movimiento de proyectiles, destacando la necesidad de tener en cuenta los efectos del arrastre en aplicaciones prácticas.

I. INTRODUCCIÓN

El estudio del lanzamiento de proyectiles es un tema fundamental en la física clásica y en diversas aplicaciones de ingeniería. La resolución de las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de un proyectil permite predecir su trayectoria y alcance en función de las condiciones iniciales y de los efectos ambientales. En este contexto, el método de Euler se presenta como una herramienta numérica útil para la aproximación de soluciones en problemas donde las soluciones analíticas pueden ser complejas o inalcanzables.

El objetivo principal de este estudio es analizar la solución numérica del lanzamiento de un proyectil empleando el método de Euler. Para ello, se busca obtener la solución numérica del problema mediante una implementación del método de Euler simple, con el fin de evaluar su precisión y eficacia en la simulación del movimiento de proyectiles.

Uno de los aspectos clave del actual trabajo es la comparación de la trayectoria del proyectil en dos escenarios: uno sin resistencia del aire y otro con una resistencia específica. En el primer caso, se verifica que el ángulo óptimo para alcanzar la máxima distancia horizontal es de 45 grados, de acuerdo con la teoría básica de la física. Esta validación es fundamental para asegurar la fiabilidad de la solución numérica obtenida.

En el segundo escenario, se introduce la resistencia del aire, representada por un coeficiente de arrastre específico. Este análisis permite determinar el ángulo en el cual se alcanza el máximo alcance horizontal cuando se considera el efecto del arrastre. La comparación de ambos casos proporciona una visión comprensiva de cómo las condiciones reales afectan el comportamiento de un proyectil y resalta la importancia de considerar la resistencia del aire en aplicaciones prácticas.

A través de este análisis, se pretende no solo validar el método numérico utilizado, sino también proporcionar una base para la comprensión de los efectos de la resistencia del aire en el movimiento de proyectiles, contribuyendo así a una mejor aplicación y ajuste de los modelos de simulación en contextos reales.

II. ANTECEDENTES

El estudio del movimiento de proyectiles ha sido un tema de interés desde los primeros días de la física clásica. La teoría del movimiento de proyectiles, basada en las leyes de Newton, establece que en un entorno sin resistencia del aire, el ángulo óptimo para alcanzar el máximo alcance horizontal es de 45 grados. Así lo indican textos de física básica como el de Sears & Semansky [2].

Sin embargo, en la práctica es fundamental considerar la resistencia del aire al analizar el movimiento de proyectiles e incorporarla en nuestros modelos para obtener una aproximación más realista de la situación. En este contexto, es razonable anticipar que, dado que el aire opone resistencia al movimiento del proyectil, el alcance máximo se reducirá y el ángulo óptimo para alcanzar dicho alcance también podría variar. Por lo tanto, resulta interesante investigar cuál es el ángulo óptimo en presencia de resistencia para maximizar el alcance horizontal.

En este contexto, el método de Euler se presenta como una herramienta valiosa para encontrar una aproximación precisa del ángulo óptimo en presencia de resistencia. Este método numérico permite resolver ecuaciones diferenciales de manera iterativa, proporcionando una aproximación de las trayectorias de los proyectiles bajo la influencia de la resistencia del aire.

A. Método de Euler

El método de Euler nos ayuda a encontrar soluciones aproximadas a ecuaciones diferenciales ordinarias de orden 1, que tienen la forma de (1). La deducción que se realiza del método de Euler se fundamenta en las notas de clase de Juan Diego Chang [1].

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

Este método funciona aproximando la derivada de manera discreta como lo siguiente

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

---

* Física computacional

** e-mail: ricardoemf03@gmail.com

y usando la definición de la derivada (sin emplear el límite) la ecuación (1) resulta en la siguiente relación de recurrencia

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\Delta x}=f(x_n,y_n)$$

que puede ser escrita de manera más útil para nuestros fines de implementación como

$$y_{n+1}=y_n+f(x_n,y_n)\Delta x \tag{2}$$

esto es lo que se conoce como la aproximación o método de Euler. Consiste solamente en convertir una función continua en una función discreta.

B. Ecuación de movimiento para un proyectil

Para fines prácticos, estudiamos el movimiento de un proyectil en dos dimensiones espaciales, x e y. El movimiento de un proyectil los describimos de acuerdo a la segunda ley de Newton.

$$\sum\vec{F}=m\vec{a}$$

En este caso, consideramos dos únicas fuerzas, la de la gravedad y la resistencia del aire. Que esta última la asumimos proporcional al cuadrado de la velocidad dado que diversos experimentos indican este comportamiento.

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=m\vec{g}-B_2v\vec{v} \tag{3}$$

En (3), B_2 es la constante de proporcionalidad para el término que indica la resistencia del aire.
Para determinar la función de posición, la ecuación (3) se transforma en una ecuación diferencial de segundo orden. Dado que el método de Euler requiere ecuaciones diferenciales de primer orden, la ecuación (3) se descompone en un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden, de la siguiente manera:

$$\left.\begin{array}{rcl}\frac{dx}{dt}&=&v_x\\ \frac{dv_x}{dt}&=&-kvv_x\\ \frac{dy}{dy}&=&v_y\\ \frac{dv_y}{dt}&=&-g-kvv_y\end{array}\right\} \tag{4}$$

con $k=\frac{B_2}{m}$ y $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$.

C. Euler para el movimiento del proyectil

En este punto, aplicamos el método de Euler al sistema de ecuaciones (4) y así es como se obtienen las siguientes ecuaciones de recurrencia que serán útiles para la implementación en Python para resolverlas de manera iterativa.

$$\left.\begin{array}{rcl}x_{n+1}&=&x_n+v_n^x\Delta t\\ v_{n+1}^x&=&v_n^x-kv_nv_n^x\Delta t\\ y_{n+1}&=&y_n+v_n^y\Delta t\\ v_{n+1}^y&=&v_n^y-g\Delta t-kv_nv_n^y\Delta t\end{array}\right\} \tag{5}$$

con $v_n=\sqrt{(v_n^x)^2+(v_n^y)^2}$.

Parámetros a utilizar

Se crea un programa en Python que resuelva las ecuaciones diferenciales del proyectil haciendo uso del método de Euler tal como se describe en (5). Estas ecuaciones al ser de recurrencia se resuelven de manera iterativa a partir de condiciones iniciales.

Los valores iniciales para el movimiento del proyectil son los siguientes.

$$\begin{aligned}\frac{B_2}{m}&=0.00004\mathrm{s}^{-1}\\ g&=9.8\ \mathrm{m/s^2}\\ v_0&=700\ \mathrm{m/s}\\ \Delta t&=0.01\\ \theta&=\frac{\pi}{6}\end{aligned} \tag{6}$$

además, se ha supuesto que el proyectil parte de una posición inicial $(x,y)=(0,0)$.

III. RESULTADOS

Estos resultados proporcionan, en primer lugar, una comparación entre un proyectil que enfrenta resistencia al aire y otro que no. Se examina el comportamiento de ambos proyectiles y se evalúa el impacto que la resistencia al aire tiene en el proyectil afectado. Posteriormente, se realiza un análisis gráfico para determinar el ángulo óptimo que maximiza el alcance horizontal, tanto para el proyectil con resistencia al aire como el también para el que no presenta dicha resistencia.

A. Efecto de la resistencia del aire sobre los proyectiles

En la figura (1), la trayectoria del proyectil sin resistencia al aire conserva una forma "parabólica"debido a la ausencia de resistencia, lo que implica que su velocidad no experimenta alteraciones. En el eje horizontal, el proyectil sigue un movimiento rectilíneo uniforme, mientras que en el eje vertical mantiene un movimiento acelerado debido a la gravedad. Como resultado, el alcance teórico de este proyectil tiende a ser infinito.

Sin embargo, para un proyectil que experimenta resistencia al aire, como se muestra en la figura (2), se observa que, a una determinada distancia horizontal, el movimiento del proyectil tiende a adoptar una trayectoria vertical, similar a un movimiento en caída libre. Esto es previsible, ya que la resistencia al aire actúa como una fuerza opuesta al movimiento, reduciendo gradualmente la velocidad del proyectil en ambos ejes. En este contexto, dado que el movimiento horizontal es un movimiento rectilíneo uniforme (es decir, sin aceleración), la resistencia al aire disminuirá la velocidad horizontal del proyectil hasta reducirla a cero. Por otro lado, el movimiento vertical, siendo acelerado, alcanzará una velocidad terminal, conforme a los principios estudiados en mecánica clásica. En consecuencia, el objeto continuará su caída debido a la gravedad, pero a una cierta distancia horizontal, su movimiento se volverá predominantemente vertical, dado que la resistencia al aire habrá anulado la componente horizontal de la velocidad.

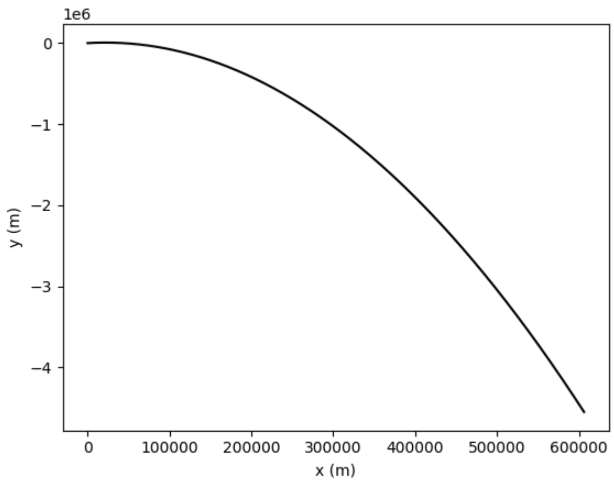

Figura 1: Trayectoria de un proyectil que no presenta resistencia al aire para un tiempo $t = 1000$ s.

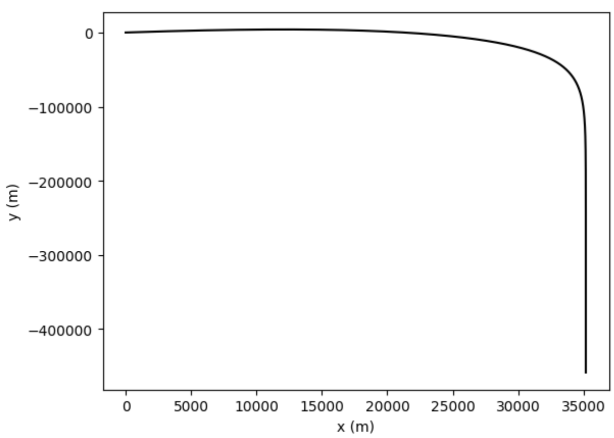

Figura 2: Trayectoria de un proyectil que sí presenta resistencia al aire para un tiempo $t = 1000$ s.

En las gráficas de las figuras (1) y (2), para el método de Euler se ha realizando un total de $N = 10^5$ iteraciones.

Alcance máximo

Otro aspecto crucial a comparar entre un proyectil que experimenta resistencia al aire y uno que no lo hace es la diferencia significativa en sus alcances máximos, tanto horizontales como verticales. Como se ilustra en la gráfica de la figura (3), el proyectil sin resistencia al aire alcanza distancias mayores en comparación con el proyectil que enfrenta resistencia. Es importante destacar que ambos proyectiles fueron lanzados bajo las mismas condiciones iniciales, es decir, con el mismo ángulo y velocidad inicial. La gráfica abarca el recorrido de los proyectiles desde el momento del lanzamiento, partiendo de una altura de referencia cero, hasta su caída y retorno a dicha altura de referencia.

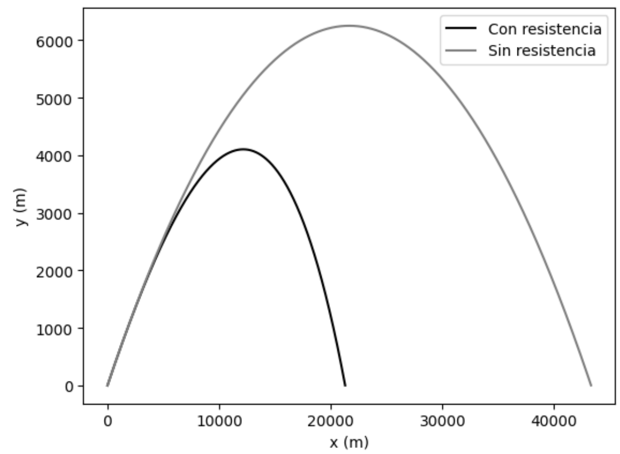

Figura 3: Comparación de las trayectorias de dos proyectiles. Uno con resistencia del aire y otro sin ella partiendo de mismas condiciones iniciales.

B. Ángulo de alcance máximo de un proyectil sin resistencia del aire

Una vez simuladas diversas trayectorias de proyectiles, esta vez enfocamos nuestra atención en aquellos que no experimentan resistencia del aire. Determinamos los alcances máximos para proyectiles lanzados con distintos ángulos, específicamente variando el ángulo desde 0 hasta 90 grados en incrementos de 3 grados. La velocidad inicial se mantiene constante para todos los proyectiles, según lo descrito en (6).

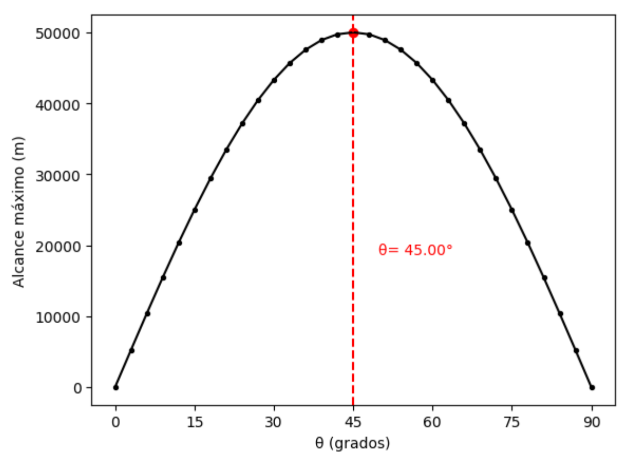

Figura 4: Ángulo óptimo de alcance máximo horizontal para un proyectil que no presenta resistencia al aire.

La gráfica resultante, mostrada en (4), revela que el ángulo óptimo para alcanzar la máxima distancia horizontal es de 45 grados, tal como se anticipaba. Este hallazgo no solo confirma el valor teórico del ángulo óptimo para el alcance máximo, sino que también valida la eficacia y precisión del método numérico de Euler en el análisis del movimiento de proyectiles.

C. Ángulo de alcance máximo de un proyectil con resistencia del aire

De manera análoga al análisis previo, hemos realizado pruebas para proyectiles que experimentan resistencia al aire, con valores de resistencia y velocidad inicial establecidos como se describe en (6). En este caso, se han considerado ángulos de lanzamiento que varían de 0 a 90 grados, con incrementos de 0.1 grados, permitiendo así el análisis de 900 ángulos diferentes. Este enfoque busca determinar con mayor precisión el ángulo óptimo para alcanzar la máxima distancia horizontal.

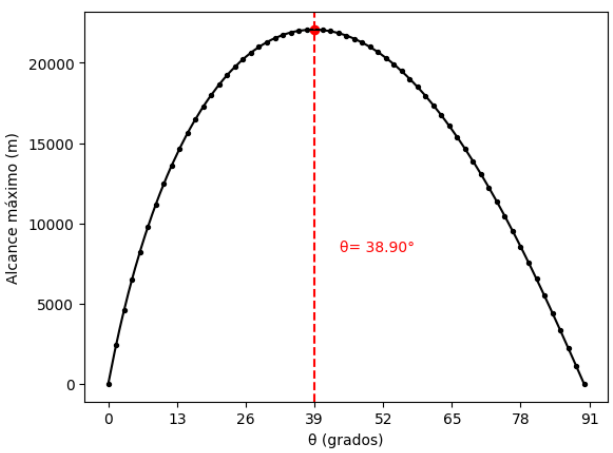

Figura 5: Ángulo óptimo de alcance máximo horizontal para un proyectil que sí presenta resistencia al aire.

Los resultados, presentados en la gráfica de la figura (5), indican que el ángulo óptimo para el alcance máximo horizontal es de 38.9 grados, lo cual representa una diferencia notable en comparación con el proyectil sin resistencia al aire. Además, los alcances máximos se han reducido aproximadamente a la mitad en presencia de resistencia.

IV. CONCLUSIONES

A partir de los resultados obtenidos, se observa que la resistencia al aire tiene un impacto considerable en el comportamiento de los proyectiles. En el caso de proyectiles sin resistencia al aire, la trayectoria sigue una forma parabólica, con el movimiento horizontal siendo uniforme y sin alteraciones. Este comportamiento resulta en un alcance horizontal teórico infinito, ya que la resistencia al aire no actúa para reducir la velocidad.

Cuando se introduce la resistencia al aire, la situación cambia significativamente. Los proyectiles con resistencia presentan trayectorias que se desvían de la forma parabólica ideal a medida que avanzan. A una cierta distancia horizontal, el proyectil comienza a caer verticalmente, ya que la resistencia al aire disminuye progresivamente la velocidad horizontal hasta anularla completamente. A diferencia del movimiento horizontal uniforme sin resistencia, el movimiento vertical alcanza una velocidad terminal, limitando así el alcance horizontal del proyectil.

En cuanto a los ángulos de lanzamiento, se ha encontrado que para proyectiles sin resistencia al aire, el ángulo óptimo para maximizar el alcance horizontal es de 45 grados, un resultado que coincide con las predicciones teóricas. Por otro lado, cuando se considera una resistencia al aire de $B_2/m = 0.00004\ \mathrm{s}^{-1}$ y una velocidad inicial de $v_0 = 700$ m/s, el ángulo óptimo se reduce a 38.9 grados. Esta diferencia subraya el efecto significativo de la resistencia al aire en la distancia alcanzada por el proyectil. Además, los alcances máximos se reducen aproximadamente a la mitad en comparación con los proyectiles sin resistencia.

Finalmente, los resultados validados confirman que el método numérico de Euler es eficaz y preciso para el análisis del movimiento de proyectiles con resistencia al aire. La comparación entre los resultados teóricos y numéricos refuerza la validez de este enfoque metodológico en la simulación y estudio del comportamiento de los proyectiles.

V. ANEXO

El programa realizado en Python se puede consultar **aquí**.

[1] Juan Diego Chang. Física computacional. Notas de clase en Física computacional, Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas, USAC, 2024. Accedido en: Septiembre 2024.

[2] Young Freedman and Sears Zemansky. Física universitaria. *Editorial. Prentice Hall. México. Decimosegunda edición*, 2009.