Modelos cosmológicos:
Un universo dominado por materia y el universo estático de Einstein

Relatividad general
Ricardo José Manuel Escobar Matzir

1 INTRODUCCIÓN

En el marco de la teoría general de la relatividad han surgido distintas propuestas para tratar de entender cómo ha sido la evolución del universo así como cuál es su posible destino. Todo parte del principio cosmológico, que basado en gran número de observaciones, establece que el universo es homogéneo e isotrópico. Esto último significa que el universo a gran escala posee las mismas propiedades donde quiera que se observe y se ve igual en todas direcciones.

Es a partir del principio cosmológico que fue propuesta la métrica de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) que trata de darle una estructura al universo y que además es solución a las ecuaciones de campo de Einstein junto a un tensor de energía-impulso particular. Es a partir de esto que se derivan las ecuaciones de Friedmann que nos brindan una descripción de como evoluciona el factor de escala del universo.

En este trabajo discutimos dos modelos cosmológicos que fueron relevantes en su época. Primero tratamos el universo dominado por materia en donde cualquier tipo de interacción en el universo es despreciable en comparación con la producida por de la densidad de materia. Esto nos lleva a un universo que se expande, pero que lo hace a un ritmo que su tasa de expansión disminuye con el tiempo. El segundo modelo de trata del universo estático de Einstein, modelo en el que Einstein se vio forzado a hacer una modificación a sus ecuaciones de campo con tal de contrarrestar el hecho de que tales ecuaciones ya predecían una expansión o contracción del universo.

2 MODELOS COSMOLÓGICOS

2.1 EL PRINCIPIO COSMOLÓGICO Y LAS ECUACIONES DE FRIEDMANN

El principio cosmológico es una hipótesis de la cosmología moderna basada en un número creciente de indicios observables. Establece dos principales propiedades del universo a gran escala (en el orden de cientos de megapársecs)

- **Homogeneidad:** Posee las mismas propiedades cuando se observa a gran escala.
- **Isotropía:** El universo se ve igual en todas las direcciones desde cualquier punto de observación. Esto implica que no hay direcciones privilegiadas en el espacio.

Es a partir del principio cosmológico que se deriva la métrica (2) de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) que es solución general de las ecuaciones de campo de Einstein (1) que describe la geometría del espacio-tiempo bajo la suposición de que el universo es homogéneo e isotrópico.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{1}$$

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\left[\left(\frac{dr^2}{1-kr^2}\right) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right] \tag{2}$$

- $a(t)$ es el factor de escala del universo.
- k representa la curvatura del espacio y toma valores de +1, 0 y -1, dependiendo si el universo es esférico, plano o hiperbólico, respectivamente.
- c es la velocidad de la luz en el vacío.

La métrica de FLRW se utiliza para modelar la evolución del universo, permitiendo describir su expansión así como también su posible destino.

En la ecuación (1), el lado derecho muestra el tensor energía-impulso que describe la densidad de materia y energía mientras que el lado izquierdo nos brinda una descripción acerca de la curvatura del espacio-tiempo en respuesta a la presencia de masa y energía.

Dado que ya hemos mencionado que la métrica de FLRW es solución a las ecuaciones de campo de Einstein, el siguiente paso será introducirlo en la ecuación de Einstein para derivar las ecuaciones de Friedmann [1]. Elegiremos modelar la materia y la energía mediante un fluido perfecto con densidad ρ y presión p, de tal forma que el tensor de energía-impulso (medido en el marco comóvil) es el siguiente

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \tag{3}$$

Es así como a partir de estos valores y suposiciones se derivan las ecuaciones de Friedmann.

$$\frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho + \Lambda c^2}{3} \tag{4}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3} \tag{5}$$

donde $\dot{a} = da/dt$. La primera ecuación (4) nos habla acerca de la tasa de expansión del universo, mientras que la segunda ecuación (5) trata sobre la aceleración de la expansión del universo.

En base a las ecuaciones de Friedmann podemos describir distintos escenarios del universo. En este trabajo desarrollaremos dos, el universo dominado por materia y el universo estático de Einstein.

2.2 UN UNIVERSO DOMINADO POR MATERIA

En el contexto de la cosmología, nos referimos a un universo dominado por materia a aquel en que solamente consideramos las contribuciones de la densidad de masa del universo, es decir, ignoramos otro tipo de contribuciones como la radiación, energía oscura, interacciones que pudieran generar presión, entre otras. Estamos considerando la situación en la que la evolución del universo es impulsado principalmente por la densidad de materia. Es por este motivo que la presión es aproximadamente cero y el tensor de energía-impulso (3) se queda con solamente un término, el de la densidad de energía.

Resulta interesante ver como la densidad de masa se ve afectada por el factor de escala del universo. Para ello debemos escribir la tasa de cambio de la densidad de masa en términos de la tasa de cambio del factor de escala. Esto lo logramos combinando las dos ecuaciones de Friedmann, (4) y (5), lo que da

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \tag{6}$$

($\dot{\rho} = d\rho/dt$). Esta ecuación nos describe como cambia la densidad de masa con el tiempo a medida que el universo cambia de tamaño. En primera instancia observamos que si la tasa de cambio del factor de escala $\dot{a}$ es positivo, la densidad de masa decrece, es decir, el universo se vuelve menos denso.

Como estamos considerando el modelo dominado por materia, entonces $p \approx 0$. Entonces la ecuación (6) se convierte en

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}\rho \tag{7}$$

de modo que, separando variables e integrando

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'}{\rho'} = -3\int_{a_0}^{a} \frac{da'}{a'}$$

con ρ_0 y a_0 los valores presentes del universo. Luego

$$\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = -3\ln\left(\frac{a}{a_0}\right)$$

Simplificando obtenemos

$$\rho = \frac{\rho_0 a_0^3}{a^3} \tag{8}$$

Justo como era de esperarse. Tenemos que $\rho \propto a^{-3}$, es decir, la densidad de masa decae con el cubo del tamaño del universo. Que tiene sentido porque, si por ejemplo, hacemos 2 veces más grande al universo este se volverá la mitad de denso en cada una de sus 3 coordenadas espaciales.

Con esta solución, ahora podemos acudir a la primera ecuación de Friedmann (4) tomando $\Lambda = 0$, entonces

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2}$$

con H el parámetro de Hubble que mide el ritmo de la expansión del universo. Por simplicidad, asumimos un universo plano, es decir $k = 0$ y sustituimos el valor de ρ encontrado en (8). Entonces tenemos que

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0\frac{a_0^3}{a^3}$$

y simplificando

$$\dot{a}^2 = \frac{H_0^2 a_0^3}{a}$$

con $H_0^2 = 8\pi G\rho_0/3$. Nuevamente resolviendo esta ecuación diferencial por separación de variables obtenemos

$$\int_0^a \sqrt{a'}da' = H_0\sqrt{a_0^3}\int_0^t dt'$$

$$\frac{2}{3}a^{3/2} = H_0\sqrt{a_0^3}\,t$$

y simplificando

$$a = a_0\sqrt[3]{\frac{9}{4}H_0^2}\,t^{2/3} \tag{9}$$

lo que nos dice que el universo se expande de forma proporcional a la raíz cúbica del cuadrado del tiempo, es decir, $a \propto t^{2/3}$. A pesar de que este universo está en expansión, lo hace a una tasa en que disminuye con el tiempo (dado que $\dot{a} \propto t^{-1/3}$) y esto nos indica está **desacelerándose** en un universo dominado por materia. Esto es de esperar ya que la interacción dominante es la de la gravedad que, en cierta forma, trata de contrarrestar dicha expansión.

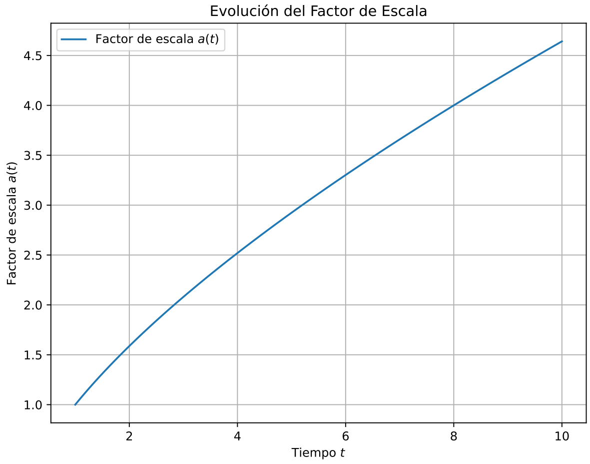

Figura 1: Evolución del factor de escala.

En la figura (1) y (2) podemos comparar la relación entre el factor de escala y la densidad de materia. Mientras que el factor de escala crece, es decir el universo se expande, la densidad de materia disminuye. Esto tiene sentido porque conforme el universo crece, la materia se diluye a través de él.

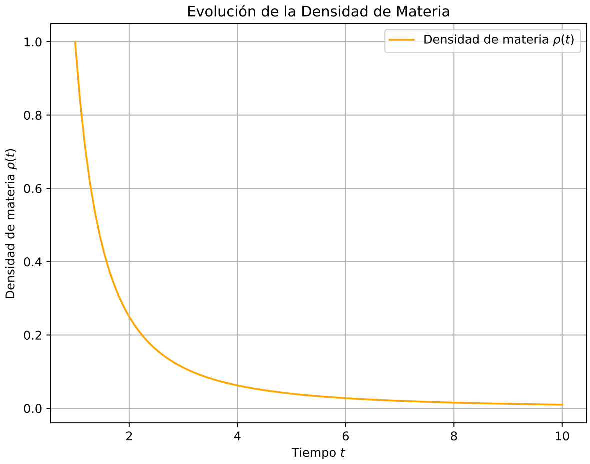

Figura 2: Evolución de la densidad de materia.

2.3 EL UNIVERSO ESTÁTICO DE EINSTEIN

En 1917 Einstein fue el primero en aplicar sus ecuaciones al universo entero y presentar un modelo cosmológico [2]. Su *universo estático* fue la primera solución cosmológica que obtuvo. En aquella época, la noción de un universo dinámico no estaba establecida.
A principios del siglo XX, la mayoría de los científicos asumían que el universo era estático y eterno. Esta visión derivaba de una concepción filosófica de un universo inmutable, sin un principio ni un fin, que había prevalecido durante siglos. No existía evidencia observacional que sugiriera que el universo pudiera estar en expansión o contracción. La estabilidad era vista como una propiedad natural del cosmos. Un universo dinámico, en cambio, era una idea ajena y contraria a la intuición de la época.

Sin embargo, al aplicar las ecuaciones de la relatividad general al universo en su conjunto estas predicen un universo dinámico: bajo la influencia de la gravedad, el universo debería tender a contraerse. Es por tanto que Einstein, guiado por los prejuicios científicos de la época, que requerían que el universo fuera estático y obligado por las ecuaciones de Friedmann, que ya dejaban claro que un universo dominado por materia normal (o radiación) necesariamente se está expandiendo o contrayendo. Por tanto, Einstein se vio forzado a argumentar "*que las ecuaciones que he defendido hasta ahora necesitan de una pequeña modificación*" [2]. Para conseguir una solución cosmológica estática, y así contrarrestar la expansión o contracción del universo, tenía que introducir la constante cosmológica Λ en las ecuaciones de Einstein. Esta constante ya fue incluida en la ecuación (1).
Es ahora que, en la ecuaciones de Friedmann ya no ignoramos la constante cosmológica. Sin embargo, el universo estático requiere que $\ddot{a} = \dot{a} = 0$ para que no se expanda ni se contraiga. Sustituyendo esto en la segunda ecuación de Friedmann 5 obtenemos lo siguiente

$$\Lambda = \frac{4\pi G}{c^2}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) \tag{10}$$

sustituyendo este valor y también que $\dot{a} = 0$ en la primera ecuación de Friedmann tenemos

$$\frac{k}{a^2} = \frac{4\pi G}{c^2}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \tag{11}$$

Einstein, en su *paper* de 1917 también asumió que $p = 0$, como un universo dominado por materia pero con constante cosmológica no nula. Esto nos lleva a que

$$\Lambda = \frac{4\pi G}{c^2}\rho = \frac{k}{a^2} \tag{12}$$

Dado que todos son números positivos, entonces solo queda que $k = +1$, es decir, el universo de Einstein se trata de un universo cerrado. Además, por construcción $a =$ cte. Entonces, reescribiendo la ecuación (12), tenemos que

$$a = \frac{c}{\sqrt{4\pi G\rho}} \tag{13}$$

de aquí podemos observar que, para que pueda haber un universo estático como el que Einstein propone, la densidad de materia debe permanecer constante en el tiempo. Y que una ligera variación puede provocar que el universo se expanda o se contraiga, entonces la ecuación (13) ya no sería válida. Tas las observaciones de Hubble que confirmaban la expansión del universo, nos dimos cuenta también que la densidad de era cambiante en el tiempo. El universo estático de Einstein resulta ser inestable dado que se requiere de una densidad de materia precisa y que no cambie, es decir, no dependa del tiempo.

Por este motivo, Einstein eventualmente abandonó la idea de un universo estático, así como la constante cosmológica. Sin embargo, la constante cosmológica resurgió en un nuevo contexto, convirtiéndose en una herramienta clave para describir la energía oscura, la fuerza responsable de la expansión acelerada del universo.

3 CONCLUSIONES

En el análisis de estos dos modelos cosmológicos presentados muestran dos visiones contrastantes del universo. En el modelo dominado por materia nos presenta a un universo en expansión, pero desacelerado debido a la atracción gravitacional producida por la densidad de materia. Sin embargo, dada las observaciones acerca de un universo que se expande de forma acelerada, este modelo ya no es completamente válido, pero se ha refinado de forma que se contrarreste esta desaceleración por medio de introducir nuevos conceptos como la energía y materia oscura.
Por su parte, el modelo de un universo estático introdujo una constante, llamada constante cosmológica, como un término de repulsión que equilibre la atracción gravitacional del universo. Esto requiere una configuración extremadamente precisa en la densidad de materia. El modelo de Eisntein fue descartado luego de las observaciones de Hubble que confirmaban que el universo se estaba expandiendo.

REFERENCIAS

[1] Sean Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Pearson, Boston, MA, 2014.

[2] Bert Janssen. *Teoría de la Relatividad General*. Granada, España, 2013. Dpto de Física Teórica y del Cosmos, Edificio Mecenas, Campus de Fuente Nueva, 18071 Granada, España. Contacto: bjanssen@ugr.es.