

Relatividad general

Ricardo Escobar Matzir
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas, USAC

2 de enero de 2025

1. Introducción

Estas son notas de clase tomadas en el curso de relatividad general impartidas por el PhD. J. A. Ponciano en el segundo semestre de 2024.

2. Notas de clase 2S-2024

2.1. Descripción general - 150724

- Estudiar la estructura del Espacio-Tiempo
- Entender espacios curvos
- Cómo a partir de la geometría damos una descripción de la física, especialmente cómo se genera el concepto de Gravedad.

Idea central: Gravitación \longleftrightarrow Geometría

$c \approx 3 \times 10^8$ m/s, que en unidades naturales podemos usar $c = 1$. Con esto estamos haciendo una **comparación** del tipo

$$3 \times 10^8 \text{ m} = 1 \text{ s}$$

Por otra parte, el régimen de validez de las teorías los vemos como

$$v \approx 1 \text{ Relatividad especial (transformaciones de Lorentz)}$$

$$v \ll 1 \text{ Descripción clásica (transformaciones de Galileo)}$$

haciendo uso de las unidades naturales. Por ejemplo, la constante de gravitación de Newton también puede usarse como $G_N = 1$ que resulta en otras comparaciones entre distintas cantidades de dimensiones como

$$1 \text{ m} = 1,3466 \times 10^{27} \text{ kg}$$

$$1 \text{ s} = 4,037 \times 10^{35} \text{ kg}$$

de esta forma podemos comparar distancias con masas. Lo cual es útil para determinar el régimen de validez de las teorías, por ejemplo

$$\frac{M}{R} \approx 1 \text{ Relatividad general}$$

$$\frac{M}{R} \ll 1 \text{ Gravitación de Newton}$$

Por ejemplo, al hacer la razón entre la masa del sol y su radio nos da un número $\ll 1$ lo que indica que una descripción clásica es buena. Por otra parte, en términos del potencial gravitatorio

$$\frac{\Phi}{c^2} \approx 1 \text{ Campos fuertes, Relatividad general}$$

$$\frac{\Phi}{c^2} \ll 1 \text{ Campos débiles, Gravitación de Newton}$$

2.2. Bases de la teoría general de la relatividad - 160724

Partimos de la teoría gravitacional de Newton, la cual tiene dos elementos básicos

1. Ecuación para el campo gravitacional

$$\vec{F} = \frac{GMm}{r^2} \hat{e}_r, \quad r \equiv r \hat{e}_r$$

2. Ecuación en respuesta de la materia ante este campo

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Estos dos elementos se escriben como

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (1)$$

Ecuación de Poisson

$$\vec{a} = \nabla^2 \Phi$$

Versión puntual $\rightarrow \rho(\vec{r}) = M\delta^3(\vec{r})$. En el caso mas general,

$$\Phi(t, \vec{r}) = -G \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(t, \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Esto establece una interacción a distancia. **Un cambio en la densidad de masa en un instante dado resulta instantáneamente en un cambio en el potencial gravitacional Φ en todo el espacio.**

El propósito de la relatividad general es **buscar una generalización de la ecuación (1) que sea compatible con los postulados de la relatividad especial**. La corrección a la teoría de la RE provista por la RG integra dos ideas generales

1. La geometría del espacio tiempo rige el movimiento de la materia (contenido del principio de equivalencia).
2. La materia provoca la curvatura del espacio tiempo (contenido de las ecuaciones de Einstein).

En mecánica clásica, una partícula libre (en un espacio plano) seguirá una trayectoria descrita por

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = 0$$

que no es nada más que una línea recta.

Luego veremos que en un espacio curvo, las partículas libres seguirán una geodésica, es decir, también una trayectoria que minimiza la distancia entre dos puntos y que está dado por la siguientes ecuaciones paramétricas

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0 \quad (2)$$

Ecuación de un geodésica

y para una partícula cargada

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = \frac{1}{m} F^\mu_{\text{Lorentz}}$$

Por otro lado, las ecuaciones de Einstein, que relacionan la energía (contenido de materia) con la curvatura

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (3)$$

Ecuaciones de Einstein

Lado izquierdo: medida de la curvatura del espacio-tiempo.

Lado derecho: información sobre la energía y momento de la materia.

2.3. Transformaciones ortogonales en \mathbf{E}_3 - 170724

Las leyes de Newton se asientan sobre espacios euclídeos y son invariantes ante transformaciones ortogonales. Dado que los vectores base son mutuamente ortogonales entre sí, cumplen

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$$

Entonces cualquier vector en \mathbf{E}_3 se puede escribir como combinación lineal de los vectores base

$$\bar{e}_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} e_j = a_{ij} e_j \quad \text{Transformación normal}$$

$$e_k = a_{jk} \bar{e}_j \quad \text{Transformación inversa}$$

de modo que, entre dos bases distintas, obtenemos la siguiente relación

$$\bar{e}_i \cdot e_k = a_{ik}$$

al ser vectores unitarios, también siguen la relación

$$\cos(\bar{e}_i, e_k) = a_{ik}$$

donde los a_{ik} son los elementos de la matriz de transformación de 3×3 . Si elegimos un cambio de base $\{\bar{e}_i\}$. La regla de transformación deberá seguir que

$$\delta_{ij} = a_{ik} a_{jk} = a_k^i a_j^k = \delta_j^i$$

(usando el convenio de suma de Einstein) que de manera matricial puede verse como

$$A A^t = A^t A = I$$

Que no es nada más que la condición para una transformación ortogonal. Esto de inmediato resulta en

$$\det(A) = \pm 1$$

Transformaciones ortogonales en \mathbf{E}_3 pertenecen al grupo O_3 . Si el $\det=1$, al grupo SO_3 (S de *special*). Al ser ortogonal implica que $A^t = A^{-1}$.

Un mismo vector lo podemos expresar respecto a dos bases distintas como

$$\vec{r} = x^h e_h = \bar{x}^k \bar{e}_k$$

Escribiendo a la base nueva como combinación lineal de la base antigua obtenemos como transforman las componentes

$$x^j = a_{kj} \bar{x}^k \quad \text{Usando la transformación inversa} \quad (4)$$

y de manera similar para ir de la base antigua a la nueva base

$$\bar{x}^k = a_{kh}x^h \quad \text{Usando la transformación normal} \quad (5)$$

Si derivamos (5)

$$\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j} = a_{kh} \frac{\partial x^h}{\partial x^j} = a_{kh} \delta_{hj} = a_{kj}$$

de manera similar para (4)

$$\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^r} = a_{kj} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial \bar{x}^r} = a_{kj} \delta_{kr} = a_{rj}$$

Por lo tanto, un vector con componentes $\vec{A} = (A^1, A^2, A^3)$, transformará de la siguiente forma

$$\bar{A}^k = a_{kh}A^h = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^h}A^h \quad \text{Normal}$$

$$A^j = a_{hj}\bar{A}^h = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^h}\bar{A}^h \quad \text{Inversa}$$

por lo tanto la relación

$$a_{ij}a_{ik} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} = \delta_{kj} = \delta_j^k$$

que es la relación $AA^t = I$.

2.4. El espacio de Minkowski - 180724

En las transformaciones ortogonales es evidente que $RIR^t = I$. Las transformaciones de Galileo pueden escribirse de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \bar{x}^i &= x^i + a^i, & \bar{t} &= t + a^0 & \text{Traslaciones} \\ \bar{x}^i &= R_{ij}x^j, & R R^t &= I & \text{Rotaciones} \\ \bar{x}^i &= x^i + v^i t, & \bar{t} &= t, \quad v^i = \text{cte} & \text{Boost} \end{aligned}$$

Postulados de la relatividad especial

1. Las leyes de la física son las mismas en todos los marcos inerciales (principio de relatividad)
2. La velocidad de la luz en el vacío es la misma en todos los marcos inerciales.

aquí el **tiempo** juega el papel de un **parámetro** y no de una verdadera coordenada. Lo que mide un reloj en movimiento es la longitud de la curva en el espacio de Minkowski.

El *intervalo espacio-temporal* está dado por

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

donde

$$s^2 = \begin{cases} > 0, & \text{intervalo tipo tiempo} \\ < 0, & \text{intervalo tipo espacio} \\ = 0, & \text{intervalo nulo} \end{cases}$$

El intervalo es **invariante ante transformaciones de Lorentz**.

En forma diferencial, para \mathbf{E}_3 , al intervalo lo podemos escribir como

$$(ds)^2 = \delta_{ij}dx^i dx^j$$

o de manera más general, respecto a una métrica η

$$(ds)^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

Las transformaciones de Lorentz se derivan al establecer un valor constante de c , tal que s^2 es invariante ante cambios de coordenadas inerciales. El espacio de Minkowski M_4 es un espacio real pseudo-euclideo de signatura $(1,3)$, esto es que

$$\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

por lo que, la invarianza del intervalo es esta notación es

$$s^2 = (x^0)^2 - x^i x^i = (\bar{x}^0)^2 - \bar{x}^i \bar{x}^i$$

Partiendo de la invarianza del intervalo tenemos que

$$\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \eta_{\alpha\beta} \bar{x}^\alpha \bar{x}^\beta$$

Pero sabiendo que las coordenadas transforman como

$$\bar{x}^\alpha = \Lambda^\alpha_\mu x^\mu$$

$$\bar{x}^\beta = \Lambda^\beta_\nu x^\nu$$

Sustituyendo en la ecuación anterior nos da la relación

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu \eta_{\alpha\beta}$$

que en forma matricial puede escribirse como

$$\eta = L^t \eta L$$

establece una clara analogía con $I = R^t I R$. El grupo de Lorentz es un grupo pseudo-ortogonal referido como el grupo $O(1,3)$.

2.5. Grupo de Lorentz y transformaciones de lorentz - 220724

La invarianza de la métrica implica que el determinante de L puede ser

$$\det L = \pm 1$$

- Si $\det L = +1$, es una transformación propia
- Si $\det L = -1$, es una transformación impropia

una rotación de los ejes $x^1 - x^2, xy$ se puede escribir como

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta & \sin \delta & 0 \\ 0 & -\sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

podemos tener rotaciones de ángulo imaginario entre direcciones espaciales y temporales. Podemos introducir

$$\tau = ict$$

para que el intervalo nos quede

$$s = i\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + \tau^2}$$

La invarianza en el intervalo es equivalente a la rotación de los ejes en el plano complejo x, τ , en un ángulo δ (imaginario). El observador \bar{O} se mueve hacia la derecha de O con velocidad v . Entonces

$$\tan \delta = \frac{x}{\tau} = \frac{vt}{ict} = -i \frac{v}{t}$$

definiendo a $\delta = i\phi$, (ϕ un real) entonces $\tan \delta = \tan i\phi = i \tanh \phi = -iv/c$, entonces

$$\tanh \phi = -\frac{v}{c}$$

con la propiedad $\cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi = 1$ obtenemos

$$\cosh^2 \phi = \frac{1}{1 - \tanh^2 \phi} = \frac{1}{1 - v^2/c^2} = \gamma^2$$

entonces la rotación la escribimos como

$$\begin{pmatrix} \cos(i\phi) & \sin(i\phi) \\ -\sin(i\phi) & \cos(i\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\tau} \\ \bar{x} \end{pmatrix}$$

como $\cos(i\phi) = \cosh \phi$ y $\sin(i\phi) = i \sinh \phi$, entonces

$$\begin{pmatrix} \cosh \phi & i \sinh \phi \\ -i \sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ict \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\bar{ct} \\ \bar{x} \end{pmatrix} \quad (6)$$

entonces las transformaciones son

$$\begin{cases} ict \cosh \phi + ix \sinh \phi = i\bar{ct} \\ ct \sinh \phi + x \cosh \phi = \bar{x} \end{cases}$$

o quitando la i

$$\begin{cases} ct \cosh \phi + x \sinh \phi = \bar{ct} \\ ct \sinh \phi + x \cosh \phi = \bar{x} \end{cases}$$

esto se puede verificar que son las transformaciones de Lorentz que conocemos. De aquí vemos que pueden escribirse como

$$\begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi \\ \sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{ct} \\ \bar{x} \end{pmatrix}$$

2.6. Boosts de Lorentz y trayectorias en el espacio de Minkowski - 260724

Del último sistema de ecuaciones tenemos

$$\begin{cases} \cosh \phi(ct + x \tanh \phi) = \bar{ct} \\ \cosh \phi(ct \tanh \phi + x) = \bar{x} \end{cases}$$

Sabemos que $\tanh \phi = -v/c$ y que $\cosh \phi \geq 1$, lo que está de acuerdo con $\cosh \phi = \gamma$. Entonces

$$\begin{cases} \gamma(ct - xv/c) = \bar{ct} \\ \gamma(x - vt) = \bar{x} \end{cases}$$

que son precisamente las transformaciones de Lorentz que alternativamente pueden escribirse como

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v/c \\ -\gamma v/c & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{ct} \\ \bar{x} \end{pmatrix} \quad \text{Normal}$$

A la matriz de transformación de (6), si le sacamos la transpuesta conjugada podemos hallar las transformaciones inversas repitiendo el mismo procedimiento. Quedando así la transformación inversa

$$\begin{pmatrix} \gamma & \gamma v/c \\ \gamma v/c & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad \text{Inversa}$$

Según el intervalo

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &= c^2 \Delta t^2 - \Delta \vec{r}^2 \\ &= c^2 \Delta t^2 \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{\Delta \vec{r}^2}{\Delta t^2} \right) \\ &= c^2 \Delta t^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \\ &= \frac{c^2 \Delta t^2}{\gamma^2} \\ &= c^2 \Delta \tau^2 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} c \Delta \tau &= \frac{c \Delta t}{\gamma} \\ \Delta t &= \gamma \Delta \tau \end{aligned}$$

con τ siendo el tiempo propio. Entonces, en forma diferencial podemos hacer la siguiente relación.

$$c^2 d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = ds^2$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} cd\tau &= \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \\ &= \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda \\ &= \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau \end{aligned}$$

así hallamos que

$$c^2 = \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

Ahora definimos

$$U^\mu(\tau) := \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad \text{Cuadrivelocidad}$$

con esta definición, la ecuación anterior (producto escalar) se puede escribir como

$$\eta_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = c^2 \quad \text{Norma vector cuadrivelocidad} \quad (7)$$

Para un **fotón** ($v = c$), que tiene un intervalo tipo nulo, es decir $ds^2 = 0$. Que implica

$$\eta_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = 0$$

para determinar este cuadrivector de velocidad en términos de la velocidad newtoniana, usemos la definición y la regla de la cadena.

$$\begin{aligned} U &= \frac{dx^\mu}{d\tau} \\ &= \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} \\ &= \gamma \frac{dx^\mu}{dt} \\ &= \gamma \left(c, \frac{d\vec{x}}{dt} \right) \\ &= \gamma(c, \vec{v}) \end{aligned}$$

sabiendo que $dt = \gamma d\tau$ y que $x^0 = ct$.

U^μ No es una velocidad newtoniana de una partícula, sino la velocidad que indica el movimiento de la partícula por el espacio-tiempo.

2.7. Líneas de mundo, cuadrivelocidad, energía y momentum relativista - 240724

Al ser (7) igual a una constante, es invariante ante transformaciones de Lorentz (lo cual puede verificarse sustituyendo una transformación).

Cuadrivector aceleración: Tomando la derivada de \vec{U} respecto del tiempo propio

$$\alpha^\mu(\tau) \equiv \frac{dU^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} \quad \text{cuadrivector aceleración}$$

viendo esto como un producto escalar

$$\frac{d(\vec{U} \cdot \vec{U})}{d\tau} = 2\vec{U} \cdot \frac{d\vec{U}}{d\tau}$$

dado que $\vec{U} \cdot \vec{U} = c^2$, es decir, una constante

$$\vec{U} \cdot \frac{d\vec{U}}{d\tau} = 0$$

esto nos dice que, la velocidad \vec{U} y la aceleración $\vec{\alpha}$ son siempre ortogonales.

Esto implica que para un sistema de referencia que se mueve con la partícula (MRC, Comóvil), la aceleración es siempre un vector espacial

$$\left. \frac{d\vec{U}}{d\tau} \right|_{MRC} \rightarrow (0, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$$

dado que la velocidad es

$$U_{MRC}^\mu = (c, 0, 0, 0)$$

y debe cumplir $\vec{U} \cdot \vec{\alpha} = 0$. Por otro lado, en un sistema arbitrario, la aceleración tiene las componentes

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} &= \frac{d\vec{U}}{d\tau} \\ &= \frac{d\vec{U}}{dt} \frac{dt}{d\tau} \\ &= \gamma \frac{d}{dt} (\gamma c, \gamma \vec{v}) \\ &= \gamma \left(c \frac{d\gamma}{dt}, \vec{v} \frac{d\gamma}{dt} + \gamma \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \end{aligned}$$

Cuadrivector momentum: Se define de manera análoga al momento newtoniano

$$\begin{aligned} P^\mu &= mU^\mu \\ &= \gamma(mc, m\vec{v}) \end{aligned}$$

si expandimos en series la primera componente, podemos escribirlo de la siguiente forma

$$\begin{aligned} P^\mu &= (E/c, \gamma m\vec{v}) \\ &= (E/c, \vec{p}) \end{aligned}$$

La magnitud del cuadrivector momentum es

$$\vec{P} \cdot \vec{P} = m^2 \vec{U} \cdot \vec{U} = m^2 c^2$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} P^\mu P^\nu &= (P^0)^2 - ((P^1)^2 + (P^2)^2 + (P^3)^2) \\ &= \frac{E^2}{c^2} - p^2 \\ &= m^2 c^2 \end{aligned}$$

lo que resulta en la ecuación

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$$

2.8. Vectores tangente - 250724

Espacio vectorial: clase con estructura algebraica.

$$\text{Espacio tangente} = T_p$$

Unión de todos los espacios tangentes = fibra tangente $T(M)$.

Si tenemos

$$\vec{x}(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$$

entonces

$$\vec{v}(t) = \left(\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt} \right) \in T_p$$

En el espacio de Minkowski, las componentes del cuadrivector de velocidad es

$$V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

que son vectores tangentes a una trayectoria cuyas coordenadas están parametrizadas por λ . y escrito respecto a una base $\{e_\mu\}$, con $\mu = 1, \dots, \dim(T_p)$.

$$V = V^\mu e_\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} e_\mu$$

Definición. *Variedad:* Una variedad \mathcal{M} de dimensión n , es un conjunto de puntos que localmente se aproxima al espacio euclideo \mathbb{R}^n en cada punto.

Definimos al vector tangente en p a una curva γ de la variedad \mathcal{M} , como una aplicación del espacio de funciones \mathcal{C}^∞ en los reales, de acuerdo con

$$\begin{aligned} V : \quad \mathcal{C}^\infty &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto V_p(f) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

tal que

$$V_p(f) = \left. \frac{d}{d\lambda} f(\gamma(\lambda)) \right|_{p=\gamma(0)} \quad \text{Derivada direccional, vec tangente en } p$$

Cumple

- Linealidad

$$V_p(\alpha f + \beta g) = \alpha V_p(f) + \beta V_p(g)$$

- Regla de Leibniz

$$V_p(fg) = V_p(f)g + fV_p(g)$$

y si le añadimos coordenadas,

$$V_p(f) = \frac{d}{d\lambda} f(x^\mu(\gamma(\lambda))) \Big|_{p=\gamma(0)}$$

entonces

$$V_p(f) = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu} f(x^\mu)$$

o

$$V_p(f) = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (f)$$

tenemos que

$$V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu = e_\mu$$

así entonces

$$V = V^\mu e_\mu = V^\mu \partial_\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\mu = \frac{d}{d\lambda}$$

que es la definición de un vector tangente.

2.9. Transformación de componentes de vectores y vectores base - 290724

Si queremos transformar entre dos sistemas de coordenadas $\{x^\mu\} \rightarrow \{\bar{x}^\alpha\}$. Tenemos un objeto geométrico que es independiente del sistema de coordenadas, por lo que

$$V = V^\mu e_\mu = \bar{V}^\alpha \bar{e}_\alpha$$

las componentes transforma como

$$\begin{aligned} \bar{V}^\alpha &= \frac{d\bar{x}^\alpha}{d\lambda} \\ &= \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \\ &= \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu} V^\mu \end{aligned}$$

por tanto, transforma como

$$\boxed{\bar{V}^\alpha = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu} V^\mu}$$

debido a la independencia del sistema de coordenadas

$$V^\mu e_\mu = \bar{V}^\alpha \bar{e}_\alpha = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu} V^\mu \bar{e}_\alpha$$

comparando, podemos decir que

$$\boxed{e_\mu = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \bar{e}_\alpha}$$

Multiplicando apropiadamente por la inversa, obtenemos

$$\boxed{\bar{e}_\beta = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\beta} e_\mu}$$

Entonces, las transformaciones quedan

$$\begin{cases} \bar{V}^\alpha = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu} V^\mu \\ \bar{e}_\alpha = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} e_\mu \end{cases}$$

Los vectores base transforman con la inversa de la transformación. Luego, viéndolo como un diferencial total

$$\begin{aligned}\Delta \bar{x}^\mu &= \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \Delta x^\alpha \\ &= \Lambda^\mu_\alpha \Delta x^\alpha\end{aligned}$$

$$\boxed{\Lambda^\mu_\alpha = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha}}$$

Tenemos también la siguiente aplicación lineal

$$\begin{aligned}\Omega : \quad V &\rightarrow w \\ x &\mapsto w(x) \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

toma un elemento del espacio V y lo lleva a w .

El conjunto de todas las transformaciones lineales entre V y w es un Homeomorfismo.

Espacio dual:

$$\text{Espacio cotangente} = T_p^*$$

$$w \in T_p^*$$

$$\begin{aligned}w : \quad T_p &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto w(x) \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Las bases coordenadas serán $\{e_\mu\} \in T_p$, $\{\Theta^\alpha\} \in T_p^*$. De tal forma que, **los elementos de la base dual se definen como aplicaciones que satisfacen la propiedad:**

$$\Theta^\alpha(e_\mu) = \delta^\alpha_\mu$$

a diferencia de $V = V^\mu e_\mu$, $w = w_\mu \Theta^\mu$. Entonces

$$w(V) = w_\mu V^\mu \in \mathbb{R}$$

que se llama contracción del vector V y el vector dual w ($w(V) = V(w)$).

2.10. Espacio dual y covectores, transformación de covectores - 300724

Los elementos del espacio dual se conocen como **vectores duales** o **1-formas**.

Una **1-forma** es un **covector** que vive en T_p^*

Si tenemos al covector $d\phi$

$$\begin{aligned}d\phi : \quad T_p &\rightarrow \mathbb{R} \\ V &\mapsto d\phi(V) = V(\phi) = \frac{d\phi}{d\lambda}\end{aligned}$$

que es una 1-forma, el gradiente de una función suave.
por lo que

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = d\phi_\mu V^\mu$$

con

$$d\phi_\mu = \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \quad \text{componentes de un covector}$$

Entonces

$$\begin{aligned} V(\phi) &= d\phi(V) \\ &= d\phi_\mu V^\mu \end{aligned}$$

El covector anterior, en términos de los vectores base es

$$d\phi = d\phi_\mu \Theta^\mu = \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \Theta^\mu \quad \text{Covector}$$

podemos pensarlo en forma concreta como

$$\begin{cases} w = w_\mu dx^\mu \\ V = V^\mu \partial_\mu \end{cases}$$

Esto nos permite introducir a los **TENSORES**.

$$T : \underbrace{T_p^* \times T_p^* \times \cdots T_p^*}_{k \text{ veces}} \times \underbrace{T_p \times T_p \times \cdots T_p}_{l \text{ veces}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

entonces tenemos un tensor de rango (k, l) .

$$V : T_p^* \longrightarrow \mathbb{R} \quad (1, 0)$$

$$w : T_p \longrightarrow \mathbb{R} \quad (0, 1)$$

2.11. Tensores - 310724

Encontrar la matriz de transformación para la 2-Esfera S^2 . $(x, y) \rightarrow (r, \theta)$.

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \end{cases}$$

La transformación estará dada por

$$\bar{X}^\mu = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} X^\nu$$

lo que se traduce a

$$\begin{aligned} r &= \frac{\partial r}{\partial x} x + \frac{\partial r}{\partial y} y \\ \theta &= \frac{\partial \theta}{\partial x} x + \frac{\partial \theta}{\partial y} y \end{aligned}$$

lo que en forma matricial es

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{Normal}$$

y para la transformación inversa la escribimos

$$X^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} \bar{X}^\nu$$

que queda en forma matricial

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \quad \text{Inversa}$$

Haciendo las derivadas, resulta en

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{1}{r} \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

que justamente resulta ser que $\Omega^{-1} = \Lambda$. Es decir, $\Lambda\Omega = I$.

Los vectores base transforman como

$$\bar{e}_\alpha = \Omega'^\beta{}_\alpha e_\beta$$

quedando así

$$\begin{pmatrix} e_r \\ e_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix}$$

Mientras que **las 1-forma base transforman como**

$$d\phi^\mu = \Omega'^\mu{}_\alpha dx^\alpha$$

$$d\theta = \Omega'^\theta{}_x dx + \Omega'^\theta{}_y dy$$

$$= \frac{\partial \theta}{\partial x} dx + \frac{\partial \theta}{\partial y} dy$$

$$= -\frac{1}{r} \sin \theta dx + \frac{1}{r} \cos \theta dy$$

y también de forma similar

$$dr = \cos \theta dx + \sin \theta dy$$

en forma matricial será

$$\begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{1}{r} \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

Transformación entre vectores y 1-formas ($\Lambda^t = \Lambda^{-1}$, en transformación ortogonal)

$$\bar{X}^\mu = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} X^\nu \quad \text{Vector}$$

$$w_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} w_\nu \quad \text{1-forma}$$

$$\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \xrightarrow{\text{inversa}} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} \xrightarrow{\text{transpuesta}} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu}$$

Producto exterior Producto tensorial
Tenemos

$$V, W \in T_p$$

$$T = V \otimes W : T_p^* \times T_p^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(w, \eta) \mapsto T(w, \eta) \in \mathbb{R}$$

Rango (k, l) , producto tensorial de k vectores y l 1-formas.

Los tensores tienen una propiedad de multilinealidad dada por

$$T(aw + b\eta, cV + dW) = acT(w, V) + adT(w, W) + bcT(\eta, V) + bdT(\eta, W)$$

Si tenemos dos tensores

$$T \text{ de rango } (k, l)$$

$$S \text{ de rango } (m, n)$$

Definimos un nuevo tensor de rango $(k + m, l + n)$ como el producto tensorial $T \otimes S$

$$T \otimes S(w^{(1)}, \dots, w^{(k+m)}, V^{(1)}, \dots, V^{(l+n)}) = \\ T(w^{(1)}, \dots, w^{(k)}, V^{(1)}, \dots, V^{(l)})S(w^{(k+1)}, \dots, w^{(k+m)}, V^{(l+1)}, \dots, V^{(l+n)})$$

2.12. Transformación de componentes de tensores - 010824

Un ejemplo de un tensor de rango $(1, 1)$ es el producto $U \otimes w$ con $U \in T_p$ y $w \in T_p^*$ (una 1-forma).

Los vectores base y vectores base duales los distinguimos mediante

$$e_\mu = \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \text{Base coordenada}$$

$$\theta^\mu = dx^\mu \quad \text{Base dual}$$

Un base del espacio de todos los tensores de rango (k, l) se obtiene al tomar el producto tensorial de todos los vectores base y vectores duales.

$$e_{\mu^{(1)}} \otimes e_{\mu^{(2)}} \otimes \dots \otimes e_{\mu^{(k)}} \otimes dx^{\nu^{(1)}} \otimes dx^{\nu^{(2)}} \otimes \dots \otimes dx^{\nu^{(l)}}$$

en esta base, un tensor T se escribe

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} e_{\mu^{(1)}} \otimes e_{\mu^{(2)}} \otimes \dots \otimes e_{\mu^{(k)}} \otimes dx^{\nu^{(1)}} \otimes dx^{\nu^{(2)}} \otimes \dots \otimes dx^{\nu^{(l)}}$$

Al evaluar la acción de un tensor de rango $(1, 1)$ sobre una 1-forma w y un vector V obtenemos justamente un escalar

$$T(w, V) = T^\mu{}_\nu e_\mu \otimes \theta^\nu(w, V) = T^\mu{}_\nu w_\mu V^\nu$$

(Los cálculos se pueden verificar en la página 41 de las notas de J. Ponciano)

Generalizando este último resultado

$$T(w^{(1)}, \dots, w^{(k)}, V^{(1)}, \dots, V^{(l)}) = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} w_{\mu_1} \dots w_{\mu_k} V^{\nu_1} \dots V^{\nu_l}$$

al transformar un tensor debe ser invariante ante el sistema coordenado. Haciendo un ejemplo usando un tensor de rango $(1, 1)$ tendríamos

$$T(w, V) = T^\mu{}_\nu w_\mu V^\nu \\ = \bar{T}^\alpha{}_\beta w_\alpha V^\beta$$

Las reglas de transformación son las siguientes

$$\bar{w}_\alpha = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} w_\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha w_\mu \quad \text{Transf. para 1-formas}$$

$$\bar{V}^\beta = \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^\nu} V^\nu = \Lambda^\beta{}_\nu V^\nu \quad \text{Transf. para vectores}$$

sabiendo esto y operando encontramos que el tensor anterior transforma como

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^\nu} \bar{T}^\alpha{}_\beta$$

y su inversa será

$$\bar{T}^\gamma{}_\sigma = \frac{\partial \bar{x}^\gamma}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\sigma} T^\mu{}_\nu$$

Generalizando este resultado

$$\bar{T}^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l} = \left(\frac{\partial \bar{x}^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \right) \left(\frac{\partial \bar{x}^{\mu_2}}{\partial x^{\alpha_2}} \right) \dots \left(\frac{\partial \bar{x}^{\mu_k}}{\partial x^{\alpha_k}} \right) \cdot \left(\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \bar{x}^{\nu_1}} \right) \dots \left(\frac{\partial x^{\beta_l}}{\partial \bar{x}^{\nu_l}} \right) T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}{}_{\beta_1 \dots \beta_l}$$

2.13. El tensor métrico, isomorfismo entre vectores y 1-formas, inversa del tensor métrico - 050824

Recordemos que

$$V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \quad w_\mu = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}, \quad \text{comp. vector gradiente}$$

y al hacer una transformación para:

Componentes de vectores

$$\bar{V}^\alpha = \frac{d\bar{x}^\alpha}{d\lambda} = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu} V^\mu$$

Componentes de 1-formas

$$\bar{w}_\alpha = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}^\alpha} = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} w_\mu$$

Para ver mejor como transforma un tensor de rango (1,1) veámoslo con color

$$\bar{T}^\alpha{}_\beta = \left(\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} \right) T^\mu{}_\nu$$

Tensor métrico: Un tensor de rango (0,2)

$$g : T_p \times T_p \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(V, W) \mapsto g(V, W) = g_{\mu\nu} V^\mu W^\nu \in \mathbb{R}$$

algunas propiedades

- Es simétrico.

$$g(V, W) = g(W, V)$$

- No degenerado

$$g(V, W) = 0, \quad \forall w \in T_p \text{ si y solo si } V = 0$$

- g es positivo definido

$$g(V, W) \geq 0$$

la igualdad se da si y solo si $V = 0$.

además

$$g = g_{\alpha\beta}\theta^\alpha \otimes \theta^\beta = g_{\alpha\beta}dx^\alpha \otimes dx^\beta$$

Recordemos que

$$\partial_\mu(dx^\alpha) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\alpha$$

$$g(\partial_\mu, \partial_\nu) = g_{\mu\nu}$$

$$U \cdot U = g(U, U) = g_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta \quad \text{Norma de un vector}$$

El tensor métrico sobre dos vectores es el producto escalar.

Con el tensor métrico podemos ir de $T_p \rightarrow T_p^*$ o $T_p^* \rightarrow T_p$. Esto lo logramos considerando un vector fijo $V \in T_p$,

$$\begin{aligned} \tilde{V} &\equiv g(V, \cdot) : T_p \longrightarrow \mathbb{R} \\ W &\mapsto g(V, W) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

este objeto es una 1-forma. Lo podemos verificar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} g(V, \cdot) &= g_{\mu\nu}(dx^\mu, V^\alpha \partial_\mu) \otimes (dx^\nu, \cdot) \\ &= g_{\mu\nu}V^\alpha \delta_\alpha^\mu \otimes (dx^\nu, \cdot) \\ &= g_{\mu\nu}V^\mu (dx^\nu, \cdot) \quad \text{que justamente es una 1-forma} \end{aligned}$$

de tal manera que la componente de esta 1-forma será

$$\boxed{V_\nu = g_{\mu\nu}V^\mu} \quad \text{pasamos de vector a 1-forma}$$

Estamos pasando del espacio tangente T_p al espacio cotangente T_p^* a través de la **métrica**. De forma similar, con la inversa de la métrica conseguimos

$$\boxed{V^\mu = g^{\mu\nu}V_\nu} \quad \text{pasamos de 1-forma a vector}$$

Estamos pasando del espacio cotangente T_p^* al espacio tangente a través de **la inversa de la métrica** g^{-1} . Esto se ha logrando definiendo

$$\begin{aligned} g^{-1}(\tilde{V}, \cdot) &: T_p^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\mapsto g^{-1}(\tilde{V}, w) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2.14. El tensor métrico de S^2 , tensores simétricos y antisimétricos - 060824

El tensor métrico para una 2-esfera con radio constante está dado por la siguiente ecuación de línea

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$$

que en forma matricial se puede escribir como

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

y su inversa

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \frac{1}{\sin^2 \theta} \end{pmatrix}$$

recordemos que $gg^{-1} = I$, es decir también

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\sigma} = \delta_{\mu}^{\sigma}$$

Lemma: Existe un sistema de coordenadas $\{y^{\alpha}\}$ en el cual g es diagonal y se reduce a elementos ± 1 .

$$\eta_{\mu\nu} = (+1, -1, -1, -1) \quad \text{o} \quad (-1, +1, +1, +1)$$

para metricas lorentzianas tenemos que

$$n - \sigma = 2$$

con

- σ suma de los elementos de la diagonal
- n dimensión del espacio-tiempo

En relatividad general: El espacio curvo se reduce localmente a una métrica de Minkowski.

- **Tensor simétrico:** es tal que $T_{\mu\nu}^{\rho} = T_{\nu\mu}^{\rho}$
- **Tensor antisimétrico:** es tal que $T_{\mu\nu} = -T_{\nu\mu}$

Si tenemos un tensor cualquiera $T^{\mu\nu}$, siempre lo podremos escribir como la suma de un tensor simétrico y uno antisimétrico de la siguiente forma

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}T^{\mu\nu} + \frac{1}{2}T^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}T^{\mu\nu} + \frac{1}{2}T^{\mu\nu} + \frac{1}{2}T^{\nu\mu} - \frac{1}{2}T^{\nu\mu} \\ &= \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu}) + \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu}) \\ &= S^{\mu\nu} + A^{\mu\nu} \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} S^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu}) && \text{Tensor simétrico} \\ A^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu}) && \text{Tensor antisimétrico} \end{aligned}$$

Principio de mínima acción

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L \quad L = T - V$$

Una trayectoria clásica es un extremo de S . Trayectoria que minimiza la acción S .

$$x(t_1) = x_1$$

$$x(t_2) = x_2$$

La acción tiene dimensionales de $J \cdot s$, es decir, dimensionales de momento angular.

$$x + \delta x \rightarrow \delta S = 0$$

$$\delta x(t_1) = 0 \quad \delta x(t_2) = 0$$

$$\delta S = 0 \rightarrow \text{Ecuaciones de Euler-Lagrange}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

En una partícula libre (que solo posee energía cinética) las ecuaciones de Euler-Lagrange nos dará la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \quad \text{Partícula libre en espacio plano}$$

que da como resultado la ecuación de una recta. **Simetría de la naturaleza**

- Espacio es homogéneo: L de la partícula libre es $L = L(\dot{x})$. Es independiente de dónde esté en el espacio.
- Espacio isótropo. No depende de la dirección.

Ejercicio: Probar la invarianza galileana de la acción ante un Boost de Galileo.

A L que es proporcional al cuadrado de la velocidad, $L = \alpha v^2$, con $\alpha = m/2$. También lo podemos escribir como

$$L = \frac{1}{2} \delta_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$$

2.15. Partícula libre clásica - 070824

En general, un elemento de línea lo podemos escribir respecto a una métrica como

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

y la métrica puede depender de las coordenadas, de modo que

$$g_{ij} = g_{ij}(x^i)$$

Podemos escribir al Lagrangiano de la siguiente forma

$$L = \frac{m}{2} g_{kj} \dot{x}^k \dot{x}^j$$

Entonces, es natural preguntarnos ¿cuál será la trayectoria de una partícula en esta trayectoria más general? Eso lo podemos averiguar usando las ecuaciones de Euler-Lagrange.

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0}$$

al obtener todas estas derivadas del lagrangiano anterior, tenemos lo siguiente

$$\ddot{x}^l + \frac{1}{2} g^{li} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} \right) \dot{x}^k \dot{x}^j = 0$$

o de forma más compacta

$$\boxed{\ddot{x}^l + \Gamma^l_{jk} \dot{x}^j \dot{x}^k = 0} \quad \text{Ecuación de una geodésica}$$

donde

$$\Gamma^l_{jk} = \frac{1}{2} g^{li} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} \right)$$

son los **Símbolos de Christoffel**.

Cuando todos los símbolos de Christoffel son cero, la ecuación se reduce al de una partícula libre en un espacio plano $\ddot{x}^i = 0$.

Ejemplo: En la superficie de una esfera

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$$

con

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Con las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenemos las siguientes ecuaciones de movimiento.

$$\ddot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = 0$$

$$\ddot{\phi} = 0$$

De estas ecuaciones podemos determinar los símbolos de Christoffel más fácilmente, que en este caso, se reduce a únicamente uno

$$\ddot{\theta} + \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} \dot{\phi}^2 = 0$$

entonces

$$\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\sin \theta \cos \theta$$

2.16. Acción de la partícula libre relativista - 080824

Repaso problema 1 de la hoja de trabajo.

Un boost en x y un boost en y se puede escribir como

$$\Lambda_x = \begin{pmatrix} \cosh \phi_1 & \sinh \phi_1 & 0 & 0 \\ \sinh \phi_1 & \cosh \phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_y = \begin{pmatrix} \cosh \phi_2 & 0 & \sinh \phi_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh \phi_2 & 0 & \cosh \phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sabiendo que

$$\cosh \phi_1 = \gamma_x, \quad \tanh \phi_1 = -v_x/c$$

$$\cosh \phi_2 = \gamma_y, \quad \tanh \phi_y = -v_y/c$$

Aplicar un boost en x y luego un boost en y sería equivalente a

$$\Lambda_y \Lambda_x X$$

con

$$X = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

con $x^0 = ct$.

La composición de 2 transformaciones de Lorentz se puede descomponer en 1 boost y 1 rotación.

Componer 2 boost en una misma dirección hace que las transformaciones sean conmutativas, es decir,

$$\Lambda_x \Lambda'_x = \Lambda'_x \Lambda_x = \begin{pmatrix} \cosh \phi_3 & \sinh \phi_3 & 0 & 0 \\ \sinh \phi_3 & \cosh \phi_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con

$$\phi_3 = \phi_1 + \phi_2, \quad v = v_x + v'_x$$

Recordemos que

$$ds = \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$$

La acción relativista estará dada por

$$S = -mc \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma}} \quad \text{Acción relativista}$$

Partículas físicas son aquellas tales que lo de dentro de la raíz sea positivo, es decir, trayectorias tipo tiempo. Se puede demostrar que esta acción relativista se puede reducir a la acción clásica (de una partícula libre) tomando el límite relativista

$$\|\vec{v}\| \ll c$$

2.17. Simetrías de la acción relativista, ecuaciones geodésicas - 120824

La acción relativista es **invariante** ante una reparametrización.

$$\bar{S} = -mc \int_{\bar{\sigma}_1}^{\bar{\sigma}_2} d\bar{\sigma} \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\bar{\sigma}} \frac{dx^\nu}{d\bar{\sigma}}} = -mc \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma}} = S$$

La definición de tiempo propio es

$$\tau = \frac{1}{c} \int ds$$

$$\tau(\sigma') = \frac{1}{c} \int_{\sigma'_1}^{\sigma'_2} d\sigma' \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma'} \frac{dx^\nu}{d\sigma'}}, \quad dt = \gamma d\tau$$

esto debido a que

$$ds^2 = c^2 d\tau^2$$

esto con la signatura $\eta = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ y $-c^2$ con la otra signatura.

El tiempo propio es una cantidad invariante de Lorentz. Usando $\sigma' = \tau$ estamos en el marco de la partícula que se mueve.

$$S = -mc \int dt \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}}, \quad \text{Observador } O$$

$$S = -mc \int d\tau \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}, \quad \text{Marco de la partícula}$$

El tiempo propio es proporcional a la acción de una partícula.

- Mínimo de la acción
- Máximo del tiempo propio

En el espacio de Minkowski, la recta es la distancia más larga entre dos puntos.

Tomando que

$$L = \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}, \quad \dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\sigma}$$

y usando las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0$$

encontramos que

$$g_{\alpha\mu} \ddot{x}^\mu + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{1}{L} \frac{dL}{d\sigma} g_{\alpha\mu} \dot{x}^\mu \quad (8)$$

similar al de la partícula libre ([en azul](#)) que ya habíamos obtenido, a diferencia de que ahora tenemos un término extra a la derecha.

2.18. Transformación afín del tiempo propio - 130824

Ejercicio: Sobre problema de la cuadriaceleración de la hoja de trabajo 1.

Según nuestra definición de tiempo propio

$$\tau = \frac{1}{c} \int d\sigma L \rightarrow d\tau = \frac{1}{c} L d\sigma$$

de la ecuación (8), consideramos el parámetro σ como

$$\sigma = \bar{\tau} = a\tau + b \quad \text{Relación afín de } \tau$$

así entonces

$$d\sigma = a d\tau$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} d\tau &= \frac{1}{c} L d\sigma \\ &= \frac{1}{c} L (a d\tau) \\ &= \frac{La}{c} d\tau \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\frac{La}{c} = 1 \longrightarrow L = \frac{c}{a} = \text{cte.}$$

esto nos indica que, al ser L constante

$$\frac{dL}{d\sigma} = 0$$

Entonces en la ecuación (8), nuestro caso relativista se reduce al caso clásico (pero tener cuidado que ahora el parámetro es τ)

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0, \quad \text{con } \dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$$

2.19. Acción no relativista y en presencia de un potencial - 140824

La acción no relativista, con un potencial lo conocemos como

$$S_{\text{no-rel}} = \int dt \left(\frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x}) \right)$$

con $V(\vec{x}) = m\phi(\vec{x})$.

Ahora construimos la acción relativista de tal manera que tomando el límite no relativista se reduzca a la acción clásica $S_{\text{no-rel}}$. Si la construcción es la siguiente

$$S = -mc \int dt \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} + 2\phi$$

al tomar el límite relativista, de velocidades bajas comparadas con c , entonces esta acción justamente se reduce a la acción clásica definida anteriormente. Ahora, es útil que ϕ lo incluyamos en la métrica.

Entonces la acción relativista sigue quedando

$$S = -mc \int dt \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}}$$

con

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$$

De esta manera observamos que no existen fuerzas, o potenciales, todo es producto de la **geometría del espacio-tiempo**.

Por ejemplo, para un campo gravitacional

$$\phi = -\frac{GM}{r} \longrightarrow g_{00} = 1 - \frac{2GM}{rc^2}$$

Otro ejemplo, la **Métrica de Schwarzschild** que nos ayuda a describir el movimiento de objetos en las cercanías de un objeto masivo como una estrella. Por ejemplo, la descripción del perihelio de mercurio. Esta métrica tiene la forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Fuerza \longrightarrow geometría del espacio-tiempo.

2.20. Repaso, cálculos con tensores - 190824

Ejercicio: ejercicio 4 de la hoja de trabajo 1.

Si tenemos U y h tal que

$$U^\alpha U_\alpha = -1, \quad h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + U_\mu U_\nu$$

calcular

- $h_{\mu\nu} U^\mu$
- $h_\nu^\mu h_\mu^\lambda$
- h_μ^μ

entonces

■

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} U^\mu &= (g_{\mu\nu} + U_\mu U_\nu) U^\mu \\ &= g_{\mu\nu} U^\mu + U_\mu U_\nu U^\mu \\ &= g_{\mu\nu} U^\mu - U_\nu \\ &= U_\nu - U_\nu \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
h_\nu^\mu &= g^{\mu\lambda} h_{\lambda\nu} \\
&= g^{\mu\lambda} (g_{\lambda\nu} + U_\lambda U_\nu) \\
&= g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} + g^{\mu\lambda} U_\lambda U_\nu \\
&= \delta_\nu^\mu + U^\mu U_\nu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_\mu^\lambda &= g^{\lambda\nu} h_{\nu\mu} \\
&= g^{\lambda\nu} (g_{\nu\mu} + U_\nu U_\mu) \\
&= g^{\lambda\nu} g_{\nu\mu} + g^{\lambda\nu} U_\nu U_\mu \\
&= \delta_\mu^\lambda + U^\lambda U_\mu
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
h_\nu^\mu h_\mu^\lambda &= (\delta_\nu^\mu + U^\mu U_\nu)(\delta_\mu^\lambda + U^\lambda U_\mu) \\
&= \delta_\nu^\mu \delta_\mu^\lambda + \delta_\nu^\mu U^\lambda U_\mu + \delta_\mu^\lambda U^\mu U_\nu + U^\mu U_\nu U^\lambda U_\mu \\
&= \delta_\nu^\lambda + U^\lambda U_\nu + U^\lambda U_\nu - U^\lambda U_\nu \\
&= \delta_\nu^\lambda + U^\lambda U_\nu \\
&= h_\nu^\lambda
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$h_\nu^\mu h_\mu^\lambda = h_\nu^\lambda$$

■

$$h_m^\mu u = \delta_m^\mu u + U^\mu U_\mu = 4 - 1 = 3$$

2.21. Repaso, hallar métrica en nuevo sistema coordenado - 200824

Si tenemos el cambio de coordenadas dado por

$$\begin{cases} t = R \cosh T \\ x = R \sinh T \end{cases}$$

El elemento de línea estará dado por (métrica de Rindler)

$$ds^2 = dR^2 - R^2 dT^2$$

(partiendo del hecho de que $ds^2 = -dt^2 + dx^2$) y la métrica será

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Usando el hecho de que $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ y el cambio de coordenadas hallamos que

$$x^2 - t^2 = R^2$$

y para R constante, tenemos hipérbolas abiertas hacia la derecha (e izquierda). Por otro lado, usando también el cambio de coordenadas obtenemos

$$\frac{t}{x} = \tanh T = C_T \longrightarrow t = C_T x$$

Usando T constante, tenemos ecuaciones de rectas. Sería interesantes descubrir si los vectores base de este cambio de coordenadas son ortogonales. Lo determinamos de la siguiente manera. Usando

$$\bar{e}_\alpha = \Omega_\alpha^\beta e_\beta$$

entonces

$$\begin{aligned}\bar{e}_R &= \Omega_R^t e_t + \Omega_R^x e_x \\ &= \frac{\partial t}{\partial R} e_t + \frac{\partial x}{\partial R} e_x \\ &= \sinh T e_t + \cosh T e_x\end{aligned}$$

por otra parte

$$\begin{aligned}\bar{e}_T &= \Omega_T^t e_t + \Omega_T^x e_x \\ &= \frac{\partial t}{\partial T} e_t + \frac{\partial x}{\partial T} e_x \\ &= R \cosh T e_t + R \sinh T e_x\end{aligned}$$

debido a que solo nos interesa la dirección del vector, podemos considerar $R = 1$ solo en este caso

$$\bar{e}_T = \cosh T e_t + \sinh T e_x$$

Ahora podemos ya podemos obtener el producto escalar

$$\begin{aligned}\bar{e}_T \cdot \bar{e}_R &= \eta(e_R, e_T) \\ &= \eta_{ij} e_R^i e_T^j \\ &= \eta_{11} e_R^1 e_T^1 + \eta_{22} e_R^2 e_T^2 \\ &= -\sinh T \cosh T + \sinh T \cosh T \\ &= 0\end{aligned}$$

Entonces los vectores base son ortogonales entre sí.

2.22. Repaso, nuevo sistema coordenado p2 - 210824

Del problema anterior, podemos deducir que la velocidad de la partícula es

$$v(t) = \frac{ct}{\sqrt{\left(\frac{R}{c}\right)^2 + t^2}}$$

y podemos notar que v siempre será menor que c .

Repaso de

- Transformación de vectores base $\bar{e}_\nu = \Lambda_\nu^\mu e_\mu$
- Transformación de componentes de vectores $\bar{X}^\mu = \Lambda_\nu^\mu X^\nu$

de acuerdo a la definición de tiempo propio, sabemos que

$$-c^2 d\tau^2 = ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2$$

con lo que ya anteriormente hemos hallado que

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma}$$

entonces, integrando, encontramos que el tiempo propio debe calcularse como

$$\tau = \int_0^t dt' \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

Lo que resolviendo y usando $v(t)$ encontrado anteriormente, nos da

$$\tau = \frac{R}{c} \sinh^{-1} \left(\frac{c}{R} t \right)$$

o bien, haciendo $c = 1$

$$t = R \sinh \left(\frac{\tau}{R} \right)$$

comparando con nuestro cambio de coordenadas anterior

$$T = \frac{\tau}{R}$$

con R constante, T es el tiempo propio a menos de una constante.

cuadrivelocidad: de un marco O' con R constante.

$$U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$$

$$U^t = \frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial T} \frac{dT}{d\tau} + \frac{\partial t}{\partial R} \frac{dR}{d\tau} = x \frac{dT}{d\tau}$$

$$U^x = \frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial x}{\partial T} \frac{dT}{d\tau} = t \frac{dT}{d\tau}$$

cuadriaceleración: de un marco O' con R constante.

$$\alpha^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$$

$$\alpha^t = \frac{dU^t}{d\tau} = \frac{1}{R} U^x$$

$$\alpha^x = \frac{dU^x}{d\tau} = \frac{1}{R} U^t$$

$$\|\alpha\|^2 = (\alpha^x)^2 - (\alpha^t)^2 = \frac{1}{R^2}$$

Es decir, con R constante, la aceleración es constante. Como una partícula en un campo gravitacional constante (como la caída libre).

2.23. Repaso, calculando símbolos de Christoffel y ecuación geodésica - 220824

Si tenemos la métrica dada por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$= dr^2 + r^2 d\theta^2$$

determinar

- Los símbolos de Christoffel
- La ecuación geodésica.

La metrica y su inversa la podemos escribir explícitamente como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^{-2} \end{pmatrix}$$

Para calcular los símbolos de Christoffel usamos

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_{\gamma} g_{\lambda\beta} + \partial_{\beta} g_{\lambda\gamma} - \partial_{\lambda} g_{\beta\gamma})$$

al hacer los cálculos encontramos que

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r$$

y que

$$\Gamma_{\theta r}^{\theta} = \Gamma_{r\theta}^{\theta} = \frac{1}{r}$$

Por lo tanto, de la ecuación geodésica, hallamos que

$$\frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \Gamma_{\theta\theta}^r \left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 = 0 \longrightarrow \ddot{r} = r\dot{\theta}^2$$

y la segunda ecuación es

$$\frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} + \Gamma_{\theta r}^{\theta} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} + \Gamma_{r\theta}^{\theta} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} = 0$$

simplificando

$$\frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} = 0 \longrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{2}{r} \dot{\theta} \dot{r}$$

que podemos identificar como

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 \\ a_{\theta} = \ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{\theta} \dot{r} = 0 \end{cases}$$

las componentes de las aceleraciones en coordenadas polares. Que justo como habíamos planteado, la aceleración es igual a cero

$$\vec{a} = a_r \hat{r} + a_{\theta} \hat{\theta} = 0$$

Las soluciones de estas ecuaciones diferenciales deberían ser las de una recta. Si recordamos el cambio de coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

y que la ecuación de una recta está dada por

$$y = mx + b$$

por lo que

$$r \sin \theta = a \cos \theta + b$$

entonces la solución a la ecuación diferencial debería ser de la forma

$$r = \frac{b}{\sin \theta - a \cos \theta}$$

que es la ecuación de una recta en coordenadas polares.

2.24. Masa inercial y masa gravitacional - 260824

Masa inercial: Medida sobre la resistencia al cambio de velocidad de un objeto. Esto lo entendemos a través de la segunda ley de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \text{Segunda ley de Newton}$$

Masa gravitacional: Según wikipedia, la masa gravitatoria es la medida de la fuerza de atracción gravitatoria que experimenta una porción de materia básica dentro de un campo gravitatorio. Aunque numéricamente idéntica a la masa inercial, conceptualmente difiere de esta. Esta la podemos entender por medio de la fuerza gravitacional

$$\vec{F}_G = \frac{Gm_g M}{r^2} \hat{r} \quad \text{Fuerza de gravitación}$$

La fuerza de gravitación es independiente de la segunda ley de Newton.

En nuestro principio de mínima acción clásico

$$S_{\text{classic}} = \int dt \left(\frac{1}{2} m_i \dot{x}^2 - m_g \phi \right)$$

sale natural la equivalencia entre masa inercial y gravitacional

$$m_i = m_g$$

En la fuerza gravitacional podemos también distinguir entre una **masa activa** M y una **Masa pasiva** m . Pero entre dos cuerpos que se atraen según la fuerza de gravitación, ambas masas pueden ser masas gravitacionales activas y pasivas, según desde que masa de referencia se esté analizando la fuerza. Sin embargo estas masas se puede demostrar que son idénticas. Y, ¿cómo se demuestra? Usando la tercera ley de Newton

$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$$

por lo que analizando ambas fuerzas vemos que

$$\vec{F}_{BA} = G_N m_B^a m_A^p \frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$\vec{F}_{AB} = G_N m_A^a m_B^p \frac{\hat{r}}{r^2}$$

donde a minúscula significa que es una masa activa y p minúscula significa que es una masa pasiva.

Según la tercera ley de Newton, podemos deducir que

$$m_B^a m_A^p = m_A^a m_B^p$$

lo que nos lleva a lo siguiente

$$\frac{m_A^p}{m_A^a} = \frac{m_B^p}{m_B^a} = \text{cte} = 1$$

que elegimos convenientemente esta constante igual a 1. Y resulta

$$m^p = m^a$$

en la equivalencia entre masa activa y masa pasiva para ambos cuerpos.

¿cómo medimos una masa inercial?

Según la definición, podemos hacer un experimento de una masa atada a un resorte. Un oscilador armónico simple.

$$\ddot{x} + w^2 x = 0, \quad \text{con } w^2 = \frac{k}{m}$$

podemos estimar la masa por medio de la frecuencia de oscilación.

¿como medimos una masa gravitacional?

Con una balanza.

Hubieron varios intentos por medir estas diferencias entre masa gravitacional e inercial. Algunos de estos experimentos son los siguientes

1888 Eötvös	$ m_g - m_i /m_g \leq 10^{-9}$
1964 Dicke	$ m_g - m_i /m_g \leq 10^{-11}$
2017 Miguel Portilla ?	$ m_g - m_i /m_g \leq 10^{-13}$

De esto se concluye que las masas son prácticamente iguales.

Por otra parte. Galileo \rightarrow objetos en caída libre.

La velocidad a la que caen los cuerpos no depende de su masa.

Planteando un preproblema en caída libre

$$m_i \ddot{x} = -m_g g$$

lo cual nos da la solución

$$x(t) = -\frac{m_g}{2m_i} g t^2 + v_0 t + x_0$$

Para Galileo

$$\frac{m_g}{m_i} = \text{cte} = 1$$

múltiples experimentos se han enfocado a medir esta razón y también han encontrado que $m_i = m_g$. Esto resulta en

El principio de equivalencia: \rightarrow inercia = gravedad

Un experimento para entender el principio de equivalencia consiste en considerar un marco O y otro O' . En el marco O tenemos a una partícula en presencia de un campo gravitacional

$$\ddot{\vec{x}} = \vec{g}(\vec{x}, t)$$

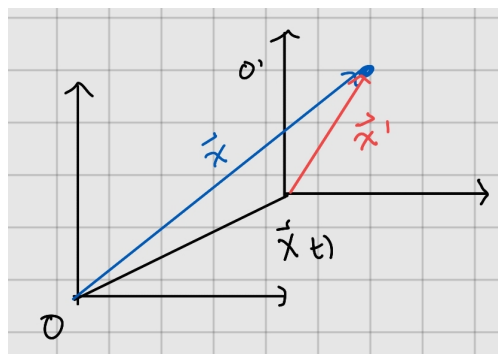


Figura 1: Marco O y O'

en el marco O' tenemos la relación

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{x}'$$

o bien

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{X}$$

luego

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{x}}' &= \ddot{\vec{x}} - \ddot{\vec{X}} \\ &= \ddot{\vec{x}} - \vec{a} \\ &= \vec{g} - \vec{a} \\ &= \vec{g}'\end{aligned}$$

si $\vec{g} = 0$, entonces

$$\ddot{\vec{x}}' = -\vec{a}$$

vemos que esta ecuación tiene la misma forma que la ecuación de la partícula vista desde el marco O' en presencia de un campo gravitacional. Esto lo podemos entender como

equivalencia entre un campo gravitacional y un objeto acelerado

Un campo uniforme es equivalente a una aceleración constante

Ejemplo: Si el observador O se encuentra en la Tierra y el observador O' se encuentra en el espacio interestelar sosteniendo una pelota moviéndose a una aceleración constante.

El observador O' suelta la pelota y la pelota cae en su marco (se mueve hacia abajo).

Argumentos de los observadores

Observador O' : La pelota cae debido a la gravedad

Observador O : La pelota cae debido a la inercia

- Al ser la pelota soltada, ya no está siendo acelerada, por lo que se queda con su velocidad instantánea \vec{v} al momento de ser soltada. Entonces el observador O en la Tierra ve su posición descrita por

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}t$$

mientras que la nave sigue siendo acelerada, la velocidad de la pelota ya no podrá contrarrestar dicha aceleración y en consecuencia llegará al suelo de la nave. Justamente, el observador en la Tierra verá un movimiento debido a la inercia.

- Por otra parte, la nave tendrá una posición descrita por

$$\vec{X} = \vec{x}_0 + \vec{v}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

y la posición de la pelota será

$$\begin{aligned}\vec{x}' &= \vec{x} - \vec{X} \\ &= (\vec{x}_0 + \vec{v}t) - \left(\vec{x}_0 + \vec{v}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2\right) \\ &= -\frac{1}{2}\vec{a}t^2\end{aligned}$$

justamente, el observador O' en la nave observa el movimiento de la pelota tal como si estuviese en presencia de un campo gravitacional.

2.25. Más sobre el principio de equivalencia - 270824

Otra forma de enunciar el principio de equivalencia.

Principio de equivalencia: Todas las partículas de prueba en caída libre se mueven exactamente de la misma manera.

Gravedad \longrightarrow movimiento \longrightarrow métrica.

Gravedad \longleftrightarrow métrica/movimiento/inercia.

Gravedad \longleftrightarrow inercia.

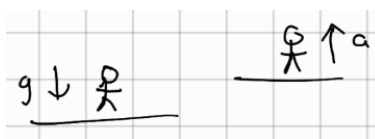


Figura 2: Existe una equivalencia entre gravedad y aceleración. De tal manera de que pueden llegar a ser indistinguibles.

En un marco en caída libre, todas las leyes de la física no gravitacionales adoptan su forma relativista.

Conservación del momento \longrightarrow línea recta.

Principio de equivalencia enunciado por Einstein: En un marco de referencia local, el resultado de todos los experimentos con gravedad nula son indistinguibles de los resultados experimentales hechos en el espacio de Minkowski.

La relatividad general nos dice que \longrightarrow la gravedad no es una fuerza (es una consecuencia de la curvatura del espacio tiempo).

Algunos de los **resultados del principio de equivalencia son:**

- La deflexión de la luz. Este movimiento es consecuencia de las propiedades del espacio-tiempo (métrica del espacio.)
- Corrimiento al rojo o al ultravioleta gravitacional.

2.26. Corrimiento al rojo/ultravioleta gravitacional - 280824

Experimento realizado en Harvard en 1960. El corrimiento al rojo gravitacional es el fenómeno en el que las ondas electromagnéticas o los fotones que salen de un pozo gravitacional pierden energía.

Si nos encontramos en el planeta Tierra, al enviar un haz de luz desde arriba hacia abajo tendremos un corrimiento al ultravioleta gravitacional, mientras que si enviamos un haz desde abajo hacia arriba tendremos un corrimiento al rojo gravitacional.

De un campo gravitacional fuerte a uno débil \longrightarrow Corrimiento al rojo

De un campo gravitacional débil a uno fuerte \longrightarrow Corrimiento al ultravioleta.

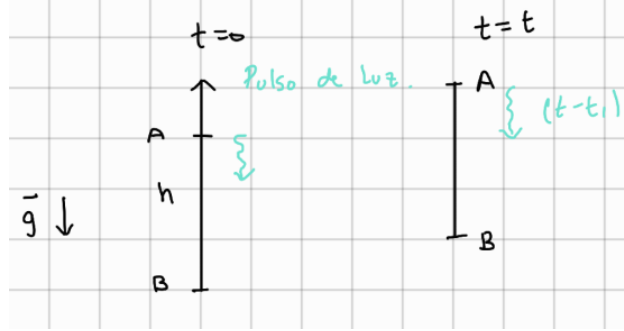


Figura 3: Observador A y observador B. Al irnos a un marco en caída libre A y B viajan hacia arriba con una aceleración $\vec{a} = \vec{g}$.

para un tiempo $t = 0$, las posiciones de A y B serán

$$z_A = h$$

$$z_B = 0$$

pero, pero para un tiempo $t' = t$, las posiciones estarán dadas por

$$z_A(t) = h + \frac{1}{2}gt^2$$

$$z_B(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

se enviarán 2 pulsos de luz.

En $t = t_1$ se envía el primer pulso de luz desde A. Su posición estará descrita por

$$z_A(t) = h + \frac{1}{2}gt_1^2$$

Entonces la posición del primer pulso en un instante $t > t_1$ estará dado por

$$\begin{aligned} z_1(t) &= z_A(t_1) - c(t - t_1) \\ &= h + \frac{1}{2}gt_1^2 - c(t - t_1) \end{aligned}$$

(se ha usado $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t$). El haz (primer pulso) alcanza al observador B en el instante T_1 . Entonces

$$\begin{aligned} z_B(T_1) &= \frac{1}{2}gT_1^2 && \text{Llegada del pulso descrita por B} \\ &= z_1(T_1) && \text{debe coincidir con la posición del primer pulso} \\ &= h + \frac{1}{2}gt_1^2 - c(T_1 - t_1) \end{aligned}$$

Luego, se envía (desde A) un segundo pulso en un tiempo igual a $t = t_1 + \Delta\tau_A$. Entonces, en un instante cualquiera t el segundo haz estará en la posición (usando la descripción de la posición del primer pulso)

$$z_2(t) = h + \frac{1}{2}g(t_1 + \Delta\tau_A)^2 - c(t - t_1 - \Delta\tau_A)$$

y en B, el pulso llega en un tiempo $T_2 = T_1 + \Delta\tau_B$, por lo que

$$\begin{aligned} z_B(T_2) &= \frac{1}{2}g(T_1 + \Delta\tau_B)^2 && \text{Llegada del pulso descrita por B} \\ &= z_2(T_1 + \Delta\tau_B) && \text{debe coincidir con la posición del segundo pulso} \\ &= h + \frac{1}{2}g(t_1 + \Delta\tau_A)^2 - c((T_1 + \Delta\tau_B) - t_1 - \Delta\tau_A) \end{aligned}$$

notemos que el tiempo de llegada entre ambos pulsos es

$$T_2 - T_1 = \Delta\tau_B$$

De este análisis obtenemos dos ecuaciones importantes

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}gT_1^2 &= h + \frac{1}{2}gt_1^2 - c(T_1 - t_1) \\ \frac{1}{2}g(T_1 + \Delta\tau_B)^2 &= h + \frac{1}{2}g(t_1 + \Delta\tau_A)^2 - c((T_1 + \Delta\tau_B) - t_1 - \Delta\tau_A) \end{aligned}$$

Después de mucha álgebra y algunas aproximaciones

$$\begin{aligned} \frac{gt}{c} &\ll 1 \\ g\frac{\Delta\tau_A}{c} &\ll 1 \\ g\frac{\Delta\tau_B}{c} &\ll 1 \end{aligned}$$

llegamos a la siguiente relación

$$\Delta\tau_B = \left(1 - \frac{g}{c}(T_1 - t_1)\right) \Delta\tau_A$$

lo que indica que

$$\boxed{\Delta\tau_B < \Delta\tau_A}$$

lo que no es otra cosa mas que, una **dilatación del tiempo gravitacional**. Al estar trabajando con haces de luz, esto implica un **corrimiento de las frecuencias**.

Observaciones: $(T_1 - t_1)$ es el tiempo que la luz ha viajado desde A hasta B, dado que T_1 es el tiempo de llegada y t_1 el tiempo de partida. Tal como lo definimos.

t_1 : A emite el pulso.
 T_1 : B recibe el pulso.

La luz ha viajado una distancia

$$c(T_1 - t_1) \approx h$$

2.27. Dilatación del tiempo gravitacional y principio de equivalencia - 020924

Debida a la distancia anterior que ha viajado el haz, podemos escribir la relación de la dilatación del tiempo como

$$\Delta\tau_B = \left(1 - \frac{gh}{c^2}\right) \Delta\tau_A$$

y las longitudes de onda de los pulsos serán

$$\lambda_A = c\Delta\tau_A$$

$$\lambda_B = c\Delta\tau_B$$

Es fácil ver que esta relación resulta en

$$\lambda_B < \lambda_A$$

o en términos de las frecuencias

$$\boxed{\nu_B > \nu_A}$$

que representa un **corrimiento gravitacional al ultravioleta**. Esto para un pulso que viaja desde A hacia B, de un campo gravitacional débil a uno mas fuerte.

Este mismo análisis se realiza si el pulso de luz fuera de B hacia A (de un campo fuerte a uno más débil) y haciendo unos cálculos similares se encuentra un corrimiento gravitacional al rojo.

El factor que produce la dilatación podemos pensarlo como

$$\Phi = \Phi_B - \Phi_A = gh$$

tal factor nos queda

$$\left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right)$$

lo que nos recuerda al factor definido en la clase (2.19)

$$g_{00} = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)$$

entonces la métrica la podemos escribir de la siguiente manera

$$ds^2 = \left(1 + 2g\frac{x^i e_i}{c^2}\right) (dx^0)^2 - dx^i dx^i$$

o simplemente

$$ds^2 = \left(1 + 2g\frac{x^i}{c^2}\right) (dx^0)^2 - dx^i dx^i$$

pero este resultado viene de haber hecho la aproximación

$$\frac{g}{c^2} \ll 1$$

pero recuperando los valores hechos en la aproximación obtenemos (el resultado sin aproximar es)

$$ds^2 = \left(1 + 2g\frac{x^i}{c^2}\right)^2 (dx^0)^2 - dx^i dx^i$$

Lo cual podemos ver como una **métrica de Rindler**

$$ds^2 = R^2(dx^0)^2 - dx^i dx^i$$

notemos que

$$\left(1 + \frac{gx}{c^2}\right)^2 = \frac{g^2}{c^4} \left(\frac{c^2}{g} + x\right)^2$$

si nos vamos a un marco en caída libre, reducimos todo a la métrica de Minkowski. $x^0 = cT$, $x^1 = X$.

Si nos pasamos a un marco de referencia con aceleración uniforme ($R = \text{cte.}$ en un M. de Rindler), desaparece el efecto de la gravedad según el principio de equivalencia y caemos a una métrica de Minkowski $ds^2 = c^2(dT)^2 - (dX)^2$. Entonces si usamos un cambio de coordenadas de Rindler.

$$cT = \left(\frac{c^2}{g} + x\right) \sinh\left(\frac{gt}{c}\right)$$

$$X = \left(\frac{c^2}{g} + x \right) \cosh \left(\frac{gt}{c} \right)$$

entonces la métrica, ahora en estas nuevas coordenadas es

$$ds^2 = c^2 dT^2 - dX^2$$

que es una métrica de Minkowski localmente, esto es justo resultado del *Principio de Equivalencia*.

Para contrastar, en las coordenadas originales teníamos

$$ds^2 = \left(\frac{c^2}{g} + x \right)^2 \frac{g^2}{c^4} c^2 dt^2 - dx^2$$

Ahora decimos que

Una partícula libre es \rightarrow una partícula en caída libre.

Un marco de referencia inercial es \rightarrow un marco de referencia en caída libre (marco de Minkowski).

Entonces, ¿qué implica una partícula en caída libre en un marco de referencia en caída libre?

$$\ddot{x}^\mu = 0 \quad \text{Aceleración cero}$$

¿y en otro sistema de referencia?

$$\text{Sistema } y^\nu \quad x^\mu(y)$$

entonces

$$ds^2 = \underbrace{\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} \eta_{\mu\nu}}_{\text{Nueva métrica } g_{\alpha\beta}} dy^\alpha dy^\beta$$

esto ya que el tensor métrico transforma como un tensor de rango(0,2). Luego, corresponde obtener las derivadas

$$\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{dy^\alpha}{d\tau} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \dot{y}^\alpha$$

Luego encontramos la segunda derivada e igualamos a cero, obtenemos así

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \ddot{y}^\alpha + \frac{\partial}{\partial y^\beta} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \right) \dot{y}^\beta \dot{y}^\alpha = 0$$

y suponiendo que transformación posee inverso, tenemos

$$\ddot{y}^\gamma + \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial y^\beta \partial y^\alpha} \dot{y}^\beta \dot{y}^\alpha = 0$$

o bien

$$\ddot{y}^\gamma + \underbrace{\Gamma_{\beta\alpha}^\gamma \dot{y}^\beta \dot{y}^\alpha}_{\text{Fuerza inercial o gravitacional}} = 0$$

Que según el principio de equivalencia, la fuerza inercial y la fuerza gravitacional son lo mismo.

2.28. Movimiento de un cuerpo con la métrica de Schwarzschild - 040924

Caso clásico:

Hemos visto en clases pasadas el principio de equivalencia y vimos la conexión de este con la métrica. De tal forma que al elegir unas coordenadas adecuadas podemos transformar $g_{\mu\nu}$ de tal forma que contenga los efectos de un campo gravitatorio. Otro resultado de la relatividad general es el corrimiento al rojo. Ahora lo que veremos será el movimiento de un cuerpo con la métrica de Schwarzschild. Para ello consideremos dos masas donde $M \ll m$ (ejemplo, M : estrella, m : planeta).

Si el lagrangiano de m viene dado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - m\phi, \quad \text{con } \phi = -\frac{GM}{r}$$

entonces

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 + \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}\delta_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j + \frac{GMm}{r}, \quad \text{con } r = \sqrt{\delta_{ij}x^ix^j}$$

Si queremos estudiar el movimiento de un planeta alrededor de una estrella, lo mejor será cambiar a coordenadas esféricas ya que el movimiento a considerar se acopla mejor a dichas coordenadas. En coordenadas esféricas tenemos que

$$ds^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2$$

esto sujeto a que

$$r \in [0, \infty], \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

La métrica ahora tomara la forma

$$\delta_{ij} \longrightarrow g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

en este caso el lagrangiano nos queda

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{ii}(\dot{x}^i)^2 + \frac{GMm}{r}$$

así entonces podemos ver que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2) + \frac{GMm}{r}$$

Ahora corresponde usar las ecuaciones de Euler-Lagrange para encontrar las ecuaciones de movimiento.

Para θ :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

lo que resulta en

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) - mr^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 = 0$$

pero restringimos nuestro problema a trabajarlo en el plano ecuatorial, es decir, $\theta = \pi/2$



Figura 4: Ilustración del problema

Esto nos simplifica la ecuación anterior tan solo

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \quad \text{Conservación del momentum angular}$$

Notemos que además el lagrangiano no depende explícitamente de π o t , lo cual implica que habrá conservación de la energía y del momentum angular. De la energía podemos ver que

$$E = \text{cte} = K + V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{GMm}{r}$$

y el momentum angular conservado es

$$L_z = \text{cte} = mr^2\dot{\phi}$$

lo que, al combinar con la ecuación anterior y dividir por la masa da

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L_z^2}{2m^2r^2}}_{\text{Potencial efectivo}} - \frac{GM}{r} \quad \text{Ec. de mov. para } r \quad (9)$$

el potencial efectivo tiene la forma

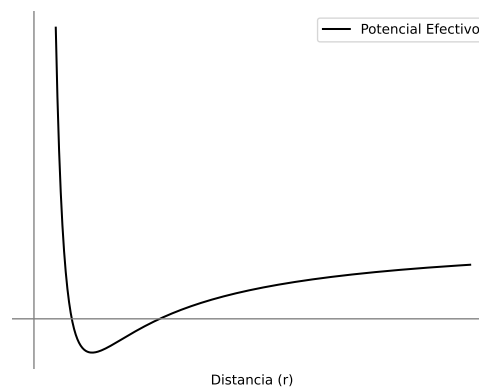


Figura 5: Potencial efectivo del caso clásico

Luego de entender esto, ahora podemos introducir la métrica de Schwarzschild (aunque iniciamos analizando la aproximación clásica). La métrica es

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Notas:

- Esta métrica está escrita en coordenadas esféricas

- Para campos débiles (i.e. $2\Phi/c^2 \approx 0$) o para $\Phi = 0$ esta métrica se reduce a la métrica de Minkowski. Esto es para distancias suficientemente lejanas a la estrella.

Por otra parte, la acción viene dada por

$$S = -mc \int d\sigma \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma}}$$

si $\sigma = \tau$ y usando la signatura $(1, -1, -1, -1)$ sabemos que

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = c^2$$

Notemos que minimizar S tendría el mismo resultado que minimizar

$$S_2 = -mc \int \underbrace{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}_{ds^2} d\tau$$

Si definimos

$$A(r) = 1 + \frac{2\Phi}{c^2} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}$$

tendríamos que la acción S_2 toma la forma

$$S_2 = -mc \int d\tau \left[A(r) c^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - A^{-1}(r) \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 - r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \right]$$

El lagrangiano entonces será

$$\mathcal{L} = -mc \left[A(r) c^2 \dot{t}^2 - A^{-1}(r) \dot{r}^2 - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \right]$$

2.29. Ecuaciones de Euler-Lagrange para el lagrangiano con la métrica de Schwarzschild - 050924

Ahora corresponde encontrar las ecuaciones de movimiento a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Serán 4 ecuaciones correspondientes a r, θ, ϕ, t .

Para ϕ :

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \longrightarrow \frac{d}{d\tau} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0$$

pero $\theta = \pi/2$ dado que estamos analizando el caso en que nos encontramos en el plano ecuatorial, entonces la ecuación se reduce a

$$\frac{d}{d\tau} (r^2 \dot{\phi}) = 0 \longrightarrow r^2 \dot{\phi} = \text{cte.}$$

y definimos

$$r^2 \dot{\phi} = \frac{l'}{m} = l := \text{Momentum angular por unidad de masa}$$

Para θ :

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \longrightarrow -2 \frac{d}{d\tau} (r^2 \dot{\theta}) + 2r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = 0$$

pero $\theta = \pi/2$

$$\frac{d}{d\tau}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

y además $\dot{\theta} = 0$

Para t :

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \longrightarrow E = A(r)c^2\dot{t} = \text{cte}$$

de la definición de $A(r)$ notemos que mientras $r \rightarrow \infty$, $A(r) \rightarrow 1$. Además, $dt/d\tau = \gamma$ como ya hemos visto en clases anteriores. Por lo tanto la ecuación, para distancias grandes se reduce a

$$E = \gamma c^2$$

pero recordemos que en todo nuestro análisis hemos obviado la masa, es decir, estamos trabajando en unidades "por unidad de masa". Recobrando las unidades tenemos

$$E = \gamma mc^2 \quad (10)$$

una ecuación bastante conocida. Y que en el límite no relativista hemos visto que la podemos escribir como

$$E \approx \frac{1}{2}mv^2$$

Para r :

En este caso, podemos tomar otro camino en vez de utilizar las ecuaciones de Euler-Lagrange. Empleamos las cantidades conservadas, el hecho de que estamos trabajando en un plano ecuatorial y también que

$$\mathcal{L} = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = c^2$$

(nos podemos quitar el $-mc$ ya que, como en las ecuaciones anteriores, se cancela). Por lo que

$$A(r)c^2\dot{t}^2 - A^{-1}(r)\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2 = c^2$$

(hemos usado el hecho de que $\sin\theta = \pi/2$ y en consecuencia $\dot{\theta} = 0$). Entonces, usando las cantidades conservadas

$$E\dot{t} - A^{-1}(r)\dot{r}^2 - l\dot{\phi} = c^2$$

Usando nuevamente el las cantidades conservadas.

$$E \left(\frac{E}{A(r)c^2} \right) - A^{-1}(r)\dot{r}^2 - l \left(\frac{l}{r^2} \right) = c^2$$

y ya simplemente al realizar álgebra para simplificar, obtenemos la expresión siguiente

$$\frac{1}{2} \frac{E^2}{c^2} = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + V_{ef}$$

donde

$$V_{ef} = \frac{1}{2} \left(c^2 + \frac{l^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \quad (11)$$

Pero sabiendo que $E = \gamma c^2$, vamos a hacer la aproximación

$$E^2 = \gamma^2 c^4 = c^4 \left(1 + \frac{v^2}{c^2} + \dots \right)$$

y para

$$\frac{1}{2} \frac{E^2}{c^2} \approx \frac{1}{2} c^2 + \frac{1}{2} v^2$$

donde hemos usado el límite no relativista en el que $v/c \ll 1$ y por tanto despreciamos términos de orden superior. Entonces la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\left(c^2 + \frac{l^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)$$

Operando algebraicamente llegamos a la siguiente ecuación

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{l^2}{2r^2} - \frac{GM}{r}}_{\text{Potencial efectivo clásico}} = \frac{1}{2}v^2 + \underbrace{\frac{GMl^2}{c^2 r^3}}_{\text{Corrección}}$$

(todo está en términos de "por unidad de masa"). Nos queda lo descrito clásicamente más una corrección, dicha **corrección es cero** para el límite no relativista y obtenemos completamente el caso clásico.

Para hallar el mínimo de potencial del caso clásico simplemente buscamos el valor para el cual su derivada se anula

$$\left.\frac{dV}{dr}\right|_{r_0} = 0$$

en el cual encontramos que

$$r_0 = \frac{l^2}{GM}$$

Siguiendo con el análisis clásico. Buscamos ahora la solución para r . Para ello consideremos

$$E_N = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{GM}{r}$$

donde E_N es la energía no relativista.

Hacemos el siguiente cambio de variable

$$u = \frac{1}{r} \longrightarrow \dot{u} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{d\phi} l u^2$$

y también

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2}\dot{u}$$

Sustituyendo esto en la ecuación anterior,

$$E_N = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u^4}\dot{u}^2\right) + \frac{l^2 u^2}{2} - GMu = E_N$$

Luego sustituyendo la relación faltante nos queda la ecuación diferencial

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 - \frac{2GMu}{l^2} = \frac{2}{l^2}E_N \quad \text{Ecuación para la órbita}$$

La solución de esta ecuación diferencial es

$$u(\phi) = \frac{GM}{l^2}(1 + e \cos \phi), \quad \text{con } e = \sqrt{1 + \frac{2E_N l^2}{G^2 M^2}}$$

Pero nos interesa la solución en la variable r , volviendo al cambio de variable, entonces queda

$$r(\phi) = \frac{l^2}{GM} \frac{1}{1 + e \cos \phi}$$

$$e = \begin{cases} > 1, & \text{hipérbola} \\ = 1, & \text{parábola} \\ < 1, & \text{elipse} \end{cases}$$

Esta solución es para la órbita de un planeta desde una descripción clásica. Ahora veremos el caso no clásico.

2.30. Analizando el caso no clásico de las ecuaciones de movimientos debido una métrica de Schwarzschild - 090924

Si volvemos al potencial efectivo **no clásico** (11) (antes de realizar la aproximación) lo podemos expandir como

$$V_{\text{ef}} = \frac{c^2}{2} + \underbrace{\frac{l^2}{2r^2} - \frac{GM}{r}}_{\text{Potencial efectivo clásico}} - \frac{GMl^2}{r^3c^2}$$

El cual al graficarlo adoptará la siguiente forma

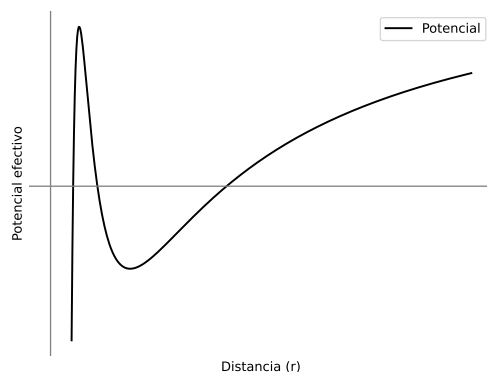


Figura 6: Potencial efectivo caso no clásico

en dicho potencial podemos buscar los puntos de equilibrio (que del gráfico notamos 2, uno estable y otro inestable). Esto lo hallamos a través de hallar los valores en los que su derivada se anula

$$\left. \frac{dV_{\text{ef}}}{dr} \right|_{r_1, r_2} = 0$$

lo cual resulta en la siguiente ecuación cuadrática en r

$$GMr^2 - l^2r + \frac{3GMl^2}{c^2} = 0$$

Al analizar su discriminante

$$\Delta = l^4 - 12 \frac{G^2 M^2 l^2}{c^2}$$

se pueden dar tres casos

$$\Delta = \begin{cases} > 0, & 2 \text{ soluciones reales} \\ = 0, & 1 \text{ Solución} \\ < 0, & 2 \text{ soluciones complejas} \end{cases}$$

Nos interesa el caso en el que $\Delta > 0$. Entonces se debe cumplir la siguiente condición

$$l^2 > \sqrt{12} \frac{GMl}{c}$$

2.31. Continuando con el análisis del caso no clásico de la órbita de un planeta con la métrica de Schwarzschild y precesión del perihelio de Mercurio - 100924

La ecuación de movimiento que hemos encontrado para r es

$$\frac{1}{2} \frac{E^2}{c^2} = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + V_{\text{ef}}$$

haciendo nuevamente la sustitución de $U = 1/r$, obtenemos ahora la ecuación diferencial

$$\left(\frac{dU}{d\phi}\right)^2 + U^2 - \frac{2GM}{l^2}U - \frac{2GM}{c^2}U^3 = \frac{E^2}{l^2c^2} - \frac{c^2}{l^2}$$

derivamos esta ecuación

$$2\frac{dU}{d\phi}\frac{d^2U}{d\phi^2} + 2U\frac{dU}{d\phi} - \frac{2GM}{l^2}\frac{dU}{d\phi} - \frac{6GM}{c^2}U^2\frac{dU}{d\phi} = 0$$

pero restringimos a que

$$\frac{dU}{d\phi} \neq 0 \quad \text{No hay órbitas circulares}$$

entonces nos queda la ecuación diferencial

$$\boxed{\frac{d^2U}{d\phi^2} + U - \frac{GM}{l^2} - \frac{3GM}{c^2}U^2 = 0}$$

para resolver esta EDO vamos a abordar el problema como si se tratara de hacer una perturbación. Definimos el parámetro perturbativo adimensional como

$$\beta = 3\frac{G^2M^2}{l^2c^2}$$

y proponemos una solución en potencias en términos del parámetro perturbativo como

$$U = U_0 + \beta U_1 + \beta^2 U_3 + \dots$$

la ecuación diferencial en términos del parámetro perturbativo es

$$\frac{d^2U}{d\phi^2} + U - \frac{GM}{l^2} = \beta \frac{l^2}{GM} U^2$$

cuando $\beta = 0$, tenemos que $U = U_0$, una aproximación para campos muy débiles ($GM/c^2 \ll 1$). Entonces

$$\frac{d^2U_0}{d\phi^2} + U_0 - \frac{GM}{l^2} = 0$$

Pero U_0 es justamente la solución para la órbita clásica (para campos débiles, aproximación no relativista) que encontramos al final de la sección (2.29). Entonces

$$U_0 = \frac{GM}{l^2}(1 + e \cos \phi)$$

Luego continuamos con términos de primer orden, de modo que

$$\frac{d^2(U_0 + \beta U_1)}{d\phi^2} + (U_0 + \beta U_1) - \frac{GM}{l^2} = \beta \frac{l^2}{GM} (U_0 + \beta U_1)^2$$

al expandir obtenemos

$$\underbrace{\frac{d^2U_0}{d\phi^2} + U_0 - \frac{GM}{l^2}}_{=0} + \beta \frac{d^2U_1}{d\phi^2} + \beta U_1 = \beta \frac{l^2}{GM} (U_0^2 + \underbrace{\beta^2 U_1^2 + 2\beta U_0 U_1}_{\text{Despreciamos}})$$

con lo cual nos queda solamente

$$\frac{d^2U_1}{d\phi^2} + U_1 = \frac{l^2}{GM} U_0^2 = \frac{GM}{l^2} (1 + e \cos \phi)^2$$

Que es la ecuación de un **oscilador armónico forzado**. La solución para esta ecuación diferencial será

$$U_1 = \frac{GM}{l^2} \left[\left(1 + \frac{e^2}{2}\right) + e\phi \sin \phi - \frac{e^2}{6} \cos(2\phi) \right]$$

Para U_0 , tomar $\phi = 0$ lo maximiza, pero recordando el cambio de variable vemos que minimiza r . Por tanto,

$$U_1(0) = \frac{GM}{l^2} \left[\left(1 + \frac{e^2}{2} \right) - \frac{e^2}{6} \right]$$

$$U_1(2\pi) = \frac{GM}{l^2} \left[\left(1 + \frac{e^2}{2} \right) - \frac{e^2}{6} \right]$$

Luego, calculamos el cambio de $U(r)$ respecto de ϕ para encontrar cuánto es el ángulo de precesión del perihelio de mercurio. Entonces

$$\frac{dU}{d\phi} = \frac{d}{d\phi}(U_0 + \beta U_1) = 0$$

e igualamos a cero. Esto resulta en

$$-e \sin \phi + \beta \left(e \sin \phi + e \phi \cos \phi + \frac{e^2}{3} \sin(2\phi) \right) = 0$$

ahora debemos calcular el valor de ϕ que haga verdadera esta ecuación.

Solución trivial : $\phi = 0$

Otra solución : $\phi = 2\pi + \delta$

donde δ es una pequeña corrección. Notemos que

$$\sin(2\pi + \delta) \approx \delta$$

$$\cos(2\pi + \delta) \approx 1$$

Sustituyendo en la ecuación anterior

$$-e\delta + \beta e\delta + \beta e(2\pi + \delta) + \beta \frac{e^2}{3}(2\delta) = 0$$

dado que $\delta < 1$, entonces $\beta\delta < \beta$, esto ayuda a despreciar algunos términos. Entonces esto se simplifica a

$$\boxed{\delta = 2\pi\beta}$$

recordando el valor de β , tenemos que

$$\delta = 6\pi \frac{G^2 M^2}{l^2 c^2}$$

donde M es la masa del Sol, c la velocidad de la luz, G la constante de gravitación universal y l el **momento angular por unidad de masa** de mercurio. Sustituyendo valores encontramos que

$$\delta \approx 5 \times 10^{-7} \frac{\text{rad}}{\text{órbita}}$$

Sabiendo una órbita de mercurio toma 88 días, entonces, en 100 años, el ángulo de precesión será de $2,07 \times 10^{-4} \text{rad}/100 \text{ años}$. O bien, realizando la conversión a grados minutos segundos, **43 segundos de arco cada 100 años**. Esto justo es el resultado obtenido por Einstein.

2.32. Deflexión de la luz por la gravedad - 110924

Recordemos que

$$ds^2 = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = c^2$$

pero para la luz, que sigue trayectorias nulas, tenemos que

$$ds^2 = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

Como en el problema anterior, definimos

$$A(r) = 1 + \frac{2\Phi}{c^2} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}$$

entonces, según la métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = A(r)c^2 dt^2 - A^{-1}(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Pero trabajaremos en el plano ecuatorial, es decir, $\theta = \pi/2$ por lo que $\dot{\theta} = 0$. Entoncese. Por lo tanto,

$$A(r)c^2 \dot{t}^2 - A^{-1}(r)\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2 = 0$$

Donde tenemos las mismas cantidades conservadas,

$$l = r^2 \dot{\phi}$$

$$E = A(r)c^2 \dot{t} = \text{cte}$$

Con estas constantes, la ecuación anterior la podemos escribir como

$$\frac{E^2}{2c^2} = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + A(r)\frac{l^2}{2r^2} \quad (12)$$

esto es

$$\begin{aligned} \frac{E^2}{2c^2} &= \frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{nula}} \\ V_{\text{nula}} &= A(r)\frac{l^2}{2r^2} = \frac{l^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) \end{aligned}$$

el gráfico de este potencial tiene la siguiente forma

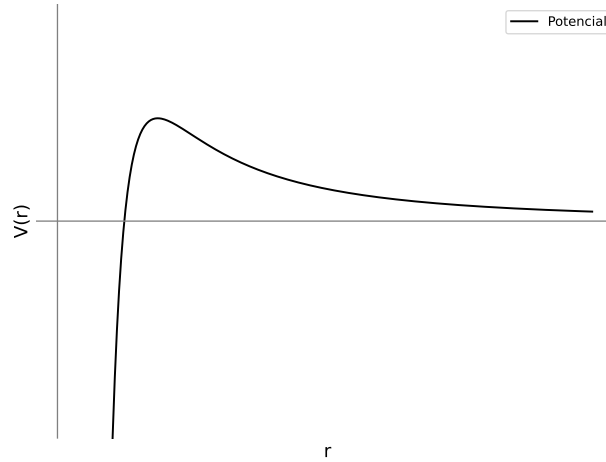


Figura 7: Gráfico del potencial para una trayectoria nula

Ahora podemos calcular en máximo de esta gráfica

$$\left. \frac{dV_{\text{nula}}}{dr} \right|_{r_0} = -\frac{l^2}{r_0^3} + 3\frac{l^2 GM}{r_0^4 c^2} = 0$$

lo que nos da

$$r_0 = \frac{3GM}{c^2}$$

Tenemos tres situaciones

$$r = \begin{cases} < r_0, & \text{El rayo queda atrapado por gravedad (agujero negro)} \\ > r_0, & \text{El rayo puede escapar} \\ = r_0, & \text{Puede quedar orbitando (inestable, esfera fotónica)} \end{cases}$$

Ahora corresponde analizar las soluciones de la EDO que está dada por la energía (12). Hacemos el cambio de variable

$$U = \frac{1}{r}, \quad \frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{dU} \frac{dU}{d\tau} = -\frac{1}{U^2} \dot{U} = -l \frac{dU}{d\phi}$$

ya que

$$\dot{U} = \frac{dU}{d\phi} \dot{\phi} = lU^2 \frac{dU}{d\phi}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación diferencial nos queda

$$\left(\frac{dU}{d\phi}\right)^2 + U^2 \left(1 - \frac{2GMU}{c^2}\right) = \frac{E^2}{c^2 l^2}$$

derivamos esta ecuación y obtenemos

$$2 \frac{dU}{d\phi} \left(\frac{d^2U}{d\phi^2}\right) + 2U \frac{dU}{d\phi} - 6U^2 \frac{dU}{d\phi} \frac{GM}{c^2} = 0$$

establecemos que

$$\frac{dU}{d\phi} \neq 0 \quad \text{No trayectorias circulares}$$

entonces nos queda

$$\frac{d^2U}{d\phi^2} + U = 3U^2 \frac{GM}{c^2}$$

Proponemos nuevamente una solución perturbativa

$$U = U_0 + \beta' U_1 + \beta'^2 U_2 + \dots$$

con

$$\beta' = \frac{GM}{c^2}$$

que no es adimensional (tiene dimensiones de metros). La primera aproximación será $U \approx U_0$ ($\beta \approx 0$, pequeño), por lo que

$$\frac{d^2U_0}{d\phi^2} + U_0 = 0$$

La solución es

$$U_0 = B \sin \phi = \frac{1}{r}$$

o

$$r \sin \phi = b$$

donde b es el parámetro de impacto.

2.33. Deflexión de la luz por la gravedad p2 - 120924

Partiendo de que

$$\frac{d^2U_0}{d\phi^2} + U_0 = 0$$

La solución general será

$$U_0(\phi) = A \cos \phi + B \sin \phi$$

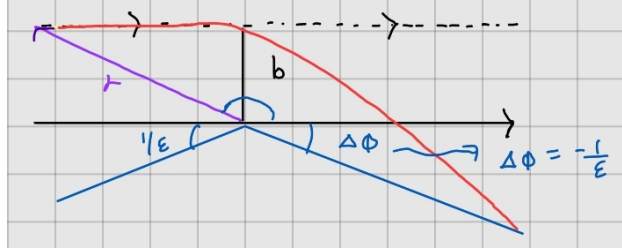


Figura 8: Diagrama

dato que $U = 1/r$, cuando $r \rightarrow \infty$ tendremos que $U \rightarrow 0$, además $\phi \rightarrow \pi$. Entonces la condición será $U(\pi) = 0$. De esto es que se desprende que $A = 0$. Por simple trigonometría vemos que $r \sin \phi = b$ (con b el parámetro de impacto). Luego, para determinar la constante B notamos lo siguiente

$$U_0 = B \sin \phi \longrightarrow \frac{1}{r} = B \sin \phi$$

por lo que

$$\frac{1}{B} = r \sin \phi = b$$

por lo tanto, la primera aproximación a la solución queda

$$U_0 = \frac{1}{b} \sin \phi$$

como el parámetro de impacto b tiene dimensiones de metros, entonces definimos a β como

$$\beta = \frac{GM}{c^2 b}$$

que ahora sí ya es un parámetro completamente adimensional. La ecuación diferencial en términos de este parámetro es

$$\boxed{\frac{d^2 U}{d\phi^2} + U = 3\beta b U^2}$$

Ahora hacemos una aproximación de primer orden, es decir $U \approx U_0 + \beta U_1$, por lo tanto

$$\frac{d^2(U_0 + \beta U_1)}{d\phi^2} + (U_0 + \beta U_1) = 3\beta b (U_0 + \beta U_1)^2$$

con esta aproximación $(U_0 + \beta U_1)^2 \approx U_0^2$, entonces nos queda la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 U_1}{d\phi^2} + U_1 = 3b U_0^2$$