

Análisis de la Precesión del Perihelio de Mercurio: Un Enfoque Numérico con Runge-Kutta de Segundo Orden*

Escobar Matzir, Ricardo José Manuel, 202002342^{1, **}

¹Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de San Carlos de Guatemala, Zona 12, Guatemala.

Este trabajo analiza la precesión del perihelio de Mercurio utilizando un enfoque numérico basado en el método de Runge-Kutta de segundo orden implementado en Python 3. Este es un problema que históricamente no pudo ser explicado con la teoría de la gravitación de Newton. Fue hasta que Albert Einstein formuló su teoría de la relatividad general cuando al fin se le pudo dar explicación a este fenómeno. Para abordar este problema sin acudir a los complejos cálculos que la relatividad, partimos de una corrección relativista a la ley de gravitación newtoniana y lo implementamos con el método numérico. Los resultados muestran que la tasa de precesión calculada con este método concuerda con las observaciones reales lo que destaca la efectividad de emplear un enfoque numérico.

I. INTRODUCCIÓN

La precesión en el perihelio de Mercurio ha sido un desafío histórico para la física. Aunque las leyes de Kepler y la teoría de la gravitación de Newton describen con bastante precisión las órbitas de los planetas. A pesar de eso, estas teorías no lograban explicar ciertas anomalías en la órbita de Mercurio, en particular el lento desplazamiento de su perihelio. A mediados del siglo XIX, el astrónomo Urbain Le Verrier identificó este problema e intentó resolverlo proponiendo la existencia de un nuevo planeta desconocido. Sin embargo, la solución definitiva llegó hasta inicios del siglo XX, cuando Albert Einstein formuló su teoría de la relatividad general con la cual se logró al fin una explicación satisfactoria a este fenómeno.

En este trabajo estudiamos este lento desplazamiento del perihelio de Mercurio con un enfoque numérico que incorpora correcciones relativistas a la ley de gravitación de Newton. Utilizamos el método de Runge-Kutta de segundo orden implementado en Python para resolver la ecuaciones de movimiento. Esta aproximación nos permite simular la órbita del planeta y cuantificar la tasa de precesión de su perihelio. Al comparar el valor obtenido con la simulación con el valor observado de 43 segundos de arco por siglo, encontramos una buena concordancia.

Con todo esto, buscamos no solo validar la teoría de la relatividad general de Einstein, sino también demostrar la utilidad de los métodos numéricos en el análisis de problemas complejos de la física en donde los enfoques analíticos resultan muy complicados de aplicar.

II. ANTECEDENTES

A. Precesión en el perihelio de mercurio

Kepler (1609) en una de sus leyes estableció que los planetas se mueven en órbitas elípticas alrededor del Sol, con el

Sol en uno de los focos. Unos años después (1687), Newton formuló su Ley de Gravitación Universal, que predijo este resultado con gran precisión. Sin embargo, a pesar de su gran precisión, no lograba explicar ciertas anomalías en el movimiento planetario, como la precesión del perihelio de Mercurio.

La precesión del perihelio de Mercurio es el lento cambio de posición del punto de su órbita más cercano al Sol, conocido como perihelio. Los planetas orbitan alrededor del Sol en elipses, pero estas elipses no están fijas en el espacio; en el caso de Mercurio (que es el caso más notorio), la elipse rota lentamente alrededor del Sol, figura (1). De este modo, el perihelio se mueve cierto ángulo $2\pi\epsilon$ a lo largo de un círculo con respecto a su perihelio anterior [2].

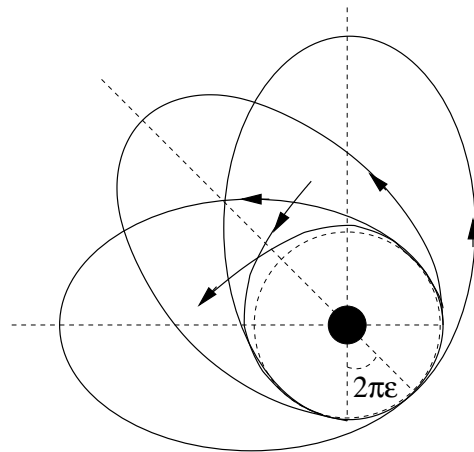


Figura 1: Ilustración (exagerada) de la precesión del perihelio de Mercurio. Imagen obtenida del libro de Janssen [2, p. 174].

Esta anomalía fue observada por el astrónomo francés Urbain Jean Joseph Le Verrier entre 1845 y 1859 [3]. Gran parte de esta irregularidad puede ser explicada debida a las interacciones de los demás cuerpos del sistema solar. Sin embargo, aún existe un efecto residual de un desplazamiento de 43 segundos de arco por siglo en el perihelio [3]. Distintas propuestas surgieron para tratar de dar explicación a

* Física computacional

** e-mail: ricardoemf03@gmail.com

esta anomalía, una de ellas fue la de Le Verrier quién pensó que esta pequeña precesión podía ser causada por un planeta desconocido (llamado Vulcano) o por una nube de asteroides, ya que otras anomalías en otros planetas se pudieron explicar así (Urano y Neptuno) [3]. Sin embargo, esta hipótesis fue descartada rápidamente luego de haber hecho los cálculos y ver que no coincidían con las observaciones. Esta y otras anomalías fueron las que motivaron a Albert Einstein (1915) a formular su teoría general de la relatividad la cual amplió nuestra comprensión de la gravedad describiéndola como una curvatura del espacio-tiempo debida a la presencia de objetos masivos. Con la teoría de Einstein al fin se pudo dar explicación a este fenómeno.

En este trabajo evitaremos recurrir a los cálculos analíticos complejos de la relatividad general y en su vez lo abordaremos a través de correcciones relativistas (provenientes de la teoría de la relatividad general). La ley del inverso cuadrado de la gravitación newtoniana es modificada agregando un término extra a la fuerza, ecuación (1) tomando $\alpha = 1.1 \times 10^{-8} \text{UA}^2$ (en unidades astronómicas). Esta corrección es muy débil en comparación con la fuerza gravitacional newtoniana, ya que sus efectos solo se vuelven significativos en contextos donde la intensidad gravitacional es extremadamente alta, como cerca de cuerpos masivos o en órbitas muy próximas a ellos (como el caso de Mercurio). Sin embargo, esta pequeña corrección es suficiente para explicar el fenómeno de la precesión en el perihelio de Mercurio.

$$\vec{F} = -\frac{GM_S M_M}{r^2} \left(1 + \frac{\alpha}{r^2}\right) \frac{\vec{r}}{r} \quad (1)$$

Para fines prácticos, recurrimos a métodos numéricos para modelar la órbita de Mercurio. Estos métodos implican la resolución de las ecuaciones de movimiento (5) mediante técnicas computacionales, de manera que las fuerzas gravitacionales que actúan sobre el planeta se representen con alta precisión. En particular, utilizamos el método de Runge-Kutta de segundo orden para integrar las ecuaciones de movimiento implementado en Python 3.

B. Método de Runge-Kutta de segundo orden

Al igual que el método de Euler, el método de Runge-Kutta es utilizado para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden que tienen la forma de (2). Sin embargo, este método es una mejora al método de Euler ya que proporciona una mayor precisión al calcular el valor de una variable dependiente.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2)$$

En el método de Euler, la función y se aproxima en cada intervalo $[x_n, x_{n+1}]$ por una recta de tal modo que

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n) \Delta x$$

donde la pendiente de la recta es $f(x_n, y_n)$ que precisamente es la derivada y , o bien, la pendiente de la recta tangente en el punto x_n .

Este método es ligeramente modificado para obtener el método de Runge-Kutta. En este caso consideramos el punto medio en el intervalo $[x_n, x_{n+1}]$ que corresponde a $x = x_n + \frac{1}{2} \Delta x$ en el que se calcula el valor de y_{n+1} . Este cálculo se realiza empleando el método de Euler, obteniendo así la siguiente relación

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} k_1, \quad k_1 = f(x_n, y_n) \Delta x$$

de modo que ahora, la pendiente en el punto central $(x_n + \frac{1}{2} \Delta x, y_n + \frac{1}{2} k_1)$ estará dada por

$$\frac{k_2}{\Delta x} = f\left(x_n + \frac{1}{2} \Delta x, y_n + \frac{1}{2} k_1\right)$$

esta pendiente es la que será utilizada para generar el nuevo valor correcto de y_{n+1} correspondiente al punto x_{n+1} usando de nuevo el método de Euler [1].

$$y_{n+1} = y_n + k_2 \quad (3)$$

lo que explícitamente equivale a

$$y_{n+1} = y_n + f\left(x_n + \frac{1}{2} \Delta x, y_n + \frac{1}{2} k_1\right) \Delta x \quad (4)$$

Este resultado nos hace ver que, de hecho, el método de Euler es un caso particular del método de Runge-Kutta de primer orden y que además, si continuamos con esta idea de aproximar y_{n+1} en puntos intermedios del método anterior, obtendremos métodos de Runge-Kutta de orden superior los cuales serán cada vez más precisos aunque también más complejos.

C. Implementación del método de Runge-Kutta a las ecuaciones de movimiento de la órbita de Mercurio

Habiendo discutido el problema del perihelio de Mercurio y el método numérico a utilizar, lo que ahora corresponde es deducir el algoritmo de Runge-Kutta a partir de la ecuación de fuerza (1). Es importante notar que el método de numérico es especificado para ecuaciones diferenciales de primer orden. Si bien la ecuación que la la fuerza se constituye de un sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden (una para x y otra para y), podemos convertirla en un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales de orden uno, ecuación (5). De este modo, la ecuación (1) se divide en cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas. Dos que describen las posiciones de la órbita de Mercurio y otras dos que describen sus velocidades en el plano xy .

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v_x; & \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{GM_S M_M}{r^3} \left(1 + \frac{\alpha}{r^2}\right) x \\ \frac{dy}{dt} &= v_y; & \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{GM_S M_M}{r^3} \left(1 + \frac{\alpha}{r^2}\right) y \end{aligned} \quad (5)$$

Ahora que hemos determinado las ecuaciones de movimiento, el siguiente paso es aplicar el método de Runge-Kutta (ecuación 3) a estas ecuaciones, obteniendo lo siguiente

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + k_2 & v_{n+1}^x &= v_n^x + k_4 \\ y_{n+1} &= y_n + k_2' & v_{n+1}^y &= v_n^y + k_4' \end{aligned} \quad (6)$$

con valores de $k's$

$$\begin{aligned}
 k_1 &= v_n^x \Delta t & k_3 &= -\frac{GM_S}{r_n^3} \left(1 + \frac{\alpha}{r_n^2}\right) x_n \Delta t \\
 k_2 &= (v_n^y + \frac{1}{2}k_3) \Delta t & k_4 &= -\frac{GM_S}{R_n^3} \left(1 + \frac{\alpha}{R_n^2}\right) (x_n + \frac{1}{2}k_1) \Delta t \\
 k'_1 &= v_n^y \Delta t & k'_3 &= -\frac{GM_S}{r_n^3} \left(1 + \frac{\alpha}{r_n^2}\right) y_n \Delta t \\
 k'_2 &= (v_n^x + \frac{1}{2}k'_3) \Delta t & k'_4 &= -\frac{GM_S}{R_n^3} \left(1 + \frac{\alpha}{R_n^2}\right) (y_n + \frac{1}{2}k'_1) \Delta t \\
 r_n &= \sqrt{x_n^2 + y_n^2} & R_n &= \sqrt{(x_n + \frac{1}{2}k_1)^2 + (y_n + \frac{1}{2}k'_1)^2}
 \end{aligned}$$

D. Aplicación del método numérico en Python 3

1. Condiciones iniciales

Python es un lenguaje de programación interpretado y de alto nivel, conocido por poseer una sintaxis clara y legible que facilita el desarrollo rápido y eficiente de aplicaciones. Por esta razón empleamos este lenguaje para implementar nuestro método numérico.

Antes de crear el programa es necesario definir las condiciones y valores iniciales. Definimos la posición inicial en el punto más lejano al Sol y la velocidad inicial es calculada por conservación del momentum angular y la energía entre el punto inicial y el punto $(0, b)$ con b el semieje menor de la elipse. Estos valores son descritos en la ecuación (7), donde a es el semieje mayor de Mercurio y e es su excentricidad. Por lo que la ea es la distancia entre el Sol y el centro de la elipse. Por su parte, el semieje menor en términos del semieje mayor y la excentricidad es $b = a\sqrt{1-e^2}$.

$$\begin{aligned}
 x_0 &= (1+e)a, & y_0 &= 0 \\
 v_0^x &= 0, & v_0^y &= \sqrt{\frac{GM_S}{a} \frac{1-e}{1+e}}
 \end{aligned} \quad (7)$$

Puesto que se utilizaría un método numérico computacional se eligió un sistema de unidades adecuado para el tratamiento de los datos. Se tomó como base las unidades astronómicas para las distancias (1 UA = 149,597,828.68 km, distancia media de la Tierra al Sol) y los años terrestres para el tiempo. Estos valores para Mercurio y el Sol, así como la cantidad de iteraciones en el método numérico y el paso son los siguientes:

$$\begin{aligned}
 a &= 0.39 \text{ UA} \\
 e &= 0.206 \\
 GM_S &= 4\pi^2 \text{ UA}^3/\text{año}^2 \\
 \Delta t &= 0.0001 \\
 N &= 20000
 \end{aligned}$$

Por último, se usó la ecuación (8) para describir la distancia entre Mercurio y el Sol (con θ el ángulo entre la horizontal y el vector posición de Mercurio) y la ecuación (9) para su velocidad. En la ecuación (8) notamos que justo cuando $\theta = 0$, el planeta se encuentra en su punto más alejado, por otro lado, cuando $\theta = 180^\circ$ se encuentra en su punto más cercano al Sol.

$$r' = \frac{(1-e^2)a}{1-e\cos\theta} \quad (8)$$

$$\frac{dr'}{dt} = \frac{xv_x + yv_y}{r'} \quad (9)$$

nótese el r' (primado) en vez de r para no confundir con la magnitud de su vector de posición respecto al origen de la elipse.

Dado que el valor real de α es muy débil, la tasa de precesión del perihelio de Mercurio es muy pequeña, por lo que no podría medirse numéricamente con un tiempo muy limitado. Es por este motivo que tomamos los valores de α descritos en el cuadro (I) y en base a ellos calculamos la tasa de precesión del perihelio de Mercurio. Con los valores de precesión para distintos valores de α extrapolamos los datos para encontrar la tasa de precesión real que corresponde a $\alpha = 1.1 \times 10^{-8} \text{ UA}^2$.

Cuadro I: Valores de α empleados en la simulación (en UA^2)

α	0.0008	0.001	0.002	0.004
----------	--------	-------	-------	-------

2. Implementación en Python

Lo primero que hacemos es crear una función `RungeKutta2(...)` que recibe como parámetros las condiciones iniciales (7), la cantidad de iteraciones, el paso y el valor de α a utilizar. Esta función nos devuelve los datos de posición y velocidad de la órbita de Mercurio en cada instante de tiempo en un rango total de tiempo igual a $T = N\Delta t = 2$ años. Asimismo nos proporciona también los valores de (8) y (9) en cada instante.

Es a partir de estos datos que podemos calcular la tasa de precesión del perihelio de Mercurio para un α dado. Esto tomando en cuenta lo siguiente. El valor de dr'/dt se anula cada vez que Mercurio pasa por su punto más lejano y su punto más cercano al Sol, el afelio y el perihelio, respectivamente. Con esto presente, podemos trazar un ángulo θ_p entre la horizontal (el eje x) y el vector posición de Mercurio en cada instante en que $dr'/dt = 0$. Suponiendo que el afelio se encuentra inicialmente en el eje x positivo, esto nos dará ángulos de $\theta_p \geq 180^\circ$ y también $\theta_p \leq 90^\circ$, que corresponden al perihelio y afelio, respectivamente. Filtramos los ángulos $\theta_p \geq 180^\circ$ que son los correspondientes los de perihelio con la horizontal y el instante de tiempo en el que ocurren. A estos últimos datos se les realiza un ajuste lineal de la forma $\theta_p(t) = mt + c$, con m y c las constantes de ajuste. Finalmente $d\theta_p/dt = m$ será el valor de la tasa de precesión del perihelio de Mercurio (dado en grados/año) para el valor de α correspondiente.

Este proceso se repite para todos los valores del cuadro (I). Una vez se ha obtenido la tasa de precesión para cada valor de α de cuadro, estos datos se extrapolan (también mediante un ajuste lineal) para obtener el valor real de precesión de perihelio de Mercurio que corresponde al valor de $\alpha = 1.1 \times 10^{-8} \text{ UA}^2$.

III. RESULTADOS

A. Cálculo de la tasa de precesión para $\alpha = 0.0008 \text{ UA}^2$

En la sección anterior discutimos la forma de abordar el problema, en esta sección presentamos los resultados obtenidos para un primer valor de α . Luego de haber integrado las ecuaciones de movimiento con el método numérico, hemos graficado las posiciones de Mercurio (figura 2) para visualizar su trayectoria. Como era de esperar, observamos una trayectoria elíptica donde también se aprecia un ligero desplazamiento en la elipse. Esto respalda las predicciones hechas por Kepler.

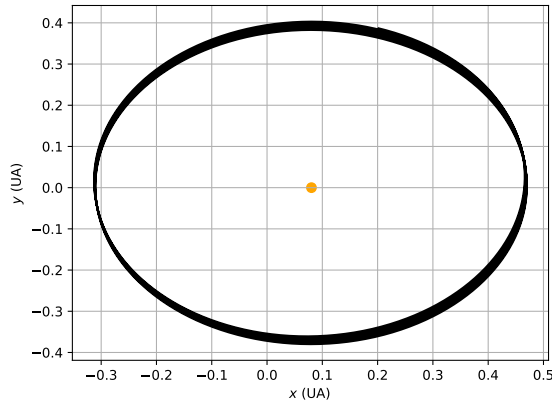


Figura 2: Órbita de Mercurio alrededor del Sol para $\alpha = 0.0008$

Según el planteamiento, las distancias entre Mercurio y el Sol deben poseer un punto máximo y un punto mínimo, que corresponde al afelio y al perihelio, respectivamente. Esto se deja en evidencia en la figura (3) donde claramente notamos un comportamiento oscilatorio. Con valores extremos de $(1 + e)a \approx 0.47 \text{ UA}$ (70 mill de km) para el punto más lejano y de $(1 - e)a \approx 0.31 \text{ UA}$ (46 mill de km) para el punto más cercano. Estos datos verifican las condiciones iniciales establecidas, así como el correcto funcionamiento del método numérico empleado. Las distancias extremas observadas coinciden con los valores esperados para el afelio y el perihelio, confirmando la validez del enfoque utilizado.

Dado que el objetivo es encontrar el ángulo de precesión del perihelio, los puntos máximos y mínimos de la figura (3) corresponden a los ceros de la gráfica en la figura (4), obtenida en base a la ecuación (9). Es así como encontramos tiempos en que Mercurio pasa por su punto más lejano y cercano. Para cada uno de estos tiempos calculamos el ángulo θ_p entre el eje horizontal y el vector de posición de Mercurio en ese instante. Una vez hecho esto, filtramos los ángulos $\theta_p \geq 180^\circ$ los cuales representan la desviación de perihelio con la horizontal. Estos resultados se presentan en la figura (5) y se observa un comportamiento lineal. El ajuste lineal a los puntos es el

siguiente

$$\theta_p(t) = (8.39 \pm 0.04)t + (180.02 \pm 0.05) \quad (10)$$

Por lo tanto, la tasa de precesión del perihelio de Mercurio para un valor de $\alpha = 0.0008 \text{ UA}^2$ es de

$$\frac{d\theta_p}{dt} = 8.39 \pm 0.04 \frac{\text{grados}}{\text{año}} \quad (11)$$

Ahora corresponde hallar la tasa de precesión para los demás valores de α en el cuadro (I).

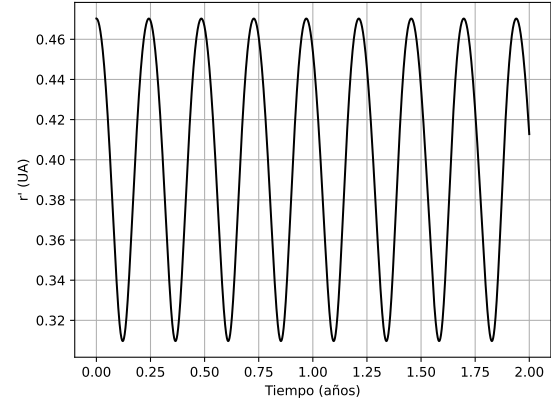


Figura 3: Distancia entre Mercurio y el Sol en función del tiempo.

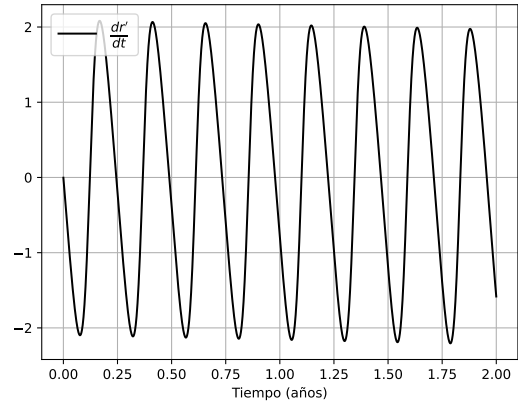


Figura 4: Tasa de cambio de las distancias entre Mercurio y el Sol respecto del tiempo.

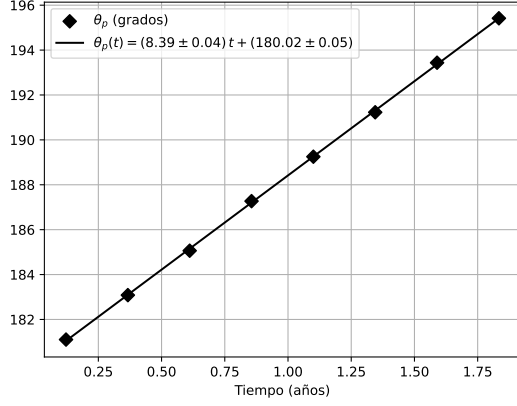


Figura 5: Ángulo de desviación del perihelio respecto a la horizontal en función del tiempo.

B. Cálculo de la tasa de precesión real del Perihelio de Mercurio

En la parte anterior hemos encontrado que la precesión del perihelio es de $d\theta_p/dt = 8.39 \pm 0.04$ (grados/año) para un valor de $\alpha = 0.0008 \text{ UA}^2$. En este apartado hemos repetido el procedimiento de la sección anterior para los demás valores de α en el cuadro (I). Procediendo de esta manera es que hemos encontrado los valores de precesión descritas en el cuadro (II). Por ejemplo, para un valor de $\alpha = 0.004 \text{ UA}^2$ le corresponde una tasa de precesión de 45.378 ± 0.044 grados/año.

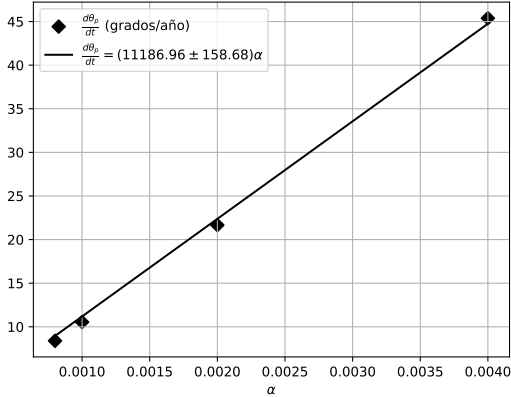


Figura 6: Tasa de precesión del perihelio de Mercurio para cada valor de α .

La figura (6) muestra valores del cuadro (II) en una gráfica. Estos valores también presentan un comportamiento lineal en función del valor de α . En otras palabras, la tasa de precesión es proporcional al valor de α . Realizando un ajuste lineal

obtenemos lo siguiente

$$\frac{d\theta_p}{dt} = (11186.96 \pm 158.68)\alpha \quad (12)$$

Sustituyendo el valor real $\alpha = 1.1 \times 10^{-8} \text{ UA}^2$ en la ecuación (12), convirtiendo los grados a segundo de arco y los años a siglos, obtenemos un valor de precesión de

$$\frac{d\theta_p}{dt} = 44.3 \pm 0.6 \text{ segundo de arco/siglo} \quad (13)$$

Cuadro II: Tasa de precesión de perihelio de Mercurio para cada valor de α

$\alpha \text{ (UA}^2\text{)}$	$d\theta_p/dt \text{ (grados/año)}$
0.0008	8.395 ± 0.043
0.001	10.540 ± 0.041
0.002	21.659 ± 0.046
0.004	45.378 ± 0.044

IV. CONCLUSIONES

Tal como lo establece Kepler en su primera ley, la órbita de Mercurio sigue una elipse con el Sol en uno de sus focos, esto se evidencia en la figura (2) que muestra el recorrido de su órbita. Por otra parte, también se observa que debido a la corrección relativista, dicha elipse no se mantiene fija en el espacio, sino que rota lentamente alrededor del Sol. Justo el comportamiento esperado tal como lo establece la teoría de la relatividad general.

Los resultados han mostrado que, al variar el parámetro de corrección relativista α , la tasa de precesión del perihelio aumenta linealmente. Hemos encontrado que la tasa de precesión real de perihelio de Mercurio es de 44.3 ± 0.6 segundo de arco por siglo (ecuación 13) que está en buen acuerdo con el valor observado de 43 segundos de arco por siglo, también predichos por la teoría general de la relatividad de Einstein.

Con esto también hemos demostrado que el método de Runge-Kutta de segundo orden es una herramienta eficaz para la simulación numérica del movimiento de Mercurio y para la estimación de la precesión de su perihelio que no es explicable mediante la mecánica newtoniana. Por último, resaltamos la importancia de las correcciones relativistas en el análisis de movimientos planetarios y muestra cómo incluso pequeños ajustes a las fuerzas gravitacionales pueden tener un efecto significativo en el comportamiento orbital a largo plazo. Además, el uso de herramientas computacionales nos proporcionó un enfoque práctico y preciso para abordar un problema que, históricamente fue un desafío para la física.

V. ANEXO

El código empleado en esta simulación así como otros detalles se pueden consultar en el siguiente [enlace](#).

-
- [1] Juan Diego Chang. Física computacional. Notas de clase en Física computacional, Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas, USAC, 2024. Accedido en: Noviembre 2024.
- [2] Bert Janssen. *Teoría de la Relatividad General*. Granada, España, 2013. Dpto de Física Teórica y del Cosmos, Edificio Mece-
- nas, Campus de Fuente Nueva, 18071 Granada, España. Contacto: bjanssen@ugr.es.
- [3] Jesús López Zavala, Elizabeth Fraire Bonilla, Juan Diego Pérez Ruiz, Simón Rodríguez Rodríguez, and Jaime Burgos García. Precesión del perihelio de mercurio, 2023.