1^a **lista de exercícios - 115151 - Inferência Estatística**

1) Obtenha estimadores pelo método dos momentos para o(s) parâmetro(s) das seguintes distribuições:
a) Bernoulli, $f(x;p) = p^x(1-p)^{1-x}, x = 0, 1$; $E(X) = p, \text{Var}(X) = p(1-p)$;
b) Poisson, $f(x;\lambda) = e^{-\lambda}\lambda^x/x!, x = 0, 1, 2, \ldots$; $E(X) = \lambda, \text{Var}(X) = \lambda$, $E(X^2) = \lambda + \lambda^2$;
c) Geométrica, $f(x;p) = p(1-p)^x, x = 0, 1, 2, \ldots$; $E(X) = (1-p)/p, \text{Var}(X) = (1-p)/p^2$, $E(X^2) = (1-p)(2-p)/p^2$;
d) Uniforme, $f(x;a,b) = 1/(b-a), a < x < b$, $E(X) = (a+b)/2, \text{Var}(X) = (b-a)^2/12$;
e) Normal, $f(x;\mu,\sigma) = [1/(\sqrt{2\pi}\sigma)]\exp[-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)], x \in I\!R$, $E(X) = \mu, \text{Var}(X) = \sigma^2$;
f) Gama, $f(x;\alpha,\beta) = [\beta^\alpha/\Gamma(\alpha)]x^{\alpha-1}\exp(-\beta\, x), x > 0$, $E(X) = \alpha/\beta, \text{Var}(X) = \alpha/\beta^2$;
g) Beta, $f(x;a,b) = [1/B(a,b)]x^{a-1}(1-x)^{b-1}, 0 < x < 1, B(a,b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$, $E(X) = a/(a+b), \text{Var}(X) = ab/[(a+b+1)(a+b)^2]$;
h) Laplace (Exponencial dupla), $f(x;\mu,\beta) = [1/(2\beta)]\exp(-|x-\mu|/\beta), x \in I\!R$, $E(X) = \mu, \text{Var}(X) = 2\beta^2$.
i) Para a distribuição exponencial com $f(x) = \lambda\exp(-\lambda x)$, $x > 0$, obtenha um estimador $\widehat{\lambda}_k$ pelo método dos momentos utilizando o momento ordinário $E(X^k) = \int_0^\infty x^k f(x)dx$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.
Sugestão: Utilize a densidade da distribuição gama para calcular o momento facilmente.
j) Faça um estudo computacional para comparar o vício e a variância dos estimadores $\widehat{\lambda}_k$, incluindo o estimador pelo método dos momentos obtido utilizando a variância como momento.

2) Obtenha estimadores de máxima verossimilhança para o(s) parâmetro(s) dos seguintes modelos de distribuição de probabilidades:
a) Bernoulli, $f(x;p) = p^x(1-p)^{1-x}, x = 0, 1$;
b) Poisson, $f(x;\lambda) = e^{-\lambda}\lambda^x/x!, x = 0, 1, 2, \ldots$;
c) Geométrica, $f(x;p) = p(1-p)^x, x = 0, 1, 2, \ldots$;
d) Normal, $f(x;\mu,\sigma) = [1/(\sqrt{2\pi}\sigma)]\exp[-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)], x \in I\!R$;
e) Exponencial, $f(x;\lambda) = \lambda\exp(-\lambda\, x), x > 0$;
f) Pareto, $f(x;\theta) = \theta c^\theta x^{-(\theta+1)}, x \geq c$, com c conhecido;
g) Pareto, $f(x;\theta) = c\theta^c x^{-(c+1)}, x \geq \theta$, com c conhecido;
h) Gere uma amostra da distribuição $Gama(\alpha,\beta)$, com $f(x) = \beta^\alpha x^{\alpha-1}\exp(-\beta x)/\Gamma(\alpha)$, $x > 0$, com $\alpha = 2$ e $\beta = 3$. Calcule o EMV de α e β.
i) Gere uma amostra da distribuição $Beta(a,b)$ e obtenha o EMV de a e b.

3) a) Uma urna contém bolas pretas e brancas. Uma amostra de tamanho n é extraída com reposição. Qual é o EMV da razão R do número de bolas pretas sobre o número de bolas brancas na urna?
b) Suponha que as bolas são extraídas em sequência com reposição até que uma bola preta seja obtida. Seja X o número de bolas extraídas (desconsiderando-se a última). Este procedimento é repetido n vezes para se obter uma amostra $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Qual é o EMV de R com base nesta amostra?
c) Faça um estudo computacional para comparar o vício, variância e erro quadrático médio destes estimadores.

4) Uma amostra de tamanho n_1 deve ser obtida a partir de uma população Normal com média μ_1 e variância σ_1^2. Uma segunda amostra de tamanho n_2 deve ser obtida de uma

população Normal com média μ_2 e variância σ_2^2.
a) Qual é o EMV de $\theta = \mu_1 - \mu_2$?
b) Supondo $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, obtenha o EMV de σ.

5) Suponha que o raio de um círculo é medido com um erro de medida que tem distribuição $N(0, \sigma^2)$, com σ^2 desconhecido. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de medições do raio.
a) Encontre um estimador não tendencioso da área do círculo.
b) Calcule o erro quadrático médio deste estimador.
c) Obtenha o estimador de máxima verossimilhança da área do círculo.
d) Calcule o erro quadrático médio deste estimador.
e) Qual dos dois estimadores tem o menor erro quadrático médio.

6) Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição com média μ e variância σ^2.
a) Mostre que $\sum_{i=1}^n a_i X_i$ é estimador não-tendencioso de μ para quaisquer $a_1, \ldots, a_n$ satisfazendo $\sum_{i=1}^n a_i = 1$.
b) Se $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, mostre que $Var(\sum_{i=1}^n a_i X_i)$ é minimizada tomando $a_i = 1/n$, $i = 1, \ldots, n$.

7) Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição contínua com densidade $f(x;\theta) = \theta/x^2,\ x \geq \theta$, onde $\theta > 0$.
a) Encontre o estimador de máxima verossimilhança de θ.
b) Calcule o erro quadrático médio deste estimador.
c) Obtenha um estimador não tendencioso de θ.
d) Calcule o erro quadrático médio deste estimador.
e) Qual dos dois estimadores tem o menor erro quadrático médio.
f) $X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ é uma estatística suficiente para θ?

8) Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição $Uniforme(0, \theta)$, onde $\theta > 0$.
a) Estime θ pelo método dos momentos e calcule o EQM deste estimador.
b) Encontre o EMV de θ e calcule o EQM deste estimador.
c) Entre todos os estimadores da forma $aX_{(n)}$, onde a é uma constante (que pode depender de n), encontre o estimador que tem o menor EQM para todos os valores de θ e encontre o EQM deste estimador.
d) Seja $T = X_{(1)} + X_{(n)}$. Encontre o EQM deste estimador.
e) Quais destes estimadores são consistentes?
f) Qual destes estimadores você escolheria? Por quê?
g) Encontre o EMV da variância populacional.

9) **a)** Assumindo α conhecido, encontre o EMV de β para uma amostra de tamanho n da distribuição $Gama(\alpha, \beta)$ com $f(x;\beta) = [\beta^\alpha/\Gamma(\alpha)]x^{\alpha-1}\exp(-\beta x)$, $x \geq 0$.
b) Encontre uma estatística suficiente.
c) O EMV de β é não-tendencioso?
d) O EMV de β é consistente?
e) A distribuição $Gama(\alpha, \beta)$ pertence à família exponencial? Assuma, agora, α desconhecido.

10) Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da v.a. X com f.d.p $f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}$, para $0 < x < 1$, onde $\theta > 0$.
a) Esta distribuição pertence à família exponencial?
b) Encontre o EMV de θ.
c) Calcule o erro quadrático médio deste estimador.
d) Encontre um estimador de θ pelo método dos momentos.
e) Faça um estudo computacional para comparar o vício, variância e erro quadrático médio dos dois estimadores.
f) Encontre o EMV de $\mu = \theta/(1+\theta)$;
g) Encontre uma estatística suficiente para θ.
h) $\sum_{i=1}^{n} X_i$ é estatística suficiente?

11) Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição $Binomial(m, p)$, onde m é conhecido e $0 \leq p \leq 1$.
a) Encontre o EMV de p e também um estimador pelo método dos momentos;
b) A distribuição $Binomial(m, p)$ pertence à família exponencial?
c) O EMV de p é consistente?

12) Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição Uniforme discreta, isto é, $P(X = x) = 1/\theta$, para $x = 1, 2, \ldots, \theta$, onde $\theta \in N$.
a) Encontre um estimador de θ pelo método dos momentos e calcule seu EQM.
b) Obtenha o EMV de θ.
c) Encontre uma estatística suficiente para θ.

13) Um pesquisador sabe que a distribuição do tempo de vida de um certo componente é *Exponencial* com média $1/\lambda$. Com base em uma amostra de tamanho n de tempos de vida de componentes,
a) obtenha o EMV do tempo mediano de vida deste tipo de componente;
b) Calcule o erro quadrático médio deste estimador. Ele é consistente?

14) Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição $N(\theta, 1)$.
a) Obtenha um estimador não-tendencioso de $P(X > 0)$ e seu erro quadrático médio.
b) Obtenha o EMV de $P(X > 0)$.
c) Estes estimadores são consistentes?

15) Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição $Poisson(\lambda)$.
a) Encontre um estimador não-tendencioso de $\tau(\lambda) = (1+\lambda)e^{-\lambda}$.
b) Encontre, também, o EMV de $\tau(\lambda)$.
c) Calcule o EQM do EMV de $e^{-\lambda}$.
d) Obtenha estimadores de λ pelo método dos momentos utilizando a esperança e a variância como momentos.
e) Faça um estudo computacional para comparar o EQM destes estimadores.

16) Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da v.a. X com f.d.p $f(x;\theta) = 2x/\theta^2$, para $0 \leq x \leq \theta$, onde $\theta > 0$.
a) Encontre o EMV de θ e seu EQM;

b) $X_{(n)}$ é estatística suficiente?
c) Obtenha um estimador de θ pelo método dos momentos e calcule seu EQM.
d) Qual dos dois estimadores tem o menor EQM?

17) Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da v.a. X com f.d.p $f(x;\theta) = \theta(1+x)^{-(1+\theta)}$, para $x > 0$, onde $\theta > 0$.
a) Estime θ pelo método dos momentos assumindo $\theta > 1$;
b) Encontre o EMV de $1/\theta$;
c) Esta distribuição pertence à família exponencial?
d) Obtenha uma estatística suficiente para θ.

18) Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da v.a. X com f.d.p $f(x;\theta) = 1/(2\theta)$, para $-\theta \leq x \leq \theta$, onde $\theta > 0$.
a) Encontre o EMV de θ;
b) Este estimador é consistente?
c) Encontre a(s) estatística(s) suficiente(s) para θ;
d) Esta distribuição pertence à família exponencial?

19) Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da v.a. X com f.d.p $f(x;\theta) = \mathrm{e}^{-(x-\theta)}$, para $x > \theta$, onde $-\infty < \theta < \infty$;
a) Encontre um estimador de θ pelo método dos momentos.
b) Obtenha o erro quadrático médio de $\widehat{\theta}$.
c) Encontre o EMV de θ.
d) Obtenha o erro quadrático médio do EMV de θ.
e) Obtenha um estimador não tendencioso de θ com base no estimador obtido em **(c)**.
f) Obtenha seu erro quadrático médio.
g) Qual dos três estimadores obtidos em **(a)**, **(c)** e **(e)** tem o menor erro quadrático médio?

20) Seja X o número de filhos do sexo masculino de um casal e Y o número total de filhos do casal. Seja $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ uma amostra aleatória das variáveis X e Y (isto corresponde aos dados para n casais). Suponha que $Y \sim Poisson(\lambda)$ e $X \mid Y = y \sim Binomial(y, p)$. Obtenha os EMV's de λ e p bem como suas experanças e variâncias.

21) Considere uma população formada por três diferentes tipos de indivíduos ocorrendo segundo as proporções de Hardy-Weinberg θ^2, $2\theta(1-\theta)$ e $(1-\theta)^2$, respectivamente, com $0 < \theta < 1$.
a) Obtenha o EMV de θ.
b) Obtenha o EMV de $\theta/(1-\theta)$.

22) Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição $U(\theta, \theta+1)$.
a) Mostre que o estimador de máxima verossimilhança de θ não é único, pois a verossimilhança é maximizada por qualquer valor de θ no intervalo $[X_{(n)} - 1, X_{(1)}]$.
b) Considere o estimador de máxima verossimilhança $\widehat{\theta}_a = (1-a)(X_{(n)}-1) + aX_{(1)}$, $0 \leq a \leq 1$. Mostre que $E[X_{(1)}] = \theta + 1/(n+1)$, $E[X_{(n)}] = \theta + n/(n+1)$, $Var[X_{(1)}] = Var[X_{(n)}] = n/[(n+2)(n+1)^2]$, $E[X_{(1)}X_{(n)}] = \theta(\theta+1) + 1/(n+2)$, $Cov[X_{(1)}, X_{(n)}] = 1/[(n+2)(n+1)^2]$. Com estes resultados, mostre que $\widehat{\theta}_a$ é estimador não tendencioso de θ quando $a = 1/2$ e que $EQM(\widehat{\theta}_a)$ é mínimo quando $a = 1/2$.

23) Seja $X_i, \ldots, X_n$ a.a. da distribuição *Exponencial*(λ), com $f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$. No entanto, não observamos X_i, mas apenas $Y_i = I_{[0,C]}(X_i)$, onde C é uma constante conhecida.
a) Obtenha o estimador de máxima verossimilhança de λ.
b) Faça um estudo computacional para comparar o vício e a variância do EMV de λ obtido a partir de $Y_1, \ldots, Y_n$ com aquele que seria obtido caso se observasse $X_1, \ldots, X_n$.
c) A partir do estudo em **(b)**, construa um gráfico para descrever o comportamento do vício e da variância do estimador obtido a partir de $Y_1, \ldots, Y_n$ como função de C.

24)
Seja $X_i, \ldots, X_n$ a.a. da distribuição *Poisson*(λ). No entanto, não observamos X_i, mas apenas $Y_i = I_{\{0\}}(X_i)$.
a) Obtenha o estimador de máxima verossimilhança de λ.
b) Faça um estudo computacional para comparar o vício e a variância do EMV de λ obtido a partir de $Y_1, \ldots, Y_n$ com aquele que seria obtido caso se observasse $X_1, \ldots, X_n$.

25)
Seja $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ a.a. de um vetor aleatório (X, Y) com $E(X) = \mu_X$, $E(Y) = \mu_Y$, $Var(X) = \sigma_X^2$, $Var(Y) = \sigma_Y^2$, $Cov(X, Y) = \rho\sigma_X\sigma_Y$. Use o método delta para encontrar a distribuição assintótica de $\sqrt{n}((\bar{X}, \bar{Y})' - (\mu_X, \mu_Y)')$.

26) Obtenha a distribuição de probabilidade, esperança e variância do EMV de σ para uma a.a. da distribuição $N(\mu, \sigma^2)$.

27) Seja $X_1, \ldots, X_n$ a.a. da distribuição $U(a, b)$.
a) Encontre os estimadores de máxima verossimilhança de a e b.
b) Considere a distância $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_k - y_k|\}$ entre dois vetores $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)'$ e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_k)'$. Mostre que $d(\widehat{\theta}, \theta) \xrightarrow{p} 0$, onde $\theta = (a, b)'$ e $\widehat{\theta} = (\widehat{a}, \widehat{b})'$.

28) Seja $X_1, \ldots, X_n$ a.a. da distribuição *Exponencial*(λ) com $f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$.
a) Obtenha a distribuição assintótica de $\sqrt{n}(\widehat{\lambda} - \lambda)$, onde $\widehat{\lambda} = 1/\overline{X}$ é o e.m.v. de λ.

29) Seja $X_1, \ldots, X_n$ a.a. da distribuição $N(\mu, \sigma^2)$.
a) Obtenha a distribuição assintótica do coeficiente de variação $C = \widehat{\sigma}/\overline{X}$ onde
$\widehat{\sigma} = \sqrt{(1/n)\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$.

Gabarito:

1) Em todos os casos, considere $\widehat{\sigma^2} = (1/n)\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.
a) $E(X) = p \Rightarrow \widehat{p} = \bar{X}$; $Var(X) = p(1-p) \Rightarrow \widehat{p} = \bar{X}$ pois $X_i = X_i^2$ para a distribuição Bernoulli, e para que $\widehat{p}$ seja não tendencioso, não podemos ter $\widehat{p} = (1 - \bar{X})$.
b)E(X)=$\lambda \Rightarrow \widehat{\lambda} = \bar{X}$; $Var(X) = \lambda \Rightarrow \widehat{\lambda} = \widehat{\sigma^2}$;
$E(X^2) = \lambda + \lambda^2 \Rightarrow (1/n)\sum_{i=1}^n X_i^2 = \widehat{\lambda} + \widehat{\lambda}^2 \Rightarrow \widehat{\lambda} = (-1 + \sqrt{1 + 4\sum_{i=1}^n X_i^2/n})/2$.
c) $E(X) = (1-p)/p \Rightarrow \widehat{p} = 1/(1+\bar{X})$.
$Var(X) = (1-p)/p^2 \Rightarrow \widehat{p} = (-1 + \sqrt{1 + 4\widehat{\sigma^2}})/(2\widehat{\sigma^2})$.
d) $\widehat{a} = \bar{X} - \sqrt{3}\widehat{\sigma}$, $\widehat{b} = \bar{X} + \sqrt{3}\widehat{\sigma}$.
e) $\widehat{\mu} = \bar{X}$, $\widehat{\sigma^2} = (1/n)\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.
f) $\widehat{\alpha} = \bar{X}^2/\widehat{\sigma^2}$, $\widehat{\beta} = \bar{X}/\widehat{\sigma^2}$.
g) $\widehat{a} = \bar{X}^2(1-\bar{X})/\widehat{\sigma^2} - \bar{X}$, $\widehat{b} = (1-\bar{X})[\bar{X}(1-\bar{X})/\widehat{\sigma^2} - 1]$.
h) $\widehat{\mu} = \bar{X}$, $\widehat{\beta} = \sqrt{1/2}\,\widehat{\sigma}$.
i) $E(X^k) = k!/\lambda^k \Rightarrow \widehat{\lambda}_k = \left(k!n/\sum_{i=1}^n X_i^k\right)^{1/k}$.
j) Segue abaixo um exemplo de código em R.

```
lambda <- 5
n <- 10 # tamanho da amostra
na <- 1000 # numero de amostras
mat.dados <- matrix(rexp(n*na,lambda),nrow=na)
no.est <- 11
mat.est <- matrix(0,na,no.est)
mat.est[,no.est] <- 1/apply(mat.dados,1,sd)
for (k in 1:(no.est-1))
  mat.est[,k] <- (n*factorial(k)/apply((mat.dados^k),1,sum))^(1/k)
vicios <- apply(mat.est,2,mean)-lambda
variancias <- apply(mat.est,2,var)
par(mfrow=c(1,2))
plot(vicios)
plot(variancias)
```

2)
a) $\widehat{p} = \bar{X}$.
b) $\widehat{\lambda} = \bar{X}$.
c) $\widehat{p} = 1/(1+\bar{X}) = n/(n + \sum_{i=1}^n X_i)$.
d) $\widehat{\mu} = \bar{X}$, $\widehat{\sigma} = \sqrt{(1/n)\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$.
e) $\widehat{\lambda} = 1/\bar{X}$.
f) $\widehat{\theta} = n/\sum_{i=1}^n \log(X_i/c)$.
Obs.: $Y = \log(X/c) \sim Exponencial(\theta)$. **g)** $L(\theta) = c^n\theta^{nc}\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{-(c+1)} I_{(0,x_{(1)}]}(\theta) \Rightarrow \widehat{\theta} = X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$.
h) Segue abaixo um exemplo de código em R.

```
veross <- function(par){
  -(par[2]^(n*par[1]))/((gamma(par[1]))^n)*
  ((prod(x))^(par[1]-1))*exp(-par[2]*sum(x))
```

```
}
n <- 20
alfa <- 2
beta <- 3
x <- rgamma(n,alfa,beta)
inicio <- c(1.8,2.8)
emv <- optim(inicio,logveross)
emv$par
```

3)
a) Se p é a proporção de bolas pretas na urna, então $R = p/(1-p)$.
$X_i = 1$ se a i-ésima bola retirada é preta, e $X_i = 0$ caso contrário.
$X_i \sim Bernoulli(p)$. $\widehat{p} = \bar{X}$ é o EMV de p. Pela propriedade de invariância dos EMV's, $\widehat{R} = \widehat{p}/(1-\widehat{p}) = \bar{X}/(1-\bar{X})$.
b) $X \sim Geométrica(p) \Rightarrow \widehat{p} = 1/(1+\bar{X}) \Rightarrow \widehat{R} = 1/\bar{X}$.
c)

4) a) $\widehat{\theta} = \widehat{\mu}_1 - \widehat{\mu}_2 = \bar{X} - \bar{Y}$, onde $X_1, \ldots, X_{n_1}$ é a.a. da primeira população e $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ é a.a. da segunda população.
b) $\widehat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\bar{Y})^2}{n_1+n_2}}$

5) $X_1, \ldots, X_n$ é a.a. da distribuição $N(r, \sigma^2)$, onde r é o valor do raio desconhecido.
a) Seja $A = \pi r^2$. Como $\bar{X}$ é estimador não tendencioso de r, considere inicialmente o estimador $\widehat{A} = \pi \bar{X}^2$ (que é tendencioso pela desigualdade de Jensen). Vamos calcular sua esperança para corrigir seu vício.

$$E(\widehat{A}) = \pi E(\bar{X}^2) = \pi\{Var(\bar{X}) + [E(\bar{X})]^2\} = \pi[\sigma^2/n + r^2] = \pi\sigma^2/n + A\,.$$

Portanto, $\tilde{A} = \pi(\bar{X}^2 - S^2/n)$ é estimador não tendencioso de A, onde
$S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2/(n-1)$ é estimador não tendencioso de σ^2 (já demonstrado em sala de aula).

b)

$$
\begin{aligned}
EQM(\tilde{A}) = Var(\tilde{A}) &= \pi^2 \left[Var(\bar{X}^2) + Var\left(\frac{S^2}{n}\right) \right] \\
&= \pi^2 \left\{ Var[(\bar{X} - r + r)^2] + \frac{\sigma^4}{n^2(n-1)^2} Var\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) \right\} \\
&= \pi^2 \left\{ Var[(\bar{X} - r)^2 + 2r(\bar{X} - r) + r^2] + \frac{2\sigma^4}{n^2(n-1)} \right\} \\
&= \pi^2 \left\{ Var[(\bar{X} - r)^2] + 4r^2 Var(\bar{X} - r) + 2rCov[(\bar{X} - r)^2, \bar{X} - r] + \frac{2\sigma^4}{n^2(n-1)} \right\} \\
&= \pi^2 \left\{ \frac{\sigma^4}{n^2} Var\left[\left(\frac{\bar{X} - r}{\sigma/\sqrt{n}} \right)^2 \right] + 4r^2 \frac{\sigma^2}{n} + \frac{2\sigma^4}{n^2(n-1)} \right\} \\
&= \pi^2 \left\{ \frac{2\sigma^4}{n^2} + 4r^2 \frac{\sigma^2}{n} + \frac{2\sigma^4}{n^2(n-1)} \right\} \\
&= \frac{2\pi^2\sigma^2}{n} \left\{ \frac{\sigma^2}{n-1} + 2r^2 \right\}
\end{aligned}
$$

c) $\widehat{A} = \pi \bar{X}^2$.
d) $b(\widehat{A}) = \pi\sigma^2/n$, $Var(\widehat{A}) = \pi^2 Var(\bar{X}^2) = \pi^2(2\sigma^4/n^2 + 4r^2\sigma^2/n)$.
$EQM(A) = \frac{\pi^2\sigma^2}{n}\left(\frac{3\sigma^2}{n} + 4r^2\right)$
Obs. :EQM($\tilde{A}$) $< EQM(\widehat{A})$ para $n > 3$.

6)
a) $E(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i) = \mu \sum_{i=1}^n a_i = \mu$
b) $\mathcal{L}(\lambda, a_1, \dots, a_n) = Var(\sum_{i=1}^n a_i X_i) - \lambda(\sum_{i=1}^n a_i - 1) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 - \lambda(\sum_{i=1}^n a_i - 1)$.
$\partial\mathcal{L}/\partial\lambda = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i = 1$
$\partial\mathcal{L}/\partial a_i = 2\sigma^2 a_i - \lambda = 0 \Rightarrow 2\sigma^2 = n\lambda \Rightarrow \lambda = 2\sigma^2/n \Rightarrow a_i = 1/n$.

7)
a) $L(\mathbf{x}; \theta) = \frac{\theta^n}{\prod_{i=1}^n x_i^2} I_{(0, x_{(1)}]}(\theta) \Rightarrow \widehat{\theta} = X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$.
b)

$$
\begin{aligned}
f_{X(1)}(x) &= n[1 - F(x)]^{n-1} f(x) = n\theta^n / x^{n+1}\,,\ x \geq \theta > 0 \\
E(X_{(1)}) &= n\theta/(n-1) \Rightarrow b(X_{(1)}) = \theta/(n-1)\,, \\
E(X_{(1)}^2) &= n\theta^2/(n-2)\,,\ Var(X_{(1)}) = n\theta^2/[(n-2)(n-1)^2] \\
EQM(X_{(1)}^2) &= n\theta^2/[(n-2)(n-1)^2] + \theta^2/(n-1)^2 = 2\theta^2/[(n-2)(n-1)]
\end{aligned}
$$

c) $\widehat{\theta} = [(n-1)/n] X_{(1)}$.
d) $Var(\widehat{\theta}) = [(n-1)/n]^2 Var(X_{(1)}) = \theta^2/[n(n-2)]$.
e) $EQM(X_{(1)})/EQM(\widehat{\theta}) = 2n/(n-1) > 1$, para $n \geq 2$. Portanto, $EQM(\widehat{\theta}) < EQM(X_{(1)})$.
f) Sim, pelo critério da fatoração.

bf 8)

a) $E(X) = \theta/2 \Rightarrow \widehat{\theta} = 2\bar{X}$, $EQM(\widehat{\theta}) = Var(\widehat{\theta}) = 4Var(X_i)/n = \theta^2/3n$.
b) $\widehat{\theta} = X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, $E(\widehat{\theta}) = n\theta/(n+1)$, $b(\widehat{\theta}) = -\theta/(n+1)$,
$E(\widehat{\theta}^2) = n\theta^2/(n+2)$, $Var(\widehat{\theta}) = n\theta^2/[(n+1)^2(n+2)]$, $EQM(\widehat{\theta}) = 2\theta^2/[(n+1)(n+2)]$
c) $b(aX_{(n)}) = aE(X_{(n)}) - \theta = \theta[an/(n+1) - 1]$, $Var(aX_{(n)}) = a^2Var(X_{(n)}) = a^2n\theta^2/[(n+1)^2(n+2)]$,
$EQM(aX_{(n)}) = \theta^2[(n+2)(an-n-1)^2 + a^2n]/[(n+1)^2(n+2)]$, $dEQM(aX_{(n)})/da = 0 \Rightarrow a = (n+2)/(n+1)$.
$b(aX_{(n)}) = -\theta/(n+1)^2$, $Var(aX_{(n)}) = n(n+2)\theta^2/(n+1)^4$, $EQM(aX_{(n)}) = \theta^2/(n+1)^2$.
d) $E(T) = E(X_{(1)}) + E(X_{(n)}) = \theta/(n+1) + n\theta/(n+1) = \theta$.
$Var(T) = Var(X_{(1)}) + Var(X_{(n)}) + 2Cov(X_{(1)}, X_{(n)}) = 2n\theta^2/[(n+1)^2(n+2) + 2Cov(X_{(1)}, X_{(n)})$.

$$
\begin{aligned}
E(X_{(1)}X_{(n)}) &= \int_0^\theta \int_0^y xy f_{X_{(1)},X_{(n)}}(x,y)dxdy = \int_0^\theta \int_0^y xyn(n-1)[F(y)-F(x)]^{n-2}f(x)f(y)dxdy \\
&= \frac{n(n-1)}{\theta^n}\int_0^\theta \int_0^y xy(y-x)^{n-2}dxdy = \frac{\theta^2}{n+2}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Cov(X_{(1)}, X_{(n)}) = E(X_{(1)}X_{(n)}) - E(X_{(1)})E(X_{(n)}) \\
&= \theta^2/(n+2) - [\theta/(n+1)][n\theta/(n+1)] = \theta^2/[(n+1)^2(n+2)].
\end{aligned}
$$

$Var(T) = 2\theta^2/[(n+1)(n+2)]$.
e) Todos, pois os erros quadráticos médios convergem para zero quando o tamanho da amostra tende a infinito.
f) $aX_{(n)} = [(n+2)/(n+1)]X_{(n)}$ pois tem o menor EQM entre os quatro estimadores.
g) $\widehat{Var(X)} = (X_{(n)})^2/12$.

9)
a) $\widehat{\beta} = \alpha/\bar{X}$
b) $\sum_{i=1}^n X_i$
c) $\bar{X} \sim Gama(n\alpha, n\beta) \Rightarrow E(\widehat{\beta}) = n\alpha\beta/(n\alpha - 1) \Rightarrow \widehat{\beta}$ é tendencioso.
d) $b(\widehat{\beta}) = \beta/(n\alpha - 1) \to 0$ quando $n \to \infty$.
$E(\widehat{\beta}^2) = (n\alpha\beta)^2/[(n\alpha-1)(n\alpha-2)]$, $Var(\widehat{\beta}^2) = (n\alpha\beta)^2/[(n\alpha-1)^2(n\alpha-2)] \to 0$ quando $n \to \infty$.
e) Sim.

10)
a) Sim. $f(x;\theta) = \theta(1/x)\exp(\theta \log x)$.
b) $L(\mathbf{x};\theta) = \prod_{i=1}^n \theta x_i^{\theta-1} = \theta^n(\prod_{i=1}^n x_i^{\theta-1})$
$\Rightarrow \log L(\mathbf{x};\theta) = n\log\theta + (\theta-1)\sum_{i=1}^n \log x_i \Rightarrow d\log L/d\theta = (n/\theta) + \sum_{i=1}^n \log x_i = 0$
$\Rightarrow \widehat{\theta} = -n/\sum_{i=1}^n \log X_i$.
c) $Y = -\log X \sim Exponencial(\theta) \Rightarrow -\sum_{i=1}^n \log X_i \sim Gama(n, \theta)$
$\Rightarrow E(\widehat{\theta}) = n\theta/(n-1) \Rightarrow b(\widehat{\theta}) = \theta/(n-1)$.
$\Rightarrow E(\widehat{\theta}^2) = n^2\theta^2/[(n-1)(n-2)] \Rightarrow Var(\widehat{\theta}) = n^2\theta^2/[(n-1)^2(n-2)]$.
$EQM(\widehat{\theta}) = (n+2)\theta^2/[(n-1)(n-2)]$.
d) $E(X) = \theta/(\theta+1) \Rightarrow \widehat{\theta}/(\widehat{\theta}+1) = \bar{X} \Rightarrow \widehat{\theta} = \bar{X}/(1-\bar{X})$.
e)

```
theta <- 3 # verdadeiro valor do parametro na populacao
n <- 10 # tamanho de cada amostra
na <- 1000 # numero de amostras geradas
dados <- matrix(rbeta(n*na,theta,1),nrow=na)
# calculo do EMV para cada amostra gerada
est.mv <- -n/apply(log(dados),1,sum)
# calculo do estimador obtido pelo metodo dos momentos para cada amostra gerada
est.mm <- apply(dados,1,mean)/(1-apply(dados,1,mean))
cbind(mean(est.mv),mean(est.mm))
cbind(sd(est.mv),sd(est.mm))
```

f) $\widehat{\mu} = \widehat{\theta}/(1+\widehat{\theta}) = n/(n - \sum_{i=1}^n \log X_i)$.
g) Pelo critério da fatoração, temos $\prod_{i=1}^n X_i$ como estatística suficiente.
Pela família exponencial, temos $\sum_{i=1}^n \log X_i$ como estatística suficiente.
Note que uma é obtida a partir da outra aplicando uma função injetora.
h) $\sum_{i=1}^n X_i$ não é estatística suficiente pois não é função da estatística suficiente.

11)

a) $$L(\mathbf{x};p) = \prod_{i=1}^n \binom{m}{x_i} p^{x_i}(1-p)^{m-x_i} = \left[\prod_{i=1}^n \binom{m}{x_i}\right] p^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{nm-\sum_{i=1}^n x_i}$$
$$\Rightarrow \widehat{p} = (1/nm)\sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}/m\,.$$

$E(X) = mp \Rightarrow \widehat{p} = \bar{X}/m$.
b) $E(\widehat{p}) = p$, $Var(\widehat{p}) = Var(X)/(nm^2) = mp(1-p)/(nm^2) = p(1-p)/(nm) \to 0$ quando $n \to \infty$.

12)
a) $E(X) = (\theta+1)/2 \Rightarrow (\widehat{\theta}+1)/2 = \bar{X} \Rightarrow \widehat{\theta} = 2\bar{X} - 1$.
$Var(\widehat{\theta}) = 4Var(\bar{X}) = 4Var(X)/n$.
$E(X^2) = (\theta+1)(2\theta+1)/6 \Rightarrow Var(X) = (\theta+1)(\theta-1)/12 \Rightarrow EQM(\widehat{\theta}) = (\theta+1)(\theta-1)/(3n)$.
b) $L(\mathbf{x};\theta) = \prod_{i=1}^n (1/\theta) I_{\{1,2,\ldots,\theta\}}(x_i) = (1/\theta^n) I_{\{x_{(n)},x_{(n)}+1,\ldots\}}(\theta) I_{\{1,2,\ldots,x_{(n)}\}}(x_{(1)}) \Rightarrow \widehat{\theta} = X_{(n)}$.
c) $X_{(n)}$ é estatística suficiente pelo critério da fatoração.

13)
a) $F(m) = 1/2 = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda m} \Rightarrow m = (1/\lambda)\log 2 \Rightarrow \widehat{m} = \bar{X}\log 2$ é EMV de m pela propriedade de invariância dos EMV's.
b) $E(\widehat{m}) = E(\bar{X})\log 2 = (1/\lambda)\log 2 = m$,
$Var(\widehat{m}) = Var(\bar{X})(\log 2)^2 = [1/(n\lambda^2)](\log 2)^2 \to 0$ quando $n \to \infty$.

14)
a) $Y_i = I_{\{X_i>0\}} = I_{(0,\infty)}(X_i) \sim Bernoulli(P(X_i > 0)) \Rightarrow \bar{Y}$ é estimador não tendencioso de $P(X_i > 0)$.
$EQM(\bar{Y}) = P(X > 0)[1 - P(X > 0)]/n$.
b) $P(X > 0) = P(X - \theta > -\theta) = 1 - \Phi(-\theta) = \Phi(\theta) \Rightarrow \Phi(\bar{X})$ é o EMV de $\Phi(\theta)$ pela propriedade de invariância dos EMV's.

c) Sim, pois $EQM(\bar{Y}) \to 0$ quando $n \to \infty$ e $\Phi(\bar{X})$ converge para $\Phi(\theta)$ em probabilidade pois $\bar{X}$ converge em probabilidade para θ (pela lei fraca dos grandes números) e $\Phi(\cdot)$ é função contínua.

15)
a) $\tau(\lambda) = P(\{X=0\} \cup \{X=1\}) \Rightarrow Y_i = I_{\{0,1\}}(X_i) \sim Bernoulli(\tau(\lambda)) \Rightarrow \bar{Y}$ é estimador não tendencioso de $\tau(\lambda)$.
b) $\bar{X}$ é E.M.V. de λ. Pela propriedade de invariância dos E.M.V.'s, $\widehat{\tau(\lambda)} = \tau(\widehat{\lambda}) = (1+\bar{X})\mathrm{e}^{-\bar{X}}$ é E.M.V. de $\tau(\lambda)$.
c) $E(\mathrm{e}^{-\bar{X}}) = E\{\exp[(-1/n)\sum_{i=1}^n X_i]\} = [M_{X_1}(-1/n)]^n = \exp[n\lambda(\mathrm{e}^{-1/n} - 1)]$.
$E[(\mathrm{e}^{-\bar{X}})^2] = E\{\exp[(-2/n)\sum_{i=1}^n X_i]\} = [M_{X_1}(-2/n)]^n = \exp[n\lambda(\mathrm{e}^{-2/n} - 1)]$.
$Var(\mathrm{e}^{-\bar{X}}) = \mathrm{e}^{-n\lambda}[\exp(n\lambda\mathrm{e}^{-2/n}) - \exp(2n\lambda\mathrm{e}^{-1/n})]$.
$EQM(\mathrm{e}^{-\bar{X}}) = \{\exp[n\lambda(\mathrm{e}^{-1/n} - 1)] - \mathrm{e}^{-\lambda}\}^2 + \mathrm{e}^{-n\lambda}[\exp(n\lambda\mathrm{e}^{-2/n}) - \exp(2n\lambda\mathrm{e}^{-1/n})]$.
d) $E(X) = \lambda \Rightarrow \widehat{\lambda} = \bar{X}$; $Var(X) = \lambda \Rightarrow \widehat{\lambda} = (1/n)\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.
e)

```
lambda <- 3 # verdadeiro valor do parametro na populacao
n <- 10 # tamanho de cada amostra
na <- 1000 # numero de amostras geradas
dados <- matrix(rpois(n*na,lambda),nrow=na)
# calculo do estimador obtido via E(X) para cada amostra gerada
est1 <- apply(dados,1,mean)
# calculo do estimador obtido via Var(X) para cada amostra gerada
est2 <- apply(dados,1,var)
cbind(mean(est1),mean(est2))
cbind(sd(est1),sd(est2))
```

16)
a) $L(\mathbf{x};\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{2x_i}{\theta^2} I_{[0,\theta)}(x_i) = \frac{2^n \prod_{i=1}^n x_i}{\theta^{2n}} I_{[x_{(n)},\infty)}(\theta) I_{[0,x_{(n)})}(x_{(1)}) \Rightarrow \widehat{\theta} = X_{(n)}$ é o E.M.V. de θ .
$f_{\widehat{\theta}}(y) = 2nx^{2n-1}/\theta^{2n}$, $0 \le x \le \theta$.
$E(\widehat{\theta}) = 2n\theta/(2n+1)$, $b(\widehat{\theta}) = -\theta/(2n+1)$,
$E(\widehat{\theta}^2) = n\theta^2/(n+1)$, $Var(\widehat{\theta}) = n\theta^2/[(n+1)(2n+1)^2]$, $EQM(\widehat{\theta}) = \theta^2/[(n+1)(2n+1)]$.
b) Sim, pelo critério da fatoração.
c) $E(X) = 2\theta/3 \Rightarrow \widehat{\theta} = 3\bar{X}/2$, $E(\widehat{\theta}) = \theta$.
$Var(\widehat{\theta}) = 9Var(X)/(4n)$, $E(X^2) = \theta^2/2 \Rightarrow Var(X) = \theta^2/18 \Rightarrow Var(\widehat{\theta}) = \theta^2/(8n)$.
d) O E.M.V. pois seu EQM converge para zero mais rápido.

17)
a) $E(X) = 1/(\theta - 1) \Rightarrow \widehat{\theta} = (1+\bar{X})/\bar{X}$.
b) $L(\mathbf{x};\theta) = \theta^n \prod_{i=1}^n (1+x_i)^{-(1+\theta)} \Rightarrow \log L(\mathbf{x};\theta) = n\log\theta - (1+\theta)\sum_{i=1}^n \log(1+x_i)$
$\Rightarrow d\log L/d\theta = (n/\theta) - \sum_{i=1}^n \log(1+x_i) = 0 \Rightarrow \widehat{\theta} = n/\sum_{i=1}^n \log(1+x_i)$
$\Rightarrow \widehat{1/\theta} = 1/\widehat{\theta} = \sum_{i=1}^n \log(1+x_i)/n$.
c) Sim. $f(x;\theta) = \theta/(1+x)\exp[-\theta\log(1+x)]$.
d) $S = \sum_{i=1}^n \log(1+x_i)$.

18)
a)

$$L(\mathbf{x};\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\theta} I_{[-\theta,\theta)}(x_i) = \frac{1}{(2\theta)^n} I_{[-\theta,\,x_{(n)}]}(x_{(1)}) I_{[x_{(1)},\,\theta]}(x_{(n)})$$
$$= \frac{1}{(2\theta)^n} I_{[-x_{(1)},\,\infty)}(\theta) I_{[x_{(n)},\,\infty)}(\theta) = \frac{1}{(2\theta)^n} I_{[\max\{-x_{(1)},\,x_{(n)}\},\,\infty)}(\theta)\,.$$

Portanto, $\widehat{\theta} = \max\{-X_{(1)},\, X_{(n)}\}$.
b)

$$F_{\widehat{\theta}}(y) = P(\max\{-X_{(1)},\, X_{(n)}\} \leq y) = P(-X_{(1)} \leq y,\, X_{(n)} \leq y)$$
$$= P(X_{(1)} \geq -y,\, X_{(n)} \leq y) = \prod_{i=1}^{n} P(-y \leq X_i \leq y) = [F(y) - F(-y)]^n = (y/\theta)^n\,.$$

$f_{\widehat{\theta}}(y) = ny^{n-1}/\theta^n,\ 0 \leq x \leq \theta$.
$E(\widehat{\theta}) = \int_0^\theta y f_{\widehat{\theta}}(y)dy = n\theta/(n+1) \Rightarrow b(\widehat{\theta}) = -\theta/(n+1) \to 0$.
$E(\widehat{\theta}^2) = \int_0^\theta y^2 f_{\widehat{\theta}}(y)dy = n\theta^2/(n+2) \Rightarrow Var(\widehat{\theta}) = n\theta^2/[(n+1)^2(n+2)] \to 0$.
Portanto, $\widehat{\theta}$ é estimador consistente de θ.
c) Pelo critério da fatoração, $S = \max\{-X_{(1)},\, X_{(n)}\}$ é estatística suficiente para θ.
d) Não.

19)
a) $E(X) = \int_\theta^\infty x\, \mathrm{e}^{-(x-\theta)}dx = \theta + 1 \Rightarrow \widehat{\theta} = \bar{X} - 1$.
b) $EQM(\widehat{\theta}) = Var(\bar{X} - 1) = Var(\bar{X}) = 1/n$.
c) $L(\mathbf{x};\theta) = \prod_{i=1}^n \mathrm{e}^{-(x_i-\theta)} I_{[\theta,\,\infty)}(x_i) = \mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^n x_i}\mathrm{e}^{n\theta} I_{(-\infty,\,x_{(1)}]}(\theta) \Rightarrow \tilde{\theta} = X_{(1)}$.
d) $E(\tilde{\theta}) = E(X_{(1)}) = \int_\theta^\infty x\, n[1 - F(x)]^{n-1} f(x)dx = n\int_\theta^\infty x\, \mathrm{e}^{-n(x-\theta)}dx = \theta + 1/n$.
$E(\tilde{\theta}^2) = E(X_{(1)}^2) = \int_\theta^\infty x^2\, n[1 - F(x)]^{n-1} f(x)dx = n\int_\theta^\infty x^2\, \mathrm{e}^{-n(x-\theta)}dx = 2/n^2 + 2\theta/n + \theta^2$
$Var(\tilde{\theta}) = 1/n^2$.
$EQM(\tilde{\theta}) = 2/n^2$.
e) $\bar{\theta} = X_{(1)} - 1/n$.
f) $EQM(\bar{\theta}) = Var(X_{(1)}) = 1/n^2$.
g) $\bar{\theta}$.

20)

$$f(x,y) = P(X = x, Y = y) = P(X = x \mid Y = y)P(Y = y)$$
$$= \binom{y}{x} p^x (1-p)^{y-x} \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^y/y! = p^x(1-p)^{y-x}\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^y/[x!(y-x)!]$$

$$L(\lambda, p) = \prod_{i=1}^n f(x_i, y_i) = \prod_{i=1}^n p^{x_i}(1-p)^{y_i - x_i}\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{y_i}/[x_i!(y_i - x_i)!]$$
$$\propto p^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{\sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i}\, \mathrm{e}^{-n\lambda}\, \lambda^{\sum_{i=1}^n y_i}\,.$$

$$\log L(\lambda,p) = \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)\log\lambda + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\log p + \left(\sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n y_i\right)\log(1-p) - n\lambda$$

$$\partial \log L(\lambda,p)/\partial\lambda = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\lambda} - n = 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} = \bar{Y}$$

$$\partial \log L(\lambda,p)/\partial p = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p} - \frac{\sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i}{1-p} = 0 \Rightarrow \hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sum_{i=1}^n Y_i} = \frac{\bar{X}}{\bar{Y}}\,.$$

21)
a) Sejam Y_{ji} v.a.'s indicadoras do i-ésimo indivíduo pertencer à j-ésima categoria, $j = 1, 2, 3$.
Sejam $s_j = \sum_{i=1}^n y_{ji}$, $j = 1, 2, 3$.
$L(\mathbf{y};\theta) = \theta^{2s_1}[2\theta(1-\theta)]^{s_2}(1-\theta)^{2s_3}$
$\partial \log L(\theta)/\partial\theta = (2s_1+s_2)/\theta - (s_2+2s_3)/(1-\theta) = 0 \Rightarrow \widehat{\theta} = (2s_1+s_2)/n$
$\widehat{\theta} = (2\sum_{i=1}^n Y_{1i} + \sum_{i=1}^n Y_{2i})/2n$

b)
$\widehat{\theta}/(1-\widehat{\theta}) = (2\sum_{i=1}^n Y_{1i} + \sum_{i=1}^n Y_{2i})/(2n - 2\sum_{i=1}^n Y_{1i} - \sum_{i=1}^n Y_{2i})$

22)

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x};\theta) &= \prod_{i=1}^n I_{[\theta,\theta+1]}(x_i) = I_{[\theta,\,x_{(n)}]}(x_{(1)})I_{[x_{(1)},\,\theta+1]}(x_{(n)}) \\ &= I_{(-\infty,\,x_{(1)}]}(\theta)I_{[x_{(n)}-1,\,\infty)}(\theta) = I_{[x_{(n)}-1,\,x_{(1)}]}(\theta)\,. \end{aligned}$$

Portanto, qualquer valor no intervalo $[x_{(n)}-1,\ x_{(1)}]$ maximiza a verossimilhança.

b) $b(\widehat{\theta}_a) = (2a-1)/(n+1)$, $Var(\widehat{\theta}_a) = [n - 2a(1-a)(n-1)]/[(n+2)(n+1)^2]$,
$EQM(\widehat{\theta}_a) = 2(1-3a+3a^2)/[(n+2)(n+1)^2]\,.$

23)
a) $Y_i \sim Bernoulli(F(C))$, onde $F(C) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda C}$. Portanto,
$L(\mathbf{y};\lambda) = F(C)^{\sum_{i=1}^n y_i}[1-F(C)]^{n-\sum_{i=1}^n y_i} = (1-\mathrm{e}^{-\lambda C})^{\sum_{i=1}^n y_i}\mathrm{e}^{-\lambda C(n-\sum_{i=1}^n y_i)}$
$\Rightarrow \log L(\mathbf{y};\lambda) = (\sum_{i=1}^n y_i)\log(1-\mathrm{e}^{-\lambda C}) - \lambda C(n - \sum_{i=1}^n y_i)$
$d\log L(\mathbf{y};\lambda)/d\lambda = 0 \Rightarrow \widehat{\lambda} = (1/C)\log(n/(n-\sum_{i=1}^n Y_i))$
Obs.: Esta solução só é válida se $0 < \sum_{i=1}^n y_i < n$.
b)

```
lambda <- 3
cc <- 0.3
n <- 100 # tamanho de cada amostra
na <- 1000 # numero de amostras geradas
dados.x <- matrix(rexp(n*na,lambda),ncol=n)
dados.y <- sign(sign(cc-dados.x)+1)
est.x <- 1/apply(dados.x,1,mean)
est.y <- (1/cc)*log(n/apply(dados.y,1,sum))
cbind(mean(est.x),mean(est.y))
cbind(sd(est.x),sd(est.y))
```

c)

```
lambda <- 3
# vetor com os 99 percentis da distribuicao Exponencial(lambda)
cc <- qexp(seq(0.01,0.99,0.01),lambda)
n <- 100 # tamanho de cada amostra
na <- 1000 # numero de amostras geradas
# vetor contendo as medias de est.y
# para cada um dos valores de C considerados
media <- rep(0,99)
# vetor contendo os desvios-padrao de est.y
# para cada um dos valores de C considerados
dp <- rep(0,99)
for (i in 1:99) {
  dados.x <- matrix(rexp(n*na,lambda),ncol=n)
  dados.y <- sign(sign(cc[i]-dados.x)+1)
  est.y <- (1/cc[i])*log(n/apply(dados.y,1,sum))
  media[i] <- mean(est.y)
  dp[i] <- sd(est.y)
}
plot(cc,media)
abline(h=lambda)
plot(cc,dp)
```

24)
a) $Y_i \sim Bernoulli(P(X_i = 0))$, onde $P(X_i = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda}$.
$L(\mathbf{y};\lambda) = (\mathrm{e}^{-\lambda})^{\sum_{i=1}^n y_i}(1-\mathrm{e}^{-\lambda})^{(n-\sum_{i=1}^n y_i)}$
$\Rightarrow \log L(\mathbf{y};\lambda) = -\lambda \sum_{i=1}^n y_i + (n - \sum_{i=1}^n y_i)\log(1-\mathrm{e}^{-\lambda})$
$d\log L(\mathbf{y};\lambda)/d\lambda = 0 \Rightarrow \widehat{\lambda} = \log(n/\sum_{i=1}^n y_i)$
Obs.: Esta solução só é válida se $\sum_{i=1}^n y_i > 0$.
b)

```
lambda <- 1
n <- 100 # tamanho de cada amostra
na <- 1000 # numero de amostras geradas
dados.x <- matrix(rpois(n*na,lambda),ncol=n)
dados.y <- 1-sign(sign(dados.x-1)+1)
est.x <- apply(dados.x,1,mean)
est.y <- log(n/apply(dados.y,1,sum))
cbind(mean(est.x),mean(est.y))
cbind(sd(est.x),sd(est.y))
```

25) $N\left(0, \frac{\sigma_X^2}{\mu_Y^2} - \frac{\rho\sigma_X\sigma_Y(\mu_X+1)}{\mu_Y^3} + \frac{\mu_X\sigma_Y^2}{\mu_Y^4}\right)$

26)
$\widehat{\sigma} = \sqrt{(1/n)\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} = (\sigma/\sqrt{n})\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2/\sigma^2} = (\sigma/\sqrt{n})\sqrt{Y}$,
$Y \sim \chi^2_{n-1}$, $Y \sim gama((n-1)/2, 1/2)$, $\widehat{\sigma} = g(Y) \Rightarrow Y = g^{-1}(\widehat{\sigma}) = n\widehat{\sigma}^2/\sigma^2$,

$\mathrm{f}_{\widehat{\sigma}}(t) = f_Y(g^{-1}(t)) \left| \frac{dg^{-1}(t)}{dt} \right| = \frac{n^{(n-1)/2}\, t^{n-2}\, \mathrm{e}^{-nt^2/(2\sigma^2)}}{2^{(n-3)/2}\, \Gamma((n-1)/2)\, \sigma^{(n-1)/2}}.$

$E[\widehat{\sigma}] = E[\sqrt{(\sigma^2/n)(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2/\sigma^2)}] = (\sigma/\sqrt{n})E[\sqrt{Y}]\,, Y \sim \chi^2_{n-1}$
$Y \sim gama((n-1)/2, 1/2) \Rightarrow E[\widehat{\sigma}] = \{[\sqrt{2}\Gamma(n/2)][\sqrt{n}\Gamma((n-1)/2)]\}\sigma.$

$Var(\widehat{\sigma}) = E[\widehat{\sigma}^2] - \{E[\widehat{\sigma}]\}^2\,,$
$E[\widehat{\sigma}^2] = (\sigma^2/n)E[Y] = [(n-1)/n]\sigma^2$
$Var(\widehat{\sigma}) = \{n - 1 - 2[\Gamma(n/2)/\Gamma((n-1)/2)]^2\}\sigma^2/n$

27)
a) $\widehat{a} = X_{(1)}$, $\widehat{b} = X_{(n)}$.
b) $d(\widehat{\theta}, \theta) = \max\{|\widehat{a} - a|, |\widehat{b} - b|\} < \varepsilon \Leftrightarrow$
$\{|X_{(1)} - a| < \varepsilon\} \cap \{|X_{(n)} - b| < \varepsilon\} \Leftrightarrow \{X_{(1)} < a + \varepsilon\} \cap \{X_{(n)} > b - \varepsilon\} =$
$\overline{\{X_{(1)} > a + \varepsilon\}} \cap \overline{\{X_{(n)} < b - \varepsilon\}} = \overline{\{X_{(1)} > a + \varepsilon\} \cup \{X_{(n)} < b - \varepsilon\}}$
$P(\{X_{(1)} > a + \varepsilon\} \cup \{X_{(n)} < b - \varepsilon\}) =$
$P(\{X_{(1)} > a + \varepsilon\}) + P(\{X_{(n)} < b - \varepsilon\}) - P(\{X_{(1)} > a + \varepsilon\} \cap \{X_{(n)} < b - \varepsilon\}) =$
$[1 - F(a + \varepsilon)]^n + [F(b - \varepsilon)]^n - [F(b - \varepsilon) - F(a + \varepsilon)]^n =$
$[1 - \varepsilon/(b-a)]^n + [1 - \varepsilon/(b-a)]^n - [1 - 2\varepsilon/(b-a)]^n \to 0 \quad \text{for} \quad 0 < \varepsilon < (b-a)/2.$

28)
a) Seja $g(y) = 1/y$, $y > 0$. Pelo método delta,
$\sqrt{n}(\widehat{\lambda} - \lambda) = \sqrt{n}(g(\overline{X}) - g(1/\lambda)) \xrightarrow{d} g'(1/\lambda)N(0, 1/\lambda^2) \overset{d}{=} N(0, (g'(1/\lambda))^2 1/\lambda^2) \overset{d}{=} N(0, \lambda^2).$