

*Ricardo Michel MALLQUI BAÑOS*

---

# ***Ecuaciones diferenciales ordinarias***



# ***Índice general***

<b>Índice de cuadros</b>	<b>v</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>vii</b>
<b>Resumen</b>	<b>ix</b>
<b>Introducción</b>	<b>xi</b>
<b>1. Ecuaciones diferenciales de primer orden y primer grado</b>	<b>1</b>
1.1. Ecuaciones diferenciales de variable separable . . . . .	1
1.2. Ecuaciones diferenciales reducible a variable separable . . . . .	2
1.3. Ecuaciones diferenciales homogéneas . . . . .	2
1.4. Ecuaciones diferenciales reducible a homogéneas . . . . .	2
1.5. Ecuaciones diferenciales exactas . . . . .	2
1.6. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden . . . . .	2
1.7. Ecuaciones diferenciales de Bernoulli . . . . .	2
1.8. Ecuaciones diferenciales de Riccati . . . . .	2
1.9. Ecuaciones diferenciales de Lagrange y Clairouts . . . . .	2
1.10. Ecuaciones diferenciales no resueltas con respecto a la primera derivada . . . . .	2
<b>2. Aplicaciones de las ecuaciones ordinarias</b>	<b>3</b>
2.1. Aplicados a problemas geométricos . . . . .	3
2.2. Aplicados a trayectorias ortogonales . . . . .	3
2.3. Aplicaciones a la temperatura . . . . .	3
2.4. Descomposición crecimiento y reacciones químicas . . . . .	3
2.5. Aplicaciones a circuitos eléctricos simples . . . . .	3
2.6. Aplicaciones a la economía . . . . .	3
2.7. La media ( $\bar{x}$ ) . . . . .	3
2.7.1. Media de datos no agrupados . . . . .	4
2.7.2. Media de datos agrupados . . . . .	4
2.8. La moda (Mo) . . . . .	5
2.8.1. Moda de datos no tabulados . . . . .	5
2.8.2. Moda de datos tabulados . . . . .	5
2.9. la mediana (Me) . . . . .	6
2.9.1. Mediana de datos no tabulados . . . . .	6
2.9.2. Mediana de datos tabulados . . . . .	6

<b>3. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior</b>	<b>7</b>
3.1. Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes . . . . .	7
3.2. Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes . . . . .	7
3.3. Método de variación de parámetros . . . . .	7
3.4. Ecuaciones diferenciales de Euler . . . . .	7
<b>4. Operadores diferenciales</b>	<b>9</b>
<b>5. Ecuaciones diferenciales con coeficientes variables</b>	<b>11</b>
<b>6. Solución de ecuaciones diferenciales mediante la Transformada de Laplace</b>	<b>13</b>
<b>Apéndice</b>	<b>13</b>
<b>A. Operadores diferenciales</b>	<b>15</b>
A.1. ee . . . . .	15
A.2. eeee . . . . .	15
<b>B. Transformada de Laplace</b>	<b>17</b>
B.1. Álgebra de matrices . . . . .	17
<b>Bibliografía</b>	<b>19</b>
<b>Índice alfabético</b>	<b>21</b>

## **Índice de cuadros**



## **Índice de figuras**





---

## ***Resumen***

---

Este libro sobre ecuaciones diferenciales ordinarias y sus aplicaciones cuyo objetivo es demostrar resultados básicos muy útiles en el desarrollo de investigaciones.

$$\sum_1^2$$



---

# ***Introducción***

---

$$\sum_1^2$$

$$\vec{u} = (1, 1) - \rho \int_2^3$$

Debido a la poca información estructurada de estadística descriptiva se propone escribir este libro con un enfoque demostrativo.

$$x^2 + y^2$$



# 1

## *Ecuaciones diferenciales de primer orden y primer grado*

### 1.1. Ecuaciones diferenciales de variable separable

Si una ecuación ordinaria de primer orden y primer grado  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  se puede expresarse como  $M(x)dx + N(y)dy = 0$  entonces la ecuación recibe el nombre de ecuación diferencial ordinaria de variable separable y la solución es por integración directa

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = 0$$

**Ejercicio 1.1.**  $(y^2 + xy^2) \frac{dy}{dx} + x^2 - x^2y = 0$

*Solución.*

$$\begin{aligned} 0 &= y^2(1+x)dy + x^2(1-y)dx \\ &= \frac{y^2}{1-y}dy + \frac{x^2}{1+x}dx \end{aligned}$$

integrando se tiene

$$\begin{aligned} \int \frac{y^2}{1-y}dy + \int \frac{x^2}{1+x}dx &= \int 0 \\ (x+y)(x-y-2) + 2 \ln \left| \frac{1+x}{1-y} \right| &= k \end{aligned}$$

**Ejercicio 1.2.**  $(y^2 + xy^2) \frac{dy}{dx} + x^2 - x^2y = 0$

*Solución.*

$$\begin{aligned} 0 &= y^2(1+x)dy + x^2(1-y)dx \\ &= \frac{y^2}{1-y}dy + \frac{x^2}{1+x}dx \end{aligned}$$

integrando se tiene

$$\int \frac{y^2}{1-y}dy + \int \frac{x^2}{1+x}dx = \int 0$$

$$(x + y)(x - y - 2) + 2 \ln \left| \frac{1 + x}{1 - y} \right| = k$$

---

**1.2. Ecuaciones diferenciales reducible a variable separable**

---

---

**1.3. Ecuaciones diferenciales homogéneas**

---

---

**1.4. Ecuaciones diferenciales reducible a homogéneas**

---

---

**1.5. Ecuaciones diferenciales exactas**

---

---

**1.6. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden**

---

---

**1.7. Ecuaciones diferenciales de Bernoulli**

---

---

**1.8. Ecuaciones diferenciales de Riccati**

---

---

**1.9. Ecuaciones diferenciales de Lagrange y Clairouts**

---

---

**1.10. Ecuaciones diferenciales no resueltas con respecto a la primera derivada**

---

**Ejercicio 1.3.** Sean los datos

*Solución.* Entonces

## 2

### *Aplicaciones de las ecuaciones ordinarias*

#### 2.1. Aplicados a problemas geométricos

#### 2.2. Aplicados a trayectorias ortogonales

#### 2.3. Aplicaciones a la temperatura

#### 2.4. Descomposición crecimiento y reacciones químicas

#### 2.5. Aplicaciones a circuitos eléctricos simples

#### 2.6. Aplicaciones a la economía

Son aquellas medidas que buscan un dato representativo central de un conjunto de datos tales como la media, la moda y la mediana.

#### 2.7. La media ( $\bar{x}$ )

A veces llamada *promedio aritmético*, es la medida de tendencia central que pondera los datos.

### 2.7.1. Media de datos no agrupados

Los datos no están agrupados cuando no están ordenados sobre una tabla de distribución de frecuencias. Sean los  $n$  datos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  entonces la media o promedio aritmético se define como

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2.1)$$

$$\frac{d[P; F_1]}{d[P; \mathcal{L}_1]} = e = \frac{d[P; F_2]}{d[P; \mathcal{L}_2]} \quad (2.2)$$

1.  $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
2.  $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

### 2.7.2. Media de datos agrupados

Considérese la siguiente tabla de distribución de frecuencias entonces el promedio es

$$\bar{x} = \frac{y_1 f_1 + y_2 f_2 + \dots + y_n f_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i f_i$$

Clase	Clase	$f_i$	$F_i$	$F_i^*$	$h_i$	$H_i$	$H_i^*$	...
$< y_1 - y_2 >$	$y_1$	$f_1$	$F_1$	$F_1^*$	$\frac{f_1}{n}$	$\frac{F_1}{n}$	$\frac{F_1^*}{n}$	...
$< y_2 - y_3 >$	$y_2$	$f_2$	$F_2$	$F_2^*$	$\frac{f_2}{n}$	$\frac{F_2}{n}$	$\frac{F_2^*}{n}$	...
$< y_3 - y_4 >$	$y_3$	$f_3$	$F_3$	$F_3^*$	$\frac{f_3}{n}$	$\frac{F_3}{n}$	$\frac{F_3^*}{n}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$< y_{r-1} - y_r >$	$y_r$	$f_r$	$F_r$	$F_r^*$	$\frac{f_r}{n}$	$\frac{F_r}{n}$	$\frac{F_r^*}{n}$	...

**Ejercicio 2.1.** Si el promedio de  $n$  datos es  $\bar{x}$  entonces el promedio del conjunto inicial más un dato adicional  $x_{n+1}$  es

$$\bar{x}' = \frac{n\bar{x} + x_{n+1}}{n + 1}$$

en general si se adicionan  $r$  datos  $y_1, y_2, \dots, y_r$  entonces el nuevo promedio será

$$\bar{x}' = \frac{n\bar{x} + y_1 + y_2 + \dots + y_r}{n + r}$$



*Solución.* En efecto sea el promedio

$$\begin{aligned}\bar{x}' &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{n \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + x_{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{n\bar{x} + x_{n+1}}{n+1}\end{aligned}$$

## 2.8. La moda (Mo)

### 2.8.1. Moda de datos no tabulados

En este caso es dato que más repite en un conjunto de datos dados.

La moda es el dato que más se repite por ejemplo sea el conjunto de datos  $x_1, x_2, x_2, x_2, x_3$  entonces la moda  $Mo = x_2$

### 2.8.2. Moda de datos tabulados

La moda es el dato que más se repite por ejemplo sea el conjunto de datos  $x_1, x_2, x_2, x_2, x_3$  entonces la moda  $Mo = Li + \frac{Li-Ls}{Li+Ls}r$

Clase	Clase	$f_i$	$F_i$	$F_i^*$	$h_i$	$H_i$	$H_i^*$	...
$[y_1 - y_2 >$	$y_1$	$f_1$	$F_1$	$F_1^*$	$\frac{f_1}{n}$	$\frac{F_1}{n}$	$\frac{F_1^*}{n}$	...
$< y_1 - y_2 >$	$y_2$	$f_2$	$F_2$	$F_2^*$	$\frac{f_2}{n}$	$\frac{F_2}{n}$	$\frac{F_2^*}{n}$	...
$< y_r - y_r >$	$y_3$	$f_3$	$F_3$	$F_3^*$	$\frac{f_3}{n}$	$\frac{F_3}{n}$	$\frac{F_3^*}{n}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$< y_{r-1} - y_r]$	$y_r$	$f_r$	$F_r$	$F_r^*$	$\frac{f_r}{n}$	$\frac{F_r}{n}$	$\frac{F_r^*}{n}$	...

## 2.9. la mediana (Me)

### 2.9.1. Mediana de datos no tabulados

Obtener la mediana consiste en ordenar los datos de menor a mayor y considerar dos casos: El primero si el numero de datos  $s$  impar entonces el dato  $x_{\frac{n+1}{2}}$  del conjunto ordenado será la mediana es decir  $Me = x_{\frac{n+1}{2}}$  de otro lado si el número de datos es par entonces la mediana es la semisuma de los dos datos intermedios es decir  $Me = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$

**Ejercicio 2.2.** Sean los conjuntos de datos 5, 6, 8, 2, 1, 5, 6, 7, 10, 0, 14 y 20, 25, 6, 5, 19, 5 obtener la mediana de estos conjuntos de datos.

*Solución.* Al ordenarlos se obtiene el siguiente arreglo 0, 1, 2, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 10, 14 y considerando que  $x_1 = 0, x_2 = 1, \dots, x_{11} = 14$  en este caso el número de datos es impar entonces el dato  $x_{\frac{11+1}{2}} = x_6 = 6$  es la mediana. De otro lado el segundo conjunto de datos al ser ordenados 5, 5, 6, 19, 20, 25 además considerando que  $x_1 = 5, x_2 = 5, \dots, x_6 = 25$  conducen a obtener la mediana  $Me = \frac{x_{\frac{6}{2}} + x_{\frac{6}{2}+1}}{2} = \frac{6+19}{2} = 12,5$ .

### 2.9.2. Mediana de datos tabulados

Clase	Clase	$f_i$	$F_i$	$F_i^*$	$h_i$	$H_i$	$H_i^*$	...
$[y_1 - y_2 >$	$y_1$	$f_1$	$F_1$	$F_1^*$	$\frac{f_1}{n}$	$\frac{F_1}{n}$	$\frac{F_1^*}{n}$	...
$< y_1 - y_2 >$	$y_2$	$f_2$	$F_2$	$F_2^*$	$\frac{f_2}{n}$	$\frac{F_2}{n}$	$\frac{F_2^*}{n}$	...
$< y_r - y_r >$	$y_3$	$f_3$	$F_3$	$F_3^*$	$\frac{f_3}{n}$	$\frac{F_3}{n}$	$\frac{F_3^*}{n}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$< y_{r-1} - y_r]$	$y_r$	$f_r$	$F_r$	$F_r^*$	$\frac{f_r}{n}$	$\frac{F_r}{n}$	$\frac{F_r^*}{n}$	...

Los pasos son:

- Se halla  $\frac{n}{2}$  luego
- $x_n$
-

# 3

---

## *Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior*

---

### **3.1. Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes**

---

### **3.2. Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes**

---

### **3.3. Método de variación de parámetros**

---

### **3.4. Ecuaciones diferenciales de Euler**



# 4

## Operadores diferenciales



# 5

## Ecuaciones diferenciales con coeficientes variables

**Teorema 5.1.** *En la elipse se verifican las siguientes igualdades*

1.  $d [B_1; F_i] = d [B_2; F_i] = a$
2.  $d [V_1; C] = d [V_2; C] = a$
3.  $d [C; \mathcal{L}_1] = d [C; \mathcal{L}_2] = \frac{c}{e}$
4.  $c = d [P; F_1] = d [P; F_2]$  entonces  $c = ae$

*Demostración.* 1. Ya que  $d [B_1; F_1] + d [B_1; F_2] = 2a = d [B_2; F_1] + d [B_2; F_2]$  es decir  $2d [B_1; F_i] = 2a = 2d [B_2; F_i]$  entonces  $d [B_1; F_i] = a = d [B_2; F_i]$   $i = 1, 2$ .

2. Por la definición (??) de la elipse se tiene

$$d [V_1; F_2] + d [V_1; F_1] = 2a \quad (5.1)$$

además la diferencia

$$d [V_1; F_2] - d [V_1; F_1] = 2c \quad (5.2)$$

restando las ecuaciones (5.1) y (5.2) se tiene

$$d [V_1; F_1] = a - c \quad (5.3)$$

entonces haciendo uso de (5.3) en  $d [V_1; C] = d [V_1; F_1] + d [F_1; C] = (a - c) + c = a$ ; de manera similar para el vértice  $V_2$ .

3. En efecto

$$\frac{d [B; F_i]}{d [B; \mathcal{L}_i]} = e \iff \frac{a}{d [B; \mathcal{L}_i]} = e$$

además  $d [B_i; \mathcal{L}_i] = d [C; \mathcal{L}_i]$  por lo tanto  $\frac{a}{d [C; \mathcal{L}_i]} = e$ .

4. Pues

$$\frac{d [P; F_1]}{d [P; \mathcal{L}_1]} = e$$

implica  $\frac{a-c}{\frac{a}{e}-a} = e$  es decir  $c = ae$ .

Por lo tanto

□



# 6

## *Solucion de ecuaciones diferenciales mediante la Trasformada de Laplace*

Example text outside R code here; we know the value of pi is In this section, we give a very brief introduction to Pandoc's Markdown. Readers who are familiar with Markdown can skip this section. The comprehensive syntax of Pandoc's Markdown can be found on the Pandoc website <http://pandoc.org>.

"I thoroughly disapprove of duels. If a man should challenge me, I would take him kindly and forgivingly by the hand and lead him to a quiet place and kill him."

In this section, we give a very brief introduction to Pandoc's Markdown. Readers who are familiar with Markdown can skip this section. The comprehensive syntax of Pandoc's Markdown can be found on the Pandoc website <http://pandoc.org>.  $\sum_1^2$

I thoroughly disapprove of duels. If a man should challenge me, I would take him kindly and forgivingly by the hand and lead him to a quiet place and kill him.

– Mark Twain

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

\* La suma de dos matrices  $A_{n \times m}$  y  $B_{r \times s}$

$$A_{n \times m} \pm B_{n \times m} = [a_{ij} \pm b_{ij}]$$

\* El producto de dos matrices  $A_{n \times m}$  y  $B_{r \times s}$

$$A_{n \times m} \cdot B_{n \times m} = [a_{ij} \cdot b_{ij}]$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{matrix}$$



# A

## *Operadores diferenciales*

Una suma de números representados por  $x_1, x_2, \dots, x_n$  se simboliza en forma compacta mediante el simbolo  $\sum$  (sigma) es decir la suma de los números anteriores se puede escribir del siguiente modo

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i.$$

Algunas propiedades son

1.  $k \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n k x_i$
2.  $\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i$
3.  $\sum_{i=1}^n x_i$

$$\int_1^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n f^i(x)$$

citado por ([Xie, 2015](#))

### A.1. ee

### A.2. eeeee



# B

## Trasformada de Laplace

Una matriz es un arreglo de números distribuidos en filas y columnas por ejemplo la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

de **orden**  $n \times m$  tiene **entradas**  $a_{ij}$  donde el primer subíndice indica la fila y el segundo la columna; es usual representar por simplicidad una matriz por  $A = [a_{ij}]_{n \times m}$ . Si en el orden  $n = m$  entonces la matriz recibe el nombre de **matriz cuadrada** la suma de los elementos de la diagonal de una matriz cuadrada  $\sum_{i=1}^n a_{ii}$  se llama **traza**. Si todas las  $a_{ij}$  son cero entonces la matriz  $A = 0$  recibe el nombre matriz **nula**.

Dos matrices son iguales si tienen el **mismo orden** y cada una de las entradas respectivas son iguales es decir  $A = [a_{ij}]_{n \times m}$  y  $B = [b_{ij}]_{n \times m}$  son iguales si  $a_{ij} = b_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  y  $j = 1, 2, \dots, m$

### B.1. Álgebra de matrices

Sean las matrices  $A = [a_{ij}]_{n \times m}$  y  $B = [b_{ij}]_{p \times q}$  entonces la suma y producto de matrices se definen

1. Sea  $k$  un escalar entonces se verifica que  $kA = [ka_{ij}]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  y  $j = 1, 2, \dots, m$  es decir el escalar  $k$  multiplica a cada una de las entradas de la matriz.
2. La suma o diferencia es posible si  $n = p$  y  $m = q$  es decir los ordenes de  $A$  y  $B$  son iguales, entonces la suma o diferencia resulta  $A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{n \times m}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  y  $j = 1, 2, \dots, m$
3. El producto es posible si  $m = p$  es decir el número columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz, el orden de la

matriz resultante es  $n \times q$  además

$$A \cdot B = \left[ \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \right]_{n \times q}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m a_{1k} b_{k1} & \sum_{k=1}^m a_{1k} b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^m a_{1k} b_{kq} \\ \sum_{k=1}^m a_{2k} b_{k1} & \sum_{k=1}^m a_{2k} b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^m a_{2k} b_{kq} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^m a_{nk} b_{k1} & \sum_{k=1}^m a_{nk} b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^m a_{nk} b_{kq} \end{pmatrix}_{n \times q}$$

donde  $i = 1, 2, \dots, n$  y  $j = 1, 2, \dots, m$

**Ejemplo B.1.** Sean  $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 3}$  y  $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 5}$  entonces  $A \cdot B =$

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 & 15 & 3 \\ 5 & -3 & 0 & 13 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 10 & 10 & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$$

En caso de ser posible la multiplicación entre  $A$ ,  $B$  y  $C$  entonces se verifican las siguientes propiedades

- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C$
- $A(BC) = (AB)C$

---

## ***Bibliografía***

---

Xie, Y. (2015). *Dynamic Documents with R and knitr*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, Florida, 2nd edition. ISBN 978-1498716963.





## ***Índice alfabético***

traza, 17