

Ricardo Michel MALLQUI BAÑOS

Elementos de la estadística



Índice general

Índice de tablas	vii
Índice de figuras	ix
Resumen	xi
I Estadística descriptiva	1
1. Prerrequisitos	3
2. Variables	5
2.0.1. Nominales	5
2.0.2. Ordinales	5
2.1. Variables cuantitativas	5
2.1.1. Discretas	5
2.1.2. Continuas	6
3. Característica de los datos	7
4. Población, muestra y estadística	9
5. Organización de datos en tablas de frecuencias	11
6. Distribución de frecuencias	15
7. Gráficos estadísticos	19
8. Medidas de tendencia central	21
8.1. La media (\bar{x})	21
8.1.1. Media de datos no agrupados	21
8.1.2. Media de datos agrupados	21
8.2. La moda (M_o)	22
8.2.1. Moda de datos no tabulados	22
8.2.2. Moda de datos tabulados	22
8.3. la mediana (M_e)	23
8.3.1. Mediana de datos no tabulados	23
8.3.2. Mediana de datos tabulados	23

9. Medidas de dispersión	27
10. Medidas de asimetría	29
II Probabilidades	31
1. Experimento aleatorio	33
2. Álgebra de eventos	35
3. Técnicas de conteo	37
4. Definición de probabilidad	39
5. Probabilidad condicional	41
6. Teorema de Bayes	43
7. Eventos independientes y secuencias de experimentos	45
8. Probabilidad en espacio	47
III Inferencia estadística	49
1. Variables aleatorias	51
1.1. Clases de variables aleatorias	52
1.1.1. Variable aleatoria discreta	52
1.1.2. Variable aleatoria continua	52
1.1.3. Variable aleatoria mixta	52
1.2. Función de probabilidad de una variable aleatoria	53
1.2.1. Función de probabilidad de una variable aleatorias discreta .	53
1.2.2. Función de probabilidad de una variable aleatoria continua .	54
1.3. Función de distribución de una variable aleatoria	54
1.3.1. Función de distribución de una variable aleatoria discreta .	54
1.3.2. Función de distribución de una variable aleatoria continua .	55
2. Parámetros de una variable aleatoria	57
2.1. Esperanza matemática	57
2.2. Medidas de variación	57
2.3. Medidas de posición	58
2.4. Medidas de curtosis	58
3. Variables aleatorias bidimensionales	59
3.1. Distribución bidimensional discreta	59
3.1.1. Distribuciones marginales	60
3.1.2. Variables aleatorias independientes	60
3.1.3. Distribuciones de probabilidad condicional	60

<i>Contents</i>	v
3.2. Distribución bidimensional continua	60
4. Distribuciones discreta importantes	61
4.1. Variable aleatoria discreta binomial	61
4.2. Variable aleatoria discreta Poisson	61
5. Distribuciones continuas importantes	63
5.1. Variable aleatoria continua normal	63
5.2. Variable aleatoria continua gamma	63
6. Distribuciones muestrales	65
7. Estimación	67
8. Prueba de hipótesis	69
Apéndice	69
A. Sumatorias	71
A.1. eeeee	71
B. Matrices	73
B.1. Álgebra de matrices	73
Bibliografía	75
Índice alfabético	77



Índice de tablas

5.1. Caption	11
5.3. Figures and tables with captions will be placed in ‘figure’	12
5.4. Figures and tables with captions will be placed in ‘figure’	13
6.1. Caption	15



Índice de figuras

5.1. Regresión lineal	12
---------------------------------	----



Resumen

La estadística es la ciencia que manipula datos los analiza e interpreta para poder sacar conclusiones razonables de ciertos fenomenos naturales. Esta ciencia puede ser dividido en dos: **estadística descirptiva** y **estadística inferencial**. En la estadística descriptiva se procesan datos de una manera teórica y utilitaria. Estos métodos consisten en la recolección, organización, resumen, descripcion y presenatacion de la información. Si la poblacion está disponible entonces la estadística descriptiva es suficiente para describir ciertos fenomenos. No obstante generalmente no se dispone de toda la población si no de una muestra de ella, es en este caso que se requieren usar técnicas más sofisticadas para tomar decisiones y generalizaciones acerca de la poblacion, desde una pequeña muestra de información. Es cuando entra en el juego la estadística inferencial.

La base teórica de la estadística son las matemáticas

Este libro se compone de dos partes, la primera parte trata sobre la **estadística descirptiva** y la segunda **estadística inferencial**. Cada una de ellas divididas en capítulos.



Parte I

Estadística descriptiva



1

Prerrequisitos



2

Variables

Es una característica de personas cosas u objetos que son propensos a ser medidas ##
Variables cualitativas

Denotan cualidades de objetos personas o animales tales como características inherentes que no son medibles por números, tenemos dos casos de esta variable.

2.0.1. Nominales

Son características que simplemente nominan y están propensas a ser jerarquizados u ordenados tales como: El estado civil (soltero, casado, divorciado, viudo), Religión (católico, evangélico, judío, etc).#

2.0.2. Ordinales

Son características que si están propensas a ser jerarquizados tales como: Nivel de instrucción (primaria, secundaria, superior).

2.1. Variables cuantitativas

Son aquellas variables que están propensas a ser medidas mediante números ya sean números enteros o reales.

2.1.1. Discretas

Aquellas que solo son medidos mediante números enteros por ejemplo: Número de hijos, número de habitaciones.

2.1.2. Continuas

Aquellas que solo son medidos mediante numeros reales es decir este incluye a los numeros racionales e irracionales. Estatura, volumen, peso.

3

Característica de los datos



4

Población, muestra y estadística



5

Organización de datos en tablas de frecuencias

- Es decir los elementos son demagogos y déspotas
- Es decir los elementos son demagogos y déspotas Tabla 5.1

Tabla 5.1: Caption

Option	N	w	Observation	Description
Es decir los elementos son demagogos y déspotas	1	w	Es decir los elementos son demagogos y déspotas	Es decir los elementos son demagogos y déspotas
Es decir los elementos son demagogos y déspotas	2	w	Es decir los elementos son demagogos y déspotas	Es decir los elementos son demagogos y déspotas
Engine	2	w	Es decir los elementos son demagogos y déspotas	Engine to be used for processing templates. Handlebars is the default.
Es decir los elementos son demagogos y déspotas	3	w	$\sum_{i=1}^n f_i$	extension to be used for dest files.

The value of x in the Python session is Es decir los elementos son demagogos y déspotas. It is not the same x as the one in R.

$$f(x) = -33,609 + 13,774x + -1,146x^2 + 0,089x^3$$

$f(30)_{04 \text{ abril}} = 1748$	$f(31)_{05 \text{ abril}} = 1940$	$f(32) = 2146$
$f(33) = 2367$	$f(34) = 2603$	$f(35) = 2856$
$f(36) = 3124$	$f(37) = 3409$	$f(38) = 3712$
$f(39) = 4033$	$f(40) = 4372$	$f(41) = 4731$
$f(100) = 7,8772 \times 10^4$	$f(360) = 4,003643 \times 10^6$	$f(370) = 4,350708 \times 10^6$

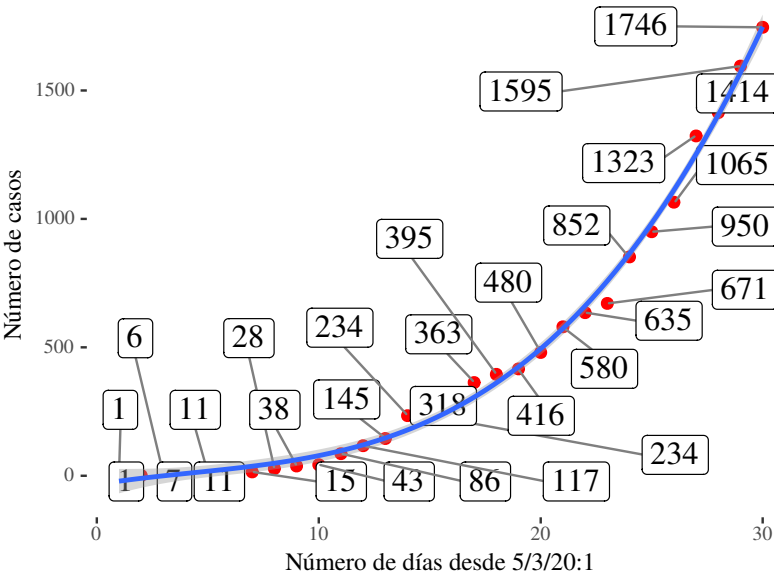


Figura 5.1 Regresión lineal

Sea la Tabla 5.3 Figures and tables with captions will be placed in figure and table environments, respectively.

Tabla 5.3: Figures and tables with captions will be placed in ‘figure’

Y_i	f_i	F_i	F_i^*	h_i	H_i	H_i^*	$h_i \%$	$H_i \%$	$H_i^* \%$
a	1	1	73	0.01	0.01	1.00	1.37	1.37	100.00
b	2	3	72	0.03	0.04	0.99	2.74	4.11	98.63
c	3	6	70	0.04	0.08	0.96	4.11	8.22	95.89
d	4	10	67	0.05	0.14	0.92	5.48	13.70	91.78
e	5	15	63	0.07	0.21	0.86	6.85	20.55	86.30
f	6	21	58	0.08	0.29	0.79	8.22	28.77	79.45
g	7	28	52	0.10	0.38	0.71	9.59	38.36	71.23
h	8	36	45	0.11	0.49	0.62	10.96	49.32	61.64
i	9	45	37	0.12	0.62	0.51	12.33	61.64	50.68
j	10	55	28	0.14	0.75	0.38	13.70	75.34	38.36
k	6	61	18	0.08	0.84	0.25	8.22	83.56	24.66
l	5	66	12	0.07	0.90	0.16	6.85	90.41	16.44
m	3	69	7	0.04	0.95	0.10	4.11	94.52	9.59
n	2	71	4	0.03	0.97	0.05	2.74	97.26	5.48
ñ	1	72	2	0.01	0.99	0.03	1.37	98.63	2.74

o	1	73	1	0.01	1.00	0.01	1.37	100.00	1.37
$\sum_{i=1}^6$	73			1.00					

Table 5.4: Figures and tables with captions will be placed in ‘figure’

	\bar{x}	α	$\sum_{i=1}^n x_i$	\bar{x}	\bar{x}	\bar{x}	X7
1		IT1	IT2	O1	IT3	IT4	IT5
2	1	2	2	2	2	1	1
3	2	3	2	3	3	3	3
4	3	3	3	3	3	2	2
5	4	3	3	3	2	2	2
6	5	3	2	3	3	3	3
β_0	6	1	1	1	1	2	2
β_1	7	2	3	3	3	3	2
β_3	8	2	2	2	1	1	1
10	9	1	2	2	1	1	1
11	10	1	2	2	2	1	1
12	11	2	2	2	2	2	2
13	12	2	3	3	3	2	2
14	13	3	2	3	3	2	2
15	14	2	3	3	2	2	3
16	15	2	2	2	2	2	1
17	16	2	2	2	3	2	3
18	17	2	2	2	2	2	2
19	18	1	2	2	1	1	2
20	19	3	2	3	3	3	3
21	20	3	3	3	3	2	2
22	21	1	1	1	1	2	2
23	22	3	3	3	3	3	2
24	23	3	2	3	3	3	3
25	24	3	2	3	3	3	3
26	25	2	3	3	3	3	2
27	26	2	2	2	1	1	1
28	27	1	2	2	1	2	2
29	28	3	2	3	3	2	2
30	29	3	2	3	3	3	3
31	30	1	2	2	2	1	1
32	31	3	3	3	3	3	2
33	32	3	3	3	2	3	3
34	33	1	1	1	1	1	1

$\sum_{i=1}^n x_i$	34	1	1	1	1	1	1
36	35	3	2	3	2	2	2
37		$\sum_{i=1}^n x_i$					

6

Distribución de frecuencias

La tabulación es un proceso en el cual los datos son ordenados en grupos llamados *clases* para un análisis más eficaz de estos, los datos podrían estar clasificados mediante una variable cualitativa o cuantitativa en el caso de las variables cualitativas Y_i , se considera la siguiente Tabla 6.1

Tabla 6.1: Caption

Y_i	f_i	F_i	F_i^*	h_i	H_i	H_i^*	$h_i \%$	$H_i \%$	$H_i^* \%$
Y_1	f_1	F_1	F_1^*	$\frac{f_1}{n}$	$\frac{F_1}{n}$	$\frac{F_1^*}{n}$	h_1	H_1	H_1^*
Y_2	f_2	F_2	F_2^*	$\frac{f_2}{n}$	$\frac{F_2}{n}$	$\frac{F_2^*}{n}$	h_2	H_2	H_1^*
Y_3	f_3	F_3	F_3^*	$\frac{f_3}{n}$	$\frac{F_3}{n}$	$\frac{F_3^*}{n}$	h_3	H_3	H_1^*
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
Y_r	f_r	F_r	F_r^*	$\frac{f_r}{n}$	$\frac{F_r}{n}$	$\frac{F_r^*}{n}$	h_r	H_r	H_1^*

En el caso de variables cuantitativas además si los datos son muy variados, que para se clasificados adecuadamente, necesitan generarse particiones de longitudes semejantes entonces se utiliza el siguiente proceso; el **número de las particiones** r se consideran de acuerdo a **tres criterios**

1. Criterio del investigador r no puede ser más de 20 ni menos de 5
2. $r = \sqrt{n}$ donde n es el número de datos
3. La regla de Starges que consiste en considerar la fórmula $r = 3,322 \cdot \log_{10} n$ Una vez establecido el número de particiones se procede a generar los límites laterales de cada una de las particiones, sea L la longitud de todo el conjunto es decir $L = x_{\max} - x_{\min}$ entonces la longitud de las particiones o amplitud interválica se obtiene con $l = \frac{L}{r}$

Clase	Clase	f_i	F_i	F_i^*	h_i	H_i	H_i^*	...
$[y_1 - y_2 >$	y_1	f_1	F_1	F_1^*	$\frac{f_1}{n}$	$\frac{F_1}{n}$	$\frac{F_1^*}{n}$...
$< y_1 - y_2 >$	y_2	f_2	F_2	F_2^*	$\frac{f_2}{n}$	$\frac{F_2}{n}$	$\frac{F_2^*}{n}$...

Clase	Clase	f_i	F_i	F_i^*	h_i	H_i	H_i^*	...
$< y_r - y_r >$	y_3	f_3	F_3	F_3^*	$\frac{f_3}{n}$	$\frac{F_3}{n}$	$\frac{F_3^*}{n}$...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$< y_{r-1} - y_r]$	y_r	f_r	F_r	F_r^*	$\frac{f_r}{n}$	$\frac{F_r}{n}$	$\frac{F_r^*}{n}$...

Tenga en cuenta que n es el número de datos, es decir $n = f_1 + f_2 + \dots + f_r = \sum_{i=1}^r f_i$ donde f_i es número de datos en la partición X_i , una de las r particiones del conjunto total de datos.

1. Las **frecuencias absolutas** f_i indican el número de datos con la característica X_i .
2. Las **frecuencias absolutas acumuladas menor que** F_i obedecen a la fórmula

$$F_m = f_1 + f_2 + \dots + f_m = \sum_{i=1}^m f_i$$

3. Las **frecuencias absolutas acumuladas mayor que** F_i^* obedecen a la fórmula

$$F_m^* = f_m + f_{m+1} + \dots + f_r = \sum_{i=m}^r f_i = n - \sum_{i=1}^{m-1} f_i = n - (f_1 + f_2 + \dots + f_{m-1})$$

4. Las **frecuencias absolutas relativas** obedecen a la fórmula

$$h_m = \frac{f_m}{n}$$

5. Las **frecuencias absolutas relativas menor que** obedecen a la fórmula

$$H_m = \frac{f_m}{n}$$

6. Las **frecuencias absolutas relativas mayor que** obedecen a la fórmula

$$H_m^* = \frac{F_m}{n}$$

7. Las **frecuencias absolutas relativas porcentuales** obedecen a la fórmula $h_i \% = 100 \cdot h_i$
8. Las **frecuencias absolutas relativas menor que porcentuales** obedecen a la fórmula $H_i \% = 100 \cdot H_i$

9. Las **frecuencias absolutas relativas mayor que porcentuales** obedecen a la fórmula $H_i^* \% = 100 \cdot H_i^*$

Ejercicio 6.1. Sean los datos

Solución. Entonces



7

Gráficos estadísticos

The value of `x` in the Python session is Es decir los elementos son demagogos y déspotas. It is not the same `x` as the one in R.



8

Medidas de tendencia central

Son aquellas medidas que buscan un dato representativo central de un conjunto de datos tales como la media, la moda y la mediana.

8.1. La media (\bar{x})

A veces llamada *promedio aritmético*, es la medida de tendencia central que pondera los datos.

8.1.1. Media de datos no agrupados

Los datos no están agrupados cuando no están ordenados sobre una tabla de distribución de frecuencias. Sean los n datos x_1, x_2, \dots, x_n entonces la media o promedio aritmético se define como

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (8.1)$$

$$\frac{d[P; F_1]}{d[P; \mathcal{L}_1]} = e = \frac{d[P; F_2]}{d[P; \mathcal{L}_2]} \quad (8.2)$$

1. $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
2. $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

8.1.2. Media de datos agrupados

Considérese la siguiente tabla de distribución de frecuencias entonces el promedio es

$$\bar{x} = \frac{y_1 f_1 + y_2 f_2 + \dots + y_n f_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i f_i$$

Clase	Clase	f_i	F_i	F_i^*	h_i	H_i	H_i^*	...
$< y_1 - y_2 >$	y_1	f_1	F_1	F_1^*	$\frac{f_1}{n}$	$\frac{F_1}{n}$	$\frac{F_1^*}{n}$...
$< y_2 - y_3 >$	y_2	f_2	F_2	F_2^*	$\frac{f_2}{n}$	$\frac{F_2}{n}$	$\frac{F_2^*}{n}$...
$< y_3 - y_4 >$	y_3	f_3	F_3	F_3^*	$\frac{f_3}{n}$	$\frac{F_3}{n}$	$\frac{F_3^*}{n}$...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$< y_{r-1} - y_r]$	y_r	f_r	F_r	F_r^*	$\frac{f_r}{n}$	$\frac{F_r}{n}$	$\frac{F_r^*}{n}$...

Ejercicio 8.1. Si el promedio de n datos es \bar{x} entonces el promedio del conjunto inicial más un dato adicional x_{n+1} es

$$\bar{x}' = \frac{n\bar{x} + x_{n+1}}{n + 1}$$

en general si se adicionan r datos y_1, y_2, \dots, y_r entonces el nuevo promedio será

$$\bar{x}' = \frac{n\bar{x} + y_1 + y_2 + \dots + y_r}{n + r}$$

Solución. En efecto sea el promedio

$$\begin{aligned} \bar{x}' &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1}}{n + 1} \\ &= \frac{n \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + x_{n+1}}{n + 1} \\ &= \frac{n\bar{x} + x_{n+1}}{n + 1} \end{aligned}$$

8.2. La moda (Mo)

8.2.1. Moda de datos no tabulados

En este caso es dato que más repite en un conjunto de datos dados.

La moda es el dato que más se repite por ejemplo sea el conjunto de datos x_1, x_2, x_2, x_2, x_3 entonces la moda $Mo = x_2$

8.2.2. Moda de datos tabulados

La moda es el dato que más se repite por ejemplo sea el conjunto de datos x_1, x_2, x_2, x_2, x_3 entonces la moda $Mo = Li + \frac{Li - Ls}{Li + Ls}r$

Clase	Clase	f_i	F_i	F_i^*	h_i	H_i	H_i^*	...
$< y_{r-1} - y_r]$	y_r	f_r	F_r	F_r^*	$\frac{f_r}{n}$	$\frac{F_r}{n}$	$\frac{F_r^*}{n}$...

Los pasos son:

1. Se halla $\frac{n}{2}$ luego
2. x_n

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

can be found on the Pandoc website <http://pandoc.org>.

$$\sum$$

> I thoroughly disapprove of duels. If a man should challenge me, I would take him kindly and forgivingly by the hand and lead him to a quiet place and kill him.

In this section, we give a very brief introduction to Pandoc's Markdown. Readers who are familiar with Markdown can skip this section. The comprehensive syntax of Pandoc's Markdown can be found on the Pandoc website <http://pandoc.org>. \sum_1^2

I thoroughly disapprove of duels. If a man should challenge me, I would take him kindly and forgivingly by the hand and lead him to a quiet place and kill him.

– Mark Twain

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

* La suma de dos matrices $A_{n \times m}$ y $B_{r \times s}$

$$A_{n \times m} \pm B_{n \times m} = [a_{ij} + b_{ij}]$$

* El producto de dos matrices $A_{n \times m}$ y $B_{r \times s}$

$$A_{n \times m} \cdot B_{n \times m} = [a_{ij} + b_{ij}]$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

x_{11}	x_{12}	x_{13}
x_{21}	x_{22}	x_{23}



9

Medidas de dispersión



10

Medidas de asimetría





Parte II

Probabilidades



1

Experimento aleatorio



2

Álgebra de eventos



3

Técnicas de conteo



4

Definición de probabilidad



5

Probabilidad condicional



6

Teorema de Bayes



7

Eventos independientes y secuencias de experimentos



8

Probabilidad en espacio



Parte III

Inferencia estadística



1

Variables aleatorias

Definición 1.1 (Variable aleatoria). Sea Ω un espacio muestral asociado a una experimento aleatorio ϵ y $\omega \in \Omega$, entonces se genera la función **variable aleatoria**

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto X(\omega) \end{aligned}$$

$R_X = \{x \in \mathbb{R} / \exists \omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$ es decir a cada elemento de Ω se le asocia un número real \mathbb{R} , además la probabilidad de $x \in \mathbb{R}$ es $P[x] = \sum_{i=1}^n P[\omega_i]$ donde $\omega_i \in X^{-1}(x)$. La definición indica por otro lado que un espacio muestral Ω puede genera diferentes variables aleatorias.

Ejemplo 1.1. El espacio muestral de lanzar una monedas tres veces es

$$\omega = \{ccc, ccs, csc, scc, css, scs, ssc, sss\}$$

además sea n_c es número de caras y n_s el número de sellos, es posibles generar dos o mas variables aleatorias por ejemplo:

1. $X(\omega) = n_c$ entonces el rango de X es $R_X \{3, 2, 1, 0\}$ pues

$$\begin{aligned} 3 &= X(ccc) \\ 2 &= X(ccs) = X(csc) = X(scc) \\ 1 &= X(css) = X(scs) = X(ssc) \\ 0 &= X(sss) \end{aligned}$$

2. $X(\omega) = n_c - n_s$ entonces las imagenes de X son $R_X = \{3, 1, -1, -3\}$ en efecto

$$\begin{aligned} 3 &= X(ccc) \\ 1 &= X(ccs) = X(csc) = X(scc) \\ -1 &= X(css) = X(scs) = X(ssc) \\ -3 &= X(sss). \end{aligned}$$

Estos subconjuntos de \mathbb{R} también son espacios muestrales pues el conjunto de elementos de Ω con imagen dentro de estos valores reales x en \mathbb{R} es un elemento de

2^Ω es decir un evento por lo tanto tiene una determinada probabilidad $P[x]$, en el primer caso $X(\omega) = n_c$ tienen probabilidades

$$\begin{aligned} P(3) &= P[ccc] = \frac{1}{8} \\ P(2) &= P[ccs] = P[csc] = P[scs] = \frac{3}{8} \\ P(1) &= P[css] = P[scs] = P[ssc] = \frac{3}{8} \\ P(0) &= P[sss] = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

que es lo mismo para el segundo caso $X(\omega) = n_c - n_s$.

Definición 1.2 (Eventos equivalentes). Sea Ω un espacio muestral asociado a una experimento aleatorio ϵ y X una variable aleatoria con rango R_X definida sobre Ω . Dos eventos $W \in \Omega$ y $E_X \in R_X$ son **eventos equivalentes** si existe la relación

$$W = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = E_X\}$$

es decir E_X consta de todos los elementos en Ω para los cuales $X(\omega) \in E_X$

1.1. Clases de variables aleatorias

1.1.1. Variable aleatoria discreta

Cuando el rango de la variable aleatoria X , R_X es *finito* o *infinito* contable (no necesariamente enteros) $R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n \dots\}$

1.1.2. Variable aleatoria continua

R_X abarca cualquier intervalo en la recta numerica

1.1.3. Variable aleatoria mixta

Discreta y continua

1.2. Función de probabilidad de una variable aleatoria

1.2.1. Función de probabilidad de una variable aleatorias discreta

Definición 1.3 (Función o ley de probabilidad). Sea X una variable aleatoria con rango R_X . Una función definida por

$$p(x) = P[X = x] = \sum_{\{\omega \in \Omega: X(\omega)=x\}} P[\{\omega\}]$$

1. $p(x) > 0, x \in R_X$
2. $\sum_{x \in R_X} p(x) = P[X = x] = 1$

El conjunto de pares ordenados $(x, p(x)), x \in R_X$ recibe el nombre de *distribución de probabilidad de X*

Ejemplo 1.2. La variable aleatoria discreta

$$p_X(x) = p(1-p)^{x-1}, x \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } p \in [0, 1]$$

en efecto

$$p(1-p)^{i-1} > 0, \forall x \in \mathbb{Z}^+$$

además

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(1-p)^{i-1} = p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{1 - (1-p)} = 1$$

Ejemplo 1.3. La variable aleatoria discreta

$$p_X(x) = p(1-p), x \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } p \in [0, 1]$$

en efecto

$$p(1-p)^{i-1} > 0, \forall x \in \mathbb{Z}^+$$

además

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(1-p)^{i-1} = p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{1 - (1-p)} = 1$$

Ejemplo 1.4. La variable aleatoria discreta

$$p_X(x) = (1-p)^{x-1}, x \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } p \in [0, 1]$$

en efecto

$$p(1-p)^{i-1} > 0, \forall x \in \mathbb{Z}^+$$

además

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(1-p)^{i-1} = p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{1 - (1-p)} = 1$$

1.2.2. Función de probabilidad de una variable aleatoria continua

Definición 1.4 (Función de densidad de probabilidad). Sea X una variable aleatoria con rango R_X . La función $f(x)$ definida sobre R_X

1. $f(x) > 0, x \in R_X$ o $f(x) > 0, x \in \mathbb{R}$
2. $\int_{R_X} f(x)dx = 1$ o $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Ejemplo 1.5. Sea $f(x) = \frac{1}{\rho}$ es una función de densidad pues

$$f(x) > 0, x \in R_X$$

además

$$\int_{R_X} f(x)dx = 1$$

Ejemplo 1.6. Sea $f(x) = \frac{\alpha}{\rho}$ es una función de densidad pues

$$f(x) > 0, x \in R_X$$

además

$$\int_{R_X} f(x)dx = 1$$

Ejemplo 1.7. Sea $f(x) = \frac{\sigma}{\rho}$ es una función de densidad pues

$$f(x) > 0, x \in R_X$$

además

$$\int_{R_X} f(x)dx = 1$$

1.3. Función de distribución de una variable aleatoria

1.3.1. Función de distribución de una variable aleatoria discreta

Definición 1.5 (Función de distribución). Sea X una variable aleatoria con rango

$$R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}.$$

Con función de probabilidad $p(x_i) = P[X = x_i]$, sea x cualquier número, real la función definida por

$$F(x) = P[X \leq x] = \sum_{x_i \leq x} p(x_i) = \sum_{x_i \leq x} P[X = x_i]$$

recibe el nombre de función de distribución de X . Cuyas propiedades son:

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$
2. $F_X(-\infty) = 0$
3. $F_X(\infty) = 1$
4. $P(X < x) = F_X(x^-)$
5. $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a^-)$

Ejemplo 1.8. wwwwww

Ejemplo 1.9. wwwwww

Ejemplo 1.10. wwwwww

1.3.2. Función de distribución de una variable aleatoria continua

Definición 1.6 (Función de distribución). Sea X una variable aleatoria con función de densidad $f(x)$. La función

$$F_X(x) = F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^x f(t)dt, \quad \forall x \in R_X$$

Cuyas propiedades son:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $F(-\infty) = 0$
3. $F(\infty) = 1$

Ejemplo 1.11. wwwwww

Ejemplo 1.12. wwwwww

Ejemplo 1.13. wwwwww



2

Parámetros de una variable aleatoria

2.1. Esperanza matemática

Definición 2.1 (Esperanza matemática de una variable aleatoria discreta).

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i)$$

Definición 2.2 (Esperanza matemática de una variable aleatoria continua).

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \text{ equivalentemente } \mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X dP$$

el valor esperado a veces se representa por $\mu = \mathbb{E}[X]$ que es el promedio o la media poblacional.

2.2. Medidas de variación

La varianza es una medida de dispersión de una variable aleatoria X respecto a su esperanza $\mathbb{E}[X]$. Se define como la esperanza de la transformación

$$\rho = \text{Var}(X) = (X - \mathbb{E}[X])^2$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

o bien

$$\sigma^2 = \text{Var}(X)$$

Definición 2.3 (Varianza de una variable aleatoria discreta). Sea

Definición 2.4 (Varianza matemática de una variable aleatoria continua). Sea

2.3. Medidas de posición

Definición 2.5 (Cuantiles de una variable aleatoria discreta). Sea

Definición 2.6 (Cuantiles matemática de una variable aleatoria continua). Sea

2.4. Medidas de curtosis

Definición 2.7 (Curtosis de una variable aleatoria discreta). Sea

Definición 2.8 (Curtosis de una variable aleatoria continua). Sea

momento de orden superior

$$M_X^{(n)} = \mathbb{E}[X^n] = \int_{\mathbb{R}} x^n f_X(x) \, dx$$

3

Variables aleatorias bidimensionales

Definición 3.1 (Variable aleatoria bidimensional discreta).

$$F(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y] = \sum_{u=-\infty}^x \sum_{v=-\infty}^y p(u, v)$$

Ejemplo 3.1.

Definición 3.2 (Variable aleatoria bidimensional continua).

$$F(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y] = \sum_{u=-\infty}^x \sum_{v=-\infty}^y p(u, v)$$

Ejemplo 3.2.

3.1. Distribución bidimensional discreta

Definición 3.3 (Función de probabilidad conjunta). Sea (X, Y) una variable bidimensional discreta con rango $R_{X \times Y}$. A cada posible resultado le asociamos un número

$$p(x, y) = P[X = x, Y = y]$$

que cumple las siguientes condiciones

1. $1 > p(x, y) > 0, (x, y) \in R_{X \times Y} \in$
2. $\sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} p(x, y) = 1$

A los pares ordenados $((x, y), p(x, y))$ se le llama **distribución de probabilidad conjunta**

Definición 3.4 (Función de distribución acumulada).

$$F(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y] = \sum_{u=-\infty}^x \sum_{v=-\infty}^y p(u, v)$$

3.1.1. Distribuciones marginales**3.1.2. Variables aleatorias independientes****3.1.3. Distribuciones de probabilidad condicional**

3.2. Distribución bidimensional continua

4

Distribuciones discreta importantes

4.1. Variable aleatoria discreta binomial

4.2. Variable aleatoria discreta Poisson



5

Distribuciones continuas importantes

5.1. Variable aleatoria continua normal

5.2. Variable aleatoria continua gamma



6

Distribuciones muestrales



7

Estimación



8

Prueba de hipótesis



A

Sumatorias

Una suma de números representados por x_1, x_2, \dots, x_n se simboliza en forma compacta mediante el símbolo \sum (sigma) es decir la suma de los números anteriores se puede escribir del siguiente modo

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i.$$

Algunas propiedades son

1. $k \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n k x_i$
2. $\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i$
3. $\sum_{i=1}^n x_i$

$$\int_1^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n f^i(x)$$

citado por (Xie, 2015) Variable estadística variable estadística
ee

A.1. eeeee



B

Matrices

Una matriz es un arreglo de números distribuidos en filas y columnas por ejemplo la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

de **orden** $n \times m$ tiene **entradas** a_{ij} donde el primer subíndice indica la fila y el segundo la columna; es usual representar por simplicidad una matriz por $A = [a_{ij}]_{n \times m}$. Si en el orden $n = m$ entonces la matriz recibe el nombre de **matriz cuadrada** la suma de los elementos de la diagonal de una matriz cuadrada $\sum_{i=1}^n a_{ii}$ se llama **traza**. Si todas las a_{ij} son cero entonces la matriz $A = 0$ recibe el nombre matriz **nula**.

Dos matrices son iguales si tienen el **mismo orden** y cada una de las entradas respectivas son iguales es decir $A = [a_{ij}]_{n \times m}$ y $B = [b_{ij}]_{n \times m}$ son iguales si $a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, m$

B.1. Álgebra de matrices

Sean las matrices $A = [a_{ij}]_{n \times m}$ y $B = [b_{ij}]_{p \times q}$ entonces la suma y producto de matrices se definen

1. Sea k un escalar entonces se verifica que $kA = [ka_{ij}]$, $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, m$ es decir el escalar k multiplica a cada una de las entradas de la matriz.
2. La suma o diferencia es posible si $n = p$ y $m = q$ es decir los ordenes de A y B son iguales, entonces la suma o diferencia resulta $A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{n \times m}$, $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, m$
3. El producto es posible si $m = p$ es decir el número columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz, el orden de la

matriz resultante es $n \times q$ además

$$A \cdot B = \left[\sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \right]_{n \times q}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m a_{1k} b_{k1} & \sum_{k=1}^m a_{1k} b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^m a_{1k} b_{kq} \\ \sum_{k=1}^m a_{2k} b_{k1} & \sum_{k=1}^m a_{2k} b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^m a_{2k} b_{kq} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^m a_{nk} b_{k1} & \sum_{k=1}^m a_{nk} b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^m a_{nk} b_{kq} \end{pmatrix}_{n \times q}$$

donde $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, m$

Ejemplo B.1. Sean $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 3}$ y $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 5}$ entonces $A \cdot B =$

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 & 15 & 3 \\ 5 & -3 & 0 & 13 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 10 & 10 & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$$

En caso de ser posible la multiplicación entre A , B y C entonces se verifican las siguientes propiedades

- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C$
- $A(BC) = (AB)C$

Bibliografía

Xie, Y. (2015). *Dynamic Documents with R and knitr*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, Florida, 2nd edition. ISBN 978-1498716963.



Índice alfabético

frecuencias absolutas, **16**
frecuencias absolutas acumuladas menor
que, **16**
frecuencias absolutas relativas, **16**
frecuencias absolutas relativas menor
que, **16**
traza, **73**