Muestreo y reconstrucción de una señal.

Consta de tres etapas

- Es necesario convertir la señal analógica en una señal discreta mediante un convertidor de tiempo continuo C/D.
- Cuantificación o descuantificación en la amplitud de una señal (este proceso es no reversible.
- Codificación → transformación de la señal a un lenguaje en bits.

La señal digital finalmente queda como una secuencia de números que finalmente vienen dados por una representación binaria

$$y(n) \rightarrow \text{Convertidor D/C} \rightarrow \text{interpolador} \rightarrow \text{Filtro} \rightarrow \hat{y}(t)$$

Uno de los métodos de muestreo y conversión consiste en realizar un muestreo periódico o uniforme, el cual se basa en la selección de muestras de la señal analógica en el intervalo de tiempo uniforme. matemáticamente se trata de sustituir la variable $t = nT$ en donde T es el periodo

$$x[n] = x_a(nT), \quad n \in \mathbb{Z}$$

donde la frecuencia de muestreo es $F_s = 1/T$ y viene dado en muestras por segundo $\omega_s = 2\pi/T$ la diferencia entre la señal analógica y la digital es que ha producido una normalización temporal.

muestreo ideal

2 procesos
- Se realiza un muestreo con tren de deltas
- Se realiza un cambio de dominio de tiempo continuo a tiempo discreto

La transformada de Fourier

$$s(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \rightarrow \omega_s = \frac{2\pi}{T} \qquad x_s(t) = x_a(t)\,s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t)\,\delta(t - nT)$$

el dominio viene dado por

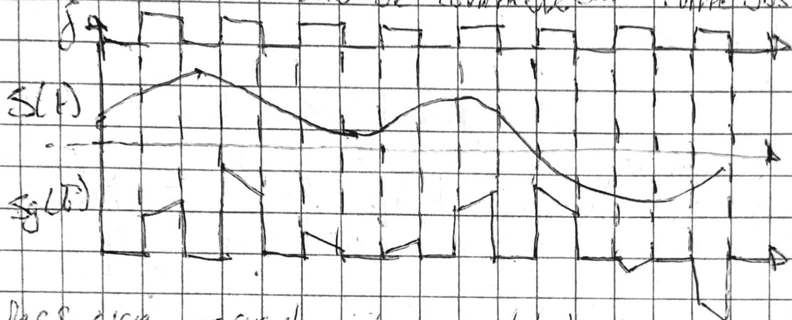
$$\rightarrow X_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} X_a(\omega) * s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(\omega - k\omega_s)$$

Según el valor de ω_s se pueden producir situaciones si el muestreo es ideal $\omega_s > 2\omega_N$ las réplicas de $X_a(\omega)$ no se solapan.

Si una señal continua $s(t)$ tiene una banda de frecuencias tal que f_m sea mayor frecuencia comprendida dentro de dicha banda, dicha señal podrá reconstruirse sin distorsión a partir de muestras de la señal tomadas a una frecuencia f_s siendo $f_s > 2f_m$

El interruptor no es el tipo mecanico, puesto que por lo general Fs es bastante valor. Suelen emplearse transistores de efecto como interruptores, para cumplir los requerimientos que se le exigen entre los que se encuentran.

- Una elevada resistencia de aislamiento cuando los interruptores (tram) estan desconectados
- Una baja resistencia si los interruptores estan conectados o cerrados.
- Una elevada velocidad de conmutacion entre dos estados de los interruptores



Cuantificacion → cuantificar la amplitud de esas señales a un numero finito de niveles
- El tipo mas usual de cuantificacion es la cuantificacion uniforme en el que los niveles son todos iguales la mayoria usan un numero de niveles que es un potencial de 2. Si $L = 2^B$ cada uno de los niveles es codificado a un numero binario de B bits.
- Ruido de cuantificacion: llamaremos $x_s[n]$ a la señal discreta y $x_Q[n]$ a la señal discreta cuantizada. El error es:

$$\varepsilon[n] = x_s[n] - x_Q[n]$$

Transformada de Fourier discreta
Tenemos una forma de expresar la señal como una suma infinita de sinusoides. Utilizando esta descomposicion de la señal junto con la respuesta en frecuencia tenemos una forma sencilla de determinar la salida de un sistema en el estacionario

Supongamos una señal discreta $x(n)$ periodica: esto es $x(n+N) = x(n)$. Sabemos que a Sabemos que a nivel temporal esta señal se puede expresar, en el primer periodo y y usando delta desplazadas. $x(n) = \sum_{k=0}^{N} x(k) \cdot \delta(n-k)$

$$\Rightarrow x(n) = \alpha \sum_{k=0}^{N-1} a(k)\, e^{\frac{j2\pi kn}{N}} \Rightarrow X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j2\pi(k \ldots}$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$$

Densidad espectral → En matematicas y fisica la densidad espectral de una señal es una funcion matematica que nos informa de como esta distribuida la potencia o la energia (segun el caso) de dicha señal sobre las distintas frecuencias de las que esta formada.

$$S_x(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_x(k)\, e^{-jk\omega} \Rightarrow r_x(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_x(e^{j\omega})\, e^{jk\omega}\, d\omega = P_x(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_x(k) z^{-k}$$

República

continuación:
La transformada de Fourier de $F(t)$ es una función es una función continua, de límite nulo al infinito y acotada por $\|F\|_\infty \leq \|F\|_1$ donde

$$\|F\|_\infty = \max_\omega |F(\omega)|, \quad \|F\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|\,dt$$

Filtros
Los filtros digitales se pueden clasificar en dos grandes grupos: aquellos que representan una respuesta al impulso de duración finita (FIR) o duración infinita (IIR)

Diseño de filtros IIR
Para una relación de entrada - salida se establece

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] + \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$ Esta función se rige

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{-n} = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

Los sistemas I.I.R no van a poder presentar una característica de fase exactamente lineal si queremos que sean causales. La solución más habitual se basa en aproximar el módulo de la función de transferencia sin preocuparnos de la fase, con tal de que no sea importante o bien porque se ajuste en una etapa posterior del filtro pasa todo.
Si los coeficientes a_k y b_k de $H(z)$ son reales, los polos y los ceros aparecen por parejas conjugadas o son reales. Para que el sistema sea estable y causal todos los polos deben situarse exactamente en el interior de la circunferencia unidad.
Problema: Su respuesta al impulso no coincide con sus coeficientes
Prototipos analógicos
- Butterworth → optimiza la respuesta plana en la banda de paso
- Chebyshev → dan una respuesta más abrupta. Optimiza por tanto la transición
- Bessel optimiza la respuesta en fase.

Filtros FIR
- Pueden ser diseñados con fase perfectamente lineal
- Son filtros no recursivos, es decir todos los coeficientes a_i de la ecuación en diferencias son cero
- Son siempre estables al no tener realimentaciones
- Implementación bastante sencilla
- Su respuesta al impulso coincide con el valor de coeficientes b_k

República

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

FIR = Técnica de enventanado (1)

- Se diseña un gráfico (dominio de la frecuencia y características).
- Transformada inversa de Fourier del filtro.
- Truncar la secuencia resultante.
- Las muestras FFT respecto a la Fs nos limita la resolución de la Fs.
- Sensible a frecuencias bajas.

Tipos de ventana: Hamming, Hanning.

Wavelets → son funciones que satisfacen ciertos requerimientos matemáticos y son utilizadas para la representación de datos o de otras funciones. Las wavelets son muy adecuadas para aproximación de datos con variaciones o con discontinuidades abruptas. La idea fundamental detrás de las wavelets es analizar funciones de acuerdo a escalas. En el análisis por wavelets la escala que se utiliza para analizar funciones de acuerdo a resoluciones. Los algoritmos que utilizan wavelets procesan los datos a diferentes escalas o resoluciones. Si se observa una señal o función utilizando una ventana ancha, no se observan los pequeños detalles, entonces se emplea una ventana pequeña, y así se puede cambiar la resolución. La función principal (madre) se puede representar como combinación lineal de la función original y de sus traslaciones y dilataciones, y esto se llama expansión en wavelets.

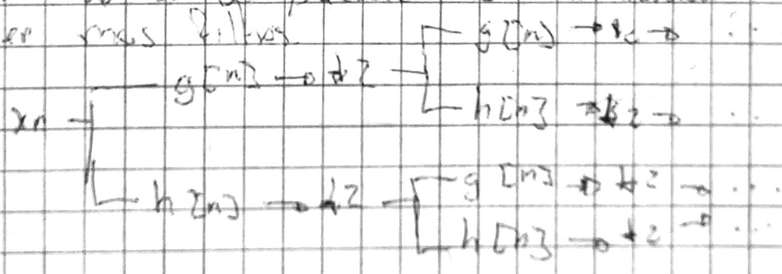
Transformada wavelet discreta

$$\psi_{m,n}(x) = 2^{-m/2}\,\psi(2^{-m}x - n) \qquad m, n \in \mathbb{Z}$$

Si se define a través de la wavelet madre para una función $L^2(\mathbb{R})$

$$F(m,n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{m,n}(x)\, f(x)\, dx = \langle \psi_{m,n}, f \rangle$$

La transformada de wavelet packet es transformada la wavelet discreta para pasarla en más filtros.



Wavelet de Morlet = $\psi_0(t) = \sqrt{\beta}\,\pi^{-1/4}\, e^{i\omega_0 t} \cdot e^{-|\beta|^2 t^2/2}$

Sombrero mexicano = $\psi_0(t) = (1 - t^2)\, e^{-t^2/2}$

Ecuación de escalamiento → $L\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$