DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Trabajo Práctico 1

"No creo que a él le gustará eso"

Metodos numericos
Primer Cuatrimestre de 2015

Integrante	LU	Correo electrónico
Gastón Zanitti	058/10	gzanitti@gmail.com
Ricardo Colombo	156/08	ricardogcolombo@gmail.com

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (54 11) 4576-3359
http://www.fcen.uba.ar

Índice

1. Introduccion teorica

En este trabajo practico intentaremos modelizar y resolver el problema de una superficie a la que se le aplica calor en ciertos puntos, teniendo como condiciones ademas que los bordes permanecen a temperatura constante. Para modelizar este problema utiizaremos la ecuacion del calor:

$$\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Con esta ecuacion diferencial, es posible calcular la temperatura en cualquier punto de la superficie. Sin embargo, dado que queremos resolver el sistema bajo un modelo que no sea continuo, será necesario discretizar la ecuacion diferencial de alguna manera adecuada. Para ello, discretizaremos esta superficie en segmentos de superficie, que afectaran la presicion de las respuestas. Parece intuitivo pensar que mientras mas pequeños sean los segmentos, el sistema discreto mas se asemejará con el continuo, obteniendo así respuestas mas parecidas a este.
Aprovechando la discretizacion del sistema y que este es un problema lineal, lo modelizaremos como un problema $Ax = b$ sobre la cual aplicaremos diversas tecnicas para resolverlo, como eliminacion gaussiana o descomposicion LU, que nos permitiran resolver las incognitas de una manera mas comoda.
Para decirlo mas formalmente, dados a y b el ancho y el alto de nuestra superficie, respectivamente, h la granularidad con la que discretizaremos, y valiendo que $a = m \times h$ y $b = n \times h$, obtendremos una grilla de $(n+1) \times (m+1)$ puntos (donde el punto $(0,0)$ se corresponde con el extremo inferior izquierdo).
Llamemos $t_{ij} = T(x_j, y_i)$ al valor (desconocido) de la función T en el punto $(x_j, y_i) = (ih, jh)$. La aproximación finita (que es posible gracias a la discretización realizada sobre el sistema) afirma que

$$t_{ij} \;=\; \frac{t_{i-1,j} + t_{i+1,j} + t_{i,j-1} + t_{i,j+1}}{4}. \tag{2}$$

De esta forma, es posible plantear un sistema en donde cada punto esté en función de otros y así resolver todas las ecuaciones nos dará la temperatura en el punto crítico.
Dado que estamos discretizando el sistema, puede ocurrir que el punto critico (que esta definido como el centro del parabrisas) puede ocurrir que no coincida con ningun punto de la discretización. En este caso, calcularemos un punto proximo a este que sí este en la discretización y lo consideraremos el punto critico. Nuestro razonamiento fue que para una granularidad apropiada, este vecino será suficientemente cercano y va a corresponderse con el valor que debería coincidir con la discretización.

1.1. Entrada y salida de los algoritmos

Por una cuestión de simpleza, desidimos estandarizar toda la entrada y la salida de los algoritmos. De esta manera, todos toman una instancia de un archivo de texto con el siguiente formato:

$$\begin{pmatrix} (a) & (b) & (h) & (d) \\ (x1) & (y1) & (r1) & (t1) \\ (x2) & (y2) & (r2) & (t2) \\ \dots & & & \\ (xk) & (yk) & (rk) & (tk) \end{pmatrix}$$

Donde a y b son el ancho y el largo del parabrisas, h será el tamaño de la discretización y k la cantidad de sanguijuelas del sistema.
Las k lineas siguientes corresponden a cada una de las sanguijuelas, tal que para la sanguijuela i, xi

yi es la posición de la misma, ri es su radio y ti su temperatura.
La salida de todos los algoritmos contendrá un archivo que debe ser indicado por parametro, donde por cada linea contendrá un indicador de la grilla i, j junto con el correspondiente valor de temperatura.
En el caso de los algoritmos de salvación (definidos mas adelante), esta salida corresponderá a la solución del problema habiendo quitado la sangijuela que mas reduce la temperatura en el punto critico.
Ademas por pantalla se mostrará información que se crea correspondiente para cada algoritmo en particular.

2. Desarrollo

2.1. Sistema a resolver

Una vez obtenida la discretización de nuestro sistema y la posición de los puntos de calor en esta versión como se mencionó con anterioridad, planteamos las ecuaciones que nos permitirán resolverlo. Consideremos r al radio de alcance de los puntos de calor producidos por las sanguijuelas, T_c su temperatura y C_1, ... , C_k los k puntos de calor, con $C_i \in R^2$, $C_i = (x_i, y_i)$.

Sabemos que si $x = 0 \vee y = 0 \vee x = m \vee y = n \Rightarrow T(x, y) = -100$.
También que si $\exists\, C_j,\ C_j = (x_j, y_j)\ /\ \sqrt[2]{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} \leq r \Rightarrow T(x, y) = T_c$.
Luego, nos falta definir $T(x, y)$ para todos los (x, y) que no son alcanzados por estas condiciones.
Ahora plantearemos $n \times m$ ecuaciones con $n \times m$ incógnitas, que serán el sistema que luego resolveremos. Las incógnitas serán los $T(x, y)$, y sus constantes correspondientes a_{ij}.

Sea (α, β) un punto de la grilla:

1. Si es parte del borde, entonces su ecuación será a_{ij} = -100 por la temperatura por defecto que toma esta sección.
2. Si es un punto donde existe una sanguijuela, este toma el valor de la constante de temperatura otorgado por esta. a_{ij} = k donde K representa la temperatura pasada como input para dicha sanguijuela.
3. Si en cambio es un punto del interior del plano que no se corresponde con la posición de ninguna sanguijuela, su ecuación será, como mencionamos con anterioridad,

$$t_{ij} \ = \ \frac{t_{i-1,j} + t_{i+1,j} + t_{i,j-1} + t_{i,j+1}}{4}. \tag{3}$$

   Teniendo en cuenta esta información, podremos despejar la incógnita para introducir dicha ecuación dentro de nuestra matriz, de la siguiente manera:

$$0 \ = \ -4t_{ij} + t_{i-1,j} + t_{i+1,j} + t_{i,j-1} + t_{i,j+1}. \tag{4}$$

   logrando así igualar la ecuación a cero.

Con esta nocion espacial de que cada punto esta condicionado tan solo por sus 4 vecinos, ahora quisieramos encontrar una manera de almacenarla que sea conveniente y nos permita reducir el espacio en la matriz y el numero de operaciones a realizar. En el siguiente apartado, describiremos como ordenando las variables de manera inteligente, podrémos guardar las incognitas en una matriz banda.

2.2. Matriz banda

Por lo antedicho en los aparatados anteriores, sabemos que todo punto del parabrisas, puede ser calculado en base a sus cuatro vecinos. Esto es, cualquier punto puede ser calculado en base al punto que se encuentra arriba de el, al punto que se encuentra debajo, al punto a la izquierda y a la derecha del mismo. Si ahora en la matriz de resolución del sistema lograsemos mantener a esos 4 puntos cerca de la diagonal, podíamos utilizar una matriz banda.
Ahora supongamos que tenemos un pequeño paravrisas de 3×3 que queremos resolver. Lo que descubrimos tras un arduo analisis es que si ordenabamos cada punto tal que que la primera ecuacion es para el punto $t_{1,1}$, la segunda para $t_{1,2}$, la tercera para $t_{1,3}$, la cuarta para $t_{2,1}$, etc. nos quedará algo asi:

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\dots & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_{0,0} \\ x_{0,1} \\ x_{0,2} \\ x_{0,3} \\ x_{0,4} \\ x_{1,0} \\ x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \\ \dots \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} -100 \\ -100 \\ -100 \\ -100 \\ -100 \\ -100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix}$$

Donde todo $x_{i,j}$ con i o j igual a 0 o 4 es uno de los bordes del parabrisas.

Entonces la matriz resultante queda banda, con el tamaño de la banda igual a una columna del parabrisas mas las dos columnas que representarian los bordes (en este caso las columnas 0 y 4).

2.3. Almacenamiento de la matriz banda

Debido a que la representación matricial del problema que atacamos posee una estructura donde los elemenos no nulos se concentran en la diagonal, pudimos representar esta matriz de $(nxm)x(nxm)$ usando otra estructura de $nx(2m+1)$ elementos, sabiendo que más allá de la banda diagonal de pxq elementos, el resto de la matriz se completa con 0. Al hacer esto debemos adaptar los algoritmos a esta representacion aportandonos reducir tanto la cantidad de operaciones como el espacio que ocupa la misma.

Todo este comportamiento de la matriz banda fue encapsulado en una clase para que fuera mas facil de utilizar y transparente tanto para el usuario como para las clases que utilizan esta matriz para setear u obtener sus elementos, sin que este necesite conocer la manera exacta en la que se almacenan los valores internamente.

2.4. Eliminacion gaussiana sobre matriz banda

Como primer forma de resolver el sistema de ecuaciones, se implemento un Gauss sobre el que se realizaron algunas mejoras. La idea general del algoritmo se mantiene, en el paso k diagonalizamos la columna k de la matriz A y todos los elementos en la columna k-esima a partir del $a_{k,k}$ seran 0.
La mejora que implementaremos será que, sabiendo que la matriz A es banda, a partir del elemento $a_{k+p,k}$ (donde p es el limite de la banda) los siguientes seran 0 y a partir del elemento $a_{k,k+p}$ tambien seran 0.
Luego para la columna k no será necesario chequear hasta el final de la matriz, sino hasta el valor $k+p$.
Lo mismo pasa con las filas. En el gauss estandar, luego de diagonalizar una columna, todos los elementos de esa fila deben ser actualizados. Pero al trabajar con una matriz banda, solo es necesario actualizar los p valores que siguen a la diagonal, ya que tenemos asegurado que todos los valores siguientes seran 0.
Escrito de manera mas formal el algoritmo será el siguiente:

De este algoritmo se desprende que este algoritmo tiene una mejor complejidad comparado con el Gauss estandard, siendo la misma de $O(n * p^2)$ siendo n la cantidad de incognitas de nuestra matriz, y p el tamaño de la banda.

TP1 1 void Gauss(matriz A, vector b)

1: Para k=1...n
2: Tomo el elemento $a_{i,i}$ como pivote
3: Para $i = k + 1, ...k + p$
4: Para $j = k + 1, ...i + p$
5: $a_{i,j} = a_{i,j} - a_{k,j} * (a_{i,k}/a_{k,k})$
6: $a_{i,k} = 0$

Una vez concluido el proceso de eliminación gaussiana sobre la matriz banda, utilizamos backwards substitution para resolver las ecuaciones y conseguir así el valor de cada uno de los puntos de calor del plano discretizado. Aquí tambien es posible realizar una optimizacion, ya que en cada paso no es necesario ir hasta la ultima columna sinó hasta la columna donde sabemos que comienza la banda.

De esta manera habremos disminuimos la complejidad del backwards substitution de $O(n^2)$ a una menor de $O(n * p)$.

2.5. Descomposicion LU

La segunda forma que desarrollamos para resolver el problema es realizando una descomposicion LU a la matriz original. La ventaja de esto es que en caso de actualizar el vector b, el costo de volver a obtener los resultados se reduce en $O(n^2)$.

Dado que la descomposicion LU es muy similar al algoritmo de eliminacion gaussiana, este tambien puede ser optimizado para ser utilizado en una matriz banda. Las optimizaciones serán similares a las de Gauss. Expresandolo de manera algoritmica, la descomposicion LU optimizada será asi:

TP1 2 void Gauss(matriz A, vector b)

1: Inicializo una matriz L con unos en la diagonal
2: Para k=1...n
3: Tomo el elemento $a_{k,k}$ como pivote
4: Para $i = k + 1, ...k + p$
5: Para $w = k + 1, ...i + p$
6: $a_{i,j} = a_{i,j} - a_{k,j} * (a_{i,k}/a_{k,k})$
7: $a_{i,k} = 0$
8: $L_{i,k} = a_{k,j} * (a_{i,k}/a_{k,k}\ )$

Luego en la matriz A obtengo la matriz diagonal superior y en el L la diagonal inferior.

Puede verse que siendo el algoritmo muy similar al de eliminacion gaussiana, tambien posee la misma complejidad, esto es $O(n * p^2)$.

Este algoritmo sera utilizado mas adelante, cuando queramos invertir una matriz de manera barata para poder utilizar el algoritmo de Sherman Morrison.

2.6. No hay tiempo que perder

En esta parte del trabajo, buscaremos la posibilidad de disminuir la temperatura del punto critico a travez de la eliminacion de una sanguijuela. Dado que esto nos afecta el sistema de ecuaciones, en primera instancia, será necesario recalcular todo el sistema otra vez, lo que podria resultar muy costoso.

Plantear otra vez las ecuaciones, ahora con esta variación, y volver a calcular las incógnitas mediante el algoritmo de eliminación gaussiana tomaría otra vez complejidad $O(n * p^2)$. Teniendo en cuenta que es necesario calcular el sistema completo y luego una vez eliminando cada una de las sanguijuelas pegadas al parabrisas para saber si existe la posibilidad de salvarlo, hace que esta opción no sea la mas adecuada, sobre todo en aquellos problemas donde el parabrisas presenta una granularidad muy fina. Para esto, entonces, hacemos uso de una variación de la fórmula de Sherman–Morrison, evitando replantear todo el sistema desde cero, permitiendo reutilizar informacion de la ejecucion con todas las sanguijuelas y disminuyendo la complejidad a una mas adecuada.
Comencemos definiendo de manera mas adecuada la implementacion mas simple.

2.7. Implementacion Simple

Como ya hemos adelantado, la idea detras de este algoritmo sera quitar una sanguijuela del sistema, aplicarle eliminacion Gaussiana a la matriz obtenida y utilizar backwads substitution para obtener la solucion deseada.

Mas formalizado en pseudocidigo:

TP1 3 void Ultimo_disparo()

1: Para cada sanguijuela
2: La quito de la matriz A
3: Quito su b en 0
4: Aplico $Gauss(A, b)$
5: Aplico $Backwards\_substitution(A, b)$
6: Restablezco los valores originales en la matriz A y paso a la siguiente

Luego, siendo la cantidad de sanguijuelas w, el tamaño de la matriz de resolución n y el tamaño de la banda p. La complejidad de este algoritmo sera $O(w * ((n * p^2) + (n * p)))$ que es lo mismo que $O(w * (n * p^2))$

Ahora intentaremos mejorar esta complejidad a travez de la utlizacion de la formula de sherman morrison.

2.8. Implementacion Sherman-Morrison

Entonces, sean A, A^* la matriz original del problema y la matriz modificada sin una de sus sanguijuelas respectivamente, queremos resolver $A^* = A + uv^t$ donde uv^t representa la matriz que introduce los cambios debido a la modificacion. Sea entonces $(A^*)x = b$. Resolvemos las siguientes ecuaciones, $Ay = b$ y $Az = u$ y obtenemos la nueva x a partir del siguiente cálculo:

$$x = y - \frac{z(v^t y)}{1 + v^t z}. \tag{5}$$

Así entonces, podemos obtener los resultados a partir de multiplicaciones vectoriales de complejidad lineal y evitamos volver a usar el algoritmo de eliminación gaussiana de complejidad cúbica.
Formalizando el algoritmo:

Este algoritmo tendrá la siguiente complejidad:

1. Descomposición LU: $O(np^2)$
2. Luego para cada sangijuela:

TP1 4 void Ultimo_disparo_Sherman_Morrison()

1: Realizo la descomposición LU de A
2: Para cada sanguijuela
3: Modifico el valor de b en el lugar de la sanguijuela
4: Calculo x de la manera vista arriba
5: Restablezco los valores originales en b y paso a la siguiente sangijuela

a) Modifico el valor de b en el lugar de la sanguijuela: $O(1)$

b) Calculo x de la manera vista arriba: $O(n * p)$

c) Restablezco los valores originales en b: $O(1)$

Luego esto da una complejidad de $O(np^2 + wnp)$

3. Discusion

3.1. Manipulación de estructura interna de la matriz

Al utilizar una estructura de menor espacio para representar la matriz del sistema, debimos lidiar con problemas de indexación. Gracias a una abstracción útil de la matriz bajo la clase $MatrizB$, entregando los métodos públicos $getVal$ y $setVal$, que toman indices de la matriz original y los mapean a la respresentación interna que consta de un vector bidimensional, el problema pudo ser mitigado.

3.2. Eficiencia temporal

La resolución de este sistema de ecuaciones implica una gran cantidad de operaciones aritméticas intervinientes. Trabajamos entonces en técnicas para disminuir el costo computacional sobre el algoritmo base de eliminación gaussiana a través de la explotación de características particulares del problema. Algunas técnicas, como la factorizaciíon LU, permiten una resolución más rápida del problema y funcionan para cualquier entrada. En cambio, otras técnicas aplican a un subconjunto de las posibles entradas.

Para la detección de sangijuelas que modifican levemente el sistema utilizamos la fórmula de Sherman-Morrison, obteniendo la variación del sistema de modo más eficiente que en el caso general que requiere de rehacer los cálculos de eliminación gaussiana.

Otra técnica que pensamos y finalmente no implementamos para detectar si eliminar una sanguijuela salva el parabrisas en el caso en que exista una sanguijuela cuyo radio de acción contiene al punto crítico es el siguiente:

1. Si la sanguijuela posee una temperatura menor a 235, eliminando cualquier otra el sistema va a seguir debajo de los 235 grados.
2. Si la sanguijuela se encuentra a una temperatura igual o mayor a 235, probamos eliminarla.
3. Si eliminando la sanguijuela se baja de los 235 grados, eliminandola logramos salvar el parabrisas, si no es cierto, no hay ninguna sanguijuela que pueda ayudar ya que la sanguijuela recién probada ejerce una temperatura directamente sobre el punto crítico.

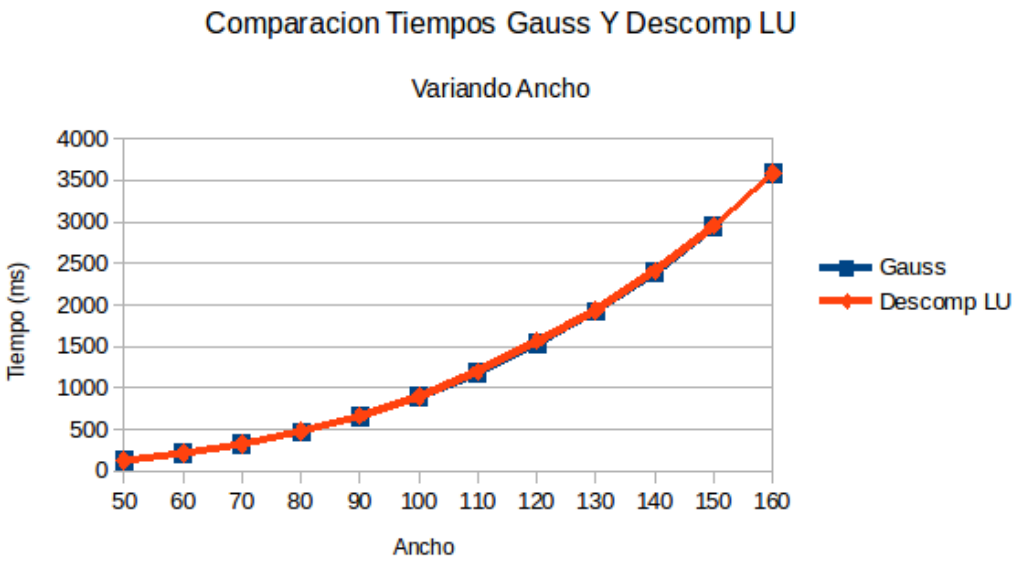
4. Resultados

4.1. Análisis de tiempos en función de los parametros de entrada

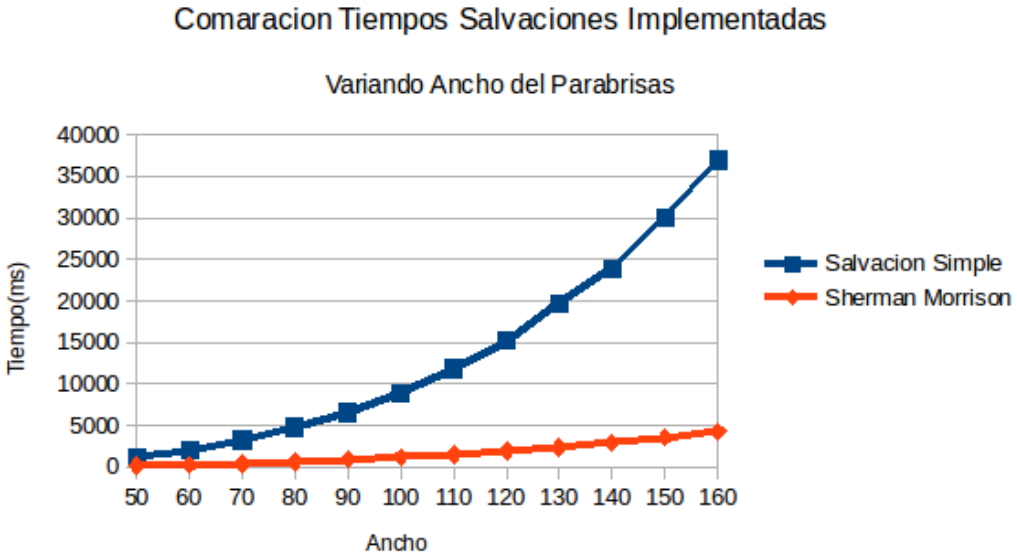
En esta seccion analizaremos de manera experimental como varían los tiempos de ejecución de los algoritmos descriptos, al variar el largo y el ancho de la matriz y la cantidad de sanguijuelas del sistema.

4.1.1. Ancho en función del tiempo

Para comenzar, tomaremos un parabrisas con 50 sanguijuelas, tal que estas solo toquen un punto de la discretización, y para una granularidad fija de 1,0 iremos variando el largo del parabrisas. De esta manera, comenzaremos con un parabrisas de 50×50 luego uno de 60×50 y asi aumentando de manera lineal ambos parametros hasta llegar a un parabrisas de 100×50. Resolveremos cada uno de estos sistemas utilizando ambos metodos implementados (Gauss y Descomposición LU). Los resultados obtenidos pueden verse en el siguente grafico:



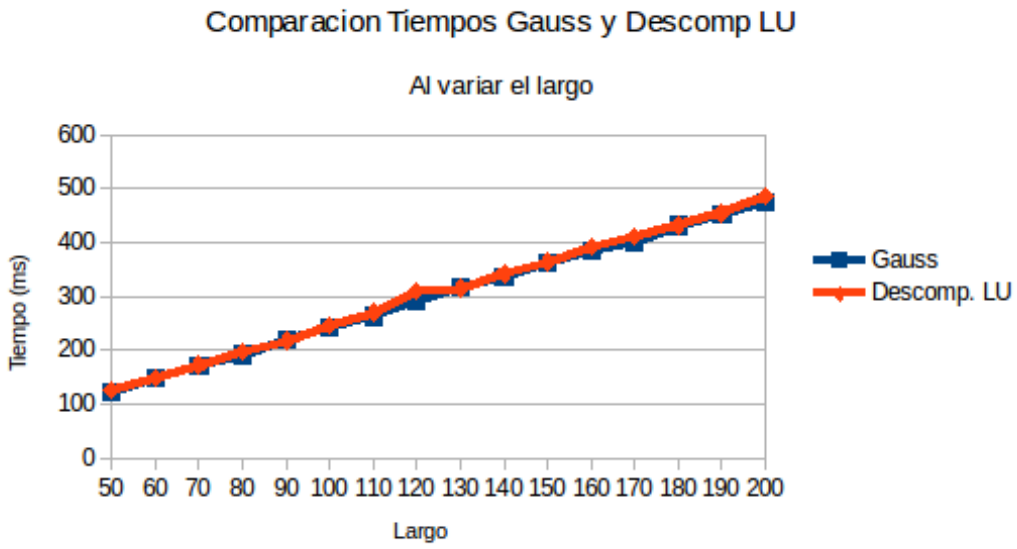
Sabemos que al aumentar el largo de el parabrisas de manera lineal, aumentará de manera lineal el numero de ecuaciones en nuestra matriz de resolución. Lo que puede observarse en este grafico es que con un aumento lineal del largo del parabrisas, el tiempo de ejecución aumenta de manera cuasi-lineal. Esto era esperable ya que sabemos que tanto el gauss como la descomposición LU tienen una complejidad igual a $O(n * p^2)$, y dado que en nuestro modelado, utilizamos el largo del parabrisas para definir el tamaño de la banda en la matriz de resolución (osea p), era logico que al aumentar el largo, se obtuviera un aumento casi cuadratico en el tiempo de ejecución.
Ademas en este grafico se pueden observar que tanto los tiempos de la factorización LU como la de gauss son similares.
Ahora, utilizando la misma familia de parabrisas descripta anteriormente, veremos como se comportan ambos metodos de salvación. Dado que nos aseguramos que cada sanguijuela solo toque un punto de la discretización, nos aseguramos que podremos utilizar el metodo de Sherman Morrison. Para estos algoritmos, el grafico es el siguiente:



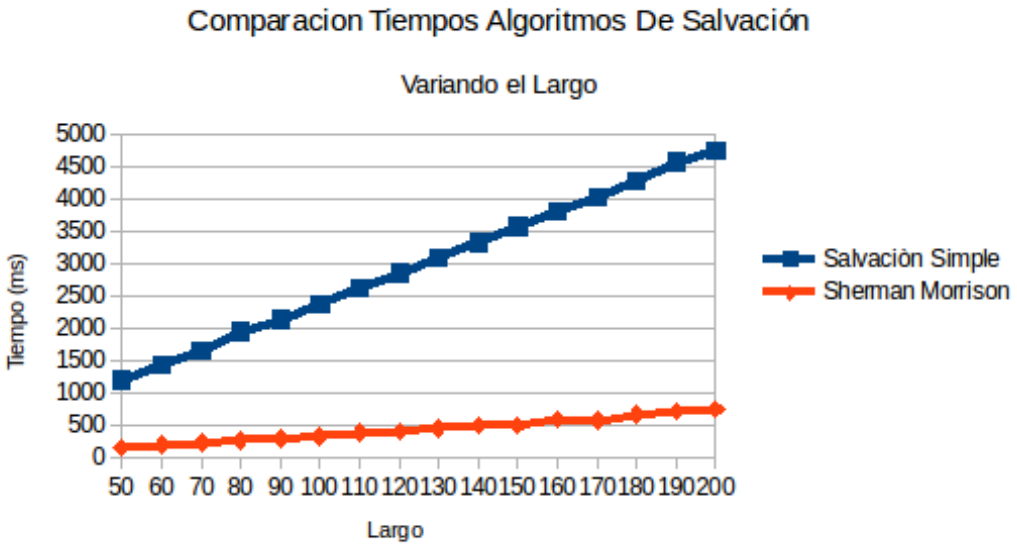
Como era de esperar, el algoritmo que utiliza la optimización de Sherman morrison es mucho mas rapido y escala mejor que la versión simple que debe calcular todo el sistema desde cero, ademas el Sherman Morrison realiza operaciones sobre vectores y escalares haciendo la diferencia ahi en comparacion con el otro metodo.

4.1.2. Largo en función del tiempo

Ahora, analizaremos que sucede dejando fijo el ancho y variando el largo del parabrisas. Las condiciones son las mismas que en el test anterior, solo que ahora el ancho permaence constante igual a 50 y se varía el largo de 50 a 100.



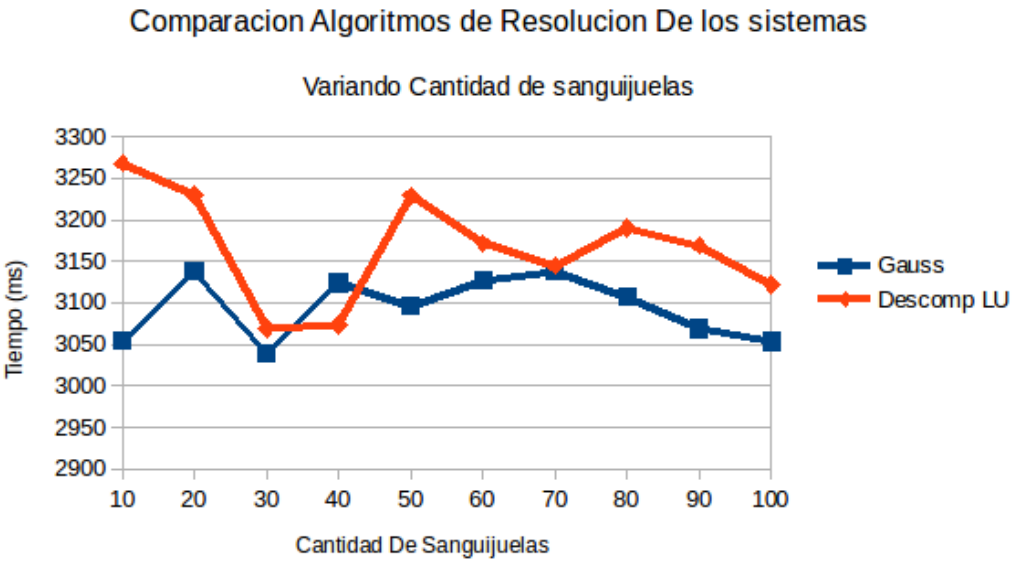
En este caso los tiempos de ejecución crecen de manera estrictamente lineal. Esto se debe que a diferencia del ancho, el largo no interviene en el calculo del tamaño de la banda de la matriz de resolución. Luego al aumentar el largo, solo aumenta la cantidad de incognitas n.
Y aplicando el mismo experimento para los dos metodos de salvación:



Al ignal que lo dicho en la seccion anterior, aqui tambien se puede ver las ventajas de utilizar sherman morrison. Ademas en este caso tambien puede apreciarse el comportamiento lineal del ambos algoritmos al variar el largo.

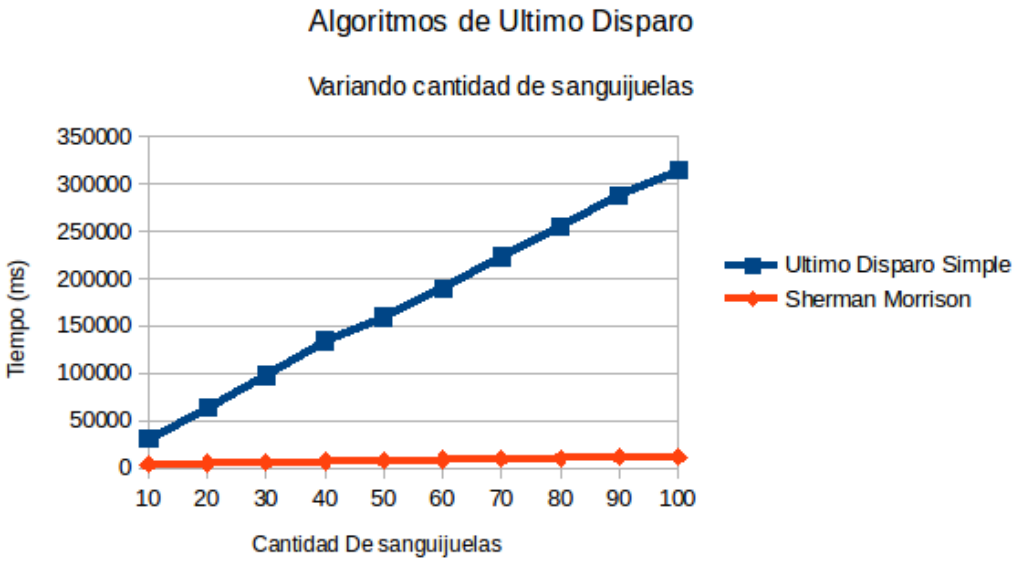
4.1.3. Cantidad de sanguijuelas en función del tiempo

Para el siguente experimento, variaremos la cantidad de sanguijuelas y dejaremos fija tanto la granularidad como el largo y el ancho del parabrisas. Nuevamente, por una cuestión de simplicidad las sanguijuelas solo tocarán un punto de la discretización. Para el experimento tomamos un parabrisas de 100×100, una granularidad igual a 1,0, y variamos la cantidad de sanguijuelas desde 10 hasta 100. Resolviendo el sistema con el algoritmo de Gauss y Descomposicion LU, se obtuvo el siguiente grafico.



Como vemos, no se muestra ningun patron visible al modificar la cantidad de sanguijuelas del sistema. Esto es porque la cantidad de incognitas continua siendo la misma.

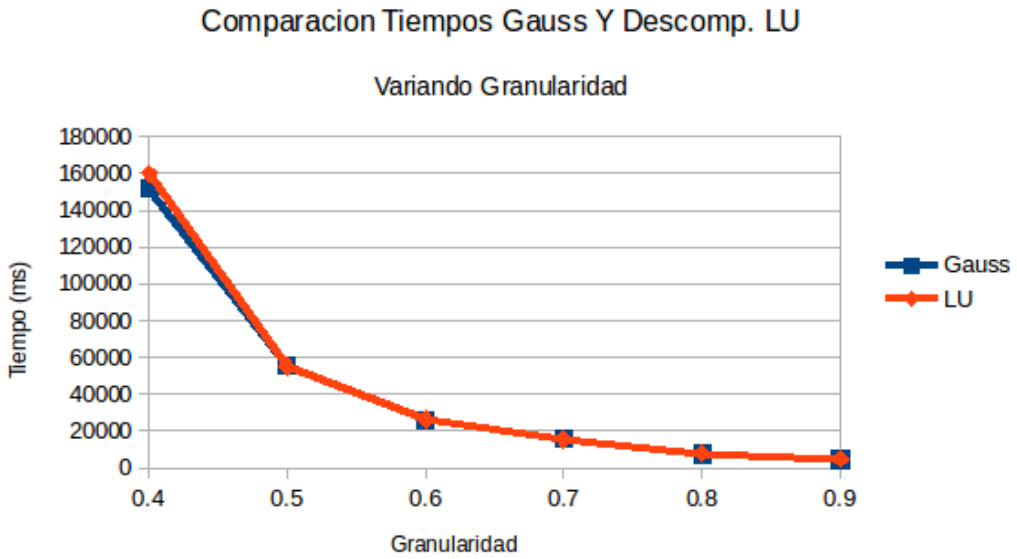
Ahora utilizando el mismo experimento para el problema del ultimo disparo, resolviendo este parabrisas con ambos algoritmos, se obtuvo este grafico:



En este grafico se puede apreciar como si bien ambos algoritmos dependen de manera lineal de la cantidad de sanguijuelas, el algoritmo de sherman morrison presenta una mejor velocidad y una mejor escalabilidad.

4.1.4. Granularidad en función del tiempo

Por ultimo, veremos como afecta variar la granularidad de la discretización para ver como se ve afectada la performance. Para este experimento se dejarán fijos el largo y el ancho, iguales a 100, la cantidad de sanguijuelas iguales a 5 y se variará la granularidad desde 0,4 hasta 0,9, aumentando de 0,1 en cada paso. Lo obtenido es lo siguiente:

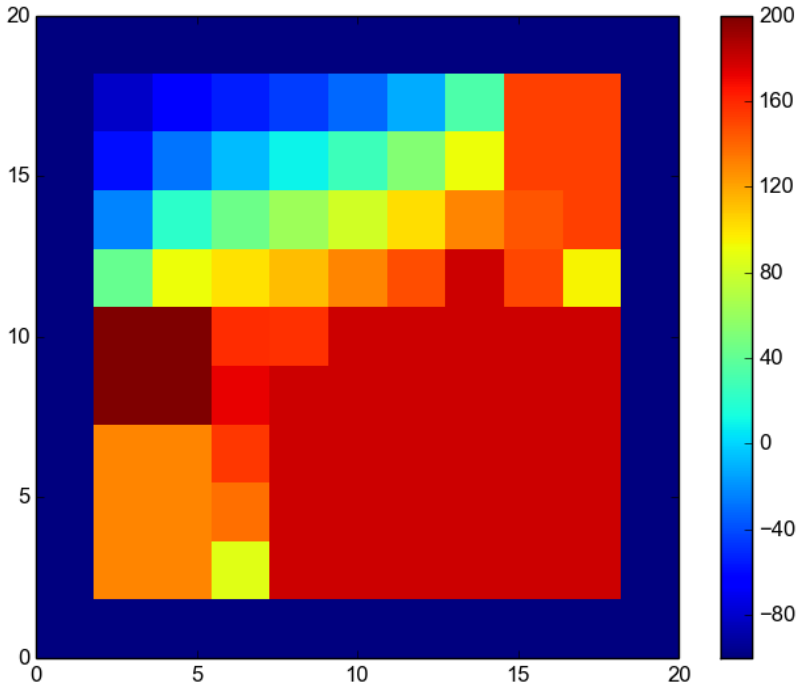


En el grafico puede verse que una disminucion lineal de la granularidad produce un aumento cuadratico en el tiempo de ejecución. Esto se debe a que tanto la cantidad de filas y la cantidad de columnas viene dado por el largo/ancho del paravrisas, dividido por la granularidad. Dado que el tamaño de nuestra matriz de resolución del probema viene dado por Cantidad De filas × Cantidad De Columnas esto será lo mismo que (Largo × Ancho)/granularidad^2. En esta formula puede verse claramente que disminuir la granularidad de manera lineal produce un aumento cuadratico en el numero de incognitas de nuestro problema.

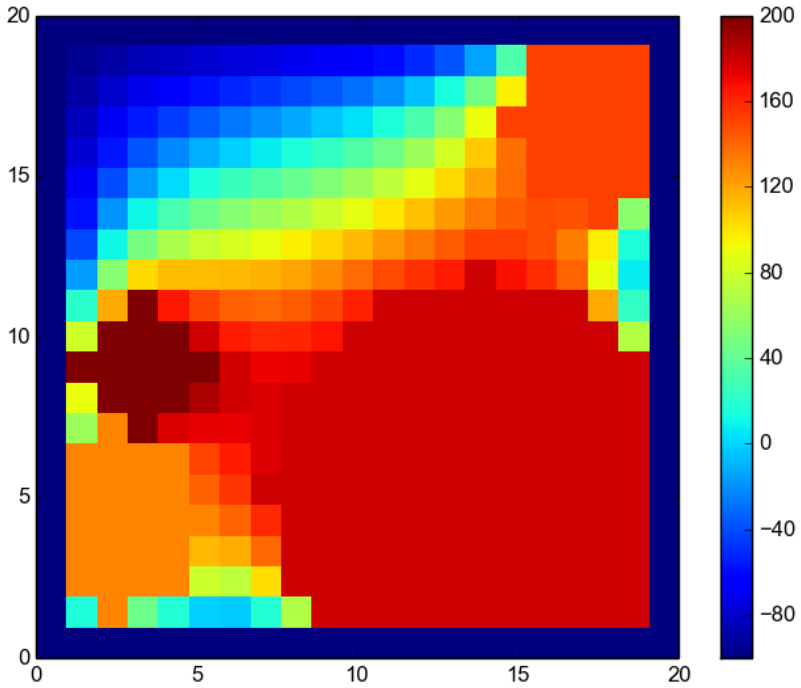
4.2. Análisis de temperatura función de las discretizaciones

Partiendo de la base de que un aumento en la granularidad permite una mejor representación de las sanguijuelas (son circulos), notamos que con este aumento y mejora en la representación, el problema discreto parece al menos perceptualmente para el ojo humano, volverse continuo. Teniendo en cuenta esta información, queda claro como una baja granularidad impacta directamente sobre la precisión de los resultados (a expensas, como vimos con anterioridad, de los tiempos de cómputo).
En el siguiente experimento, mostramos como varían los resultados al variar la granularidad:

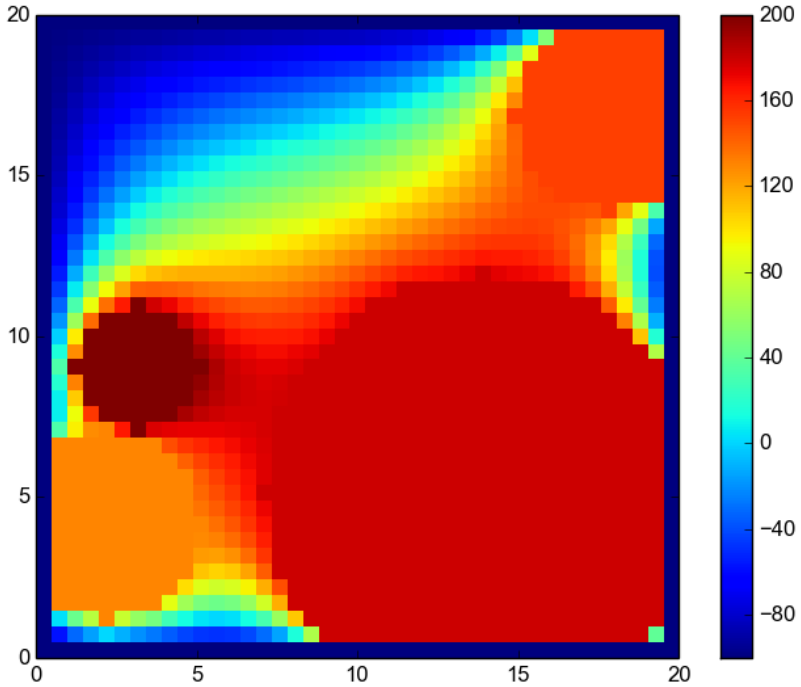
- Matriz 20 × 20, granularidad 2.



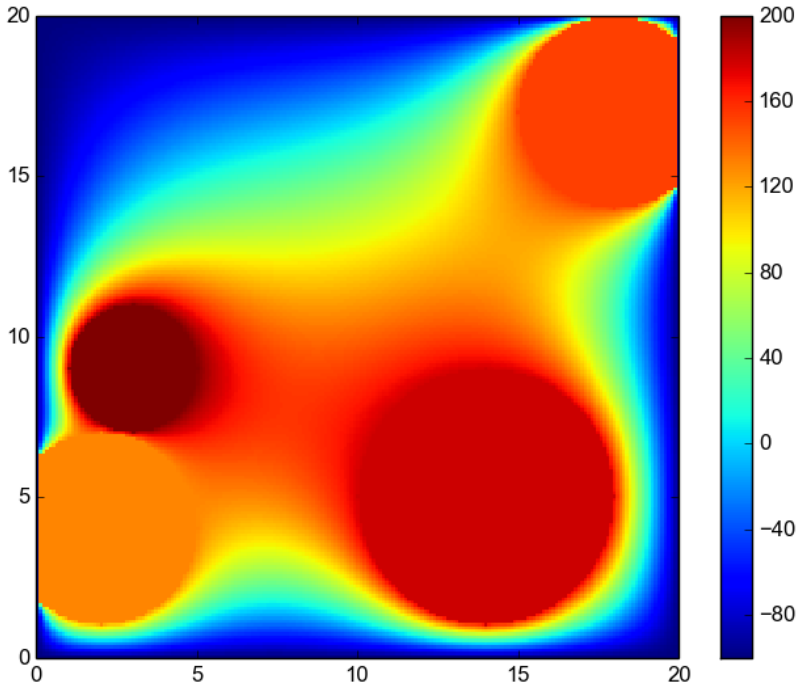
- Matriz 20 × 20, granularidad 1.



- Matriz 20×20, granularidad 0,5.



- Matriz 20×20, granularidad 0,1.



Puede notarse a simple vista que una granularidad mas pequeña produce resultados que aproximan mas exactamente a lo que uno creería es el resultado real de la ecuación diferencial de la que partimos en la introducción ya que para una granularidad de 2 pueden verse grandes bloques discretos, pero para la discretización de 0,1 puede verse que estos bloques desaparecen y puede notarse una sierta 'suavidad' en el resultado obtenido, propio de una función continua y derivable, esto puede verse en el grafico ya que el la tonalidad va oscureciendo hasta llegar a rojo generando circulos grandes, de ser chicos estariamos viendo un pico en la funcion y no seria derivable.
Ademas, a al disminuir la granularidad esta claro que la cantidad de incognitas cercanas al punto critico aumenta, por lo que, en caso de no poder tomarlo de manera exacta al menos podremos tomar un vecino muy proximo a este por lo que tenderíamos a pensar que la presición del resultado tambien aumentará por ese lado.

5. Conclusiones

5.1. Ventajas en el uso de una matriz banda

Como ya discutimos en el desarollo, pudimos plantear el problema a resolver como una matriz banda. Gracias a esto es que pudimos realocar los valores en un espacio físico muy por debajo de lo que la representación matricial de un caso general requiere, ahorrando memoria, ya que fue suficiente con almacenar los valores dentro de la banda, y ahorrando tiempo de computo, ya que como tambien discutimos en la seccion de desarrollo, nos limitamos a aplicar los algoritmos en la banda, obteniendo complegidades teoricas mas pequeñas que aquellas que se obtienen con el algoritmo estandar.

5.2. Discretización de un problema continuo

En el apartado de experimentación pudimos ver que tomando un valor de discretización muy grande, el problema, que comenzo siendo continuo, pasa a ser discreto, pudiendose ver a simple vista los bloques que fueron discretizados. A medida que la discretización se vuelve mas pequeña el problema empieza a tener un comportamiento mas continuo (aunque sea de manera perceptual, ya que la solución continuna siendo discreta), lo que sugiere que aumentar la discretización aumenta la presición de todo el sistema.

Sin embargo esto viene con un tradeoff que resulta que para una discretización mas pequeña, y por lo tanto exacta, el tiempo de computo aumenta sustancialmente. Luego a la hora de simular este problema deberá prestarse sumo cuidado a esta relación tiempo-presición dependiendo del problema en particular y el grado de confianza que se desea obtener.

5.3. Pérdida de precisión en el uso de aritmética de punto flotante

Así como la separación de los puntos del sistema queda, hasta cierto punto, a criterio de quien resuelve el problema, existe una gran limitación debido a la representación de los números de punto flotante en la computadora. Si bien C++ es independiente a la arquitectura, las arquitecturas modernas suelen utilizar el estandar IEEE754 para representar la recta numérica. Sabemos que realizando operaciones de punto flotante perdemos precisión, si bien esta puede ser calculada y acotada.
Entonces es así como la resolución del problema se ve afectado no solo por la reducción de un subespacio $\mathbb{R}2$ en un conjunto finito de puntos, sino también por la impresición propia de la computadora al realizar los cómputos.

5.4. Optimizaciones Algebraicas

Comparando ambos metodos de salvación del parabrisas pudimos ver como utilizar propiedades algebraicas y ordenar las operaciones de manera inteligente permite obtener tanto complejidades teoricas tanto como tiempos experimentales mejores. Mas se noto la diferencia en los tiempos para el Sherman Morisson ya que al realizar el producto de vectores de la manera correcta generamos menor cantidad de operaciones acelerando el calculo de los valores, por quedarnos con un producto de vector por escalar, cambiando el orden de los productos notamos que generamos una matriz haciendo que la cantidad de operaciones se multiplique.

Luego, podemos concluir que para poder resolver un problema de manera optima es importante valerse de las propiedades especificas de las matrices con las que se trabaja, así tambien como la teoría del algebra lineal.

5.5. Otras aplicaciones

Vemos como este tipo de problema donde el valor de cada elemento de un espacio en 2 dimensiones (o más) depende del valor de elementos cercanos puede aplicarse en diversas áreas, por ejemplo en el procesamiento de imágenes, donde el suavizado en el zoom de una imágen se puede realizar a través del promedio de los vecinos de cada pixel. También es de posible aplicación para la propagación de ondas en distintos medios. Es interesante ver también como algunas técnicas genéricas ayudan a la velocidad de cómputo y luego se pueden realizar optimizaciones dentro del dominio de cada sistema en particular, como fue en nuestro caso Sherman-Morrison para casos donde el sistema varía levemente.

6. Apendice