



**DEPARTAMENTO
DE COMPUTACION**

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Trabajo Práctico 1

“No creo que a él le gustará eso”

Metodos numericos
Primer Cuatrimestre de 2015

Integrante	LU	Correo electrónico
Gastón Zanitti	058/10	gzanitti@gmail.com
Ricardo Colombo	156/08	ricardogcolombo@gmail.com



Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (54 11) 4576-3359

<http://www.fcen.uba.ar>

Índice

1. Introducción teórica	3
1.1. Entrada y salida de los algoritmos	4
2. Desarrollo	5
2.1. Sistema a resolver	5
2.2. Matriz banda	5
2.3. Almacenamiento de la matriz banda	6
2.4. Eliminación gaussiana sobre matriz banda	6
2.5. Descomposición LU	7
2.6. No hay tiempo que perder	8
2.7. Implementación simple	8
2.8. Implementación Sherman-Morrison	8
3. Experimentación	10
3.1. Análisis de tiempos en función de los parámetros de entrada	10
3.1.1. Ancho en función del tiempo	10
3.1.2. Largo en función del tiempo	11
3.1.3. Cantidad de sanguijuelas en función del tiempo	12
3.1.4. Granularidad en función del tiempo	13
3.2. Análisis de temperatura en función de las discretizaciones	14
4. Discusión	21
4.1. Complejidades	21
4.2. Granularidad	21
5. Conclusiones	22
5.1. Ventajas en el uso de una matriz banda	22
5.2. Discretización de un problema continuo	22
5.3. Optimizaciones Algebraicas	22
5.4. Otras aplicaciones	22
6. Apéndice	23
6.1. Archivos de test usados	23

1. Introducción teórica

En este trabajo práctico intentaremos modelar y resolver el problema de una superficie a la que se le aplica calor en ciertos puntos, teniendo como condición además que los bordes permanecen a temperatura constante. Para modelar este problema utilizaremos la ecuación del calor:

$$\frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} = 0. \quad (1)$$

Con esta ecuación diferencial es posible calcular la temperatura en cualquier punto de la superficie. Sin embargo, dado que queremos resolver el sistema bajo un modelo que no sea continuo, será necesario discretizar la ecuación diferencial de algún modo adecuado. Para ello, discretizaremos esta superficie en segmentos discretos, intentando resolver el sistema obtenido utilizando distintos algoritmos. Parece intuitivo pensar que mientras más pequeños sean los segmentos, el sistema se aproximará más al sistema continuo, obteniendo así respuestas más próximas al mismo.

Expresando esto en un lenguaje más riguroso, dados a y b el ancho y el alto de nuestra superficie respectivamente, h la granularidad con la que discretizaremos y, valiendo que $a = m \times h$ y $b = n \times h$, obtendremos una grilla de $(n+1) \times (m+1)$ puntos (donde el punto $(0, 0)$ se corresponde con el extremo inferior izquierdo).

Llamemos $t_{ij} = T(x_j, y_i)$ al valor (desconocido) de la función T en el punto $(x_j, y_i) = (jh, ih)$. La aproximación finita (que es posible gracias a la discretización realizada sobre el sistema) afirma que

$$t_{ij} = \frac{t_{i-1,j} + t_{i+1,j} + t_{i,j-1} + t_{i,j+1}}{4}. \quad (2)$$

De esta forma es posible plantear un sistema en donde cada punto esté expresado en función de otros y así resolver todas las ecuaciones. Esto nos dará la temperatura en el punto crítico.

Aprovechando la discretización del sistema y que este es un problema lineal, lo modelaremos como un problema $Ax = b$ sobre el cual aplicaremos diversas técnicas para resolverlo, como Eliminación Gaussiana y Descomposición LU, que nos permitirán resolver las incógnitas de una manera más cómoda.

Dado que estamos discretizando un sistema continuo, puede ocurrir que el punto crítico (que está definido como el centro exacto de la superficie) puede ocurrir que no coincida con ningún punto de la discretización. En este caso, calcularemos un punto próximo a este que sí esté en la discretización y lo consideraremos el punto crítico. Nuestro razonamiento consta en pensar que para una granularidad apropiada este vecino es suficientemente cercano y se corresponde con el valor que debería coincidir con la discretización.

1.1. Entrada y salida de los algoritmos

Por una cuestión de simpleza, decidimos estandarizar la entrada y la salida de los programas que realizaremos. De esta manera, todos toman una instancia de un archivo de texto con el siguiente formato:

$$\begin{pmatrix} (a) & (b) & (h) & (d) \\ (x1) & (y1) & (r1) & (t1) \\ (x2) & (y2) & (r2) & (t2) \\ \dots & & & \\ (xk) & (yk) & (rk) & (tk) \end{pmatrix}$$

Donde a y b son el ancho y el largo del parabrisas, h el tamaño de la discretización y k la cantidad de sanguijuelas del sistema.

Las k líneas siguientes corresponden a cada una de las sanguijuelas, tal que para la sanguijuela i , x_i y_i es la posición de la misma, r_i es su radio y t_i su temperatura.

La salida de todos los algoritmos estará dada en un archivo que debe ser indicado por parámetro, donde por cada línea contendrá un indicador de la grilla i, j junto con el correspondiente valor de temperatura.

En el caso de los algoritmos de salvación (definidos más adelante), esta salida corresponde a la solución del problema habiendo quitado la sanguijuela que más reduce la temperatura en el punto crítico.

Además, se mostrará por pantalla la información conveniente de cada algoritmo ejecutado.

2. Desarrollo

2.1. Sistema a resolver

Una vez obtenida la discretización de nuestro sistema y las posiciones donde se aplicará calor, planteamos las ecuaciones que nos permitirán resolverlo. Consideremos r al radio de alcance de los puntos donde se aplica calor, T_c su temperatura y C_1, \dots, C_k los k puntos donde se aplica calor, con $C_i \in R^2$, $C_i = (x_i, y_i)$.

Sabemos que si $x = 0$ o $y = 0$ o $x = m$ o $y = n$ entonces la temperatura en ese punto será:

$$T(x, y) = -100$$

También que $\forall C_j$, $C_j = (x_j, y_j) / \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} \leq r$ la temperatura de ese punto será:

$$T(x, y) = T_c$$

Los puntos restantes, es decir todos los (x, y) que no cumplen ninguna de estas condiciones tendrán que ser calculados con la ecuación planteada previamente en la introducción.

En otras palabras lo que haremos será plantear $n \times m$ ecuaciones con $n \times m$ incógnitas. Cada una de estas ecuaciones representa un punto del parabrisas y cada uno de estos puntos vendrá definido de la siguiente manera:

Sea t_{ij} un punto de la grilla:

1. Si es parte del borde ($i = 0$ o $j = 0$ o $i = m$ o $i = n$) entonces su ecuación es $t_{ij} = -100$ por la temperatura por defecto que toma esta sección.
2. Si es un punto donde existe una sanguijuela, sea k la temperatura de la misma, entonces la ecuación será $t_{ij} = k$.
3. Si en cambio es un punto del interior del plano que no se corresponde con la posición de ninguna sanguijuela, su ecuación será, como mencionamos con anterioridad,

$$t_{ij} = \frac{t_{i-1,j} + t_{i+1,j} + t_{i,j-1} + t_{i,j+1}}{4}. \quad (3)$$

Con esta noción espacial, asumiendo cada punto está condicionado tan solo por sus 4 vecinos, ahora se presenta el objetivo encontrar una manera de almacenar la matriz que sea conveniente y nos permita reducir el espacio en la matriz y el número de operaciones a realizar. En el siguiente apartado describiremos como ordenando las variables de manera inteligente, podremos guardar las incógnitas en una matriz banda.

2.2. Matriz banda

Por lo antedicho, sabemos que todo punto interno del parabrisas puede ser calculado en base a sus cuatro vecinos. Esto es, cualquier punto puede ser calculado en base al punto que se encuentra arriba de el, al punto que se encuentra debajo, al punto a la izquierda y a la derecha del mismo. Si logramos mantener en la matriz de resolución del sistema esos 4 puntos cercanos a la diagonal, podemos utilizar una matriz banda.

Ahora supongamos que tenemos un pequeño sistema parabrisas de 3×3 que queremos resolver. Lo que descubrimos tras un arduo análisis es que si ordenamos cada punto tal que la primera ecuación es para el punto $t_{1,1}$, la segunda para $t_{1,2}$, la tercera para $t_{1,3}$, la cuarta para $t_{2,1}$, etc. se forma una matriz con el siguiente contenido:

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots &
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
x_{0,0} \\
x_{0,1} \\
x_{0,2} \\
x_{0,3} \\
x_{0,4} \\
x_{1,0} \\
x_{1,1} \\
x_{1,2} \\
x_{1,3} \\
\vdots
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
-100 \\
-100 \\
-100 \\
-100 \\
-100 \\
-100 \\
0 \\
0 \\
0 \\
\vdots
\end{pmatrix}$$

Donde todo $x_{i,j}$ con i o j igual a 0 ó 4 es uno de los bordes del parabrisas. Entonces la matriz resultante queda banda, con el tamaño de la banda igual a una columna del parabrisas más las dos columnas que representan los bordes (en este caso las columnas 0 y 4).

2.3. Almacenamiento de la matriz banda

Debido a la representación matricial definida previamente donde logramos concentrar los elementos no nulos cerca en la diagonal, pudimos representar esta matriz de $(nxm)x(nxm)$ usando otra estructura de $nx(2m+1)$ elementos, sabiendo que más allá de la banda diagonal de pxq elementos, el resto de la matriz se completa con 0. Esto nos permitirá reducir tanto la complejidad espacial como la complejidad temporal de los algoritmos.

El comportamiento de la matriz banda fue encapsulado en una clase para que fuera más fácil de utilizar y transparente tanto para el usuario como para las clases que utilizan esta matriz para setear u obtener sus elementos, sin que este necesite conocer la manera exacta en la que se almacenan los valores internamente.

2.4. Eliminación gaussiana sobre matriz banda

Como primer forma de resolver el sistema de ecuaciones, se implementó el algoritmo de Eliminación Gaussiana sobre el que se realizaron algunas mejoras. La idea general del algoritmo se mantiene. En el paso k se realiza la diagonalización de la columna k de la matriz A y todos los elementos en la columna k -ésima a partir del $a_{k,k}$ pasan a tener valor 0.

La mejora implementada consta en que, sabiendo que la matriz A es banda, a partir del elemento $a_{k+p,k}$ (donde p es el límite de la banda) los siguientes serán 0 y a partir del elemento $a_{k,k+p}$ también serán 0.

Luego, para la columna k no será necesario chequear hasta el final de la matriz, sino hasta el valor $k+p$.

Lo mismo pasa con las filas. En el Gauss estándar, luego de diagonalizar una columna, todos los elementos de esa fila deben ser actualizados. Pero al trabajar con una matriz banda, solo es necesario actualizar los p valores que siguen a la diagonal, ya que tenemos asegurado que todos los valores siguientes son 0.

Expresando de manera más formal, el algoritmo es el siguiente:

Este algoritmo posee una mejor complejidad comparado con el Gauss estándar, siendo la misma de $O(n * p^2)$ con n la cantidad de incógnitas de nuestra matriz, y p el tamaño de la banda.

Una vez concluido el proceso de eliminación gaussiana sobre la matriz banda, utilizamos backward substitution para resolver las ecuaciones y conseguir así el valor de cada uno de los puntos de calor

TP1 1 void Gauss(matriz A, vector b)

- 1: Para $k=1\dots n$
 - 2: Tomo el elemento $a_{k,k}$ como pivot
 - 3: Para $i = k + 1, \dots k + p$
 - 4: Para $j = k + 1, \dots i + p$
 - 5: $a_{i,j} = a_{i,j} - a_{k,j} * (a_{i,k}/a_{k,k})$
 - 6: $a_{i,k} = 0$
-

del plano discretizado. Aquí también es posible realizar una optimización, ya que en cada paso no es necesario avanzar hasta la ultima columna sino hasta la columna donde sabemos que comienza la banda. De esta manera tambien es posible disminuir la complejidad del backward substitution de $O(n^2)$ a una menor de $O(n * p)$.

Luego la resolución de este sistema tendrá una complejidad temporal de $O(n * p^2)$.

2.5. Descomposición LU

La segunda forma que desarrollamos para resolver el problema es realizando una descomposición LU sobre matriz original.

Dado que la descomposición LU es muy similar al algoritmo de eliminación gaussiana, este también puede ser optimizado para ser utilizado en una matriz banda. Las optimizaciones serán similares a las de la eliminación gaussiana. Expresado de manera algorítmica, la descomposición *LU* optimizada será así:

TP1 2 void Gauss(matriz A, vector b)

- 1: Inicializo una matriz L con unos en la diagonal
 - 2: Para $k=1\dots n$
 - 3: Tomo el elemento $a_{k,k}$ como pivote
 - 4: Para $i = k + 1, \dots k + p$
 - 5: Para $w = k + 1, \dots i + p$
 - 6: $a_{i,j} = a_{i,j} - a_{k,j} * (a_{i,k}/a_{k,k})$
 - 7: $a_{i,k} = 0$
 - 8: $L_{i,k} = a_{k,j} * (a_{i,k}/a_{k,k})$
-

Luego en la matriz A obtener la matriz diagonal superior y en el L la diagonal inferior que, como puede verse fácilmente, también son banda ya que los valores fuera de la banda nunca son modificados. Puede verse que siendo el algoritmo muy similar al de eliminación gaussiana, también posee la misma complejidad, esto es $O(n * p^2)$.

Como ya habíamos dicho, el backward substitution para la matriz banda tiene una complejidad de $O(n * p)$ y de manera similar el forward substitution tiene la misma complejidad.

Luego la complejidad de este método también será de $O(n * p^2)$. La ventaja de este método con respecto al anterior es que en caso de actualizar el vector b , el costo de volver a obtener los resultados se reduce en $O(n * p)$, ya que solo es necesario realizar un backward substitution y un forward substitution. Esta ventaja será muy útil más adelante, cuando queramos invertir una matriz de manera barata para poder utilizar el algoritmo de Sherman Morrison.

2.6. No hay tiempo que perder

En esta sección del trabajo, buscaremos la posibilidad de disminuir la temperatura del punto crítico a través de la eliminación de una sanguijuela. Dado que esto afecta el sistema de ecuaciones, en primera instancia será necesario recalcular el sistema completo otra vez, lo que podría resultar muy costoso. Plantear otra vez las ecuaciones, ahora con esta variación, y volver a calcular las incógnitas mediante el algoritmo de eliminación gaussiana tomaría otra vez complejidad $O(n * p^2)$. Teniendo en cuenta que es necesario calcular el sistema completo y luego una vez eliminando cada una de las sanguijuelas pegadas al parabrisas para saber si existe la posibilidad de salvarlo, hace que esta opción no sea la más adecuada, sobre todo en aquellos problemas donde el parabrisas presenta una gran cantidad de sanguijuelas.

Para esto, entonces, hacemos uso de una variación de la fórmula de Sherman–Morrison, evitando replantear todo el sistema desde cero, permitiendo reutilizar información de la ejecución con todas las sanguijuelas y disminuyendo la complejidad a una más adecuada.

Comencemos definiendo de manera más adecuada la implementación más simple.

2.7. Implementación simple

Como ya hemos adelantado, la idea detrás de este algoritmo es la de quitar una sanguijuela del sistema, aplicarle eliminación Gaussiana a la matriz obtenida y utilizar backward substitution para obtener la solución deseada.

Utilizando pseudocódigo, el procedimiento puede expresarse de la siguiente manera:

TP1 3 void Ultimo_disparo()

- 1: Para cada sanguijuela
 - 2: La quito de la matriz A
 - 3: Quito su b en 0
 - 4: Aplico *Gauss*(A, b)
 - 5: Aplico *Backwards_substitution*(A, b)
 - 6: Restablecer los valores originales en la matriz A y paso a la siguiente
-

Luego, siendo la cantidad de sanguijuelas w , el tamaño de la matriz de resolución n y el tamaño de la banda p . La complejidad de este algoritmo será $O(w * ((n * p^2) + (n * p)))$ que es lo mismo que $O(w * (n * p^2))$

Ahora intentaremos mejorar esta complejidad a través de la utilización de la fórmula de Sherman–Morrison.

2.8. Implementación Sherman–Morrison

Sean A la matriz original del problema y A^* la matriz modificada sin una de sus sanguijuelas, queremos resolver $A^*x = b$ donde uv^t representa la matriz que introduce los cambios debido a la modificación del sistema. Sea entonces $(A^*)x = b$. Resolvemos las siguientes ecuaciones, $Ay = b$ y $Az = u$ y obtenemos la nueva x a partir del siguiente cálculo:

$$x = y - \frac{z(v^t y)}{1 + v^t z}. \quad (4)$$

Así entonces, podemos obtener los resultados a partir de multiplicaciones vectoriales de complejidad lineal y evitamos volver a usar el algoritmo de eliminación gaussiana de complejidad cúbica.

Formalizando el algoritmo:

TP1 4 void Ultimo_disparo_Sherman_Morrison()

- 1: Realizo la descomposición LU de A
 - 2: Para cada sanguijuela
 - 3: Modifico el valor de b en el lugar de la sanguijuela
 - 4: Calculo x de la manera vista arriba
 - 5: Restablezco los valores originales en b y paso a la siguiente sanguijuela
-

Este algoritmo tendrá la siguiente complejidad:

1. Descomposición LU: $O(np^2)$
2. Luego para cada sanguijuela:
 - a) Modifico el valor de b en el lugar de la sanguijuela: $O(1)$
 - b) Calculo x utilizando el procedimiento mencionado anteriormente: $O(n * p)$
 - c) Restablezco los valores originales en b: $O(1)$

Luego esto da una complejidad de $O(np^2 + wnp)$

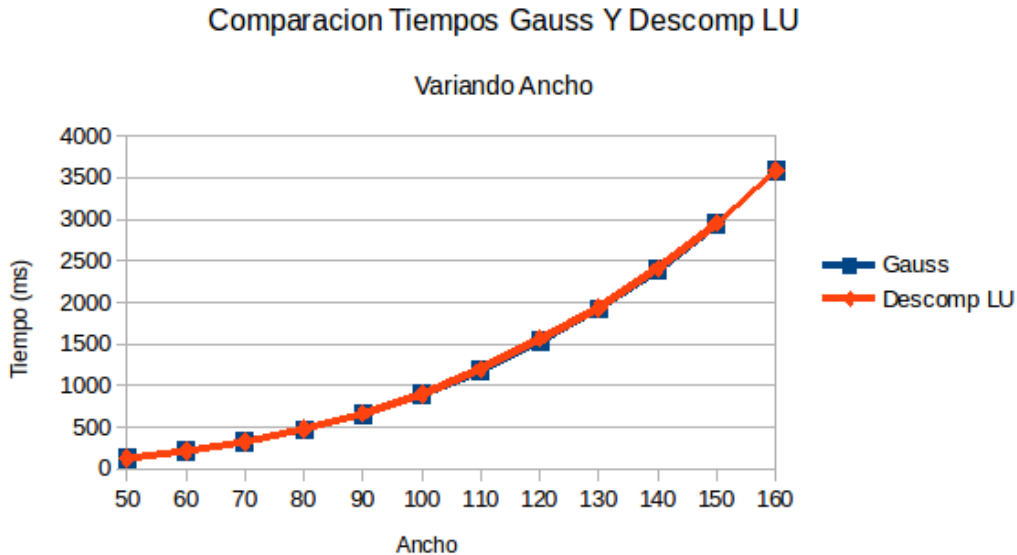
3. Experimentación

3.1. Análisis de tiempos en función de los parámetros de entrada

En esta sección analizaremos de manera experimental como varían los tiempos de ejecución de los algoritmos descriptos al variar el largo y el ancho de la matriz y la cantidad de sanguijuelas del sistema.

3.1.1. Ancho en función del tiempo

Para comenzar, tomaremos un parabrisas con 50 sanguijuelas tal que estas solo afectan un punto de la discretización, y para una granularidad fija de 1,0 iremos variando el largo del parabrisas. De esta manera, comenzaremos con un parabrisas de 50×50 luego uno de 60×50 y así aumentando de manera lineal ambos parámetros hasta llegar a un parabrisas de 100×50 . Resolveremos cada uno de estos sistemas utilizando ambos métodos implementados (Gauss y Descomposición LU). Los resultados obtenidos pueden verse en el siguiente gráfico:

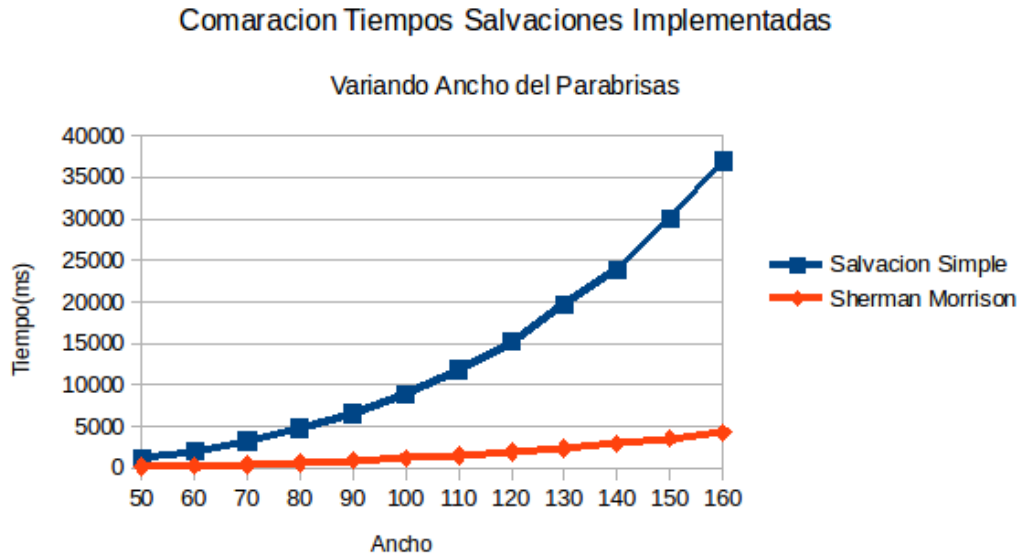


Sabemos que al aumentar el largo del parabrisas de manera lineal, aumentará también de manera lineal el número de ecuaciones en nuestra matriz de resolución. Lo que puede observarse en este gráfico es que con un aumento lineal del largo del parabrisas, el tiempo de ejecución aumenta de manera semi-lineal. Esto era esperable ya que sabemos que tanto la Eliminación Gaussiana como la Descomposición LU tienen una complejidad igual a $O(n * p^2)$, y dado que en nuestro modelo utilizamos el largo del parabrisas para definir el tamaño de la banda en la matriz de resolución (es decir p), resulta lógico que al aumentar el largo, se obtuviera un aumento casi cuadrático en el tiempo de ejecución.

Además, en este gráfico se pueden observar que tanto los tiempos de la factorización LU como la de Eliminación GAussiana son similares.

Ahora, utilizando la misma familia de parabrisas descrita anteriormente, veremos cómo se comportan ambos métodos de salvación.

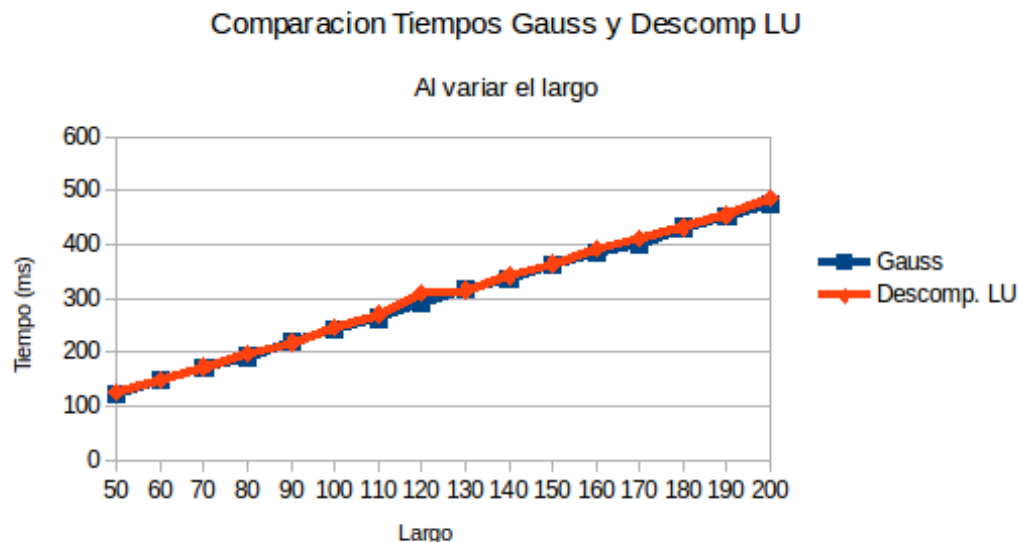
Dado que nos aseguramos que cada sanguijuela solo toque un punto de la discretización, nos aseguramos que para cada una de las sanguijuelas podremos utilizar el método de Sherman-Morrison. Para estos algoritmos, el gráfico es el siguiente:



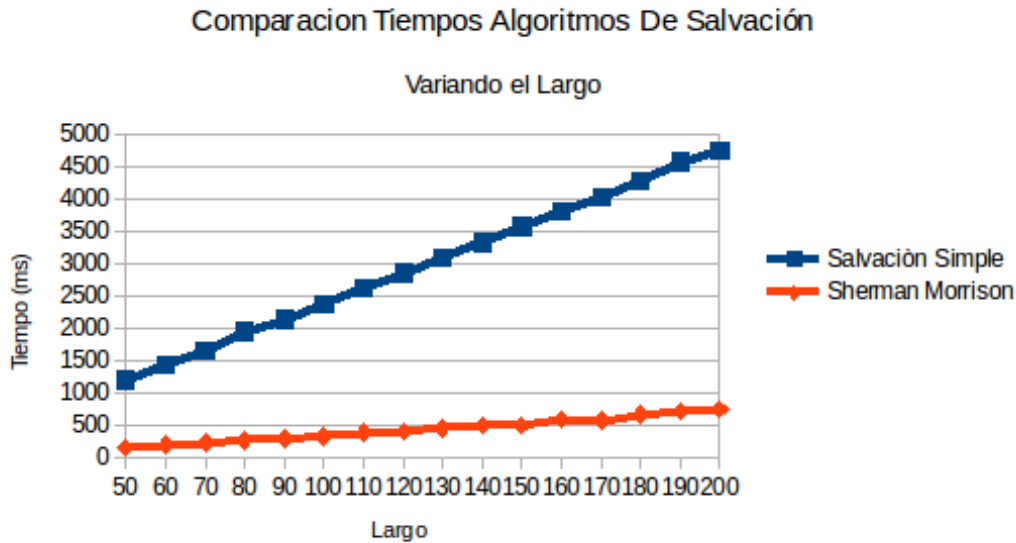
Como era de esperar, el algoritmo que utiliza la optimización de Sherman-Morrison es mucho más rápido y escala mejor que la versión simple que debe calcular todo el sistema desde cero, además el Sherman-Morrison realiza operaciones sobre vectores y escalares haciendo la diferencia en el modo de comparación respecto al método anterior.

3.1.2. Largo en función del tiempo

Ahora analizaremos que sucede dejando fijo el ancho y variando el largo del parabrisas. Las condiciones son las mismas que en el test anterior, solo que ahora el ancho permanece constante igual a 50 y se varía el largo de 50 a 100.



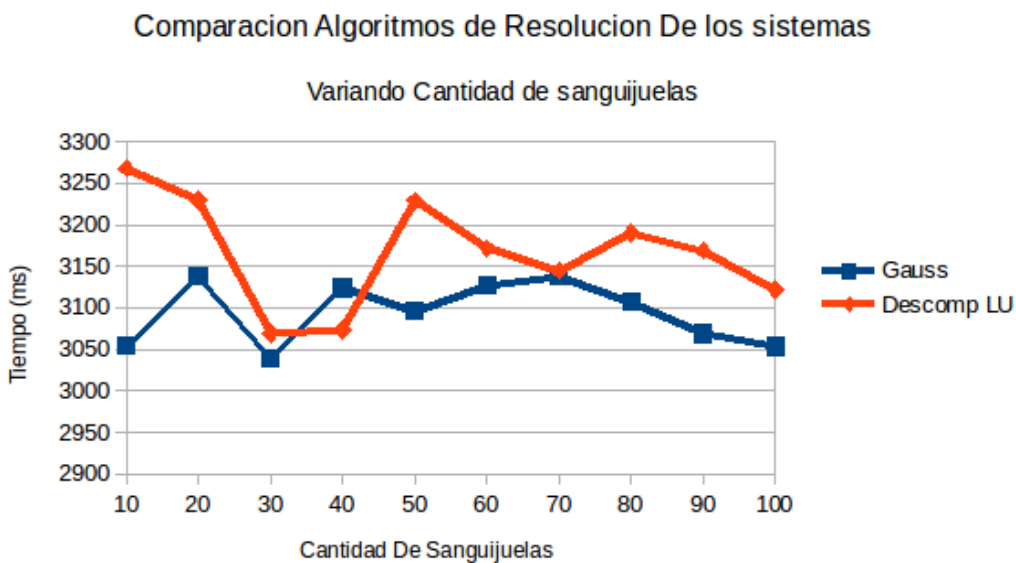
En este caso los tiempos de ejecución crecen de manera estrictamente lineal. Esto se debe que a diferencia del ancho, el largo no interviene en el cálculo del tamaño de la banda de la matriz de resolución. Luego, al aumentar el largo, solo aumenta la cantidad de incógnitas n . Aplicando el mismo experimento para los dos métodos de salvación:



Al igual que lo dicho en la sección anterior, aquí también se pueden ver las ventajas de utilizar Sherman-Morrison. Además en este caso también puede apreciarse el comportamiento lineal de ambos algoritmos al variar el largo del sistema.

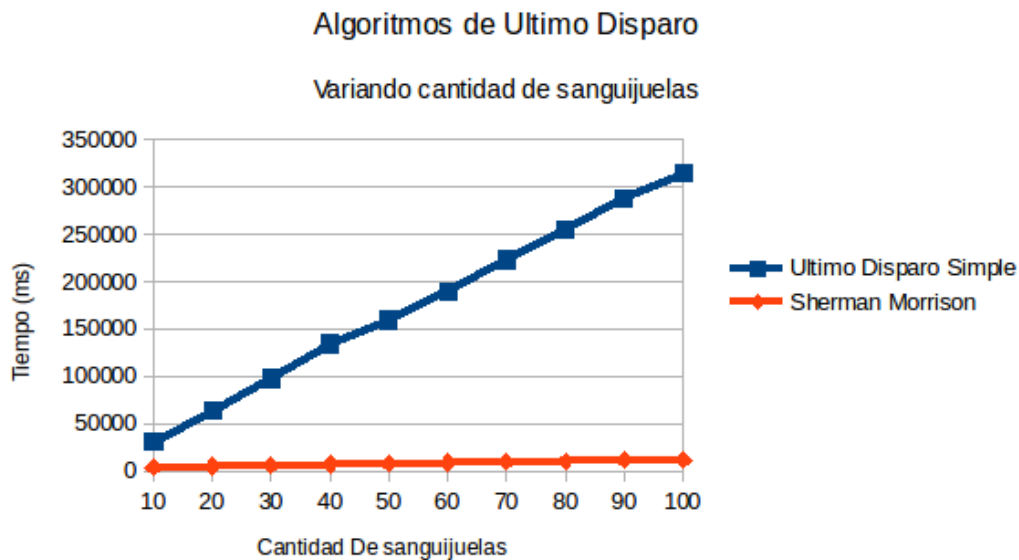
3.1.3. Cantidad de sanguijuelas en función del tiempo

Para el siguiente experimento, variamos la cantidad de sanguijuelas y dejamos fija tanto la granularidad como el largo y el ancho del parabrisas. Nuevamente, por una cuestión de simplicidad, las sanguijuelas solo afectan un punto de la discretización. Para el experimento tomamos un parabrisas de 100×100 , una granularidad igual a 1,0, y variamos la cantidad de sanguijuelas desde 10 hasta 100. Resolviendo el sistema con el algoritmo de Gauss y Descomposición LU, se obtuvo el siguiente grafico.



Como vemos, no se muestra ningún patrón visible al modificar la cantidad de sanguijuelas del sistema. Esto se debe a que la cantidad de incógnitas continúa siendo la misma.

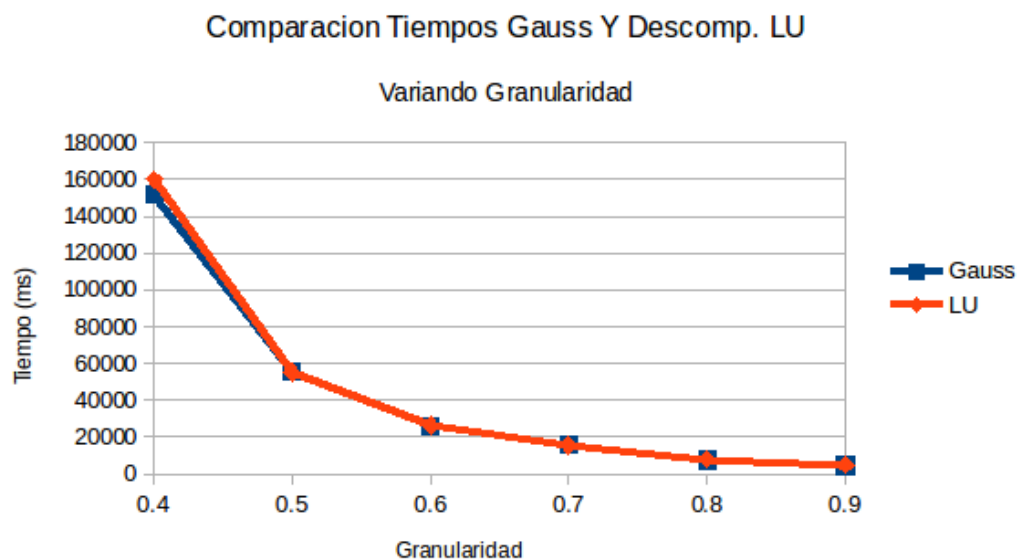
Ahora, utilizando el mismo experimento para el problema del último disparo, resolviendo este parabras con ambos algoritmos, se obtuvo este gráfico:



En este gráfico se puede apreciar cómo si bien ambos algoritmos dependen de manera lineal de la cantidad de sanguijuelas, el algoritmo de Sherman-Morrison presenta una mejor velocidad y una mejor escalabilidad.

3.1.4. Granularidad en función del tiempo

Por último, veremos como afecta variar la granularidad de la discretización para ver como se ve afectada la performance. Para este experimento se dejan fijos el largo y el ancho, iguales a 100, la cantidad de sanguijuelas iguales a 5 y se varía la granularidad desde 0,4 hasta 0,9, aumentando de 0,1 en cada paso. Se obtiene lo siguiente:



En el gráfico puede observarse que una disminución lineal de la granularidad produce un aumento cuadrático en el tiempo de ejecución. Esto se debe a que tanto la cantidad de filas y la cantidad de columnas viene dado por el largo/ancho del parabrisas, dividido por granularidad. Dado que el tamaño de nuestra matriz de resolución del problema viene dado por Cantidad De filas \times Cantidad De Columnas esto será lo mismo que $(\text{Largo} \times \text{Ancho})/\text{granularidad}^2$. En esta fórmula puede verse claramente que disminuir la granularidad de manera lineal produce un aumento cuadrático en el número de incógnitas de nuestro problema.

3.2. Análisis de temperatura en función de las discretizaciones

El siguiente analisis que vamos a realizar sobre una instancia de 100 de largo por 100 de ancho con una sola sanguijuela en el punto (4545) de radio 1 con el fin de observar como afecta la granularidad al resultado del sistema y al punto crítico.

Lo que esperamos observar es que para una granularidad mayor, el resultado posea un mayor grado de error, disminuyendo la precisión de la solución mientras que para granularidades menores el resultado se aproxime más al modelo continuo.

Para ello tomamos 4 diferentes granularidades: 10, 5, 1, y 0,5.

En el caso de una granularidad de 10 la sanguijuela no podrá ser representada en ninguna de las ecuaciones del sistema, ya que no esta en contacto con ninguno de los puntos de la discretización. En este caso la respuesta arrojada por el algoritmo es la siguiente:

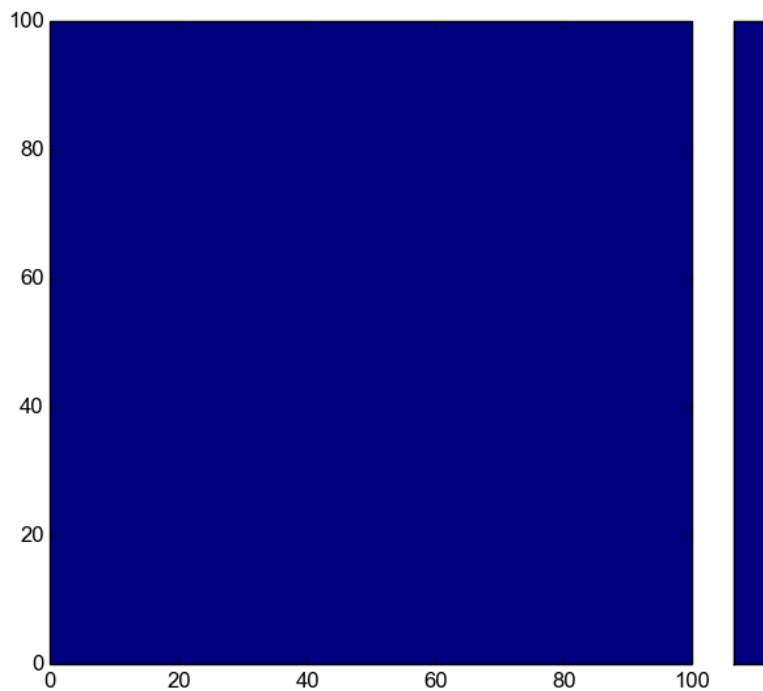


Figura 1: ejecucion de 1sanguijuela10.in

Lo que intuitivamente sabemos es que no es correcto, ya que explícitamente agregamos una sanguijuela con una temperatura muy considerable. Sin embargo la temperatura del punto critico que el sistema calcula es de -100 , por lo que uno esperaría encontrar en un sistema sin sanguijuelas.

Para la granularidad de 5 ya es posible caracterizar a la sanguijuela en una de las ecuaciones, por lo que el gráfico obtenido será el siguiente:

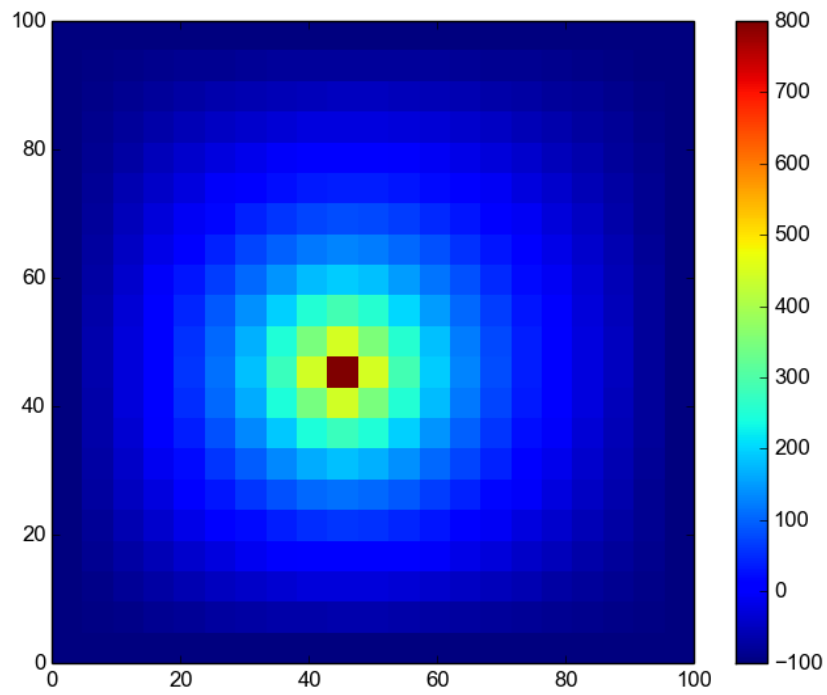


Figura 2: ejecución de lsanguijuela5.in

De esta manera podemos intuir que la respuesta es más próxima a la verdadera, ahora la temperatura del punto crítico es de 256,124.

Continuamos disminuyendo la granularidad, ahora con granularidad 1 se obtiene la siguiente respuesta:

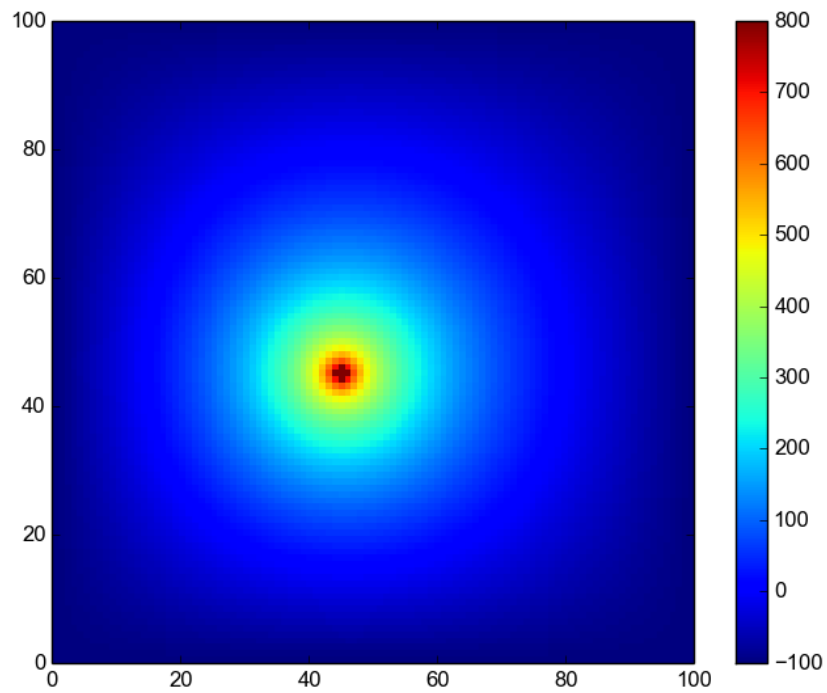


Figura 3: ejecución de lsanguijuela1.in

Para esta respuesta ya pareciera que los resultados son más precisos, ya puede observarse cierta continuidad en la solución. Además otro hecho destacable es que la temperatura del punto crítico ahora es 333,008, esto es un 30 % mayor que para la granularidad anterior. Por último realizamos el mismo sistema pero para una granularidad de 0.1 obteniendo el siguiente gráfico:

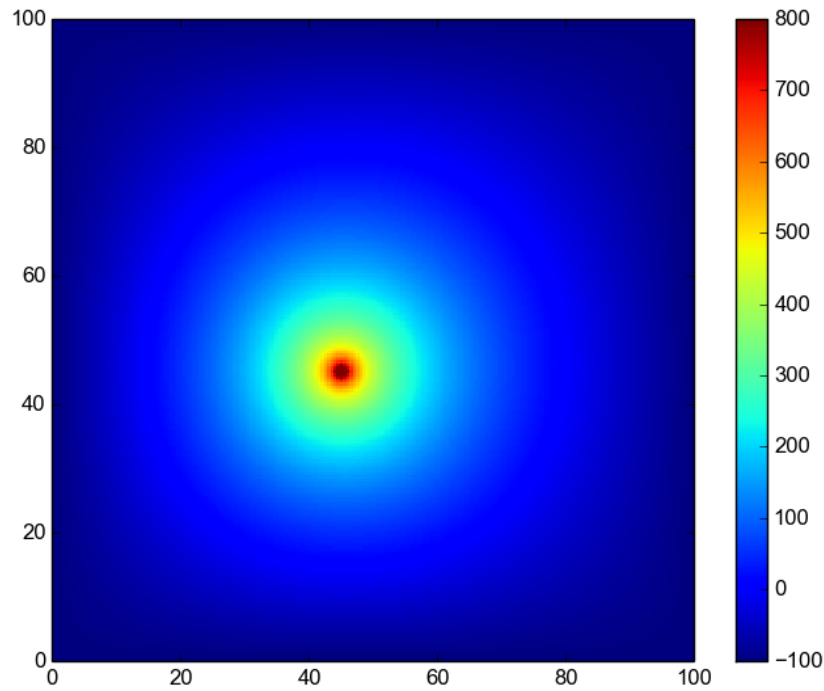


Figura 4: ejecución de lsanguijuela0.5.in

Ahora ya es posible ver claramente la 'continuidad' de la solución. La temperatura del punto crítico es 335.65, osea un 0,7 % mayor con respecto a la solución anterior.

Puede notarse a simple vista que una granularidad más pequeña produce resultados que aproximan más exactamente a lo que uno creería es el resultado real de la ecuación diferencial de la que partimos en la introducción, ya que para una granularidad de 5 pueden verse grandes bloques discretos, pero para la discretización de 0,1 puede verse que estos bloques desaparecen y puede notarse una cierta 'suavidad' en el resultado obtenido, propio de una función continua y derivable. Esto puede verse en el gráfico ya que la tonalidad va oscureciendo hasta llegar a rojo generando un círculo grande, de ser chico estaríamos viendo un pico en la función y no sería derivable.

Además, al disminuir la granularidad, está claro que la cantidad de incógnitas cercanas al punto crítico aumenta, por lo que, en caso de no poder tomarlo de manera exacta, al menos podremos tomar un vecino muy próximo a este por lo que tendemos a pensar que la precisión del resultado también aumentará por ese lado. Por último creamos 3 instancias del problema para ejecutarlas con dos granularidades distintas, uno y cuatro, para poder comparar mejor que pasaba con el punto crítico decidimos hacerlas de distintas medidas y sanguijuelas distribuidas de distinta forma para poder observar que ocurría. Para el primer test, lo que se realizó fue una matriz cuadrada con 5 sanguijuelas las cuales estaban concentradas en la esquina izquierda inferior y otra en la esquina derecha superior, luego de correr Sherman-Morrison quitó la de la derecha superior que era la que tenía mayor temperatura y arrojó los siguientes gráficos de calor.

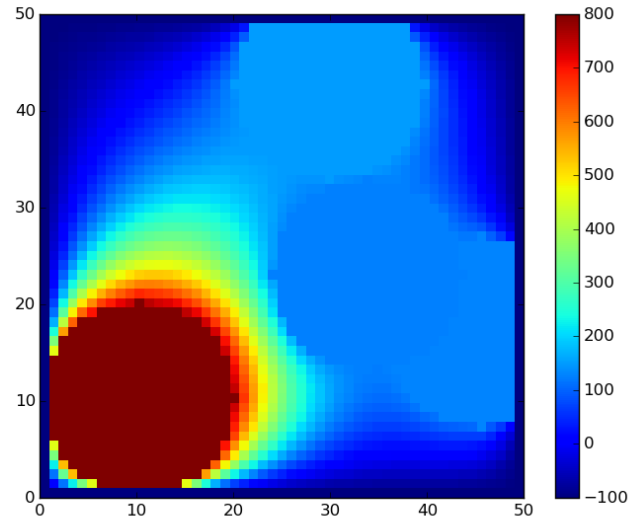


Figura 5: ejecución test1.in

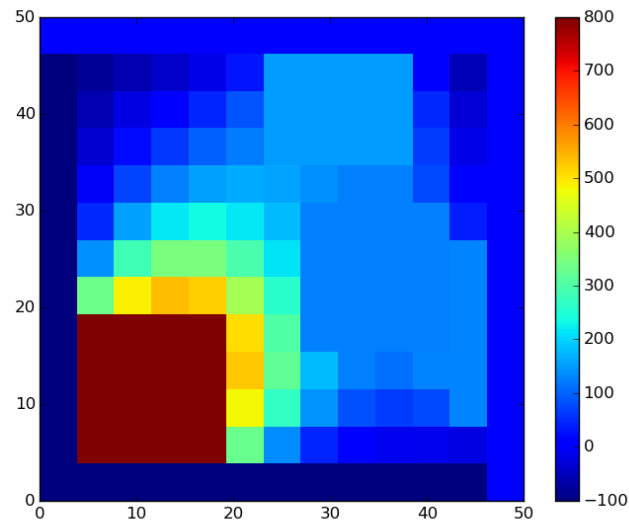


Figura 6: ejecución con granularidad 4, archivo test1b.in

Como se puede ver en este caso, y como mencionamos anteriormente a pesar de que las sanguijuelas estan en la esquina izquierda inferior el punto crítico se ve más afectado cuando la granularidad es mayor, dándonos en este caso una respuesta que no es correcta para el punto crítico ya que la imagen con menor granularidad en el punto crítico tiene menor temperatura, sabiendo que este último tiene menor precisión.

Para el segundo se agranda el parabrisas y se agregan sanguijuelas, corremos el mismo test para los mismo valores de granularidad, uno y cuatro y obtuvimos el siguiente resultado.

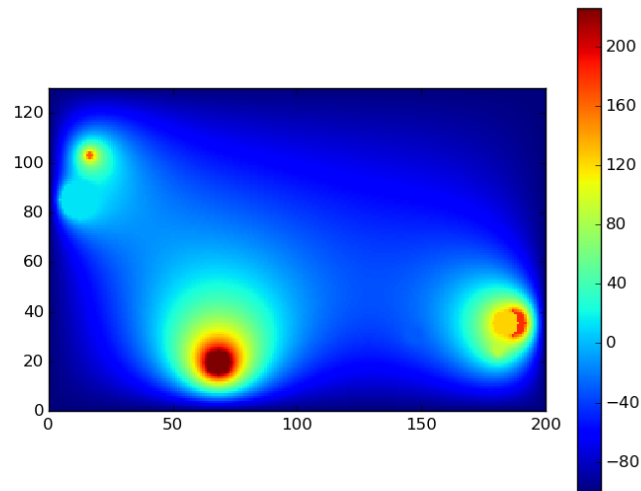


Figura 7: ejecución test2.in

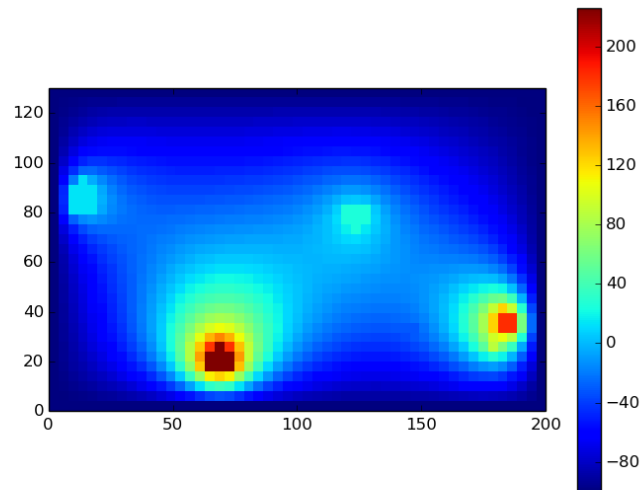


Figura 8: ejecución test2b.in

A pesar que las sanguijuelas estan más repartidas volvemos a notar lo mismo que se veía en el primer test, a mayor granularidad mayor afectado se ve el punto crítico, a pesar que las sanguijuelas estan más alejadas.

Por último alargamos más el parabrisas y corrimos el test para ver que era lo que sucedía, aunque como se comportaron los casos anteriores se espera que se repita el patrón, que cuanto mas granularidad más afectado se vea el punto crítico.

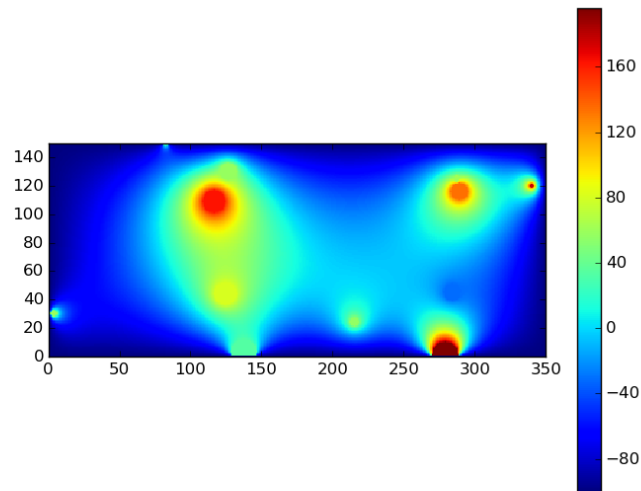


Figura 9: ejecución test3.in

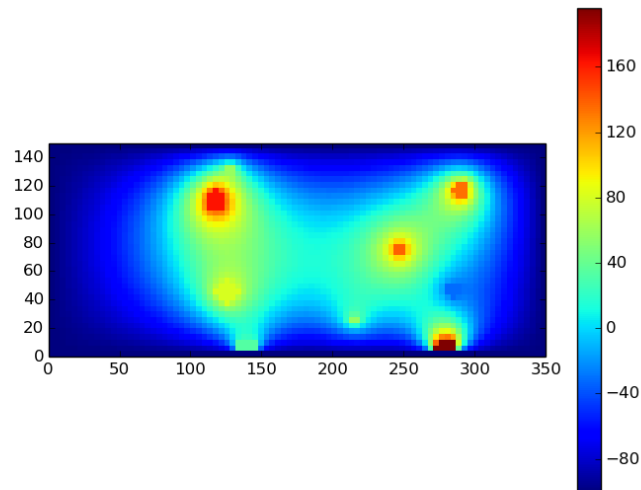


Figura 10: ejecución test3b.in

Luego de realizar los tres test y notar que se repite el patron, de forma más particular en el ultimo caso ya que las sanguijuelas afectan las temperaturas haciendo que aumente la temperatura entre medio de ellas afectando el punto crítico. Con lo cual podemos asegurar que mediante la granularidad sea más grande la precisión va a ser menor y el punto crítico va a ser mas afectados, y esto podria ser de suma importancia al momento de quitar la sanguijuela ya que podria afectar al punto critico al punto de remover otra sanguijuela porque su temperatura sobrepasa el límite.

4. Discusión

4.1. Implementaciones alternativas

Debido a que el resultado de sherman morrison daba mejores resultados hubiese sido interesante poder aplicarlo a casos en que la sanguijuela no es unitaria, si no , en casos mas generales. En comparacion con el metodo simple, donde quitamos una sanguijuela calculamos todo el sistema y volvemos a agregarla, realizando esto para todas las sanguijuelas cuando no son unitarias , podriamos intentar aplicar sherman morrison de manera recursiva para quitar todos los puntos de la sanguijuela no unitaria del sistema. Si bien esto podria ser mas rapido que el metodo simple deberiamos analizar hasta que punto esto resulta conveniente.

4.2. Complejidades

En el apartado anterior se comprobó que las complejidades teóricas de los algoritmos son las esperadas

Además se expone que los tiempos experimentales de la descomposición LU son muy similares a los tiempos del método de Gauss, lo que era esperable ya que ambos métodos tienen la misma complejidad y eran en espíritu muy similares.

Por otra parte se observa que el método de Sherman-Morrison, cuando es lógico aplicarlo, escala mejor que el método de salvación simple. Lo cual también era esperable de acuerdo a la complejidad teórica calculada.

4.3. Granularidad

La granularidad del sistema juega un papel importante a la hora de determinar la precisión de la solución provista. Como se puede observar en los resultados desglosados de la experimentación, el nivel de discretización del sistema determina la cantidad de información suministrada. Esta variable acarrea distintos niveles de error respecto al modelo continuo, más complejo de resolver en términos computacionales.

Por ejemplo, dado el mismo sistema pero variando la granularidad de 1 a 5, observamos una variación de aproximadamente 30 % en la temperatura observada en el punto crítico. Esta diferencia en los cálculos es inaceptable para muchos sistemas.

5. Conclusiones

5.1. Ventajas en el uso de una matriz banda

Como ya discutimos en el desarrollo, pudimos modelar el problema a resolver como una matriz banda. Gracias a esto es que pudimos realocar los valores en un espacio físico muy por debajo de lo que la representación matricial de un caso general requiere. Ahorrando memoria, ya que fue suficiente con almacenar los valores dentro de la banda y ahorrando tiempo de cómputo, ya que como también discutimos en la sección de desarrollo, nos limitamos a aplicar los algoritmos en la banda. De este modo obtuvimos complejidades teóricas más pequeñas que aquellas que se obtienen con el algoritmo estándar.

5.2. Discretización de un problema continuo

En el apartado de experimentación pudimos ver que tomando un valor de discretización muy grande, el problema que comenzó siendo continuo, pasa a ser discreto, pudiéndose ver a simple vista los bloques que fueron discretizados. A medida que la discretización se vuelve mas pequeña el problema empieza a tener un comportamiento más continuo (aunque sea de manera perceptual, ya que la solución sigue siendo discreta), lo que sugiere que aumentar la discretización aumenta la precisión de todo el sistema.

Sin embargo esto viene acarrea una compensación que resulta que para una discretización más pequeña, y por lo tanto exacta, el tiempo de cómputo aumenta sustancialmente. Luego a la hora de simular este problema deberá prestarse sumo cuidado a esta relación tiempo-precisión dependiendo del problema en particular y el grado de confianza que se desea obtener.

5.3. Optimizaciones Algebraicas

Comparando ambos métodos de salvación del parabrisas pudimos ver como utilizar propiedades algebraicas y ordenar las operaciones de manera inteligente permite obtener tanto complejidades teóricas tanto como tiempos experimentales mejores. Más se noto la diferencia en los tiempos para el Sherman-Morrisson ya que al realizar el producto de vectores de la manera correcta generamos menor cantidad de operaciones, acelerando el cálculo de los valores por quedarnos con un producto de vector por escalar, cambiando el orden de los productos notamos que generamos una matriz haciendo que la cantidad de operaciones se multiplique.

Luego, podemos concluir que para poder resolver un problema de manera óptima es importante valerse de las propiedades específicas de las matrices con las que se trabaja, así también como la teoría del álgebra lineal.

5.4. Otras aplicaciones

Vemos como este tipo de problema donde el valor de cada elemento de un espacio en 2 dimensiones (o más) depende del valor de elementos cercanos puede aplicarse en diversas áreas, por ejemplo en el procesamiento de imágenes, donde el suavizado en el zoom de una imagen se puede realizar a través del promedio de los vecinos de cada pixel. También es de posible aplicación para la propagación de ondas en distintos medios. Es interesante ver también como algunas técnicas genéricas ayudan a la velocidad de cómputo y luego se pueden realizar optimizaciones dentro del dominio de cada sistema en particular, como fue en nuestro caso Sherman-Morrison para casos donde el sistema varía levemente.

6. Apéndice

6.1. Archivos de test usados

Dentro de la carpeta `/src/testPropios` se encuentran los siguientes archivos usados en la experimentacion Archivos usados para la seccion analisis de temperatura en funcion de granularidad

- `sanguijuela0.5.in`
- `sanguijuela1.in`
- `sanguijuela5.in`
- `sanguijuela10.in`
- `test3.in`
- `test3b.in`
- `test3.in`
- `test3b.in`
- `test3.in`
- `test3b.in`