Estudiamos y nos divertimos

Métodos Numéricos

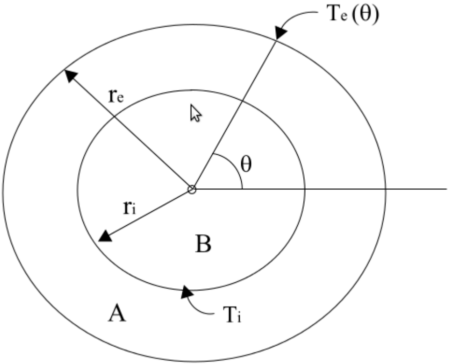
Departamento de Computación, FCEyN,Universidad de Buenos Aires.

20 de Mayo de 2016

El problema

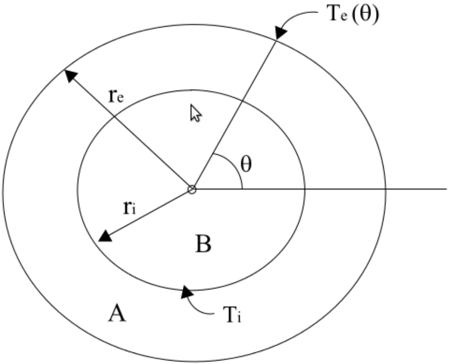
- Dado un Alto Horno (horno para producir acero). Encontrar la isoterma de 500 grados para conocer la fortaleza de la estructura

El horno



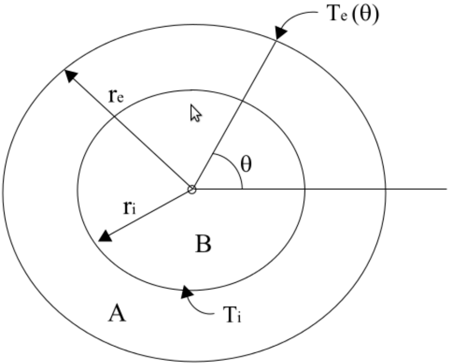
- r_i, r_e y T_i son conocidos.
- $T_e(\theta)$ se conoce con sensores en la pared externa.
- Que queremos conocer? $T(r, \theta)$.

El horno



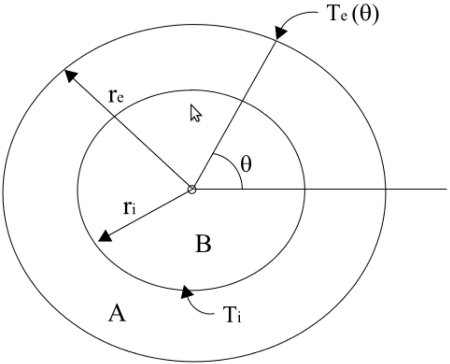
- r_i, r_e y T_i son conocidos.
- $T_e(\theta)$ se conoce con sensores en la pared externa.
- Que queremos conocer? $T(r, \theta)$.

El horno



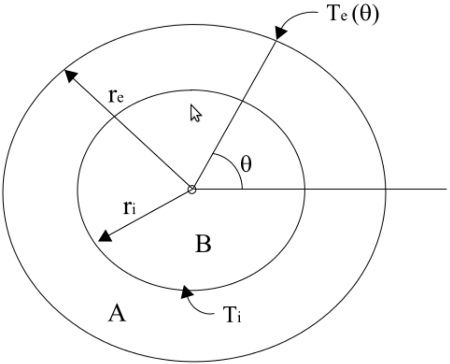
- r_i, r_e y T_i son conocidos.
- $T_e(\theta)$ se conoce con sensores en la pared externa.
- Que queremos conocer? $T(r, \theta)$.

El horno



- r_i, r_e y T_i son conocidos.
- $T_e(\theta)$ se conoce con sensores en la pared externa.
- Que queremos conocer? $T(r, \theta)$.

El horno



- r_i, r_e y T_i son conocidos.
- $T_e(\theta)$ se conoce con sensores en la pared externa.
- Que queremos conocer? $T(r, \theta)$.

El modelo

- Queremos conocer $T(r, \theta)$ para todo punto del horno, para así saber donde esta la isoterma buscada.
- Sabemos:
  - $T(r_i, \theta) = 1500$
  - $T(r_e, \theta) = T_e(\theta)$
- Como averiguamos los puntos internos? El calor en este tipo de estructuras debe cumplir alguna propiedad ...

El modelo

- Queremos conocer $T(r, \theta)$ para todo punto del horno, para así saber donde esta la isoterma buscada.
- Sabemos:
  - $T(r_i, \theta) = 1500$
  - $T(r_e, \theta) = T_e(\theta)$
- Como averiguamos los puntos internos? El calor en este tipo de estructuras debe cumplir alguna propiedad ...

El modelo

- Queremos conocer $T(r, \theta)$ para todo punto del horno, para así saber donde esta la isoterma buscada.
- Sabemos:
  - $T(r_i, \theta) = 1500$
  - $T(r_e, \theta) = T_e(\theta)$
- Como averiguamos los puntos internos? El calor en este tipo de estructuras debe cumplir alguna propiedad ...

El modelo

- Queremos conocer $T(r, \theta)$ para todo punto del horno, para así saber donde esta la isoterma buscada.
- Sabemos:
  - $T(r_i, \theta) = 1500$
  - $T(r_e, \theta) = T_e(\theta)$
- Como averiguamos los puntos internos? El calor en este tipo de estructuras debe cumplir alguna propiedad ...

El modelo

- Queremos conocer $T(r, \theta)$ para todo punto del horno, para así saber donde esta la isoterma buscada.
- Sabemos:
  - $T(r_i, \theta) = 1500$
  - $T(r_e, \theta) = T_e(\theta)$
- Como averiguamos los puntos internos? El calor en este tipo de estructuras debe cumplir alguna propiedad ...

Leap of Faith

El modelo

Llamamos a nuestro amigo físico y nos dice que (despues de un tiempito) los puntos internos van a cumplir:

$$\frac{\partial^2 T(r,\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T(r,\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T(r,\theta)}{\partial \theta^2} = 0 \tag{1}$$

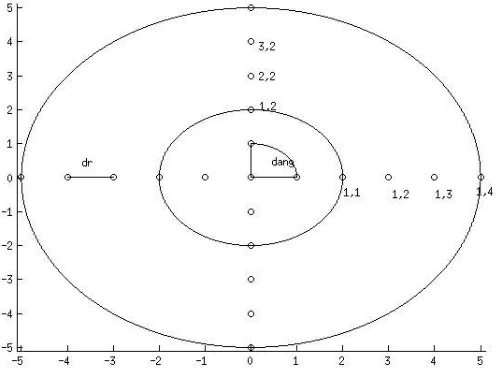
El Modelo

Tenemos una ecuación, pero habla de cosas continuas y derivadas parciales que no sabemos como meter en la computadora...

Nuestro Modelo

En primer lugar, discretizamos el espacio del problema.

En este ejemplo vemos una discretización de 4 ángulos y 4 radios.



Nuestro Modelo

Ahora discretizamos las ecuaciones necesarias:

- Diferencia finita atrasada:

$$\frac{\partial T(r,\theta)}{\partial r}(r_j,\theta_k) \cong \frac{t_{j,k} - t_{j-1,k}}{\Delta r} \tag{2}$$

- Diferencia finita adelantada:

$$\frac{\partial T(r,\theta)}{\partial r}(r_j,\theta_k) \cong \frac{t_{j+1,k} - t_{j,k}}{\Delta r} \tag{3}$$

Nuestro Modelo

Ahora discretizamos las de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 T(r,\theta)}{\partial r^2}(r_j,\theta_k) \tag{4}$$

$$\frac{\partial(\frac{\partial T(r,\theta)}{\partial r})}{\partial r}(r_j,\theta_k) \tag{5}$$

$$\frac{1}{\Delta r}(\frac{t_{j+1,k}-t_{j,k}}{\Delta r}-\frac{t_{j,k}-t_{j-1,k}}{\Delta r}) \tag{6}$$

$$\frac{t_{j-1,k}-2t_{jk}+t_{j+1,k}}{(\Delta r)^2} \tag{7}$$

Nuestro Modelo

Ahora discretizamos las de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 T(r,\theta)}{\partial r^2}(r_j,\theta_k) \tag{4}$$

$$\frac{\partial(\frac{\partial T(r,\theta)}{\partial r})}{\partial r}(r_j,\theta_k) \tag{5}$$

$$\frac{1}{\Delta r}\left(\frac{t_{j+1,k}-t_{j,k}}{\Delta r}-\frac{t_{j,k}-t_{j-1,k}}{\Delta r}\right) \tag{6}$$

$$\frac{t_{j-1,k}-2t_{jk}+t_{j+1,k}}{(\Delta r)^2} \tag{7}$$

Nuestro Modelo

Ahora discretizamos las de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 T(r,\theta)}{\partial r^2}(r_j,\theta_k) \tag{4}$$

$$\frac{\partial(\frac{\partial T(r,\theta)}{\partial r})}{\partial r}(r_j,\theta_k) \tag{5}$$

$$\frac{1}{\Delta r}(\frac{t_{j+1,k}-t_{j,k}}{\Delta r}-\frac{t_{j,k}-t_{j-1,k}}{\Delta r}) \tag{6}$$

$$\frac{t_{j-1,k}-2t_{jk}+t_{j+1,k}}{(\Delta r)^2} \tag{7}$$

Nuestro Modelo

Ahora discretizamos las de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 T(r,\theta)}{\partial r^2}(r_j,\theta_k) \tag{4}$$

$$\frac{\partial(\frac{\partial T(r,\theta)}{\partial r})}{\partial r}(r_j,\theta_k) \tag{5}$$

$$\frac{1}{\Delta r}(\frac{t_{j+1,k}-t_{j,k}}{\Delta r}-\frac{t_{j,k}-t_{j-1,k}}{\Delta r}) \tag{6}$$

$$\frac{t_{j-1,k}-2t_{jk}+t_{j+1,k}}{(\Delta r)^2} \tag{7}$$

Nuestro Modelo

Ahora discretizamos las de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 T(r,\theta)}{\partial r^2}(r_j,\theta_k) \tag{4}$$

$$\frac{\partial(\frac{\partial T(r,\theta)}{\partial r})}{\partial r}(r_j,\theta_k) \tag{5}$$

$$\frac{1}{\Delta r}(\frac{t_{j+1,k}-t_{j,k}}{\Delta r}-\frac{t_{j,k}-t_{j-1,k}}{\Delta r}) \tag{6}$$

$$\frac{t_{j-1,k}-2t_{jk}+t_{j+1,k}}{(\Delta r)^2} \tag{7}$$

Nuestro Modelo

De la misma forma, discretizamos la que depende del ángulo

$$\frac{\partial^2 T(r,\theta)}{\partial\theta^2}(r_j,\theta_k) \cong \frac{t_{j,k-1} - 2t_{jk} + t_{j,k+1}}{(\Delta\theta)^2} \tag{8}$$

Armado del sistema

- Sabemos que cada punto de la pared interna cumple que vale una constante.
- Sabemos que cada punto de la pared externa vale igual a lo que digan los sensores.
- Sabemos que cada punto interno cumple exactamente una ecuación que depende de sus cuatro vecinos.

Tenemos muchos puntos que queremos saber su temperatura, y tenemos la misma cantidad de ecuaciones. Podemos armar un sistema e intentar resolverlo.

Armado del sistema

- Sabemos que cada punto de la pared interna cumple que vale una constante.
- Sabemos que cada punto de la pared externa vale igual a lo que digan los sensores.
- Sabemos que cada punto interno cumple exactamente una ecuación que depende de sus cuatro vecinos.

Tenemos muchos puntos que queremos saber su temperatura, y tenemos la misma cantidad de ecuaciones. Podemos armar un sistema e intentar resolverlo.

Armado del sistema

- Sabemos que cada punto de la pared interna cumple que vale una constante.
- Sabemos que cada punto de la pared externa vale igual a lo que digan los sensores.
- Sabemos que cada punto interno cumple exactamente una ecuación que depende de sus cuatro vecinos.

Tenemos muchos puntos que queremos saber su temperatura, y tenemos la misma cantidad de ecuaciones. Podemos armar un sistema e intentar resolverlo.

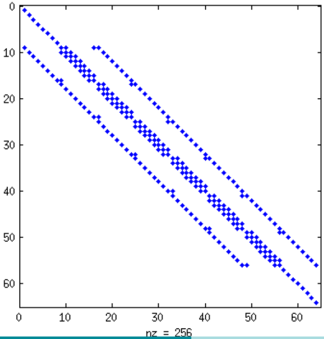
Armado del sistema

- Sabemos que cada punto de la pared interna cumple que vale una constante.
- Sabemos que cada punto de la pared externa vale igual a lo que digan los sensores.
- Sabemos que cada punto interno cumple exactamente una ecuación que depende de sus cuatro vecinos.

Tenemos muchos puntos que queremos saber su temperatura, y tenemos la misma cantidad de ecuaciones. Podemos armar un sistema e intentar resolverlo.

El sistema

A continuación se ve la distribución de valores distintos de cero en un sistema de discretización de 8 ángulos y 8 radios (comando spy(A) en MATLAB).
Se visualizan dos sectores de identidad que son los valores ya conocidos en las paredes del horno, y todo un sector central en donde en cada fila hay 5 valores no nulos que son los que aparecen en las ecuaciones presentadas.



Pasemos al enunciado