Laboratorio de Métodos Numéricos - Primer cuatrimestre 2016
Taller Número 2: Trabajamos y nos divertimos...- Viernes 20 de Mayo

---

Introducción

Consideremos la sección horizontal de un horno de acero cilíndrico, como en la Figura 1. El sector A es la pared del horno, y el sector B es el horno propiamente dicho, en el cual se funde el acero a temperaturas elevadas. Tanto el borde externo como el borde interno de la pared forman círculos. Suponemos que la temperatura del acero dentro del horno (o sea, dentro de B) es constante e igual a 1500^{o}C.

Tenemos sensores ubicados en la parte externa del horno para medir la temperatura de la pared externa del mismo, que habitualmente se encuentra entre 50^{o}C y 200^{o}C. El problema que debemos resolver consiste en estimar la isoterma de 500^{o}C dentro de la pared del horno, para estimar la resistencia de la misma. Si esta isoterma está demasiado cerca de la pared externa del horno, existe peligro de que la estructura externa de la pared colapse.

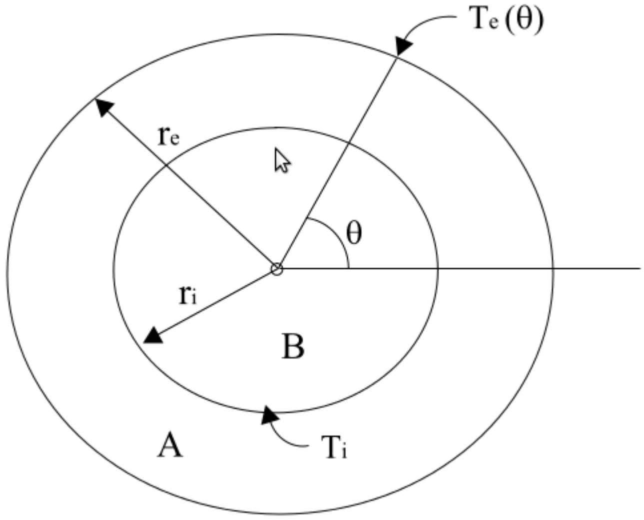

Figure 1: Sección circular del horno

El objetivo del taller es implementar un programa que calcule la isoterma solicitada, conociendo las dimensiones del horno y las mediciones de temperatura en la pared exterior.

El Modelo

Sea $r_e \in \mathbb{R}$ el radio exterior de la pared y sea $r_i \in \mathbb{R}$ el radio interior de la pared. Llamemos $T(r,\theta)$ a la temperatura en el punto dado por las coordenadas polares (r,θ), siendo r el radio y θ el ángulo polar de dicho punto. En el estado estacionario, esta temperatura satisface la ecuación del calor:

$$\frac{\partial^2 T(r,\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T(r,\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T(r,\theta)}{\partial \theta^2} = 0 \qquad (1)$$

Si llamamos $T_i \in \mathbb{R}$ a la temperatura en el interior del horno (sector B) y $T_e : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ a la función de temperatura en el borde exterior del horno (de modo tal que el punto (r_e, θ) tiene temperatura $T_e(\theta)$), entonces tenemos que

$$T(r,\theta) = T_i \quad \textit{para todo punto } (r,\theta) \textit{ con } r \le r_i \qquad (2)$$

$$T(r_e,\theta) = T_e(\theta) \qquad \textit{para todo punto } (r_e,\theta) \tag{3}$$

El problema en derivadas parciales dado por la primera ecuación con las condiciones de contorno presentadas recientemente, permite encontrar la función T de temperatura en el interior del horno (sector A), en función de los datos mencionados en esta sección.

La resolución

Para resolver este problema computacionalmente, discretizamos el dominio del problema (el sector A) en coordenadas polares. Consideramos una partición $0 = \theta_0 < \theta_1 < ... < \theta_n = 2\pi$ en n ángulos discretos con $\theta_k - \theta_{k-1} = \Delta\theta$ para $k = 1, ..., n$, y una partición $r_i = r_0 < r_1 < ... < r_m = r_e$ en $m+1$ radios discretos con $r_j - r_{j-1} = \Delta r$ para $j = 1, ..., m$.

El problema ahora consiste en determinar el valor de la función T en los puntos de la discretización (r_j, θ_k) que se encuentren dentro del sector A. Llamemos $t_{jk} = T(r_j, \theta_k)$ al valor (desconocido) de la función T en el punto (r_j, θ_k).

Para encontrar estos valores, transformamos la ecuación (1) en un conjunto de ecuaciones lineales sobre las incógnitas t_{jk}, evaluando (1) en todos los puntos de la discretización que se encuentren dentro del sector A. Al hacer esta evaluación, aproximamos las derivadas parciales de T en (1) por medio de las siguientes fórmulas de diferencias finitas:

$$\frac{\partial^2 T(r,\theta)}{\partial r^2}(r_j,\theta_k) \cong \frac{t_{j-1,k} - 2t_{jk} + t_{j+1,k}}{(\Delta r)^2} \tag{4}$$

$$\frac{\partial T(r,\theta)}{\partial r}(r_j,\theta_k) \cong \frac{t_{j,k} - t_{j-1,k}}{\Delta r} \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 T(r,\theta)}{\partial \theta^2}(r_j,\theta_k) \cong \frac{t_{j,k-1} - 2t_{jk} + t_{j,k+1}}{(\Delta \theta)^2} \tag{6}$$

Es importante notar que los valores de las incógnitas son conocidos para los puntos que se encuentran sobre el borde exterior de la pared, y para los puntos que se encuentren dentro del sector B. Al realizar este procedimiento, obtenemos un sistema de ecuaciones lineales que modela el problema discretizado. La resolución de este sistema permite obtener una aproximación de los valores de la función T en los puntos de la discretización.

Enunciado

El objetivo final del taller será rellenar una implementación incompleta de un programa realizado en MATLAB que calcula la isoterma deseada en función de los datos de los sensores externos a lo largo de un intervalo temporal dado.

- Enunciar una propiedad para corroborar si el sistema a resolver pueden ser resueltos mediante Jacobi o Gauss-Seidel.
- Rellenar *jacobi.m* para que dicha función tome una matriz A, dos vectores b y x_0 y resuelva el sistema $Ax = b$ mediante el método de Jacobi, utilizando a x_0 como vector inicial. Las iteraciones se deben resolver no matricialmente, sino despejando las sucesivas soluciones obtenidas.
- Rellenar *gausssei.m* para que dicha función tome una matriz A, dos vectores b y x_0 y resuelva el sistema $Ax = b$ mediante el método de Gauss-Seidel, utilizando a x_0 como vector inicial. Las iteraciones deben ser matriciales y no se debe despejar las sucesivas soluciones obtenidas.
- Rellenar *Taller2.m* para resolver el problema planteado con los diferentes métodos propuestos.

Evaluación:

- Coloquio con los docentes durante la clase
- En caso de no asistir a clase, se debe entregar la resolución del taller por escrito hasta el Viernes 27 de Mayo.