



**Pontificia Universidad Católica de Chile**  
**Instituto de Economía**

# Econometría de Series de Tiempo

Raimundo Soto

March 17, 2010

"The universe works whether or not you understand it"

Frank Zappa

# Indice

Capítulo 1: Introducción.....	1
Capítulo 2: Modelos de Series de Tiempo Estacionarias Univariados	
2.01 Primera Representación Fundamental de un Proceso Estocástico.....	1
2.02 Estacionariedad y Ergodicidad.....	2
2.03 Función de Autocorrelación.....	4
2.04 Proceso Ruido Blanco.....	4
2.05 Procesos Media Móvil.....	6
2.06 Procesos Autoregresivos.....	9
2.07 Procesos Autoregresivos y de Media Móvil.....	15
2.08 Identificación de Procesos Estocásticos Estacionarios.....	16
2.09 Funciones de Correlación Admisibles y el Teorema de Wold.....	16
2.10 Metodología de Box-Jenkins.....	19
2.11 ¿Cómo Volver Estacionaria una Variable?.....	20
2.12 Identificación del Tipo de Modelo ARMA.....	21
2.13 Estimación de Modelos Autoregresivos.....	22
2.14 Estimación de Modelos Media Móvil.....	25
2.15 Estimación de un Modelo ARMA.....	26
2.16 Predicciones con Modelos ARMA.....	26
2.17 Simulación Histórica con Modelos ARMA.....	28
2.18 Validación del Modelo Econométrico ARMA.....	29
Apéndice A: Código Gauss para simulación de modelos ARMA.....	30
Apéndice B: Operador de Rezagos.....	33
Apéndice C: Metodologías de Remoción de Estacionalidad para Variables Estacionarias. .	34
Apéndice D: Ejercicios.....	38
Contenidos.....	41
Capítulo 3: Modelos de Series de Tiempo Estacionarias Multivariados	
3.01 Vectores Autoregresivos.....	1
3.02 El Problema de Identificación.....	3
3.03 Ecuaciones Simultáneas Tradicionales vs. VARs.....	4
3.04 Causalidad en Series de Tiempo.....	6
3.05 Estimación de un VAR(p) por Máxima Verosimilitud.....	10
3.06 Funciones Impulso-Respuesta del VAR.....	12
3.07 Funciones Impulso-Respuesta usando Técnica Espacio-Estado.....	13
3.08 Errores Estándares de la Función Impulso-Respuesta.....	15
3.09 Funciones Impulso-Respuesta Generalizadas.....	15
3.10 Descomposicion de la Varianza del Error de Pronóstico.....	18
3.11 VAR Estructurales.....	19
3.12 Cuasi VARs.....	20
Apéndice A: Modelos de Ecuaciones Simultáneas Tradicionales .....	22
Apéndice B: Ejercicios.....	31

Capítulo 4: Modelos de Series de Tiempo Estacionarias para la Varianza	
4.1 Especificación de modelos ARCH.....	1
4.2 Tests para la presencia de residuos ARCH.....	6
4.3 Estimación de modelos ARCH.....	9
Apendice A: Códigos Gauss.....	12
Modelos de Series de Tiempo Univariadas No Estacionarias	
5.01 Representaciones de Tendencias en Análisis Univariado.....	1
5.02 Teoría Asintótica para Procesos con Tendencias Determinísticas.....	10
5.03 Teoría Asintótica para Procesos con Tendencias Estocásticas.....	13
5.04 Movimientos Brownianos y Procesos de Wiener.....	15
5.05 Funcional del Teorema del Límite Central.....	18
5.06 Tests Empíricos Estándares de Raíces Unitarias.....	32
5.07 Tests con hipótesis nula de estacionariedad.....	39
5.08 Equivalencia Observacional, Poder y Tests de Raíces Unitarias.....	40
5.09 Tests No Paramétricos de Raíces Unitarias.....	42
5.10 Tests de Raíces Unitarias Estacionales.....	44
5.11 Integración Fraccional.....	48
5.12 Tests de Integración Fraccional.....	49
5.13 Filtros para Series de Tiempo.....	57
Apéndice A: Códigos Gauss.....	62
Apéndice B: Ejercicios.....	67
Capítulo 6: Modelos de Series de Tiempo Multivariadas No Estacionarias.....	1
6.01 Correlación espuria.....	2
6.02 Noción de cointegración.....	10
6.03 Cointegración.....	12
6.04 Tests de cointegración.....	19
6.05 Otras preguntas interesantes.....	23
6.06 Test de hipótesis cuando las variables cointegran.....	23
6.07 Estimación y Testeo de Cointegración en Sistemas de Ecuaciones.....	25
6.08 Cointegración Estacional.....	31
Apéndice A: Códigos Gauss.....	34
Apéndice B: Ejercicios.....	36
Capítulo 7: Cambio de Régimen.....	1
7.1 Modelos de cambio de régimen con probabilidades de transición fijas .....	1
7.2 Modelos de cambio de régimen con probabilidades de transición variables.....	3
7.3 Estimating Regime Switching Models.....	5
Capítulo 8: Análisis Espectral.....	1
8.01 Transformaciones de Fourier.....	1
8.02 Densidad Espectral.....	3
8.03 Densidades espectrales de algunos procesos.....	5
8.04 Matriz de densidad espectral y densidad espectral cruzada.....	6
Apéndice A: Números complejos y trigonometría.....	29

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN A LA ECONOMETRÍA DE SERIES DE TIEMPO

*“El tiempo es el alma del mundo”.  
Pitágoras de Samos*

Una pregunta natural que surge cuando un estudiante se enfrenta a un curso de series de tiempo es ¿por qué no usar directamente el instrumental de la econometría clásica que ya ha aprendido en un modelo de series de tiempo? La respuesta más simple a esta pregunta es que existen diferencias fundamentales entre la econometría de series de tiempo y aquella de corte transversal.

La mayor parte de los resultados sobre las propiedades asintóticas de los estimadores que se derivan en la econometría clásica se basan en los teoremas de límite central y en las leyes de grandes números de Kolmogorov. Recordemos que éstas últimas nos dicen que si  $x_t$  es una variable aleatoria independiente e idénticamente distribuida (i.i.d.) con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ , entonces en una muestra de tamaño  $n$  se cumple para el *ensemble*:<sup>1</sup>

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \rightarrow \mu \quad (1.1)$$

En series de tiempo no disponemos de un *ensemble*, sino de una secuencia de observaciones en el tiempo. La colección de datos sólo es una posible realización de un proceso estocástico,  $x_t$ . Si tuviésemos una colección de  $n$  secuencias de  $\{x_t\}$  podríamos obtener los momentos de la densidad de  $x_t$  (ej. la media o varianza no condicional de  $x_t$ ) para cada instante del periodo de tiempo.

Podemos, naturalmente, obtener la media en el tiempo de esa secuencia de observaciones, pero ¿es válido suponer que la media de series de tiempo puede converger a la media del *ensemble*?

$$\bar{x}_T = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T x_i \stackrel{?}{\rightarrow} \mu \quad (1.2)$$

---

<sup>1</sup> Un ensemble en este contexto corresponde a una colección de muestras de un experimento aleatorio,  $x_t$ .

La respuesta es que la media de la secuencia temporal convergerá si ésta es *estacionaria*, es decir si los momentos que definen la función de probabilidad que se utiliza para representar el proceso de generación de los datos no cambia en el tiempo.<sup>2</sup> Más aún, si la variable aleatoria es *ergódica*, una inferencia hecha sobre una muestra finita del proceso nos permitirá estimar dicho límite y computar los momentos de la distribución de la variable aleatoria  $x_t$ . En las secciones siguientes profundizaremos en estos conceptos y su impacto sobre los modelos econométricos y los estimadores que son parte del instrumental del econometrista.

El capítulo 2 se concentra en modelos univariados –es decir modelos para una sola variable– cuando dichas variables son estacionarias. Desde el célebre libro de Box y Jenkins<sup>3</sup> éstos son llamados modelos ARMA, acrónimo de modelos autoregresivos y de media móvil. Bajo condiciones no demasiado limitantes este tipo de modelo puede ser usado para generar predicciones de gran precisión a un costo notablemente bajo. En la primera parte de este capítulo se estudian y desarrollan diversos modelos teóricos de series de tiempo, con el objetivo de introducir conceptos que serán de utilidad y aplicación frecuente en el resto del libro. Entre ellos, función de autocovarianza, correlograma, memoria, y criterio informacional. En la segunda parte, se estudian las condiciones bajo las cuales es adecuado y posible modelar variables económicas estacionarias como series de tiempo. La tercera parte se dedica a desarrollar las técnicas econométricas para estimar modelos de series de tiempo y predecir con ellos la futura evolución de las variables de interés.

El capítulo 3 estudia la extensión de los modelos anteriores de modo de poder estudiar la interacción de dos o más variables aleatorias. Nos concentramos en modelos de vectores autoregresivos, VARs, que son potencialmente capaces de describir un número muy grande de procesos económicos tanto lineales como no lineales. En la primera parte se presenta el problema de identificación, es decir, las condiciones bajo las cuales es posible extraer conclusiones respecto de un modelo teórico a partir de un modelo econométrico estimado sobre la base de una muestra de datos. Este estudio, además, permite identificar las debilidades de la literatura clásica de modelos de ecuaciones simultáneas<sup>4</sup> y estudiar la contrapartida econométrica de la crítica de Lucas (1976)<sup>5</sup>. En la segunda parte del capítulo, se desarrolla la simulación de estos modelos multivariados usando técnicas de estado-espacio para derivar la función impulso-respuesta. En particular, se extiende el análisis para estudiar la función generalizada de impulso-respuesta, que permite una caracterización de la dinámica de los sistemas independientemente de su identificación. En la tercera parte se describen técnicas econométricas de estimación, determinación de rezago óptimos, etc. y se discute la validez de los modelos llamados VAR estructurales con un enfoque de restricciones de sobreidentificación.

---

2 El estudio de las series de tiempo requiere aprender y manejar con facilidad una jerga particular. La razón de tener una jerga particular es que (a) ahorra tiempo y (b) ayuda a pensar con claridad. En particular, la célebre frase de G.O. Ashley no es lo que se busca *Like other occult techniques of divination, the statistical method has a private jargon deliberately contrived to obscure its methods from non-practitioners.*

3 Box, G.E. y G.M. Jenkins *Time series analysis: Forecasting and control*, San Francisco: Holden-Day, (1970).

4 Una lúcida crítica de los modelos macroeconómicos clásicos se encuentra en el artículo de C. Sims, "Macroeconomics and Reality", *Econometrica*, 48:1-48, 1980.

5 Lucas, R.E. (1976). "Econometric Policy Evaluation: A Critique", en: R.E. Lucas (ed.), *Studies in Business-Cycle Theory*. Cambridge (MA): MIT Press: 104-130.

Al contrario de la generalidad de los modelos econométricos que se enfocan en modelar la media condicional de una variable, el capítulo 4 se dedica a los modelos para la varianza de una o más variables, pues ella puede reflejar comportamientos que son característicos de algunos problemas económicos tales como la dinámica de los precios de activos, las variables financieras, el riesgo, etc. Los modelos de heterocedasticidad condicional son modelos donde la varianza de la serie no es constante, aunque siga un proceso estacionario, sino que tiene asociado un proceso estocástico que resulta de interés modelar y que permite mejorar la calidad de las predicciones en el corto plazo. Este tipo de modelos se ha desarrollado bastante rápido en las últimas dos décadas a partir del modelo original básico (ARCH)<sup>6</sup> para convertirse en una familia de modelos muy sofisticados y poderosos.

El capítulo 5 introduce al lector en la econometría de series de tiempo no estacionarias. Para ello, primero se discuten las diferencias que tienen procesos estacionarios y no estacionarios en términos de la naturaleza de los errores de predicción asociados a cada proceso, la varianza de dichos errores de predicción y la persistencia de las innovaciones de cada proceso. Ello nos lleva a desarrollar los elementos centrales de una teoría asintótica para procesos no estacionarios o que contienen raíces unitarias. En la tercera parte se discuten varios tests que permiten dilucidar empíricamente la naturaleza de las variables y el tratamiento adecuado que se debe darle a la tendencia de ellas.

El capítulo 6 extiende el análisis de procesos no estacionarios para grupos de variables. Más allá de la predicción de la evolución futura de un variable económica, el principal interés de la economía es entender la forma como se relacionan las variables económicas entre sí. Considerando que una parte sustancial de los modelos económicos contienen variables económicas que posiblemente tienen raíces unitarias, resulta fundamental entender cómo la presencia de procesos no-estacionarios afecta a los modelos de ecuaciones simultáneas desarrollados en el capítulo 3. En particular, interesa estudiar dos fenómenos extremadamente importantes que ocurren cuando hay variables integradas en un modelo económico. En primer lugar, la *correlación espuria*, es decir, la obtención de coeficientes de correlación parcial altos entre variables que –por construcción– son estadísticamente independientes. En segundo lugar, la *cointegración*, es decir la propiedad que tienen ciertas variables integradas para exhibir combinaciones lineales que son estacionarias.

Para efectos de la modelación econométrica ambos fenómenos son fundamentales. El primer problema nos señala que, si el econometrista no está conciente del tipo de variable con que modela, es posible que sus resultados sean enteramente espurios, pese a que tests estadísticos convencionales sugieran que las variables están relacionadas. El segundo fenómeno nos señala que bajo ciertas circunstancias aún si hay variables integradas es posible que un modelo econométrico una descripción adecuada, pues variables que cointegran efectivamente están relacionadas en el largo plazo.

El capítulo 7 estudia una aplicación del Filtro de Kalman –que utiliza la representación espacio-estado de un sistema dinámico– a los problemas de series de tiempo, lo que permite estudiar modelos con variables no observables y modelos de parámetros variables en el tiempo. En particular, estudiaremos modelos de cambios de régimen que aplican dicho filtro a una

---

6 Engle, R. F. (1982). "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation," *Econometrica*, 50:987-1008.

estructura de cadenas de Markov. El interés de este tipo de modelación radica en que el cambio de régimen no es determinístico sino estocástico, lo que implica que existen probabilidades de cambiar de régimen, y que la ocurrencia de un quiebre puede depender de factores desencadenantes.