MDIO - Trabalho Prático

David Kramer (77849)
Joaquim Simões (A77653)
José Menezes (79187)
Rafael Costa (61799)
Ricardo Milhazes (81919)

Dezembro 2018

1 Questão 1

1.a

Com o objetivo de cumprir as condições de optimalidade, apresenta-se o modelo primal do problema relativo aos incêndios florestais.

Variáveis de decisão :
x_{ij} - quantidade de fluxo que passa no caminho i, j. $i \in \{1, ..., N\}, j \in \{1, ..., N\}$

Dados :
c_{ij} - custo (tempo) do caminho i até j, $i \in \{1, ..., N\}, j \in \{1, ..., N\}$
N - número de áreas florestais

F.O:

$$Min_z = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}.xij$$

Sujeito a:

$$x_{ii} = 0, \forall i \in \{1, ..., N\}$$
$$\sum_{j=1}^{N} (x_{1j} - x_{j1}) = N - 1$$
$$\sum_{j=1}^{N} (x_{ij} - x_{ji}) = -1, \forall i \in \{2, ..., N\}$$
$$x_{ij} \geq 0, i \in \{1, ..., N\}, j \in \{1, ..., N\}$$

Como este problema apresenta um diverso número de variáveis de decisão, ilustra-se na seguinte figura uma porção destes valores:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	42	0	0	0	0	0	6	0	0	0
2	0	0	35	0	0	0	0	0	6	0	0
3	0	0	0	22	0	0	0	0	0	12	0
4	0	0	0	0	19	0	0	0	0	0	2
5	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Figura 1: Valores das variáveis de decisão

A solução ótima obtida foi a seguinte:

Solution with objective 1 932

Figura 2: Valor obtido

Podemos verificar que apenas existe ligação do nodo 1 para o nodo 2 e 8 observando a figura acima. Também é respeitada a restrição que implica que o que sai do nodo 1 menos o que entra tem que ser igual ao número de nodos menos 1 (42+6-0-0=48).

Também é possível observar que para o nodo 2 é respeitada a restrição que implica que o que sai do nodo 2 menos o que entra tem que ser igual a -1 (35+6-42-0-0=-1)

1.b

Com o objetivo de cumprir as condições de optimalidade, apresenta-se o modelo primal do problema relativo aos incêndios florestais.

Variáveis de decisão :
y_i - indica o custo até ao nodo i, $i \in \{1, ..., N\}$

Dados:
N - número de áreas florestais
c_{ij} - custo (tempo) do caminho i até j, $i \in \{1, ..., N\}, j \in \{1, ..., N\}$

F.O:

$$Max_w = \sum_{i=1}^{N} y_i$$

Sujeito a:

$$y_1 = 0$$

$$y_i + y_j \leq c_{ij}, i, j \in \{1, ..., N\}$$

Na seguinte figura apresentam-se os valores obtidos para as variáveis de decisão:

```
y = [0
        2 4 7 9 13 15 12 13 16 19 19 21 25 23 23 26 29 31 31 34 35 34 36 38
        41 43 45 47 46 48 50 52 55 56 58 57 59 60 63 65 67 70 69 70 70 73
        75 78];
```

Figura 3: Valores das variáveis de decisão

A solução ótima obtida foi a seguinte:

```
Solution with objective 1 932
```

Figura 4: Valor obtido

Como se pode verificar o resultado obtido desta função foi o mesmo. Para isto foi necessário utilizar a funcionalidade do *excel* "Colar Especial"e apenas colar os valores, pois devido à utilização de valores aleatórios o valor da função objetivo está em constante mudança.

1.c e 1.d

Nestas duas secções o grupo tentou obter os valores do modelo *dual* através da seguinte forma:

```
subject to{
   r1: forall(i in 1..(n*n)) x[i][i] == 0;
   r2: sum(j in 1..(n*n))(x[1][j]-x[j][1]) == (n*n)-1;
   r3: forall (i in 2..(n*n)) sum(j in 1..(n*n)) (x[i][j]-x[j][i]) == -1;
   r4: forall (i in 1..(n*n), j in 1..(n*n)) x[i][j] >= 0;
}


execute {
   if (cplex.getCplexStatus() == 1) {
       writeln("dual of r1: ", r1.dual);
       writeln("dual of r2: ", r2.dual);
       writeln("dual of r3: ", r3.dual);
       writeln("dual of r4: ", r4.dual);
   }
}
```

Figura 5: Tentativa no programa *CPLEX*

No entanto, o resultado produzido foi o seguinte:

```
dual of r1: undefined
dual of r2: undefined
dual of r3: undefined
dual of r4: undefined
```

Figura 6: Resultado das soluções do modelo *dual*

Pelo que deste o grupo não conseguiu responder adequadamente a estas duas questões.

2 Questão 2

2.a

Com o objetivo de cumprir as condições de optimalidade, apresenta-se o seguinte modelo:

Variáveis de decisão :

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{quando a célula } i \text{ é tratada} \\ 0 & \text{quando a célula } i \text{ não é tratada} \end{cases}$$

t_i - indica o custo (tempo) até ao nodo i, $i \in \{1, ..., N\}$

Dados :
c_{ij} - custo (tempo) do caminho i até j, $i \in \{1, ..., N\}, j \in \{1, ..., N\}$
b - número de recursos disponíveis
x - célula a proteger
Δ - constante de retardação
N - número de áreas florestais

F.O:

$$Max_z = t_x$$

Como o objetivo é maximizar o instande de chegada de fogo a uma dada célula, maximizamos a tempo até à célula x, isto é, a célula a proteger.

Sujeito a:

$$t_1 = 0$$

Indicamos a célula 1 como célula de ignição.

$$t_j - t_i \leq c_{ij} + \Delta * y_i, i \in \{1, ..., N\}, j \in \{1, ..., N\}$$

Indicamos que ao custo normal de um arco, é adicionada uma constante de retardação quando se utiliza um recurso na célula.

$$\sum_{i=1}^{N} y_i \leq b$$

Indicamos que só existem b recursos, e por isso só podemos alocar, no máximo, b recursos.

2.b

Sendo a célula a proteger a (7, 7) (i.e $x = 7 * 7 = 49$), a ignição na célula (1, 1), tendo recursos dispoíveis (b), a constande de retardação (δ) e N recorrendo ao *IBM ILOG CPLEX Optimization Studio*, a solução ótima é:

Figura 7: Valor da função objetivo

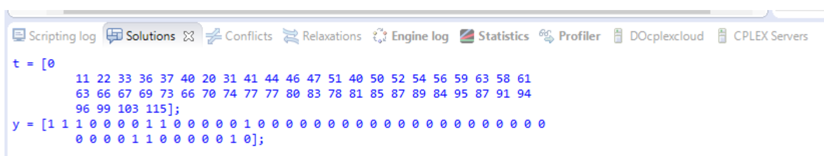
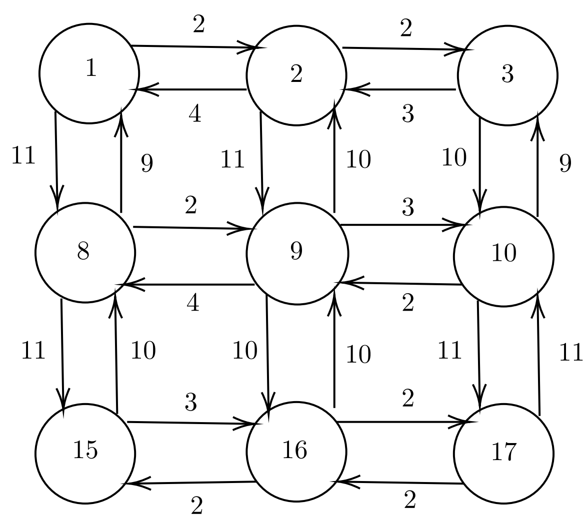


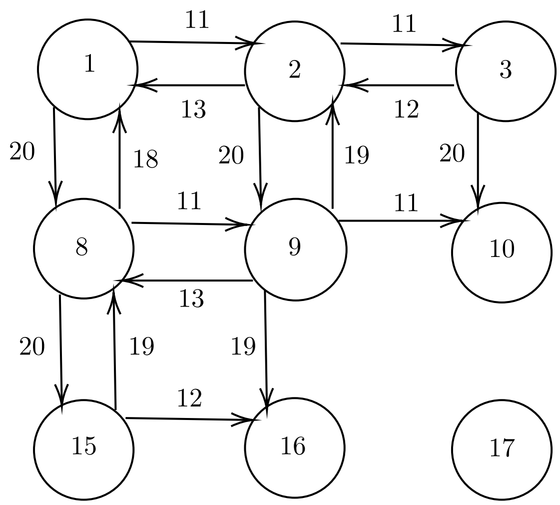
Figura 8: Valores de t e y

Para melhor compreensão vamos representar o grafo inicial (sem retardamento) e o grafo final (com retardamento).

Sem retardamento:



Com retardamento (linhas apagadas não são alteradas pois as células não estão protegidas):



Todas as células que se encontram protegidas têm um custo complementar associado à propagação do fogo para os nodos adjacentes.

Como podemos verificar o custo sem retardamento do nodo 1 para o nodo 2 seria 2 mas se formos verificar o valor de t[2] (que representa o custo até ao nodo 2) à Figura 2, podemos verificar que o valor é 11.

Isto acontece porque:

- a constante de retardação definida pelo grupo, devido às condições impostas no trabalho, é 9.

- a célula 1 está protegida (y[1]=1)

Podemos também verificar que apenas 9 recursos são utilizados pois este era o limite imposto (b). Esta verificação é feita através da observação da Figura 2 onde o somatório das células de y é igual a 9.

Por fim, o valor da função objetivo é 115 que corresponde ao valor de t[49].

2.c

De modo a se poder ter uma percepção mais visual do problema, fez-se o cálculo da solução ótima para os valores de b compreendidos entre 0 a 9. Os resultados foram os seguintes:

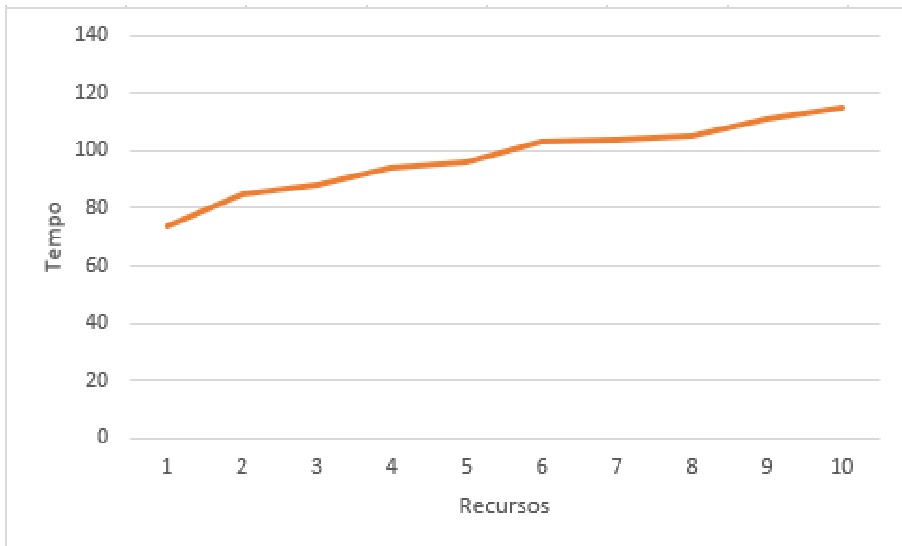


Figura 9: Tempo de chegada do fogo à célula de protecção em função do número de recursos usados

Como seria de esperar o tempo de chegada do fogo à célula que se pretende proteger aumenta com o número de recursos utilizados. Ao analisarmos o gráfico também se pode verificar que a partir de um determinado número de recursos o tempo de chegada tem tendência a estabilizar.

3 Questão 3

3.a

Com o objetivo de cumprir as condições de optimalidade, apresenta-se o seguinte modelo:

Variáveis de decisão:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{quando a célula } i \text{ é tratada} \\ 0 & \text{quando a célula } i \text{ não é tratada} \end{cases}$$

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se a célula } i \text{ é arde} \\ 0 & \text{se a célula } i \text{ não arde} \end{cases}$$

t_i - indica o custo (tempo) até ao nodo i, $i \in \{1, ..., N\}$

Dados:
c_{ij} - custo (tempo) do caminho i até j, $i \in \{1, ..., N\}, j \in \{1, ..., N\}$
b - número de recursos disponíveis
Δ - constante de retardação
N - número de áreas florestais
intervalo - intervalo no qual a função objetivo vai trabalhar
$prob_i$ - probabilidade de ignição da célula i

F.O:

$$Min_z = \sum_{i=1}^{N} (prob_i * x_i)$$

O objetivo é minimizar o valor esperado da área ardida.
Sujeito a:

$$t_1 = 0$$

Indicamos a célula 1 como célula de ignição.

$$t_j - t_i \leq c_{ij} + \Delta * y_i, i \in \{1, ..., N\}, j \in \{1, ..., N\}$$

Indicamos que ao custo normal de um arco, é adicionada uma constante de retardação quando se utiliza um recurso na célula.

$$\sum_{i=1}^{N} y_i \leq b$$

Indicamos que só existem b recursos, e por isso só podemos alocar, no máximo, b recursos.

$$x_i \geq (intervalo - t_i)/intervalo, i \in \{1, ..., N\}$$

Como a variável x é uma variável do tipo binário, esta só pode possuir o valor 0 ou 1. Assim esta deve possuir o valor da normalização do intervalo.

3.b

Utilizando um intervalo igual a 12 e utilizando a fórmula de probabilidade proposta (14-i-j/500) obtivemos os seguintes resultados:

Figura 10: Valor da função objetivo

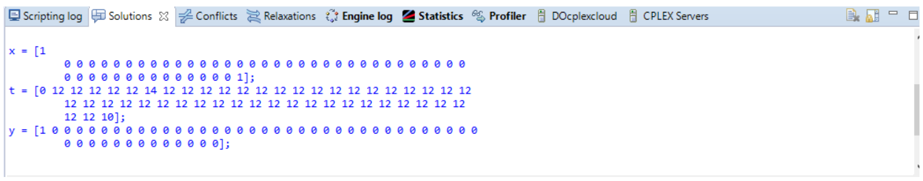
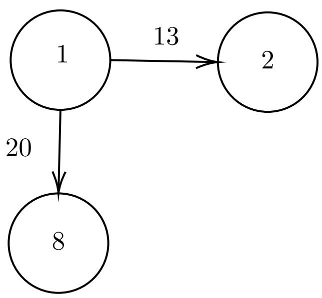


Figura 11: Valores de y, t e x

Custo do caminho entre a célula 1 e a célula 2 e da célula 1 com a célula 8 (com retardamento devido a y[1]=1):



Tanto para t[8] como para t[2] o custo é superior ao intervalo definido então x[2] e x[8] vão ter valor 0, logo o fogo não se consegue propagar para mais nenhuma célula a não ser para a célula de ignição que tem como valor 1 (x[1]=1).

Assim é possível concluir que o valor da função objetivo vai ser 14-2/500 * 1 = 0.024.

O valor de x[49] é 1 porque 14-7-7/14 = 0 logo 0*x[49] vai ser sempre 0 por isso a função objetivo vai continuar a ter o mesmo valor sendo que tem o objetivo de minimizar a área ardida.

3.c

Neste problema foram calculados vários resultados para diferentes instâncias de unidades de tempo compreendidas entre 12 e 120 com incremento de 12 unidades. Os resultados foram os seguintes:

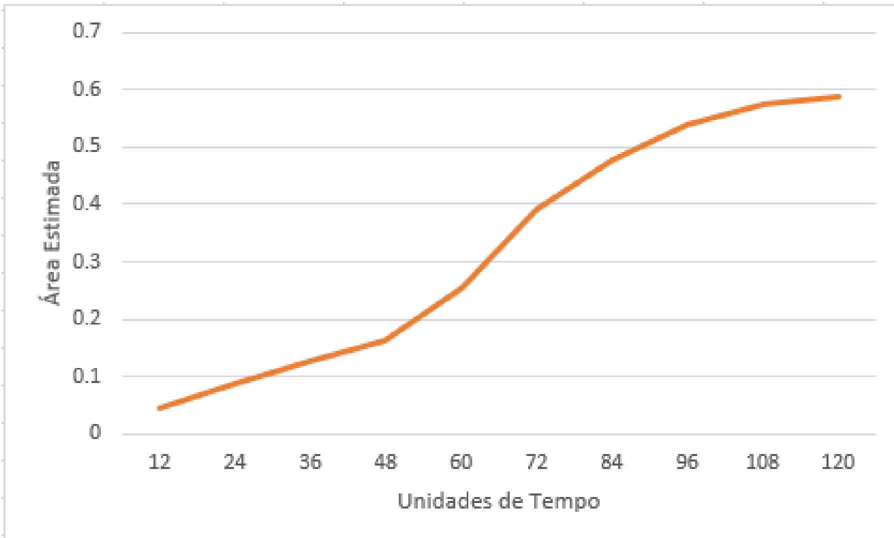


Figura 12: Valor esperado da área ardida em função do intervalo de tempo

Como se pode verificar a partir de um valor de unidades de tempo o valor esperado da área ardida aumenta drásticamente. A partir de certos valores relativamente altos de unidades de tempo o valor esperado da área estabiliza, possivelmente pelo facto de o fogo chegar a todas as áreas consideradas no problema, tendo na mesma usado o número máximo de recursos disponível.