Análise Matemática III

Integrais de linha

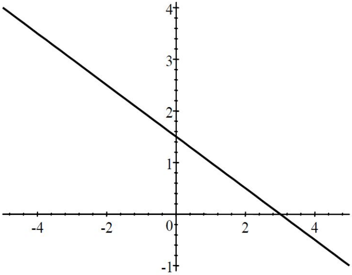
Ricardo Moura

Escola Naval

16 de novembro de 2021

Exemplo

Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *onde* $g(t) = (1 - 2t, 1 + t)$.



Se g é contínua em I, então o seu contradomínio chama-se curva. Uma curva pode ter várias expressões, à qual chamaremos caminhos.

Curva e Caminho

Definição

Chama-se caminho em $\mathbb{R}^n$ a qualquer função contínua definida num intervalo (limitado ou não) de números reais I e com valores em $\mathbb{R}^n$.
O contradomínio de um caminho chama-se **curva** *ou* **arco**.
Se $\mathbf{g} : I \to \mathbb{R}^n$ é um caminho, diz-se que $C = \mathbf{g}(I)$ é a curva representada por $\mathbf{g}$ e que $\mathbf{g}$ é uma representação paramétrica da curva C.
Se $\mathbf{g}$ é um caminho definido num intervalo fechado e limitado $I = [a, b]$, os pontos (a) e (b) chamam-se extremos do caminho $\mathbf{g}$, respectivamente, o ponto inicial e o ponto final.

Curva e Caminho

Se pudermos definir $\mathbf{g}'(t)$, quando $\mathbf{g}'(t) \neq 0$ o vetor $\mathbf{g}'(t)$ pode ser visto geometricamente como o vetor tangente à curva em $\mathbf{g}(t)$.

Definição (curva de classe C^1)

Diz-se que um caminho $\mathbf{g} : I \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 se a função $\mathbf{g}$ é de classe C^1 em I. Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ é uma curva de classe C^1 se existe um caminho de classe C^1 que representa parametricamente C.

Curva e Caminho

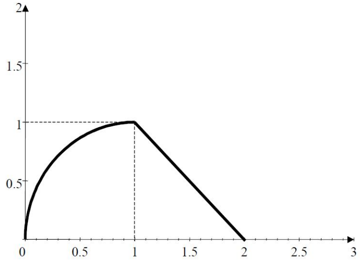
Se pudermos definir $\mathbf{g}'(t)$, quando $\mathbf{g}'(t) \neq 0$ o vetor $\mathbf{g}'(t)$ pode ser visto geometricamente como o vetor tangente à curva em $\mathbf{g}(t)$.

Definição (curva seccionalmente de classe C^1)

Um caminho $\mathbf{g} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *diz-se seccionalmente de classe* C^1 *se o intervalo* $[a, b]$ *puder ser decomposto num número finito de subintervalos, em que cada um o caminho é de classe* C^1. *Uma curva diz-se seccionalmente de classe* C^1 *se existir um caminho seccionalmente de classe* C^1 *que a parametrize.*

Curva e Caminho

Se pudermos definir $\mathbf{g}'(t)$, quando $\mathbf{g}'(t) \neq 0$ o vetor $\mathbf{g}'(t)$ pode ser visto geometricamente como o vetor tangente à curva em $\mathbf{g}(t)$.



Curva e Caminho

Definição (fechado e simples)

Sendo $\mathbf{g} : I \to \mathbb{R}^n$ *um caminho, diz-se que* $\mathbf{g}$ *é um* **caminho fechado** *se* I *é um intervalo fechado e limitado de extremos* a *e* b *e* $g(a) = g(b)$.

Diz-se que o caminho não fechado $\mathbf{g}$ *é um caminho simples quando* $\mathbf{g}$ *é injectiva (isto é,* $\mathbf{g}$ *não assume o mesmo valor em quaisquer dois pontos distintos de* I*).*

O caminho fechado $\mathbf{g}$ *diz-se um* **caminho simples** *se* $\mathbf{g}$ *for injectiva no interior de* I.

Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ *é uma* **curva fechada** *ou uma* **curva simples** *se existe, respectivamente, um caminho fechado ou um caminho simples que o representa parametricamente.*

`https://www.geogebra.org/3d/yju4px5g`

Curva e Caminho

Definição (caminhos equivalentes)

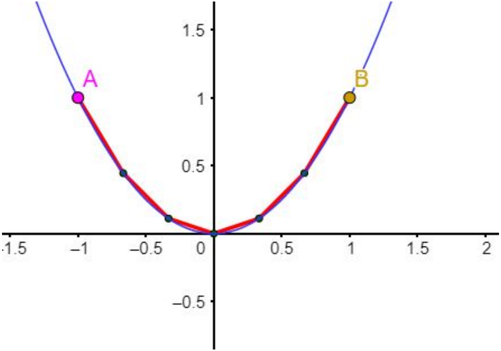
Sejam $\boldsymbol{\alpha} : I \to \mathbb{R}^n$ *e* $\boldsymbol{\beta} : J \to \mathbb{R}^n$ *dois caminhos em* $\mathbb{R}^n$*, os caminhos* $\boldsymbol{\alpha}$ *e* $\boldsymbol{\beta}$ *dizem-se* **equivalentes** *se existe uma função bijectiva e continuamente diferenciável* $\phi : I \to J$*, tal que* $\phi'(t) \neq 0$ *em todos os valores de* t *com excepção dum número finito de pontos* $t \in I$ *e* $\boldsymbol{\alpha}(t) = \boldsymbol{\beta}[\phi(t)]$*, em todos os pontos de* I*.*
Se $\phi'(t) \geq 0$ *diz-se que os caminhos têm o* **mesmo sentido***, se* $\phi'(t) \leq 0$ *diz-se que os caminhos têm* **sentidos opostos***; no primeiro caso diz-se que a função* ϕ *preserva o sentido, e no segundo caso que* **inverte o sentido***.*

Exemplo

$\boldsymbol{\alpha}(t) = (t, t^3), t \in [0, 1]$ *e* $\boldsymbol{\beta}(t) = \left(\frac{t}{2} - 2, \left(\frac{t}{2} - 2\right)^3\right), t \in [4, 6]$
$\boldsymbol{\alpha}(t) = \boldsymbol{\beta}(2t + 4)$

Comprimento de curvas e caminhos

https://www.geogebra.org/m/GrTpNKnJ



Comprimento de curvas e caminhos

https://www.geogebra.org/m/GrTpNKnJ

Teorema 1: Retificável e comprimento de caminho

Um caminho $\mathbf{g} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 é rectificável se $||g'||$ é uma função integrável em $[a, b]$, e o comprimento de $\mathbf{g}$ entre $\mathbf{g}(a)$ e $\mathbf{g}(t)$ $(a \leq t \leq b)$ é dado por

$$s(t) = \int_a^t ||g'(u)|| du = \int_a^t \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left[g_i'(u)\right]^2} du$$

Nota: Independente da respetiva parametrização.

Comprimento de curvas e caminhos

Exemplo

Qual o comprimento da catenária $\mathbf{g} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $\mathbf{g}(t) = (t, \cosh(t))$*?*

`https://www.geogebra.org/m/yqrenyek`

Comprimento de curvas e caminhos

Exemplo

Qual o comprimento da catenária $\mathbf{g} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $\mathbf{g}(t) = (t, \cosh(t))$*?*

`https://www.geogebra.org/m/yqrenyek`

R:sinh(1)

Comprimento de curvas e caminhos

Exemplo

Qual o comprimento da catenária $\mathbf{g} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $\mathbf{g}(t) = (t, \cosh(t))$*?*

`https://www.geogebra.org/m/yqrenyek`
R:sinh(1)

Exemplo

Qual o comprimento do arco da hélice dada por $f(t) = (2e^t \cos(t), 2e^t \sin(t), 2e^t)$*, desde* $(2,0,2)$ *a* $(-2e^{\pi}, 0, 2e^{\pi})$*?*

Comprimento de curvas e caminhos

Exemplo

Qual o comprimento da catenária $\mathbf{g} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $\mathbf{g}(t) = (t, \cosh(t))$*?*

https://www.geogebra.org/m/yqrenyek

R:sinh(1)

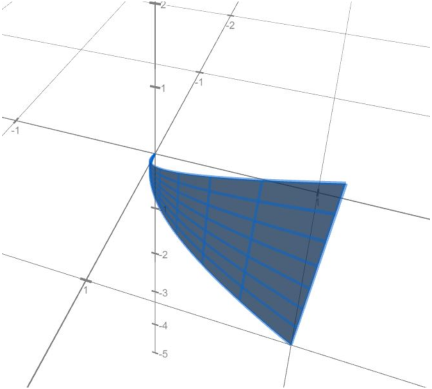
Exemplo

Qual o comprimento do arco da hélice dada por $f(t) = (2e^t\cos(t), 2e^t\sin(t), 2e^t)$*, desde* $(2,0,2)$ *a* $(-2e^{\pi}, 0, 2e^{\pi})$*?*

R:$2\sqrt{3}(e^{\pi} - 1)$

Integral de linha

Seguindo raciocínio semelhante ao que tem vindo a ser efetuado, usando as somas de Riemann, podemos calcular a àrea de uma superfície definida por uma curva em xOy e altura ortogonal a xOy limitada por $z = \varphi(x, y)$. `https://www.math3d.org/2wBs9Tuu`



Integral de linha

Definição

Seja φ um campo escalar contínuo cujo domínio contém uma curva C representada por $\mathbf{g} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, seccionalmente de classe C^1. O integral, $\int_C \varphi ds$, dado por

$$\int_C \varphi ds = \int_a^b \varphi[\mathbf{g}(t)] \; ||\mathbf{g}'(t)|| dt$$

chama-se integral de linha de φ sobre C relativo ao comprimento de arco s definido pelo caminho $\mathbf{g}$.

Nota: Também se chama a este integral de linha, como integral de linha de 1.ª espécie e a $ds = ||g'(t)||dt$ elemento de comprimento de arco. Pode-se também chamar integral de linha do campo escalar φ ao longo da curva/linha C.

Integral de linha

Definição

Seja φ um campo escalar contínuo cujo domínio contém uma curva C representada por $\mathbf{g} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, seccionalmente de classe C^1. O integral, $\int_C \varphi dx_i$, dado por

$$\int_C \varphi dx_i = \int_a^b \varphi[\mathbf{g}(t)]\ \mathbf{g}_i'(t)dt$$

chama-se integral de linha de φ ao longo de C relativo à componente x_i.

Integral de linha

Aplicações:

- Comprimentos de arco.
- Massa de um fio, onde $\varphi : S \to \mathbb{R}$ será a densidade por unidade de comprimento do material do fio.
- Centro de massa,
  $x_i = \frac{1}{M} \int_C x_i \varphi(x_1, ..., x_n) ds = \int_a^b g_i(t) \varphi[\mathbf{g}(t)] \ ||\mathbf{g}'(t)|| dt$
- Momento de inércia da linha C relativo à eixo L será
  $I_L = \int_C d_L^2 \varphi(x_1, ..., x_n) ds = \int_a^b \sum_{j \neq i} g_i^2(t) \varphi[\mathbf{g}(t)] \ ||\mathbf{g}'(t)|| dt$

Integral de linha

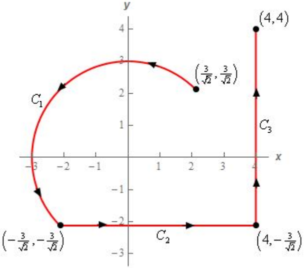
Exemplo

Considere um fio de um material cuja densidade de massa é dada por $\rho(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ *e que tem a configuração de uma espiral descrita por* $g(t) = (t\cos(t), t\sin(t)), 0 < t < 4\pi$*. Qual a coordenada* y *do seu centro de massa? Resposta:* $\bar{y} = -1$

Integral de linha

Exemplo

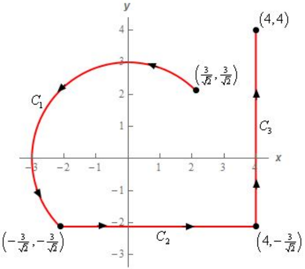
Calcule $\int_C 4y - x ds$ *onde* C *é dado por*



Integral de linha

Exemplo

Calcule $\int_C 4y - x ds$ *onde C é dado por*

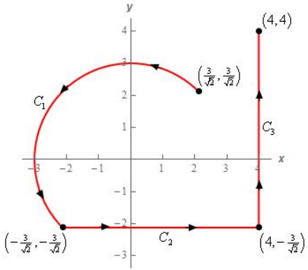


$g_1(t) = (3\cos(t), 3\sin(t)), \pi/4 \leq t \leq 5\pi/4$
$g_2(t) = (t, -3/\sqrt{2}), -3/\sqrt{2} \leq t \leq 4$ *e*
$g_3(t) = (4, t), -3/\sqrt{2} \leq t \leq 4$

Integral de linha

Exemplo

Calcule $\int_C 4y - x ds$ *onde* C *é dado por*

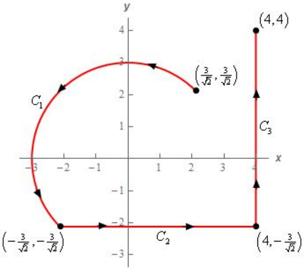


$$I_1 = \int_{C_1} 4y - xds = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} [4(3\sin(t)) - 3\cos(t)]||g_1'(t)||dt = 45\sqrt{2}$$
$$I_2 = \int_{C_2} 4y - xds = \int_{-\frac{3}{\sqrt{2}}}^{4} [4(-\frac{3}{\sqrt{2}}) - t]||g_2'(t)||dt = -\frac{95}{4} - 24\sqrt{2} \text{ e}$$
$$I_3 = \int_{C_3} 4y - xds = \int_{-\frac{3}{\sqrt{2}}}^{4} [4t - 4]||g_3'(t)||dt = 7 - 6\sqrt{2}$$

Integral de linha

Exemplo

Calcule $\int_C 4y - x ds$ *onde* C *é dado por*



$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 15\sqrt{2} - \frac{67}{4}$$