Análise Matemática III

EDO's lineares de ordem superior a 2

Ricardo Moura

Escola Naval

7 de outubro de 2021

Definição

Definição

Uma EDO linear de ordem n de coeficientes constantes é dada por:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(n-i)} = f(x) \tag{1}$$

onde $a_i, \ i = 1, ..., n$ são constantes reais. A equação

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(n-i)} = 0$$

denomina-se equação homogénea associada a (1).

Polinómio Característico

Definição

A EDO linear de ordem n de coeficientes constantes (1) *pode ser escrita recorrendo ao operador de derivação D, em que a cada função y faz corresponder à sua derivada, isto é,* $Dy = \frac{d}{dx}y$. *Para tal podemos escrever a equação* (1) *através de*

$$P(D)y = \sum_{i=0}^{n} a_i D^{(n-i)} y = f(x)$$

onde $a_i,\ i = 1, ..., n$ *são constantes reais e* $P(D)$ *é denominado polinómio característico*

$$P(D) = \sum_{i=0}^{n} a_i D^{(n-i)} = a_0 D^n + a^1 D^{n-1} \cdots + a_{n-1} D + a_n.$$

Solução da Equação Homogénea

Definição (Matriz Wronskiana e Wronskiano)

Assumindo que estamos perante n funções $y_i(x), i = 1, \ldots, n$ *funções diferenciáveis num aberto* I*, soluções da EDO homogénea*

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(n-i)} = 0, a_0 \neq 0$$

chama-se matriz Wronskiana à matriz

$$\begin{bmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ y_1^{(n)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x) \end{bmatrix}$$

e ao seu determinante, Wronskiano.

Solução da Equação Homogénea

Exemplo

Quais poderão ser soluções de

$$y'' - 2y' + y = 0?$$

Solução da Equação Homogénea

Exemplo

Quais poderão ser soluções de

$$y'' - 2y' + y = 0?$$

- $y(x) = e^x$?
-
-
-

Solução da Equação Homogénea

Exemplo

Quais poderão ser soluções de

$$y'' - 2y' + y = 0?$$

- $y(x) = e^x$?
- $y(x) = e^{-x}$?
-
-

Solução da Equação Homogénea

Exemplo

Quais poderão ser soluções de

$$y'' - 2y' + y = 0?$$

- $y(x) = e^x$?
- $y(x) = e^{-x}$?
- $y(x) = 5e^x$?
-

Solução da Equação Homogénea

Exemplo

Quais poderão ser soluções de

$$y'' - 2y' + y = 0?$$

- $y(x) = e^x$?
- $y(x) = e^{-x}$?
- $y(x) = 5e^x$?
- $y(x) = xe^x$?

Solução da Equação Homogénea

Exemplo

Quais poderão ser soluções de

$$y'' - 2y' + y = 0?$$

- $y(x) = e^x$?
- $y(x) = e^{-x}$?
- $y(x) = 5e^x$?
- $y(x) = xe^x$?

As duas soluções encontradas são linearmente independentes?

Solução da Equação Homogénea

Teorema 1: Independência linear de duas funções

Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são duas funções diferenciáveis num aberto I e se, para um $x_0 \in I$, o seu Wronskiano é diferente de zero, então as duas funções são linearmente independentes.

Teorema 2: sol. de uma EDO linear homogénea de 2.º grau de coef. constantes

Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluções da EDO homogénea $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ num aberto I, se o Wronskiano associado é diferente de zero para algum $x_0 \in I$, então toda a solução desta EDO pode ser expressa através da combinação linear de $y_1(x)$ e $y_2(x)$, i. e., $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, onde C_1, C_2 são constantes reais arbitrárias.

Solução da Equação Homogénea

Nota

O teorema 2 pode ser extensível a qualquer EDO linear homogénea de n-ésimo grau de coef. constantes.

Nota

As soluções destas EDO's lineares homogéneas de n-ésimo grau de coef. constantes estão associadas às soluções da equação característica ($P(D)=0$).

Solução da Equação Homogénea

O polinómio característico terá sempre soluções do tipo $D_k = \alpha_k + \beta_k i, k = 1, ..., n$, e, portanto, a solução da EDO linear homogénea de 2.º grau de coef. constantes, será, para C_1 e C_2 constantes reais arbitrárias,

$$y = C_1 e^{\alpha_1 x}(\cos(\beta_1 x) + \sin(\beta_1 x)) + C_2 e^{\alpha_1 x}(\cos(\beta_2 x) + \sin(\beta_2 x)),$$

excepto se $\alpha_1 = \alpha 2 = \alpha$ e $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Nesse caso, teríamos uma solução dupla e duas funções linearmente dependentes $y_1(x) = C_1 e^{\alpha x}$ e $y_1(x) = C_2 e^{\alpha x}$. Para tal desfazemos a linearidade apresentando a solução:

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x}.$$

Solução da Equação Homogénea

Resumidamente, temos três casos particulares, considerando $P(D) = 0$

- $D = \alpha_1 \wedge D = \alpha_2, \quad \alpha_1 \neq \alpha_2 \in \mathbb{R} \implies$

$$y(x) = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x}$$

- $D = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$ raiz dupla $\implies$

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x}$$

- $D = \alpha \pm \beta i, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$y(x) = e^{\alpha x} \left[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x) \right]$$

Solução da Equação Homogénea

Podemos, portanto, concluir que, para qualquer ordem n, se uma das raízes de $P(D)$ é

- real α e distinta de todas as outras raízes, uma das soluções será $y(x) = C_1 e^{\alpha x}$;
- real α e múltipla de multiplicidade m, uma das soluções será $y(x) = P_{m-1}(x) e^{\alpha x}$, sendo $P_{m-1}(x)$ um polinómio de grau $m-1$ de constantes reais arbitrárias.
- complexa $\alpha \pm \beta i$ com multiplicidade m, uma das soluções será $y(x) = e^{\alpha x} \left[P_{m-1}(x) \cos(\beta x) + Q_{m-1} \sin(\beta x)\right]$, sendo $P_{m-1}(x)$ e $Q_{m-1}(x)$ polinómios de grau $m-1$ de constantes reais arbitrárias.

Solução da Equação Homogénea

Exemplo

Integre as equações:

- $y'' + 2y' + y = 0$
- $y'' - y' - 2y = 0$
- $y'' + y' + y = 0$
- $y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y'' - 2y' + y = 0$

Solução da Equação Completa

Teorema 3: Solução geral da EDO linear de ordem n de coeficientes constantes

A solução geral de uma EDO linear de ordem n de coeficientes constantes, equação (1), é dada pela soma da solução geral da eq. homogénea associada, y_{sgh}, com a solução particular da equação completa, y_{spc}, i.e.,

$$y(x) = y_{sgh}(x) + y_{spc}(x).$$

Solução da Equação Completa

Como o próprio nome indica, só falta encontrar uma solução particular $y_{spc}(x)$ que verifique $\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(n-i)} = f(x)$, dado que já tínhamos visto como se obtém y_{sgh}.
Caso $f(x) = e^{\delta x}\left[A_n(x)\cos(\gamma x) + B_m(x)\sin(\gamma x)\right]$, onde $A_n(x)$ e $B_m(x)$ são polinómios de grau n e m, respetivamente, a solução particular será dada por:

$$y_{spc} = e^{\delta x}\left[P_N(x)\cos(\gamma x) + Q_N(x)\sin(\gamma x)\right]$$

se $\delta \pm \gamma i$ não for zero de $P(D)$, ou

$$y_{spc} = x^{k-1}e^{\delta x}\left[P_N(x)\cos(\gamma x) + Q_N(x)\sin(\gamma x)\right]$$

se $\delta \pm \gamma i$ for zero de $P(D)$ de multiplicidade k, onde $P_N(x)$ e $Q_N(x)$ serão polinómios de grau $N = \max\{n, m\}$.

Solução da Equação Completa

Nota

Repare-se que, no método anterior, se $\gamma = 0$*, teremos* $f(x) = e^{\delta x} A_n(x)$*. Neste caso, a solução particular da equação completa reduz-se a dois casos mais simples:*

- $y_{spc} = e^{\delta x} P_n(x)$*, se* δ *não for zero de* $P(D)$*;*
- $y_{spc} = x^{k-1} e^{\delta x} P_n(x)$*, se* δ *for zero de* $P(D)$ *com multiplicidade* k*, onde* $P_n(x)$ *será um polinómio de grau* n*.*

Solução da Equação Completa

Exemplo

Integre as equações:

- $y'' - 2y' + y = x^2$
- $y'' - 6y' + 13y = e^{3x}\cos(x)$
- $y'' - 6y' + 13y = e^{3x}\cos(2x)$