Análise Matemática III

Integrais de superfície de 2.ª espécie

Ricardo Moura

Escola Naval

16 de dezembro de 2021

Orientação de uma Superfície

Uma superfície é dita orientável se pudermos definir um vetor $\mathbf{N}$, um vetor normal, para cada ponto de forma que estes vetores variem continuamente sobre S.
Uma superfície orientada tem sempre dois lados distintos (dentro e fora ou cima e baixo). Considera-se positivo ou quando aponta para cima ou quando aponta para fora, respetivamente, para superfícies abertas e fechadas.

Orientação de uma Superfície

Estando perante uma superfície regular S parametrizada por $\mathbf{r}(u, v)$, os vetores normais serão dados por

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$$

e

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u = -\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$$

e os seus vetores unitários serão dados por

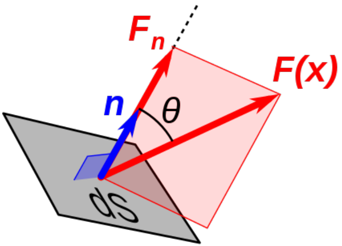
$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{||\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v||}$$

e

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u}{||\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u||} = -\frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{||\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v||}$$

Fluxo e Integral de superfície de 2.ª espécie

Se submergirmos uma superfície num fluído, que possui um campo de velocidades contínuo **F**, a quantidade de fluído que atravessa essa região por unidade de tempo pode ser calculada através desse campo de velocidades e através do vetor normal associado à superfície.



$$\Delta V = (\text{Área da base})(\text{altura}) = \Delta S\ \mathbf{F}_n$$

Fluxo e Integral de superfície de 2.ª espécie

Definição

Seja $\mathbf{F}(x, y, z) = (M, N, P)$*, onde* M*,* N *e* Q *têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas numa superfície* S *orientada pelo vetor unitário normal* $\mathbf{n}$*, o fluxo de* $\mathbf{F}$ *através de* S *é dado por*

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Fluxo e Integral de superfície de 2.ª espécie

Definição

Seja $\mathbf{F}(x,y,z) = (M,N,P)$, *onde* M, N *e* Q *têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas numa superfície* S *orientada pelo vetor unitário normal* $\mathbf{n}$, *o fluxo de* $\mathbf{F}$ *através de* S *é dado por*

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS.$$

Nota: Tendo em conta de que $dS = ||\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v||dA$, então

$$\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}dS = \iint_S \mathbf{F}\cdot\frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{||\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v||}||\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v||dA = \iint_S \mathbf{F}\cdot(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)dA$$

Fluxo e Integral de superfície de 2.ª espécie

Definição

Seja $\mathbf{F}(x,y,z) = (M,N,P)$*, onde* M*,* N *e* Q *têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas numa superfície* S *orientada pelo vetor unitário normal* $\mathbf{n}$*, o fluxo de* $\mathbf{F}$ *através de* S *é dado por*

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS.$$

Nota2: Se $\rho(x,y,z)$ for a densidade do fluído, então $\iint_S \rho\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$ representa a massa do fluído que escoa através da superfície S por unidade de tempo.

Fluxo e Integral de superfície de 2.ª espécie

Exemplo

Seja S definida por $z = 4 - x^2 - y^2$ acima de xOy, orientada positivamente. Determine a taxa de escoamento da massa fluída através de S, para um fluído com densidade contante k que escoa sob o efeito do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$.

Fluxo e Integral de superfície de 2.ª espécie

Resolução 1: Considere-se
$\mathbf{r}(x,y) = (x, y, 4-x^2-y^2), -2 \leq x \leq 2, -\sqrt{2-x^2} \leq y \leq \sqrt{2-x^2}$

Fluxo e Integral de superfície de 2.ª espécie

Resolução 1: Considere-se
$\mathbf{r}(x,y) = (x, y, 4 - x^2 - y^2), -2 \leq x \leq 2, -\sqrt{2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{2 - x^2}$
Temos

$$\mathbf{r}_x = (1, 0, -2x)$$

e

$$\mathbf{r}_y = (0, 1, -2y),$$

logo

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (2x, 2y, 1).$$

Repare-se que a componente z do vetor normal de S é positivo, logo está a apontar para cima(positivo).

Fluxo e Integral de superfície de 2.ª espécie

Resolução 1:
Portanto, a taxa de escoamento da massa fluída é calculada da seguinte forma:

$$\iint_S k(x, y, 4 - x^2 - y^2) \cdot (2x, 2y, 1) dA$$

Fluxo e Integral de superfície de 2.ª espécie

Resolução 1:
Portanto, a taxa de escoamento da massa fluída é calculada da seguinte forma:

$$\iint_S k(x, y, 4 - x^2 - y^2) \cdot (2x, 2y, 1) dA$$

$$= k \iint_S 4 + x^2 + y^2 dA = k \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 + \rho^2)\rho d\rho d\theta = 24k\pi,$$

notando que foi necessário recorrer à mudança de coordenadas.

Fluxo e Integral de superfície de 2.ª espécie

Resolução 2: Considere-se
$\mathbf{r}(\rho,\theta) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), 4-\rho^2), 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 2$

Fluxo e Integral de superfície de 2.ª espécie

Resolução 2: Considere-se
$\mathbf{r}(\rho,\theta) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), 4-\rho^2), 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 2$
Temos

$$\mathbf{r}_\rho = (\cos(\theta), \sin(\theta), -2\rho)$$

e

$$\mathbf{r}_\theta = (-\rho\sin(\theta), \rho\cos(\theta), 0),$$

logo

$$\mathbf{r}_\rho \times \mathbf{r}_\theta = (2\rho^2\cos(\theta), 2\rho^2\sin(\theta), \rho).$$

Repare-se que a componente z do vetor normal de S também é positiva, logo está a apontar para cima(positiva).

Fluxo e Integral de superfície de 2.ª espécie

Resolução 2:
Portanto, a taxa de escoamento da massa fluída é calculada da seguinte forma:

$$\iint_S k(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), 4-\rho^2)\cdot(2\rho^2\cos(\theta), 2\rho^2\sin(\theta), \rho)dA$$

Fluxo e Integral de superfície de 2.ª espécie

Resolução 2:
Portanto, a taxa de escoamento da massa fluída é calculada da seguinte forma:

$$\iint_S k(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), 4-\rho^2)\cdot(2\rho^2\cos(\theta), 2\rho^2\sin(\theta), \rho)dA$$

$$= k\int_0^{2\pi}\int_0^2 4\rho + \rho^3 d\rho d\theta = 24k\pi,$$

notando que não foi necessário recorrer à mudança de coordenadas, mas foi como se o tivéssemos feito aquando da parametrização.

Fluxo e Integral de superfície de 2.ª espécie

Exemplo

Determine o fluxo sobre a esfera S descrita por

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

onde $\mathbf{F}$ *é um campo vetorial (inverso do quadrado) definido por*

$$\mathbf{F} = \frac{kq}{||\mathbf{v}||^2} \frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||},$$

onde k e q são constantes e $\mathbf{v} = (x, y, z)$. Considere S orientada pela normal apontando para o exterior.

Fluxo e Integral de superfície de 2.ª espécie

Resolução: $\mathbf{r}(u,v) = (a\sin(u)\cos(v), a\sin(u)\sin(v), a\cos(u)), u \in [0,\pi], v \in [0,2\pi]$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = a^2(\sin^2(u)\sin(v), \sin^2(u)\sin(v), \sin(u)\cos(u))$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) = \frac{kq\mathbf{r}(u,v)}{||\mathbf{r}(u,v)||^3} = \frac{kq}{a^2}(\sin(u)\cos(v), \sin(u)\sin(v), \cos(u))$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) = kq\sin(u)$$

Logo, o fluxo é dado por $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} kq\sin(u)dudv = 4\pi kq$, independente do raio da esfera.

Fluxo e Integral de superfície de 2.ª espécie

Nota: Se **E** for um campo elétrico, em conjunto com as Leis de Coulomb, temos uma das leis básicas da eletrostática, a Lei de Gauss:

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi kq$$

onde q é uma carga localizada no centro da esfera e k é a constante de Coulomb. Esta lei é mais genérica, para superfícies que contenham a origem do referencial e que q esteja no interior.

Teorema do Divergente

Teorema 1: Teorema do Divergente

Seja R uma região sólida limitada por S, uma superfície fechada, orientada para fora, seja $\mathbf{F}$ um campo vetorial cujas componentes tem derivadas parciais contínuas em R, então

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_R div \mathbf{F} dV.$$

Teorema do Divergente

Exemplo

Seja R o sólido limitado pelos planos coordenados e por $2x + 2y + z = 6$ e $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y^2, z)$. Calcule $\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}dS$, onde $\mathbf{n}$ *aponta para fora e S é a fronteira do sólido.*

Teorema do Divergente

Exemplo

Seja R o sólido limitado pelos planos coordenados e por $2x+2y+z=6$ e $\mathbf{F}(x,y,z)=(x,y^2,z)$. Calcule $\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}dS$, onde $\mathbf{n}$ aponta para fora e S é a fronteira do sólido.

Seria necessário calcular quatro integrais de superfície, mas pelo teorema do divergente,

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \iiint_R div\mathbf{F}dV = \int_0^3\int_0^{3-y}\int_0^{6-2x-2y} \nabla\cdot\mathbf{F}dzdydx = \frac{63}{2}$$

Teorema do Divergente

Exemplo

Verifique o teorema do divergente para o sólido limitado pelo paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ *e o plano* xOy*, considerando*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{e}_1 + x\mathbf{e}_2 + y^2\mathbf{e}_3.$$

Teorema do Divergente

Nota: O divergente num ponto (x_0, y_0, z_0) na realidade representa o fluxo por unidade de volume nesse ponto, e pode ser classificado como fonte, se $div\mathbf{F} > 0$, sorvedouro/sumidouro, se $div\mathbf{F} < 0$, e quando é igual a zero classifica-se como incompressível. Na hidrodinâmica, a fonte é o local onde o fluído é inserido na região e sumidouro é o local onde o fluído é retirado da região.

Teorema de Stokes

A versão tridimensional do Teorema de Green é apresentada através o Teorema de Stokes.
Da mesma forma que o Teorema de Green relaciona um integral de linha de 2.ª espécie com um integral duplo, o Teorema de Stokes relaciona um integral de linha de 2.ª espécie com um integral de superfície de 2.ª espécie.

Teorema de Stokes

Teorema 2: Teorema de Stokes

Seja S uma superfície orientada com vetor normal unitário $\mathbf{n}$, cuja fronteira é uma curva fechada simples e regular (ou seccionalmente), com orientação positiva em relação a $\mathbf{n}$, seja $\mathbf{F}$ um campo vetorial cujas componentes têm derivadas parciais contínuas sobre o região aberta S e C, então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\mathbf{rot}\ \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\ dS$$

Teorema de Stokes

Exemplo

Seja C o triângulo orientado, contido em $2x + 2y + z = 6$, efetuando a interseção deste plano, alternadamente, com os planos ordenados. Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, para $\mathbf{F} = (-y^2, z, x)$. [R:$-9$]

Exemplo

Verifique o Teorema de Stokes para $\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$, onde S é a superfície do paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ e C é a interseção de S com o plano xOy. [R:4π]

Teorema de Stokes

Nota: É possível chamar ao produto interno de um rotacional num ponto P_0 pela normal à superfície

$$\textbf{rot } \mathbf{F}(P_0) \cdot \mathbf{n}$$

a densidade de circulação de $\mathbf{F}$ em P_0 na direção de $\mathbf{n}$. Ou seja, este valor irá atingir a máxima densidade de circulação quando $\mathbf{n}$ estiver na mesma direção de $\mathbf{F}(P_0)$, concluindo que quando perante um fluxo constante de um fluído a densidade de circulação deste atingirá um máximo quando estiver na direção do rotacional.