Análise Matemática III

Intergração dupla

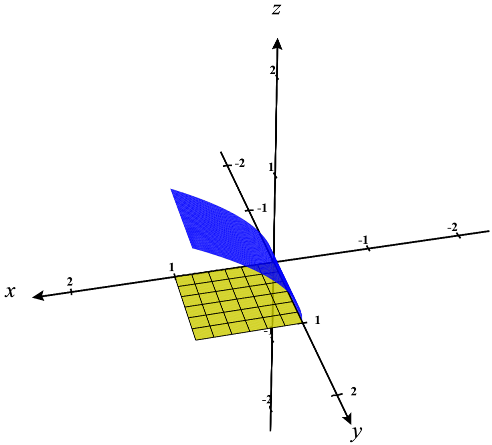
Ricardo Moura

Escola Naval

13 de outubro de 2021

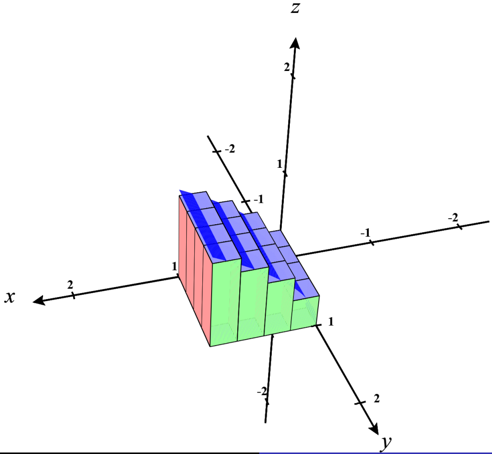
Somas de Riemann duplas

Qual será o volume do sólido limitado por
$z = \sqrt{x}, \; x = 0, \; y = 0, \; z = 0, \; x = 1, \; y = 1$?



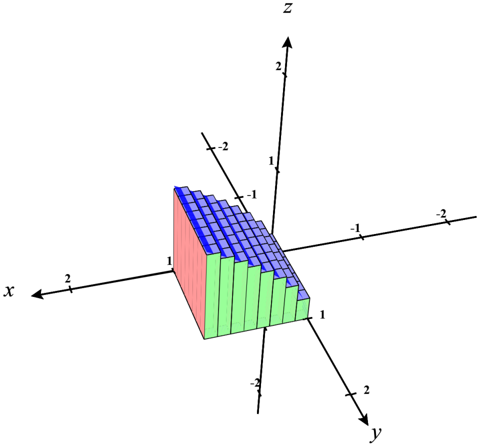
Somas de Riemann duplas

Qual será o volume do sólido limitado por
$z = \sqrt{x},\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x = 1,\ y = 1?$



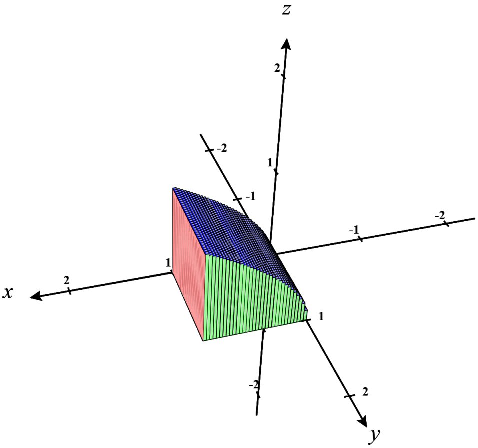
Somas de Riemann duplas

Qual será o volume do sólido limitado por
$z = \sqrt{x},\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x = 1,\ y = 1?$



Somas de Riemann duplas

Qual será o volume do sólido limitado por
$z = \sqrt{x},\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x = 1,\ y = 1$?



Somas de Riemann duplas

Para se obter uma soma de Riemann dupla, tem que se definir um conjunto compacto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ (fechado e limitado). Este será decomposto em n malhas retangulares D_i, e a partir dele são definidos paralelipípedos (prismas de Riemann) cuja altura será definida pelo valor de $z = f(x, y)$, substituindo (x, y) por $(x_i, y_i) \in D_i$. A soma dos volumes de todos os prismas de Riemann, quando $n \to +\infty$, corresponderá ao integral de Riemann na região D.

$$\int \int_D f(x, y) dxdy = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ \max A_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) A_i$$

onde A_i corresponde à área de D_i. Questão: E se o gráfico estivesse abaixo de $z = 0$?

Integrais duplos

Região do tipo 1: $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge g(x) \leq y \leq h(x))\right\}$ onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $g(x), h(x)$ contínuas.

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)dy\right) dx$$

Integra-se em primeiro lugar em ordem a y (assumindo x como constante) e depois em ordem a x.

Região do tipo 2: $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d \wedge m(y) \leq x \leq n(y)\right\}$ onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $g(x), h(x)$ contínuas.

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{m(y)}^{n(y)} f(x,y)dx\right) dy$$

Integra-se em primeiro lugar em ordem a x (assumindo y como constante) e depois em ordem a y.

Integrais duplos

Teorema 1: Fubini

Se $f(x,y)$ é uma função contínua num retângulo $R = [a,b] \times [c,d]$, então

$$\int\int_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

Exemplo

Calcule $\int_0^4 \int_0^4 (12x^2y^3)dxdy$
$\int_4^5 \int_2^3 (3x+y)^{-2}dxdy$
$\int_{-1}^1 \int_y^2 (2x+y)dxdy$

Integrais duplos

Teorema 2: Fubini

Se $f(x,y)$ é uma função contínua num retângulo $R=[a,b]\times[c,d]$, então

$$\int\int_R f(x,y)dA=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx$$

Exemplo

Calcule $\int_0^4\int_0^4(12x^2y^3)dxdy$ *16384*
$\int_4^5\int_2^3(3x+y)^{-2}dxdy$
$\int_{-1}^1\int_y^2(2x+y)dxdy$

Integrais duplos

Teorema 3: Fubini

Se $f(x,y)$ é uma função contínua num retângulo $R = [a,b] \times [c,d]$, então

$$\int\int_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

Exemplo

Calcule $\int_0^4 \int_0^4 (12x^2y^3)dxdy$

$\int_4^5 \int_2^3 (3x+y)^{-2}dxdy$ *0.0071*

$\int_{-1}^1 \int_y^2 (2x+y)dxdy$

Integrais duplos

Teorema 4: Fubini

Se $f(x,y)$ é uma função contínua num retângulo $R=[a,b]\times[c,d]$, então

$$\int\int_R f(x,y)dA=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx$$

Exemplo

Calcule $\int_0^4\int_0^4(12x^2y^3)dxdy$
$\int_4^5\int_2^3(3x+y)^{-2}dxdy$
$\int_{-1}^1\int_y^2(2x+y)dxdy \ \frac{20}{3}$

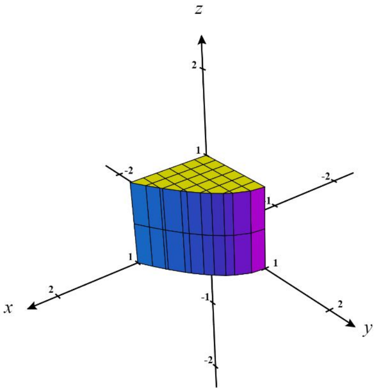
Propriedades dos Integrais duplos

- Linearidade:
  $\int\int_A (f+g)(x,y)dxdy = \int\int_A f(x,y)dxdy + \int\int_A g(x,y)dxdy$
  e
  $\int\int_A kf(x,y)dxdy = k\int\int_A f(x,y)dxdy$
- Aditividade:
  $\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_{D_1} f(x,y)dxdy + \int\int_{D_2} f(x,y)dxdy$
  para $D = D_1 \cup D_2$, onde D_1 e D_2 não possuem pontos interiores em comum.
- Positividade: $\forall (x,y) \in D : f(x,y) \geq g(x,y)$, então
  $\int\int_D f(x,y)dxdy \geq \int\int_D g(x,y)dxdy$,
  e se $\forall (x,y) \in D : f(x,y) \geq 0$, então
  $\int\int_D f(x,y)dxdy \geq 0$

Mudança da ordem de integração

Exemplo

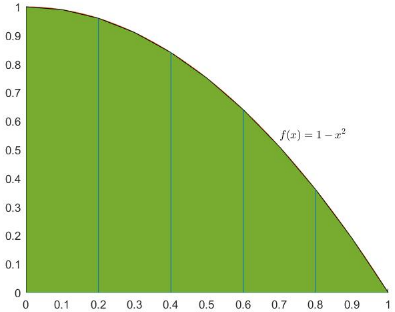
Considere $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1 - x^2; x > 0\right\}$, *calcule a área/volume da figura?*



Mudança da ordem de integração

Exemplo

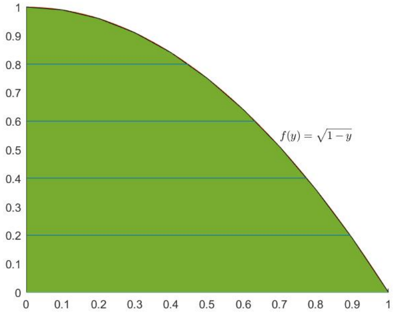
Considere $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1 - x^2; x > 0\right\}$, *calcule a área/volume da figura?*



Mudança da ordem de integração

Exemplo

Considere $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1 - x^2; x > 0\right\}$, *calcule a área/volume da figura?*

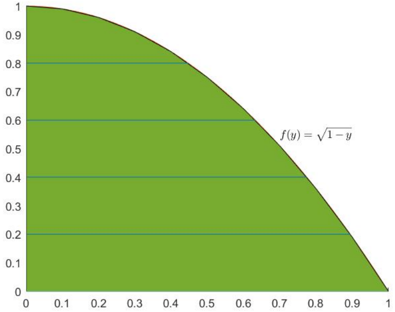


Mudança da ordem de integração

Exemplo

Considere $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1 - x^2; x > 0\right\}$, *calcule a área/volume da figura?*

Sol: $\frac{2}{3}$



Mudança da ordem de integração

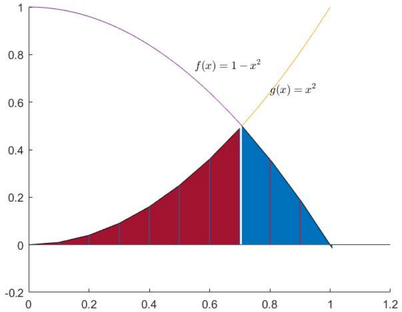
Exemplo

Considere $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0; 0 < y < x^2; y < 1 - x^2\right\}$*, calcule a área/volume da figura?*

Mudança da ordem de integração

Exemplo

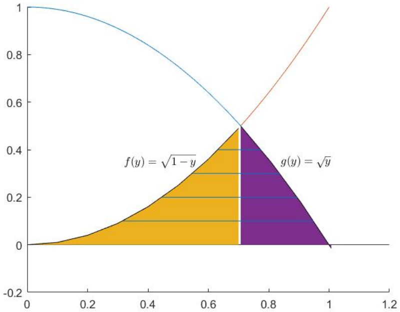
Considere $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0; 0 < y < x^2; y < 1 - x^2\}$,
calcule a área/volume da figura?



Mudança da ordem de integração

Exemplo

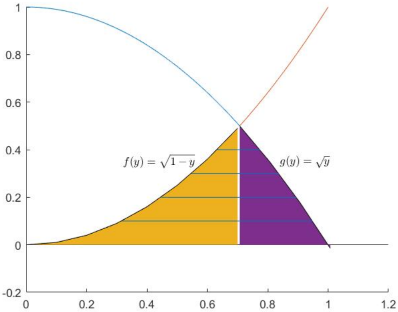
Considere $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0; 0 < y < x^2; y < 1 - x^2\right\}$*, calcule a área/volume da figura?*



Mudança da ordem de integração

Exemplo

Considere $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0; 0 < y < x^2; y < 1 - x^2\right\}$,
calcule a área/volume da figura?



Sol: $\frac{2-\sqrt{2}}{3}$

Mudança da ordem de integração

Exemplo

Considere $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\right\}$, *calcule o integral*

$$\int_D e^{x+y} dxdy.$$

Mudança da ordem de integração

Exemplo

Considere $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\right\}$, *calcule o integral*

$$\int_D e^{x+y} dxdy.$$

Sol: $\frac{e^2-1}{e}$

Aplicações dos integrais duplos

- Área (das regiões de integração $\int_D 1dA$)

Aplicações dos integrais duplos

- Área (das regiões de integração $\int_D 1dA$)
- Volume de sólidos limitados por $z = f(x, y)$ (ver sebenta) e por uma região D do plano xOy onde a superfície lateral corresponde à superfície cilíndrica de geratriz paralela ao eixo dos zz cuja a diretriz é a fronteira de D.

Aplicações dos integrais duplos

- Área (das regiões de integração $\int_D 1dA$)
- Volume de sólidos limitados por $z = f(x, y)$ (ver sebenta) e por uma região D do plano xOy onde a superfície lateral corresponde à superfície cilíndrica de geratriz paralela ao eixo dos zz cuja a diretriz é a fronteira de D.
- Massa total de uma lâmina T - $M = \int\int_D \rho(x, y)dxdy$ onde ρ será a massa específica. (Massa - medida de resistência de um corpo relativamente a mudanças no seu movimento - usado no cálculo da Força)

Aplicações dos integrais duplos

- Área (das regiões de integração $\int_D 1dA$)
- Volume de sólidos limitados por $z = f(x, y)$ (ver sebenta) e por uma região D do plano xOy onde a superfície lateral corresponde à superfície cilíndrica de geratriz paralela ao eixo dos zz cuja a diretriz é a fronteira de D.
- Massa total de uma lâmina T - $M = \int\int_D \rho(x, y)dxdy$ onde ρ será a massa específica. (Massa - medida de resistência de um corpo relativamente a mudanças no seu movimento - usado no cálculo da Força)

Aplicações dos integrais duplos

- Centro de massa de uma lâmina T - $\bar{x} = \frac{1}{M} \int\int_D x\rho(x,y)dxdy = \frac{M_x}{M}$ e $\bar{y} = \frac{1}{M} \int\int_D y\rho(x,y)dxdy = \frac{M_y}{M}$ (ponto da(o) lâmina/corpo de 'apoio' onde o sistema físico fica equilibrado)

Aplicações dos integrais duplos

- Centro de massa de uma lâmina T - $\bar{x} = \frac{1}{M} \int\int_D x\rho(x,y)dxdy = \frac{M_x}{M}$ e $\bar{y} = \frac{1}{M} \int\int_D y\rho(x,y)dxdy = \frac{M_y}{M}$ (ponto da(o) lâmina/corpo de 'apoio' onde o sistema físico fica equilibrado)
- Momento de inércia (segundo momento) $I_x = \int\int_D y^2\rho(x,y)dxdy$ e $I_y = \int\int_D x^2\rho(x,y)dxdy$ (medida da tendência do(a) corpo/lâmina resistir ao movimento de rotação em torno de um eixo/reta - fórmula geral $I_{eixo} = \int\int_D d^2(x,y)\rho(x,y)dxdy$ onde $d^2(x,y)$ é a distância de qualquer ponto ao eixo de rotação. Útil para calcular energia cinética de uma lâmina)

Aplicações dos integrais duplos

- Centro de massa de uma lâmina T - $\bar{x} = \frac{1}{M}\int\int_D x\rho(x,y)dxdy = \frac{M_x}{M}$ e $\bar{y} = \frac{1}{M}\int\int_D y\rho(x,y)dxdy = \frac{M_y}{M}$ (ponto da(o) lâmina/corpo de 'apoio' onde o sistema físico fica equilibrado)
- Momento de inércia (segundo momento) $I_x = \int\int_D y^2\rho(x,y)dxdy$ e $I_y = \int\int_D x^2\rho(x,y)dxdy$ (medida da tendência do(a) corpo/lâmina resistir ao movimento de rotação em torno de um eixo/reta - fórmula geral $I_{eixo} = \int\int_D d^2(x,y)\rho(x,y)dxdy$ onde $d^2(x,y)$ é a distância de qualquer ponto ao eixo de rotação. Útil para calcular energia cinética de uma lâmina)

Aplicações dos integrais duplos

Área da superfície:

Definição

Se $f(x, y)$ e as suas derivadas parciais forem contínuas em D no plano xOy, então a área da superfície S dada por $z = f(x, y)$ sobre D será

$$\int\int_D dS = \int\int_D \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}dA$$

onde $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ e $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$

Aplicações dos integrais duplos

Exemplo

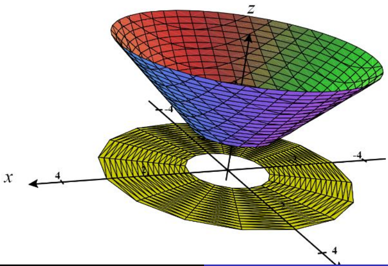
Área da superfície do sólido limitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ *e pelos planos* $z = 1$ *e* $z = 3$.

Aplicações dos integrais duplos

Exemplo

Área da superfície do sólido limitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ *e pelos planos* $z = 1$ *e* $z = 3$.

Estando a superfície definida por uma função explicitamente dependente apenas de x e de y, então podemos usar a expressão dada para calcular a área da superfície.



Aplicações dos integrais duplos

Exemplo

Área da superfície do sólido limitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pelos planos $z = 1$ e $z = 3$.

$$\int\int_D \sqrt{1 + \left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]^2} dxdy =$$

$$\int\int_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dxdy = 8\sqrt{2}\pi$$

Aplicações dos integrais duplos

Exemplo

Área da superfície do sólido limitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pelos planos $z = 1$ e $z = 3$.

$$\int\int_D \sqrt{1 + \left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]^2} dxdy =$$

$$\int\int_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dxdy = 8\sqrt{2}\pi$$

Mas quantas subdivisões de D teríamos de fazer para calcular este integral?