Análise Matemática III

Equações diferenciais ordinárias

Ricardo Moura

Escola Naval

21 de setembro de 2021

Equações diferenciais

Definição (Equação diferencial)

Uma equação diferencial é uma equação que relaciona funções (variáveis dependentes ou incógnitas) com as suas derivadas (derivadas da variável dependente em relação a uma ou mais variáveis).

Exemplo

$y' = y$, $y'' = -g$ *- com* $g \in \mathbb{R}$, *Lei de arrefecimento de Newton - a taxa de perda de calor de um corpo é proporcional à diferença entre as temperaturas do corpo,* T, *e do meio ambiente.* T_m.

$$\frac{dT}{dt} = -k\,(T - T_m), k \in \mathbb{R}$$

Equações diferenciais

Definição (Equação diferencial ordinária - EDO)

Uma equação diferencial diz-se ordinária (EDO) se a função incógnita depender apenas de uma variável.

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Definição (Equação diferencial com derivadas parciais - EDP)

Uma equação diferencial diz-se com derivadas parciais (EDP) se a função incógnita depender de duas ou mais variáveis.

Definição (Ordem de uma equação diferencial)

Uma equação diferencial diz-se de ordem n se a derivada de maior grau for n.

EDO's

Definição (Forma normal)

Uma EDO de ordem n que possa ser representada na forma

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

diz-se representada na forma normal.

Definição (Equação diferencial linear)

Diz-se que uma equação diferencial é linear se a função dependente e as suas derivadas não possuem grau (valor do expoente) diferente de 1 (algumas poderão ter expoente nulo) e os coeficientes dependem apenas da variável independente.

Nota

$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$ *é uma*

EDO's

Definição (equação diferencial linear homogénea)

Uma equação diferencial linear diz-se homogénea se o termo independente $g(x)$ *for identicamente nula.*

Definição

$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$ *é uma EDO linear de ordem* n *de coeficientes constantes se* $a_i(x), i = 1, \ldots, n$, *forem funções constantes, caso contrário, será de coeficientes variáveis.*

Exemplo (equação diferencial linear homogénea)

Indique o tipo e classificação de cada uma das equações diferenciais seguintes:

$yy' + 2x = 0$

$y' + 3ty^2 - t^2 = 0$

$(y'')^4 - 2x(y')^5 - xy = 0$

$y'' + y + x = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 3\frac{\partial f}{\partial x^2} = 0$

$yy'' + cos(y) = 2x$

$3y\frac{\partial f}{\partial x} - 3x\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

Solução de uma EDO

Definição (Soluçao de uma equação diferencial)

Uma solução de um equação diferencial um intervalo $\mathbf{I}$ *será toda a função definida e derivável em* $\mathbf{I}$*, tantas vezes quanto a ordem da equação diferencial, que ao ser substituída na função incógnita verifica uma relação de igualdade.*

Nota

A função $f(x)$ *é solução da EDO de ordem* n *em* $\mathbf{I}$*,* $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$*, se* $F(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x))$ *estiver definida para todo* $x \in \mathbf{I}$ *e se* $F(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)) = 0$ *for uma proposição verdadeira para todo* $x \in \mathbf{I}$*.*

Nota

Quando a solução é apresentada na forma implícita (a solução é apresentada em forma de equação relacionando as diversas variáveis), dá-se o nome de <u>*solução implícita*</u> *ou* <u>*solução integral*</u>*.*

Solução de uma EDO

Exemplo

Qualquer uma das equações $y = \sin(2x), y = \cos(2x)$ *é solução da equação diferencial* $y'' + 4y = 0$*. (Veremos à posteriori que qualquer combinação linear de cada uma das duas funções apresentadas é também solução desta equação diferencial)*

A equação $y^2 + x^2 = 1$ *é uma solução implícita de* $yy' + x = 0$ *no intervalo* $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Curva integral

Definição (Curva integral)

Uma curva integral de uma EDO corresponde ao gráfico (geométrico) da solução da EDO. No caso da solução geral da EDO, a curva integral é na verdade uma família de curvas e, no caso de uma solução particular, representa uma dessas curvas.

Definição (Campo de direções)

Um campo de direções de uma equação diferencial na forma $y' = f(x, y)$ *é a representação gráfica dos versores das retas tangentes às soluções particulares da EDO, numa malha de pontos definidas em* $\mathbf{I}_x \times \mathbf{I}_y \subset D_f$

Exemplo

Como descobrir as curvas integrais da eq. dif. $xy' - 2y = 0$ *através dos campos de direções?*

Exemplo

Como descobrir as curvas integrais da eq. dif. $xy' - 2y = 0$ *através dos campos de direções?*

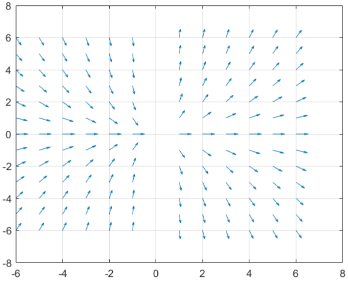

Figura: Campo de direções.

Exemplo

Como descobrir as curvas integrais da eq. dif. $xy' - 2y = 0$ *através dos campos de direções?*

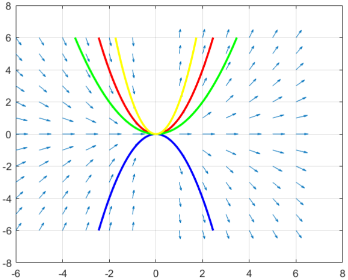

Figura: Campo de direções e 4 curvas integrais.

Problema de valores iniciais

Definição (PVI)

Um problema de valores iniciais (PVI) associado a uma equação diferencial consiste em determinar a solução particular desta que satisfaça uma condição inicial (se a equação diferencial é de ordem n *terão de ser dados os valores da função incógnita e das suas derivadas até à ordem* $n-1$ *num mesmo ponto do domínio).*

Nota

No caso de uma EDO linear de 1.ª ordem, o PVI pode ser apresentado apenas através de:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Problema de valores iniciais

Teorema (Existência e unicidade de um PVI)

Considerando um PVI de uma EDO linear de 1.ª ordem

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases},$$

então, para $\forall (x_0, y_0) \in D_f$*, existe uma única solução* $y(x)$ *da equação diferencial num intervalo* $[x_0 - h, x_o + h]$*, com* $h > 0$*, tal que* $y(x_0) = y_0$*, se satisfizerem as seguintes condições*

- f *for contínua num aberto* $D_f \subset \mathbb{R}^2$*;*
- $\frac{\partial f}{\partial y}$ *for contínua em* D_f*;*

Problema de valores iniciais

Exemplo

Verifique que $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - 1$ *é solução da EDO* $y'' + y' - 2y = 2$. *Qual a solução particular desta EDO, se se considerarem as seguintes condições iniciais:* $y(0) = 0 \wedge y'(0) = 4$