Análise Matemática III

Integrais de linha de 2.ª espécie

Ricardo Moura

Escola Naval

19 de novembro de 2021

Introdução

Na Física, é importante saber determinar o trabalho realizado por uma força (campo vetorial) ao longo da trajetória de uma partícula. Ora, sabendo a parametrização $g(t)$ de uma curva, sabemos qual será a direção e sentido do movimento dessa partícula através de $g'(t)$. Se tomarmos o vetor tangente unitário $T(t) = \frac{g'(t)}{||g'(t)||}$, então a variação do trabalho realizado no instante t_i será dado por

$$\Delta W_i \approx F \cdot T \Delta s_i (\text{Força vezes distância})$$

Consequentemente, o trabalho total será dado por

$$\int_C F(x,y,z) \cdot T(x,y,z) ds$$

Integrais de linha de campos vetoriais ao longo de C

$$\int_C F(x,y,z)\cdot T(x,y,z)ds = \int_C F(g(t))\cdot \frac{g'(t)}{||g'(t)||}||g'(t)||dt =$$

$$\int_C F(g(t))\cdot g'(t)dt = \int_C F(g(t))\cdot dg$$

Nota: Ao contrário dos integrais de linha de 1.ª espécie este integral depende do sentido tomado na trajetória.

Integrais de linha de campos vetoriais ao longo de C

Definição

Seja C uma curva representada parametricamente por um caminho $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, seccionalmente de classe C^1, e F um campo vectorial definido em C tomando valores em $\mathbb{R}^n$, chama-se integral de linha de F ao longo do caminho g ao integral

$$\int_C F \cdot dg = \int_a^b F[g(t)] \cdot g'(t)dt,$$

sempre que exista o último integral. Nota: "$\cdot$"representa produto interno.

Nota: Ao contrário dos integrais de linha de 1.ª espécie este integral depende do sentido tomado na trajetória.

Integrais de linha de campos vetoriais ao longo de C

- Quando $g(a) = g(b)$, ou seja, quando o caminho é fechado, costuma-se representar este integral de linha de F sobre g através de

$$\oint_C F \cdot dg$$

- Observando que

$$\int_C F \cdot dg = \int_a^b (P(g(t)), Q(g(t)), R(g(t))) \cdot (g_1'(t), g_2'(t), g_3'(t)) dt =$$

$$= \int_a^b P(g(t))g_1'(t) + Q(g(t))g_2'(t) + R(g(t))g_3'(t) dt$$

temos que

$$\int_C F \cdot dg = \int_C P dg_1 + \int_C Q dg_2 + \int_C R dg_3$$

Propriedades

1) *Se a e b são números reais quaisquer tem-se*

$$\int_C (a\varphi + b\psi)ds = a\int_C \varphi ds + b\int_C \psi ds$$

e

$$\int_C (a\mathbf{f} + b\mathbf{h}).d\mathbf{g} = a\int_C \mathbf{f}.d\mathbf{g} + b\int_C \mathbf{h}.d\mathbf{g};$$

2) *Se C é uma curva tal que $C = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n$ $(n \in \mathbb{N})$, e $\mathbf{g}$ é um caminho seccionalmente C^1 que representa C, então*

$$\int_C \varphi ds = \int_{C_1} \varphi ds + \int_{C_2} \varphi ds + \cdots + \int_{C_n} \varphi ds$$

e

$$\int_C \mathbf{f}.d\mathbf{g} = \int_{C_1} \mathbf{f}.d\mathbf{g}_1 + \int_{C_2} \mathbf{f}.d\mathbf{g}_2 + \cdots + \int_{C_n} \mathbf{f}.d\mathbf{g}_n,$$

onde $\mathbf{g}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ é a restrição de $\mathbf{g}$ a um certo intervalo de modo que constitua uma parametrização de C_i.

Propriedades

Repare-se que tínhamos

$$\int_C \varphi ds = \int_{-C} \varphi ds,$$

no entanto, para os de 2.ª espécie

$$\int_C F \cdot dg = -\int_{-C} F \cdot dg.$$

Propriedades

Repare-se que se a força for constante $(F(x,y,z) = k_1\vec{i} + k_2\vec{j} + k_3\vec{k})$ então

$$\int_C \varphi ds = \int_a^b (k_1, k_2, k_3) \cdot (g_1'(t), g_2'(t), g_3'(t))dt =$$

$$= (k_1, k_2, k_3) \cdot (g(b) - g(a)),$$

ou seja, só depende dos pontos extremos não dependendo do caminho traçado de $g(a)$ a $g(b)$.
Se o campo vetorial F for ortogonal ao vetor tangente $g'(t)$ em todos os pontos, então o trabalho será nulo.

Propriedades

Exemplo

Seja C o arco de parábola descrita por $g(t) = (t, t^2), t \in [0, 1]$, e $F(x, y) = (x, y)$, calcule o integral de linha do campo F ao longo de C. R:[1].

Exemplo

Seja C a linha definida pelas equações $x = y$ e $z = x^2 + y^2$ ligando a Origem ao ponto $(1, 1, 2)$ e considere $F(x, y, z) = (xyz, x^2z, xy)$. Calcule o trabalho de F ao longo de C. R:[$\frac{9}{5}$]

Propriedades

Teorema 1: Fundamental do cálculo dos integrais de linha

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $\Phi : R \to \mathbb{R}$ um campo escalar de classe C^1, e $C \subset R$ a curva definida pelo caminho regular $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ entre o ponto $g(a)$ e o ponto $g(b)$, então,

$$\int_C \nabla\Phi \cdot dg = \Phi(g(b)) - \Phi(g(a)).$$

Campos Conservativos

Definição

Dado um campo vetorial $F : R \to \mathbb{R}^n$*, se existir um campo escalar* $\Phi : R \to \mathbb{R}$*, tal que*

$$F = \nabla \Phi$$

diz-se que F *é um campo gradiente e que* Φ *é o* **potencial escalar** *de* F*.*

F diz-se conservativo se e só se

- Existe o potencial escalar Φ tal que $\nabla \Phi = F$.
- Se o trabalho de F ao longo de C (seccionalmente de C^1) só depender dos extremos (dados os mesmos extremos, o trabalho é sempre o mesmo independentemente do caminho)
- o integral de F ao longo de um caminho fechado (seccionalmente de C^1) é sempre nulo.

Campos Conservativos

Se a região R for um aberto simplesmente conexo e F for de classe C^1, F é conservativo se e só se o rotacional de F é nulo, isto é,

$$\nabla \times F = 0.$$

Example

Seja $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$F(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}\vec{e_1} + \frac{y}{x^2+y^2}\vec{e_2}$$

Mostre que é conservativo.

Campos Conservativos

Example

Considere-se o campo vetorial $F(x, y, z) = (y, x + ze^{yz}, ye^{yz})$.
Verifique que é conservativo e encontre o seu potencial.

Teorema de Green

Para que haja a compreensão do Teorema de Green, passemos a escrever o integral vetorial de linha de $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ ao longo de C através de

$$\int_C F \cdot dg = \int_C Pdx + Qdy$$

Teorema de Green

Sejam P e Q campos escalares continuamente diferenciáveis num aberto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ e C uma curva fechada simples de classe C^1, que não é intersetada em mais de dois pontos por qualquer reta perpendicular aos eixos coordenados que passe pelo interior da região delimitada por C. Seja R a união de C com o seu interior que se admite ser um subconjunto de S, então, tem-se a igualdade

$$\oint_C Pdx + Qdy = \int\int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

onde o integral de linha é calculado ao longo de C no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.

Teorema de Green

O resultado anterior exige condições muito exigentes. É possível ter o mesmo resultado enfraquecendo algumas dessas condições.

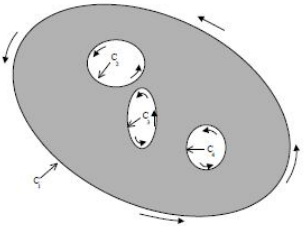
Teorema 2: Teorema de Green

Sejam P e Q campos escalares continuamente diferenciáveis num aberto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ e C **uma curva fechada simples seccionalmente regular**. Seja R a união de C com o seu interior que se admite ser um subconjunto de S, então, tem-se a igualdade

$$\oint_C Pdx + Qdy = \int\int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

onde o integral de linha é calculado ao longo de C no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.

Teorema de Green



Caso R seja multiplamente conexa: Ver teorema 6 da sebenta.

$$\int\int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_{C_1} Pdx + Qdy - \sum_{k=2}^{4} \oint_{C_k} Pdx + Qdy$$

Teorema de Green

Observe-se que se tivermos $F = (P, Q)$ tal que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = k$$

então a área de R, será dada por

$$Area(R) = \frac{1}{k} \oint_C Pdx + Qdy$$

onde C percorre a fronteira de R no sentido positivo.

Teorema de Green

Exemplo

Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *o campo vetorial definido por*

$$F(x, y) = (-y, x)$$

temos que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2$*. Seja* R *definido por*
$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\right\}$*, a fronteira pode ser definida por*

$$g(t) = (a\cos(t), b\sin(t)), 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Então, a área é dada por

$$\frac{1}{2}\oint_C -ydx + xdy = \pi ab$$

Teorema de Green

Exemplo

Calcule o trabalho realizado pelo campo vetorial $G(x, y) = (\sin(x^2), cos(y^2) + x)$ *ao logo da elipse dada pela equação* $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ *percorrida no sentido horário.*