Análise Matemática III

Integração tripla - Mudança de Variáveis

Ricardo Moura

Escola Naval

21 de outubro de 2021

Mudança de Variáveis

Relembrar o teorema da mudança de variáveis:

Teorema 1: Integral da Mudança de Variáveis

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $g : D \to \mathbb{R}^n$ uma mudança de variáveis, tal que $X = g(D)$ e $f : X \to \mathbb{R}$, então:

$$\int_X f(x)dx = \int_D f(g(t)) \times |J_{g(t)}|dt.$$

Coordenadas cilíndricas

Considere o conjunto dos pontos que respeitam as seguintes condições: $x^2 + y^2 < R^2$ e $0 < z < h$.
`https://www.math3d.org/p6MCLU3I`
Como se pode ver, estamos perante um cilindro genérico. Uma projeção em xOy, a figura resultante será a de um círculo, portanto, podemos adotar uma substituição parecida com as coordenadas polares.

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \quad , 0 < \rho < R, 0 < \theta < 2\pi, 0 < z < h.$$

Coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \\ z = z \end{cases}, 0 < \rho < R, 0 < \theta < 2\pi, 0 < z < h.$$

Ora, o seu Jacobiano será dado por:

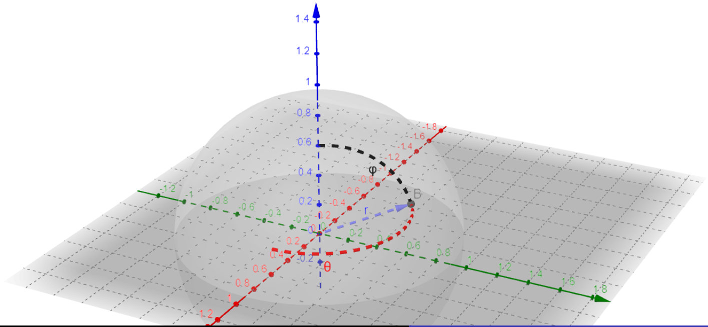
$$J_c = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\rho\sin(\theta) & \rho\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

E, $|det(J_c)| = |\rho\cos^2(\theta) + \rho\sin^2(\theta)| = \rho$ Portanto, o volume do sólido será

$$\iiint_S 1dV = \int_0^{2\pi}\int_0^h\int_0^R 1\times\rho d\rho dz d\theta = \pi R^2 h$$

Coordenadas Esféricas

Considere-se a bola definida pelo conjunto de pontos que respeitam a equação $x^2 + y^2 + z^2 < R^2$.
https://www.geogebra.org/3d/wnuubxjg
https://www.geogebra.org/m/h9xS5ZZs



Coordenadas Esféricas

Considere-se a bola definida pelo conjunto de pontos que respeitam a equação $x^2 + y^2 + z^2 < R^2$.
https://www.geogebra.org/3d/wnuubxjg
https://www.geogebra.org/m/h9xS5ZZs Consideremos a mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ y = r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = r\cos(\varphi) \end{cases} \quad , 0 < r < R, 0 < \theta < 2\pi, 0 < \varphi < \pi.$$

Coordenadas Esféricas

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ y = r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = r\cos(\varphi) \end{cases} \quad , 0 < r < R, 0 < \theta < 2\pi, 0 < \varphi < \pi.$$

Com Jacobiano

$$J_e = \begin{bmatrix} \cos(\theta)\sin(\varphi) & \sin(\theta)\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ -r\sin(\theta)\sin(\varphi) & r\cos(\theta)\sin(\varphi) & 0 \\ r\cos(\theta)\cos(\varphi) & r\sin(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \end{bmatrix}.$$

Coordenadas Esféricas

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ y = r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = r\cos(\varphi) \end{cases} \quad , 0 < r < R, 0 < \theta < 2\pi, 0 < \varphi < \pi.$$

Com Jacobiano

$$J_e = \begin{bmatrix} \cos(\theta)\sin(\varphi) & \sin(\theta)\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ -r\sin(\theta)\sin(\varphi) & r\cos(\theta)\sin(\varphi) & 0 \\ r\cos(\theta)\cos(\varphi) & r\sin(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \end{bmatrix}.$$

E, portanto, $|det(J_e)| = r^2\sin(\varphi)$.

Coordenadas Esféricas

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ y = r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = r\cos(\varphi) \end{cases}, 0 < r < R, 0 < \theta < 2\pi, 0 < \varphi < \pi.$$

Com Jacobiano

$$J_e = \begin{bmatrix} \cos(\theta)\sin(\varphi) & \sin(\theta)\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ -r\sin(\theta)\sin(\varphi) & r\cos(\theta)\sin(\varphi) & 0 \\ r\cos(\theta)\cos(\varphi) & r\sin(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \end{bmatrix}.$$

O volume será dado pelo simples integral

$$\iiint_S 1 dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2\sin(\varphi) dr d\varphi d\theta = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Coordenadas Esféricas

Exemplo

- *Volume da calote esférica* $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < R^2 \wedge z > h\right\}$ *utilizando coordenadas esférica e cilíndricas.*
- *Volume de um cone* $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2} < z < h\right\}$ *utilizando coordenadas esférica e cilíndricas.*
- *Volume de um sólido* $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 + z^2 \wedge x^2 + y^2 + z^2 < 5 \wedge z > 0\right\}$.

Coordenadas Esféricas

Exemplo

- *Volume da calote esférica* $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < R^2 \wedge z > h\right\}$ *utilizando coordenadas esférica e cilíndricas.* S:$\frac{\pi}{3}(2R^3 - 3R^2 h + h^3)$
- *Volume de um cone* $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2} < z < h\right\}$ *utilizando coordenadas esférica e cilíndricas.*
- *Volume de um sólido* $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 + z^2 \wedge x^2 + y^2 + z^2 < 5 \wedge z > 0\right\}$.

Coordenadas Esféricas

Exemplo

- *Volume da calote esférica*
  $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < R^2 \wedge z > h\right\}$ *utilizando coordenadas esférica e cilíndricas.*
- *Volume de um cone*
  $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2} < z < h\right\}$ *utilizando coordenadas esférica e cilíndricas.* $S{:}\frac{\pi}{3}(R^2 h)$
- *Volume de um sólido*
  $S =$
  $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 + z^2 \wedge x^2 + y^2 + z^2 < 5 \wedge z > 0\right\}.$

Coordenadas Esféricas

Exemplo

- *Volume da calote esférica* $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < R^2 \wedge z > h\right\}$ *utilizando coordenadas esférica e cilíndricas.*
- *Volume de um cone* $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2} < z < h\right\}$ *utilizando coordenadas esférica e cilíndricas.*
- *Volume de um sólido* $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 + z^2 \wedge x^2 + y^2 + z^2 < 5 \wedge z > 0\right\}$.
  S: $\frac{\pi}{3}(10\sqrt{5} - 8\sqrt{2})$