Análise Matemática III

Integração dupla - mudança de variáveis

Ricardo Moura

Escola Naval

7 de outubro de 2021

Mudança de variáveis

O objetivo desta necessidade de mudar as variáveis é simplificar o cálculo do integral.

Definição

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto,* $g : D \to \mathbb{R}^n$ *é uma mudança de variáveis se se verificar:*

1. g *for de classe* C^1
2. g *for injetiva*
3. *A derivada de* g *for injetiva, i.e., o determinante da matriz Jacobiana* $J_{g(t)}$ *for não nula.*

Mudança de variáveis

Teorema 1: Integral da Mudança de Variáveis

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $g : D \to \mathbb{R}^n$ uma mudança de variáveis, tal que $X = g(D)$ e $f : X \to \mathbb{R}$, então:

$$\int_X f(x)dx = \int_D f(g(t)) \times |J_{g(t)}|dt.$$

Mudança de variáveis

Exemplo

Calcule o integral

$$\int\int_R (x+y)dxdy,$$

onde a região R é delimitada pelas retas $y=x$, $y=2x$ e $x+y=2$.

Mudança de variáveis

Exemplo

Calcule o integral

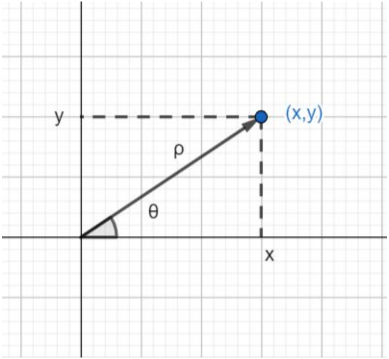
$$\int\int_R (x+y)dxdy,$$

onde a região R é delimitada pelas retas $y = x$, $y = 2x$ *e* $x + y = 2$.

Propõe-se a mudança de variáveis $y - x = u$ e $y - 2x = v$.

Mudança para coordenadas polares

As coordenadas polares já são conhecidas, mas não o processo da sua substituição. Relembrando, para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é possível fazer uma correspondência a duas variáveis polares, (ρ, θ).



Tendo, para tal, possível mudança de variável a função $g(\rho, \theta)$.

Mudança para coordenadas polares

Se assumirmos $D = \left\{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : r > 0 \wedge 0 < \theta < 2\pi\right\}$, então pode-se confirmar que:

- g é de classe C^1
- g é injetiva
- A derivada de g é injetiva, visto que o Jacobiano é

$$J_g = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

e o seu determinante é ρ.

Mudança para coordenadas polares

Note-se que no caso de estarmos perante uma região como $x^2 + y^2 = 1$, a sua àrea será igual 2π, ou seja, se estivéssemos perante $I = \int\int_D 1 dxdy$ saberíamos que teria de ser igual a π. Portanto, efetuando a mudança de variáveis, note-se que teríamos $0 < \rho < 1$ e $0 < \theta < \pi$, portanto se não se obedecesse ao teorema da mudança de variáveis teríamos

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} 1 d\theta d\rho = 2\pi,$$

no entanto, aplicando-o temos:

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho d\theta d\rho = \pi.$$

`https://www.geogebra.org/calculator/dqmypmhz`

Mudança para coordenadas polares

Exemplo

Voltando ao exemplo da Área da superfície do sólido limitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pelos planos $z = 1$ e $z = 3$.

$$\int\int_D \sqrt{1 + \left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]^2} dxdy =$$

$$\int\int_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dxdy = \int\int_D \sqrt{2} dxdy$$

onde $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\right\}$. Na verdade, mudando para coordenadas polares será simplesmente

$$\int_0^{2\pi} \int_1^3 \sqrt{2} \rho d\rho d\theta = 8\pi\sqrt{2}.$$

https://www.geogebra.org/calculator/p9dmgz5f

Mudança para coordenadas polares

Exemplo

Considere a lâmina definida pela região $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : m^2 - x^2 < y^2 < 1 - x^2 \wedge x > 0\right\}$, *para um valor de* m *entre* 0 *e* 1. *A partir de que valor de* m *é que o centro de massa está no exterior da lâmina, se considerarmos a densidade (massa específica) constante.*

https://www.geogebra.org/calculator/qx3qgzgc

Mudança para coordenadas polares

Exemplo

Considere a lâmina definida pela região $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : m^2 - x^2 < y^2 < 1 - x^2 \wedge x > 0\right\}$*, para um valor de* m *entre* 0 *e* 1*. A partir de que valor de* m *é que o centro de massa está no exterior da lâmina, se considerarmos a densidade (massa específica) constante.*

`https://www.geogebra.org/calculator/qx3qgzgc`

$M = \int\int_D k \ dA$

Mudança para coordenadas polares

Exemplo

Considere a lâmina definida pela região $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : m^2 - x^2 < y^2 < 1 - x^2 \wedge x > 0\right\}$*, para um valor de* m *entre* 0 *e* 1*. A partir de que valor de* m *é que o centro de massa está no exterior da lâmina, se considerarmos a densidade (massa específica) constante.*

`https://www.geogebra.org/calculator/qx3qgzgc`

$M = \int\int_D k \; dA$

$\bar{x} = \frac{1}{M} \int\int_D kx \; dA$

Mudança para coordenadas polares

Exemplo

Considere a lâmina definida pela região $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : m^2 - x^2 < y^2 < 1 - x^2 \wedge x > 0\right\}$*, para um valor de* m *entre* 0 *e* 1*. A partir de que valor de* m *é que o centro de massa está no exterior da lâmina, se considerarmos a densidade (massa específica) constante.*

https://www.geogebra.org/calculator/qx3qgzgc

$M = \int\int_D k \; dA$

$\bar{x} = \frac{1}{M}\int\int_D kx \; dA$

$\bar{y} = \frac{1}{M}\int\int_D ky \; dA$

$||(\bar{x},\bar{y})|| < m$