Análise Matemática III

Integrais de superfície

Ricardo Moura

Escola Naval

26 de novembro de 2021

Parametrização de uma superfície

Definição

O conjunto de pontos (x, y, z) *dados por:*

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

é chamada superfície parametrizada e $x(u, v)$, $y(u, v)$ *e* $z(u, v)$ *são as equações paramétricas da superfície que tem de ser contínuas em* D *no plano* uv.

Parametrização de uma superfície

Exemplo

Identifique e desenhe a superfície parametrizada por

$$\mathbf{r}(u, v) = 3\cos(u)\mathbf{i} + 3\sin(u)\mathbf{j} + v\mathbf{k}$$

para $0 \leq u \leq 2\pi$ *e* $0 \leq v \leq 4$*.*

Exemplo

Identifique e desenhe a superfície parametrizada por

$$\mathbf{r}(u, v) = \sin(u)\cos(v)\mathbf{i} + \sin(u)\sin(v)\mathbf{j} + \cos(u)\mathbf{k}$$

para $0 \leq u \leq \pi$ *e* $0 \leq v \leq 2\pi$*.*

Parametrização de uma superfície

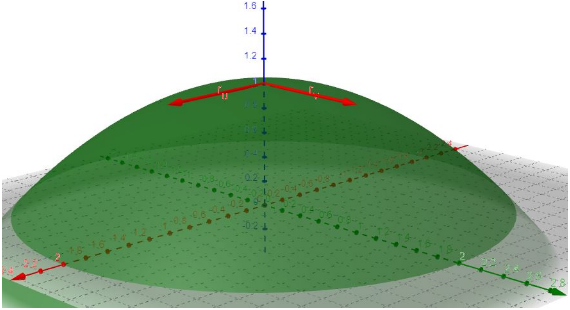
Exemplo

Escreva a equação paramétrica para o cone dado por

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \wedge z < 2$$

Vetores normais e tangentes a uma superfície

Tendo em conta de que estamos numa superfície, teremos de definir dois vetores tangentes à superfície



cada uma associada a cada parâmetro da parametrização.

Vetores normais e tangentes a uma superfície

O plano tangente será definido pelas derivadas parciais de r, que corresponderão, numa perspetiva geométrica, aos vetores tangentes.

$$\mathbf{T}_u(u,v) = \left(\frac{\partial x(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial y(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial z(u,v)}{\partial u}\right)$$

e

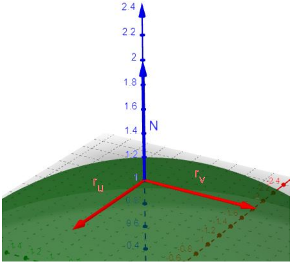
$$\mathbf{T}_v(u,v) = \left(\frac{\partial x(u,v)}{\partial v}, \frac{\partial y(u,v)}{\partial v}, \frac{\partial z(u,v)}{\partial v}\right)$$

$\mathbf{T}_u(u_0, v_0)$ e $\mathbf{T}_v(u_0, v_0)$ serão as coordenadas dos vetores tangentes à superfície em $\mathbf{r}(u_0, v_0)$.

Vetores normais e tangentes a uma superfície

Seja S uma superfície regular (lisa) parametrizada por $\mathbf{r}(u, v)$ definida sobre uma região D no plano uv e seja (u_0, v_0) um ponto em D, o vetor normal à superfície no ponto $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ será dado por

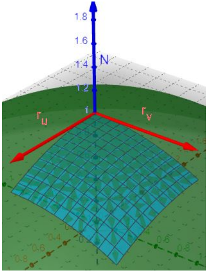
$$\mathbf{N} = \mathbf{T}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{T}_v(u_0, v_0)$$



Área de uma superfície

No caso das áreas de superfícies podemos fazer uma dedução semelhante às que foram feitas para as outras integrações. A superfície dada pode ser dividida em n retângulos de dimensão muito reduzida. Ora as suas áreas $\Delta A_i = \Delta u_i \Delta v_i$ poderão ser substituídas pelas áreas de retângulos dos planos tangentes. Essa área será dada por

$$||\Delta u_i \mathbf{r}_u \times \Delta v_i \mathbf{r}_v|| = ||\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|| \Delta u_i \Delta v_i$$



Área de uma superfície

Definição

Seja S uma superfície regular parametrizada por $\mathbf{r}(u,v)$ definida em D, um aberto no plano uv. Se $\mathbf{r}(u,v)$ é injetiva, então a área da superfície será dada por

$$\int\int_S dS = \int\int_D ||\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|| dA,$$

onde $\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k}$ *e* $\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$

Nota: Numa superfície dada por $z = f(x,y)$, temos que essa área se resume a

$$\int\int_R \sqrt{1 + [f_x(x,y)]^2 + [f_y(x,y)]^2} dA$$

Área de uma superfície

Exemplo

Calcule a área da superfície da esfera unitária.

Integral de superfície de 1.ª espécie

Definição

Seja S uma superfície e seja $\mathbf{r}(u,v)$ a sua parametrização, se as derivadas parciais de $\mathbf{r}(u,v)$ forem contínuas sobre R no plano uv, então o integral de superfície de uma função $f(x,y,z)$ sobre S é dada por

$$\int\int_S f(x,y,z)dS = \int\int_R f(\mathbf{r}(u,v))||\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v||dudv$$

Nota: $dS = ||\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v||dA = ||\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v||dudv$

Integral de superfície de 1.ª espécie

Exemplo

Uma lâmina S, com o formato de um cone, é descrita por

$$z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq 4.$$

Em cada ponto a densidade (massa específica) é proporcional à distância do ponto ao eixo dos zz. Determine a sua massa.