Análise Matemática III

EDO's lineares de 1.ª ordem

Ricardo Moura

Escola Naval

23 de setembro de 2021

EDO's lineares de 1.ª ordem

Definição

Chama-se EDO linear de 1.ª ordem à equação

$$\frac{dy}{dx} + A(x)y = B(x) \tag{1}$$

onde $A(x)$ e $B(x)$ são funções reais de variável real, contínuas num intervalo $\mathbf{I}$.

Teorema 1: Soluções de EDOs lineares de 1.ª ordem

Considerando a equação (1), uma família de soluções será dada por:

$$y = e^{-P[A(x)]}\left(P\left[e^{P[A(x))]}B(x)\right] + C\right),$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária e P representa o operador primitivação.

Equações de Bernoulli

Definição

Uma EDO chama-se equação de Bernoulli se se apresentar na seguinte forma:

$$\frac{dy}{dx} + A(x)y = B(x)y^n$$

Nota

Se $n = 0$ *esta reduz-se a uma EDO linear de 1.ª ordem. Se* $n = 1$ *reduz-se a uma equação diferencial de variáveis separáveis (vide a seguir). Sugere-se sempre substituir* $v = y^{1-n}$

Exemplo

Determine a solução geral de $y' + xy = xe^{-x^2}y^{-3}$.

EDO's Separáveis

Definição

Uma equação da forma

$$\frac{dy}{dx} = A(x)B(y)$$

com $A(x)$ e $B(y)$ funções contínuas, chama-se uma equação de variáveis separáveis.

Nota

Repare-se que se pode apresentar uma EDO de variáveis separáveis de uma outra forma

$$\frac{1}{B(y)}dy = A(x)dx,$$

podendo-se primitivar cada um dos membros em relação à única variável que compõe esse membro.

EDOs homogéneas

Definição

Uma EDO de 1.ª ordem diz-se homogénea se puder ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right),$$

onde $g(t)$ é uma função contínua num intervalo $\mathbf{I}$.

Nota

Estas podem ser transformadas em EDO's de variáveis separáveis por meio de uma substituição $v = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = vx$.

EDOs homogéneas

Exemplo

Resolver a equação $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$

EDOs Isobáricas

Uma generalização das EDOs Homogéneas.

Definição

Uma EDO de 1.ª ordem diz-se isobárica se puder ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A(x,y)}{B(x,y)}$$

caso a substituição $y = vx^m$ a transforme numa EDO de variáveis separáveis, sendo m o peso de y e dy em relação a x (atribuindo-se o peso 1 a x e dx).

EDOs Isobáricas

Exemplo

Resolva a equação isobárica $y^2 + (1 + xy)y' = 0$.

Equações Totais Exatas

Definição

Uma equação diferencial da forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$*, em que* M *e* N *são contínuas de classe* C^1 *(derivadas parciais existem e são contínuas), diz-se total exata num aberto* D*, se existir uma função* $F(x, y)$ *tal que o seu diferencial*

$$dF(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = dF(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy,$$

chamando-se a $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ *uma forma diferencial total exata em* D*.*

Equações Totais Exatas

Teorema 2: total exata:condição suficiente e necessária

Considerando a EDO

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{2}$$

em que M e N são contínuas de classe C^1 num retângulo $D =]a,b[\times]c,d[\subset \mathbb{R}^2$, a condição

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

é necessária e suficiente para chamar a (2) como total exata.

Equações Totais Exatas

Teorema 3: Família de soluções de uma total e exata

Considerando a EDO total e exata

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{3}$$

em que M e N são contínuas de classe C^1 num retângulo $D =]a,b[\times]c,d[\subset \mathbb{R}^2$, então uma família de soluções de (3) será

$$F(x,y) = C$$

onde $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y)$, $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$ e C é uma constante arbitrária.

Equações Totais Exatas

Nota

Uma equação diferencial de variáveis separáveis é uma equação total exata.

Exemplo

Integre a equação $\frac{1}{y} + x - \frac{x}{y^2}\frac{dy}{dx} = 0.$