# Análise Matemática III

## Integração tripla

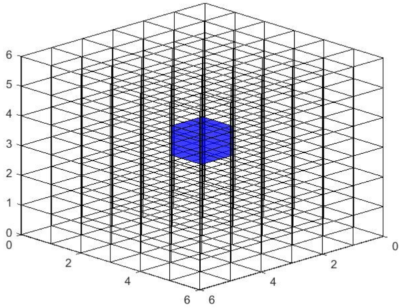
Ricardo Moura

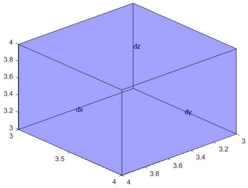
Escola Naval

12 de outubro de 2021

# Integral triplo de Riemann

O volume de uma figura paralelepipédica resulta da partição de uma divisão desta em $n$ pequenos paralelepípedos. Um elemento desses terá volume igual a $\Delta V_i = \Delta x_i \times \Delta y_i \times \Delta z_i$.



# Integral triplo de Riemann

## Definição

*Chama-se integral triplo de $f$ sobre $R$, uma região de $\mathbb{R}^3$, se existir a soma de Riemann, isto é, se existir*

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ \max V_i\to 0}} f(x_i, y_i, z_i)V_i = \int\int\int_R f(x, y, z)dxdydz$$

*para qualquer decomposição de $R$ e não dependendo da escolha arbitrária dos pontos $(x_i, y_i, z_i) \in R$.*

# Integral triplo de Riemann

Repare-se que agora $R$ fica definido pelas condições

$$\begin{cases} g_1(x,y) \leq z \leq g_2(x,y) \\ h_1(x) \leq y \leq h_2(x) \\ a \leq x \leq b, \end{cases}$$

integrando-se por meio de integrais sucessivos

$$\int\int\int_R f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left( \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \left( \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx$$

Quando pretendemos o volume da figura basta usar $f(x,y,z) = 1$.
No caso da massa de um sólido, $f(x,y,z) = \rho(x,y,z)$ será a massa específica.

# Integral triplo de Riemann

## Exemplo

*Calcule o seguinte integral*

$$\iiint_R 4xy^2z^2 dxdydz,$$

*onde*

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1 \wedge -1 \leq y \leq 1 \wedge -2 \leq z \leq 2\}.$$

*R:* $\frac{64}{9}$

# Integral triplo de Riemann

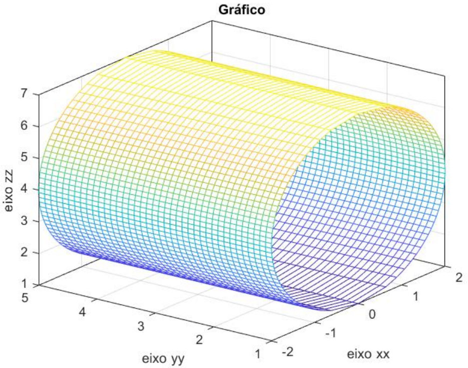
## Exemplo

*Determine o volume do sólido limitado pela superfície cilíndrica* $9x^2 + 4(z-4)^2 = 36$ *e pelos planos* $y = 1$ *e* $y = 5$.

# Integral triplo de Riemann

## Exemplo

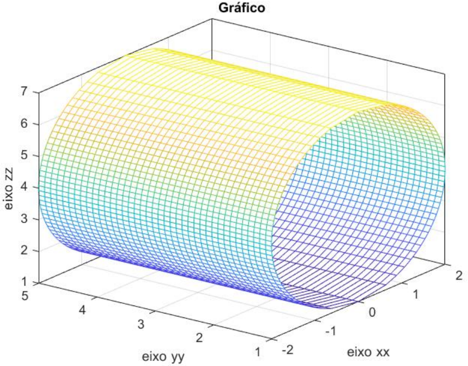
*Determine o volume do sólido limitado pela superfície cilíndrica* $9x^2 + 4(z-4)^2 = 36$ *e pelos planos* $y = 1$ *e* $y = 5$.

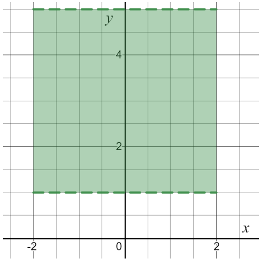


# Integral triplo de Riemann

## Exemplo

*Determine o volume do sólido limitado pela superfície cilíndrica* $9x^2 + 4(z-4)^2 = 36$ *e pelos planos* $y = 1$ *e* $y = 5$.

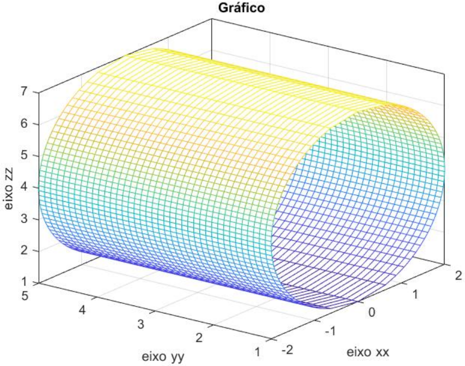


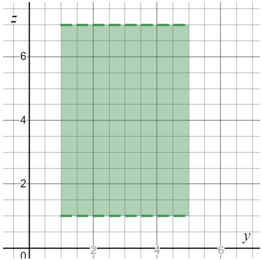



# Integral triplo de Riemann

## Exemplo

*Determine o volume do sólido limitado pela superfície cilíndrica* $9x^2 + 4(z-4)^2 = 36$ *e pelos planos* $y = 1$ *e* $y = 5$.

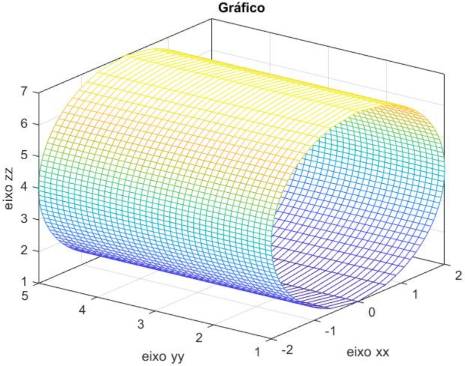


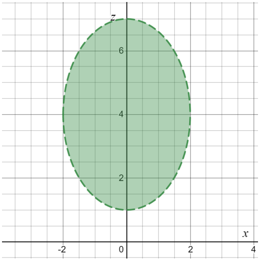



# Integral triplo de Riemann

## Exemplo

*Determine o volume do sólido limitado pela superfície cilíndrica* $9x^2 + 4(z-4)^2 = 36$ *e pelos planos* $y = 1$ *e* $y = 5$.



# Integral triplo de Riemann

$$I = \int_{-2}^{2}\int_{1}^{5}\int_{4-\sqrt{\frac{36-9x^2}{4}}}^{4+\sqrt{\frac{36-9x^2}{4}}} 1 \; dzdydx = \int_{-2}^{2}\int_{1}^{5}\sqrt{36-9x^2}dydx$$

$$I = \int_{-2}^{2} 4\sqrt{36-9x^2}dx$$

Efetuando uma mudança de variável
$3x = 6\cos(\theta) \implies \frac{dx}{d\theta} = -2\sin(\theta)$ vem que

$$I = \int_{0}^{\pi} 48\sin^2(\theta)d\theta = 24\pi = A_b \times h = (\pi \times 2 \times 3) \times 4$$

# Integral triplo de Riemann

## Exemplo

*Calcule o volume do sólido limitado por* $z = x^2 + 3$, $z = 2x + 6$, $z = 9 - x$, $y = 0$ *e* $y = 6$.

*https://www.geogebra.org/3d/pv2wwqtz*

# Integral triplo de Riemann

## Exemplo

*Calcule o volume do sólido limitado por* $z = x^2 + 3$, $z = 2x + 6$, $z = 9 - x$, $y = 0$ *e* $y = 6$.

*https://www.geogebra.org/3d/pv2wwqtz*

$V = \int_{-1}^{1} \int_{x^2+3}^{2x+6} \int_0^6 dydzdx + \int_1^2 \int_{x^2+3}^{9-x} \int_0^6 dydzdx = 45$

# Integral triplo de Riemann

## Exemplo

*Calcule o volume do sólido limitado por* $z = x^2 + 3$, $z = 2x + 6$, $z = 9 - x$, $y = 0$ *e* $y = 6$.

*https://www.geogebra.org/3d/pv2wwqtz*

$V = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{6} \int_{x^2+3}^{2x+6} dzdydx + \int_{1}^{2} \int_{0}^{6} \int_{x^2+3}^{9-x} dzdydx = 45$

# Integral triplo de Riemann

## Exemplo

*Calcule o volume do sólido limitado por* $z = x^2 + 3$, $z = 2x + 6$, $z = 9 - x$, $y = 0$ *e* $y = 6$.

*https://www.geogebra.org/3d/pv2wwqtz*

$$V = \int_0^6 \int_3^4 \int_{-\sqrt{z-3}}^{\sqrt{z-3}} dxdzdy + \int_0^6 \int_4^7 \int_{\frac{z-6}{2}}^{\sqrt{z-3}} dxdzdy + \int_0^6 \int_7^8 \int_{\frac{z-6}{2}}^{9-z} dxdzdy$$