Matemática Computacional

Aula 2 - Zeros de Funções

Ricardo Moura

Definições

Aproximações e tolerância

Definition

Seja $tol > 0$, diz-se que x^* é uma aproximação duma raíz da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com **tolerância** tol se

$$\exists x \in \mathbb{R} : f(x) = 0 \wedge E(x^*, x) = |x^* - x| < tol.$$

Nota: Essa aproximação x^* é uma aproximação com tol no erro relativo, se $x \neq 0$ e $\delta(x^*, x) = \left|\frac{x^* - x}{x}\right| < tol$.

Definições

Ordem de convergência

Definition

Para um método numérico do cálculo de uma raiz x de f produz uma sucessão de valores $(x_0, \ldots, x_k, \ldots)$ convergente para x, então $\epsilon_k = |x_k - x|$ será o **erro no k-ésimo passo**, onde se sabe $\lim_{k \leftarrow \infty} \epsilon_k = 0$. Esta sequência tem **convergência de ordem** m se

$$\exists cte \in \mathbb{R} \forall k \in \mathbb{N} : \epsilon_{k+1} < cte \times \epsilon_k^m$$

Nota1: Esta ordem de convergência dá a ideia de rapidez do método, que seria a mesma se efetuássemos para o erro relativo.

Nota2: Se os pontos $(log\epsilon_k, log\epsilon_{k+1})$ ficarem situados num semiplano $y < mx$, então a sucessão de valores tem ordem de convergência m.

Teoremas importantes

Teorema de Bolzano

Theorem (Bolzano)

Sejam $a < b$ dois reais, f uma função contínua no intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, então:

$$f(a) \times f(b) < 0 \implies \exists x \in]a, b[: f(x) = 0$$

Theorem (Rolle)

Sejam $x_1 < x_2$ dois reais com $f(x_1) = f(x_2) = 0$, f uma função contínua no intervalo $[x_1, x_2]$, então:

$$\forall x \in]x_1, x_2[\ \exists f'(x) \implies \exists x \in]x_1, x_2[: f'(x) = 0.$$

Métodos

Bissecção

Sejam f contínua, $a < b$ reais com $f(a) \times f(b) < 0$, tolerância $tol_x > 0$ e tolerância $tol_y > 0$, procede-se:

1. Chamar $k = 0$, $a_0 = a$ e $b_0 = b$;
2. Chamar $m_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$;
3. Se $|b_k - a_k| < 2tol_x$ ou $|f(m_k)| < tol_y$, interromper e dar m_k como raiz;
4. Se $f(a_k) \times f(m_k) < 0$, fazer $a_{k+1} = a_k$ e $b_{k+1} = m_k$;
5. Se $f(a_k) \times f(m_k) < 0$, fazer $a_{k+1} = a_k$ e $b_{k+1} = m_k$;
6. Repetir desde (2).

Nota1: Por teorema após n passos ou menos, o método da bisseção dá uma **raiz aproximada para uma tolerância** $tol_x = |b - a|/2^n$.
Nota2: A sequência $(m_0, m_1, \ldots, m_k, \ldots)$ tem **convergência de ordem** $m = 1$.

Métodos

Regula falsi ou falsa posição

Sejam f contínua, $a < b$ reais com $f(a) \times f(b) < 0$, tolerância $tol_x > 0$ e tolerância $tol_y > 0$, procede-se:

1. Chamar $k = 0$, $a_0 = a$ e $b_0 = b$;
2. Chamar $m_k = \frac{a_k \times f(b_k) - b_k \times f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$;
3. Se $|b_k - a_k| < tol_x$ ou $|f(m_k)| < tol_y$, interromper e dar m_k como raiz;
4. Se $f(a_k) \times f(m_k) < 0$, fazer $a_{k+1} = a_k$ e $b_{k+1} = m_k$;
5. Se $f(a_k) \times f(m_k) < 0$, fazer $a_{k+1} = a_k$ e $b_{k+1} = m_k$;
6. Repetir desde (2).

Nota: Existe cte tal que $\epsilon_{k+1} < cte \times \epsilon_k$. Para a bisseção $cte = 1/2$ e para a falsa posição $cte = 1$.

Métodos com um ponto

Função de iteração, contração e pontos fixo

Cada novo ponto x_{k+1} vai ser calculado usando $x_{k+1} = g(x_k)$ onde $g(x)$ se denominará **função de iteração**. O que é desejado é que esta função tenda para um $x = g(x)$ chamado **ponto fixo** de g.

Definition

$g(x)$ diz-se uma contração em $[a, b]$ para $\forall x \in [a, b]$ se:

$$\exists\, 0 < \gamma < 1 : |g(x) - g(y)| \leq \gamma |x - y|$$

Theorem (ponto fixo de Banach)

Se $g : [a, b] \leftarrow [a, b]$ é uma contração, então:

$$\exists_1 x \in [a, b] : x = g(x)$$

e qualquer sucessão $x_{k+1} = g(x_k)$ tem como limite o ponto fixo x.

Métodos com um ponto

Como encontrar $g(x)$

Substituir o problema $f(x) = 0$ por encontrar o ponto fixo de $g(x) = x + c(x) \times f(x)$. Só falta encontrar $c(x)$.
Temos de ter $|g'(\alpha)| < 1$ na raiz α e podíamos tentar fazer $g'(\alpha) = 0$. Ora,

$$g'(\alpha) = 1 + c'(\alpha)f(\alpha) + c(\alpha)f'(\alpha) = 1 + c(\alpha)f'(\alpha),$$

dessa forma, tomamos $c(x) = -1/f'(x)$. Mas repare-se que em caso algum se pode ter $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$.

Métodos com um ponto

Newton-Raphson

Sejam f contínua e com derivada contínua e não nula, a real, tolerância $tol_x > 0$ e tolerância $tol_y > 0$, procede-se:

1. Chamar $k = 0$, $x_0 = a$;
2. Chamar $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$;
3. Se $k \geq 1$, calcular $\gamma = \frac{x_{k+1} - x_k}{x_k - x_{k-1}}$, se não ir para (7);
4. Se $|x_{k+1} - x_k| < \frac{1-\gamma}{\gamma} tol_x$ ou se $|f(x_{k+1})| < tol_y$ interromper e devolver x_{k+1};
5. Incrementar k e repetir desde (2).

Nota: A ordem de convergência deste método é 2. Por vezes, para se escolher um ponto próximo da raiz inicial, usa-se o método da bisseção ou da regula falsi só para aproximar a raiz ligeiramente.

Métodos com um ponto

Condições de convergência Newton-Raphson

Theorem

Se

- f *for duplamente diferenciável,*
- $f'(x)$ *e* $f''(x)$ *forem contínuas em* $[a, b]$,
- $f(a) \times f(b) < 0$,
- $f'(x)$ *e* $f''(x)$ *não mudarem de sinal,*

então verifica-se $f(a) \times f''(a) > 0$ *e* $x_0 = a$ *como escolha do ponto inicial do método de Newton-Raphson sendo este convergente para a raiz*
ou verifica-se $f(b) \times f''(b) > 0$ *e* $x_0 = b$ *como escolha do ponto inicial do método de Newton-Raphson sendo este convergente para a raiz.*

Métodos com um ponto

Secante

Se não tivermos acesso à derivada de $f(x)$, em vez da reta tangente, utilizamos a reta secante. Ou seja, substituir $f'(x_k)$ por

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

ficando dessa forma com

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1}f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

Este será o **método da secante**. A sua ordem de convergência é de aproximadamente 1.618.

Métodos com um ponto

Aceleração de Aitken e de Steffensen

Método de Steffenson: Dar x_0, calcular $x_1 = g(x_0)$ e $x_2 = g(x_1)$. Depois calcular

$$x_3 = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0}.$$

De seguida, voltar a fazer $x_4 = g(x_3)$ e $x_5 = g(x_4)$ e acelerar outra vez com $x_6 = x_3 - \frac{(x_4 - x_3)^2}{x_5 - 2x_4 + x_3}$ e, assim, sucessivamente.