Matemática Computacional

Aula 3 - Sistemas de equações lineares

Ricardo Moura

Equação linear

Definição

Definition

Uma equação linear nas incógnitas $x_1, \ldots, x_n$ é uma condição da forma

$$a_1 x_1 + \ldots a_n x_n = b \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \Leftrightarrow \underline{\mathbf{a}}'.\underline{\mathbf{x}} = b$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$ são os coeficientes e $b \in \mathbf{R}$ o termo independente, e onde

$$\underline{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Sistema de equações lineares

Definição

Definition

Um sistema de equações lineares nas n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$ é uma conjunção de m condições, da forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \Leftrightarrow \mathbf{A}.\mathbf{X} = \mathbf{B}$$

onde **A** é a matriz $(m \times n)$ dos coeficientes, **X** é a matriz coluna $(n \times 1)$ das incógnitas e **B** é a matriz $(m \times 1)$ dos termos independentes.

Condicionamento e equilibragem

Condicionamento

Dizemos que um sistema de equações lineares é **mal condicionado** quando pequenas variações nos coeficientes ou nos termos independentes implicam grandes alterações na solução.

Example

- Utilizar a regra de Cramer para resolver $x + y = 2 \wedge x + 0.99y = 1.98$. Solução: $x = 0$ e $y = 2$
- Utilizar a regra de Cramer para resolver $x + y = 2 \wedge x + 0.995y = 1.98$ (variação de 0.5% no coeficiente). Solução: $x = -2$ e $y = 4$
- Utilizar a regra de Cramer para resolver $x + y = 2 \wedge x + 0.999y = 1.98$ (variação de 0.4% no coeficiente). Solução: $x = -18$ e $y = 20$

Será bom ver o gráfico e inferir porque acontece isto e verificar o determinante da matriz $\mathbf{A}$.

Condicionamento e equilibragem

Equilibragem

Example

Utilizar a regra de Cramer para resolver
$x + y = 2 \wedge 1000x + 990y = 1980$. Solução: $x = 0$ e $y = 2$

Este exemplo mostra a necessidade de equilibrar.

Definition

Uma matriz diz-se **equilibrada** ou **escalada** se cada linha tiver o número 1 como entrada e todos os outros elementos forem inferiores ou iguais a 1 em módulo.

Example

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & -5 \\ -8 & 7 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 1 \\ -3/5 & 4/5 & 1 \\ 1 & -7/8 & -6/8 \end{bmatrix}$$

Número de condição de uma matriz

Normas vetoriais

Relembremos algumas normas de vetores:

- **Norma da soma** $\|.\|_1$:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

- **Norma euclidiana** $\|.\|_2$:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2\right)^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

- **Norma do máximo** $\|.\|_\infty$:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = max\left(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\right) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Todas elas obedecem à definição de norma: a norma é zero se o vetor for o nulo; para qualquer escalar a multiplicar pelo vetor a sua norma será multiplicada pelo valor absoluto deste; desigualdade triangular para a soma.

Número de condição de uma matriz

Normas matriciais

Definition

Uma norma de matriz é uma aplicação $\|.\| : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ que satisfaz:

1. $\|\mathbf{A}\| = 0$ sse $\mathbf{A} = \mathbf{0}$;
2. $\|\alpha \mathbf{A}\| = |\alpha| \|\mathbf{A}\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$;
3. $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|, \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$;
4. $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|, \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Número de condição de uma matriz

Normas matriciais

Definition

Uma norma de matriz diz-se compatível com uma norma de vetor ou induzida por uma norma de vetor se

$$\|\mathbf{Ax}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

- **Norma do máximo das somas das colunas** $\|.\|_1$:

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right)$$

- **Norma do máximo das somas das linhas** $\|.\|_\infty$:

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)$$

Número de condição de uma matriz

Normas matriciais

Example

Calcular a norma do máximo das somas das colunas e a das linhas para

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 57 \\ 11 & 23 & -1 \\ 23 & -27 & 5 \end{bmatrix}$$

Solução: $\|\mathbf{A}\|_1 = 63$ e $\|\mathbf{A}\|_\infty = 67$

Número de condição de uma matriz
Número de condição

Seja $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ um sistema de equações lineares, sabemos que podem estar afetos a erros, dessa forma, o que estamos realmente a resolver é:

$$(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})(\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}) = (\mathbf{B} + \Delta\mathbf{B})$$

onde $\Delta\mathbf{X}$ será desconhecida. Neste contexto, existe a relação

$$\frac{\|\Delta\mathbf{X}\|}{\|\mathbf{X}\|} \leq \frac{K}{1 - K\frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}} \left(\frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} + \frac{\|\Delta\mathbf{B}\|}{\|\mathbf{B}\|} \right),$$

com

$$K = \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|$$

Número de condição de uma matriz

Número de condição

Definition

O **número de condição** de uma matriz invertível A é o valor dado por

$$K = \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|.$$

Theorem

O número de condição de uma matriz é maior ou igual a 1.

Proof.

$1 = \|\mathbf{I}\| = \|\mathbf{A}.\mathbf{A}^{-1}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\| = K$ □

Valores baixo de K indicam que o sistema não é mal condicionado, no entanto, valores altos não indicam que será necessariamente mal condicionado (o segundo membro da relação é apenas um majorante).

Número de condição de uma matriz

Número de condição

Example

Calcular o número de condição de $x - y = 0 \wedge x + y = 2$.
Calcular o número de condição de $3x - 3y = 0 \wedge x + y = 2$.
Calcular o número de condição de $x + y = 2 \wedge x + 0.995y = 1,98$.
Calcular o número de condição de $x + y = 0 \wedge x + 0.999y = 1.98$.