Prática 2 - N126

Ano Letivo 2016/2017

Os alunos, com ajuda de Octave e o estudo dos códigos fornecidos, devem elaborar um relatório com a resposta a todas as questões. Para tal deverá usar o seu número de aluno, $NUMaluno = [\alpha, \beta, \gamma]$, em alguns destes exercícios.

1. Substituição direta e inversa. Decomposição LU

O código `subslower.m` resolve sistemas do tipo $\mathbf{LX} = \mathbf{B}$ por substituição direta, caso $\mathbf{L}$ seja triangular inferior com 1's na diagonal.

Calcular a inversa de $\mathbf{L}$ é o mesmo que resolver a equação $\mathbf{LX} = \mathbf{I}_n$. Na verdade, o código de substituição inversa pode ser utilizado para todas as matrizes $\mathbf{L}$ naquelas condições.

Se aplicarmos o algoritmo de Gauss `gaussreduce.m` a $\mathbf{M} = [\mathbf{A} \ \ \mathbf{I_n}]$ onde $\mathbf{A}$ é uma matriz quadrada, este produz uma matriz $[\mathbf{U} \ \ \mathbf{L}]$ onde $\mathbf{U}$ será uma triangular superior e $\mathbf{L}$ será uma triangular inferior com 1's na diagonal. Mais ainda, estas matrizes verificam $\mathbf{L}.\mathbf{A} = \mathbf{U} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{L}^{-1}.\mathbf{U}$.

Considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ \alpha & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 8 & 5 \\ -2 & 1 & \beta & \gamma \end{bmatrix}$$

relembrando o seu número de aluno definido acima.

- Determine, com a ajuda dos códigos fornecidos, uma matriz $\mathbf{L}$ e uma matriz $\mathbf{U}$ como indicado acima.
- Determine o determinante de $\mathbf{A}$ através da decomposição $\mathbf{LU}$.

2. Programação dos algoritmos de substituição direta/inversa

O código subslower.m resolve sistemas $\mathbf{L}.\mathbf{X} = \mathbf{B}$ quando $\mathbf{L}$ é uma matriz triangular inferior com 1's na diagonal. Para isto executa um algoritmo de substituição direta.

Estudando o referido código subslower.m

• Como alteraríamos o código subslower.m para criar uma função simples subsupper.m que resolva sistemas $\mathbf{U}.\mathbf{X} = \mathbf{B}$ através de substituição inversa, e que funcione só se a matriz já é triangular superior, com 1 na diagonal?

3. Inversas por iteração de Richardson

Para calcular a inversa de uma matriz $\mathbf{A} = \mathbf{I}_n - \mathbf{M}$, podemos usar a iteração de Richardson. Nomeadamente, temos que:

$$(\mathbf{I}_n - \mathbf{M}).(\mathbf{I}_n + \mathbf{M} + \mathbf{M}^2 + \cdots + \mathbf{M}^k) = \mathbf{I}_n - \mathbf{M}^{k+1}.$$

Portanto, se para um certo k tivermos $\mathbf{M}^{k+1} \approx 0$, então a inversa de $\mathbf{A} = \mathbf{I}_n - \mathbf{M}$ será

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{I}_n + \mathbf{M} + \mathbf{M}^2 + \cdots + \mathbf{M}^k.$$

Para tal, apenas terá de usar a seguinte sucessão de Richardson.

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{I}_n, \qquad \mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{I}_n + \mathbf{M}.\mathbf{X}_k.$$

Esta sucessão dará uma boa aproximação para a referida inversa, se tivermos $(\mathbf{I}_n - A)^{k+1}$ for próxima de zero.

- Considere $n = 20$, $s = -NumAluno/100$ e as seguintes matrizes:

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}^{n,s}, \qquad \mathbf{B} = \mathbf{I}_n - A/500, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1.5 & 1/s & 0 \\ 1/n & 1.5 & 1/s \\ 0 & 1/n & 1.5 \end{bmatrix}$$

  onde $\mathbf{M}^{n,s}$ será calculado se executarmos `matrM(n,s)` no Octave, função que foi programada em **MatrizesMEN.m**, fornecida.

  Calcule o termo $\mathbf{X}_3$ da sucessão de Richardson para as três matrizes.

- Programe um código que calcule o termo $\mathbf{X}_{50}$ da sucessão de Richardson para o cálculo da matriz inversa, para qualquer $\mathbf{A}$. O código começará por `function x=richardson(A)`, e deverá conter um ciclo for i=1:50. Indique qual das respostas `function x=richardson(A)`, `function x=richardson(B)` e `function x=richardson(C)` é uma boa aproximação de $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{B}^{-1}$ e $\mathbf{C}^{-1}$, respectivamente.