Matemática Computacional

Aula 7 - Equações Diferenciais
Métodos de Taylor e de Euler

Ricardo Moura

Definição

Problemas de valor inicial de um sistema de equações diferenciais ordinárias pode ser escrito da seguinte forma:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = f(t, \mathbf{y}), a \leq t \leq b; \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$$

onde

$$\mathbf{y}^T = \left[y^1, y^2, \dots, y^d\right], \mathbf{f}^T = \left[f^1, f^2, \dots, f^d\right], \mathbf{y}_0^T = \left[y_0^1, y_0^2, \dots, y_0^d\right].$$

No entanto, iremos só estudar o caso para $d = 1$, notando que se pode estender para $d \neq 1$ trocando a soma dos valores de $y(t)$ pela soma dos valores de $\mathbf{y}(t)$ e trocando o produto dos valores de $y(t)$ pela produto dos vetores $\mathbf{y}(t)$ com escalares. Portanto, para $d = 1$

$$y' = f(t, y), a \leq t \leq b; y(t_0) = y_0.$$

Método de Taylor

Tendo apenas acesso ao ponto inicial (t_0, y_0) e à função $f(t, y)$ se procuramos saber $y(t_1)$ para $t_1 \neq t_0$, o mais lógico e imediato é recorrer ao polinómio de Taylor para $y(t)$ centrado em t_0

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + y'(t_0).h + \frac{1}{2}y''(t_0).h^2 + \cdots + \frac{h^k}{k!}y^{(k)}(\xi)$$

onde ξ é um qualquer ponto pertencente a $]t_0, t_0 + h[$.

Se só usássemos o polinómio de Taylor de grau 1 teríamos:

$$\begin{aligned} y(t_0+h) &= y(t_0) + y'(t_0).h + \frac{1}{2}y''(\xi).h^2 \\ &= y(t_0) + f(t_0, y_0).h + \frac{1}{2}y''(\xi).h^2 \end{aligned}$$

onde ξ é um qualquer ponto pertencente a $]t_0, t_0+h[$.

Se só usássemos o polinómio de Taylor de grau 2 teríamos:

$$
\begin{aligned}
& y(t_0 + h) \\
& = y(t_0) + y'(t_0).h + \frac{1}{2} y''(t_0).h^2 + \frac{h^3}{3!} y^{(3)}(\xi) \\
& = y(t_0) + f(t_0, y_0).h + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) f(t_0, y_0)\right).h^2 + \frac{h^3}{6} y^{(3)}(\xi)
\end{aligned}
$$

onde ξ é um qualquer ponto pertencente a $]t_0, t_0 + h[$, notando que:

$$
y''(t) = \frac{d}{dt} y'(t) = \frac{d}{dt} f(t, y(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) f(t, y(t))
$$

Podendo continuar da mesma forma para graus superiores.

Example

Queremos saber o valor de $y(-3)$ quando se sabe que

$$y'(t) = y(t).cos(t), y(-\pi) = e.$$

Na verdade, já se sabe que
$\frac{y'(t)}{y(t)} = cos(t) \implies ln(y(t)) = sin(t) + C \implies y(t) = Ae^{sin(t)}$, e como passa no ponto $(-\pi, e)$ teremos $C = 1 \implies A = e$, logo:

$$y(t) = e^{sin(t)+1} \implies y(-3) = e^{sin(-3)+1} \approx 2.36051541632460.$$

Mas segundo o método de Newton, comecemos por considerar:

$$f(t, y(t)) = y(t)cos(t)$$
$$(t_0, y_0) = (-pi, e) \implies f(t_0, y_0) = -e$$

Example

Usando o polinómio de grau para calcular o valor aproximado de $y(-3)$ teremos:

$$
\begin{aligned}
y(-3) &= y_0 + f(t_0, y_0).h \\
&= e + (-e).h \approx 2.33339309116261
\end{aligned}
$$

notando que $h = -3 - (-pi) = 0.141592653589793$.
Para um polinómio de grau 2, será conveniente primeiro calcular

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} &= -y(t)sin(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) = -y(t_0)sin(t_0) = -e.0 = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= cos(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) = cos(t_0) = -1
\end{aligned}
$$

Example

Obtemos então para grau 2:

$$\begin{aligned} y(-3) &= y_0 + f(t_0, y_0).h + \frac{h^2}{2}(0 + (-1).(-e)) \\ &= e + (-e).h + \frac{e.h^2}{2} \approx 2.36064179998793 \end{aligned}$$

Podemos imediatamente calcular o erro associado à aproximação feita através do polinómio de Taylor de grau 1 aproximação através de:

$$E = |y(-3) - 2.33339309116261| = 0.0271223251619901,$$

no entanto se não fosse possível determinar explicitamente a função $y(t)$ poderíamos observar que o erro seria dado por

$$E \approx \left|\frac{1}{2}y''(\xi).h^2\right|$$

Example

E como poderia ser calculado o valor de $y''(\xi)$? Como sabe de aulas passadas (ver derivação numérica) pode utilizar a aproximação

$$y''(\xi) = \frac{y'(t_0 + h) - y'(t_0)}{h} = \frac{y'(-3) - y'(-\pi)}{-3 + \pi}$$

$$= \frac{-2.30998216207021 + e}{-3 + \pi} \approx 2.88362182667838$$

logo

$$E \approx \left| \frac{1}{2}(2.88362182667838).h^2 \right| = 0.0289061166119114$$

Example

Como segundo exemplo, considere $y' + 4y = x^2$ e $y(0) = 1$ e determine $y(0.2)$ através do polinómio de Taylor de grau 4 e compare com a solução analítica da equação diferencial

$$y = \frac{31}{32}e^{-4x} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}$$

Solução: 0.4539 e erro $E \approx 0.0018$ através de aproximação ou verdadeiro erro 0.0024.

Os erros calculados até então, são erros de truncatura. Não se pode esquecer que depois teremos os erros de aproximação também.

Método de Euler

De entre as fórmulas de Taylor, a fórmula de grau 1 é o método mais simples, no entanto, menos precisa, e é conhecido por **método de Euler**. Não é muito utilizado por ser pouco exacto.
Seja $y = y(x)$ a solução desconhecida do problema de valor inicial $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$.
Sendo $y \in C^2[a, b]$ e $\{x_0, x_1\} \subset [a, b]$ vem que

$$y(x_1) = y_0 + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2}y'(\xi)$$

para um certo $\xi \in [x_0, x_1]$.
Logo,

$$y(x_1) \approx y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

Suponhamos que agora se tem um novo valor x_2, podemos afirmar que

$$y(x_2) \approx y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

e, de um modo geral, que

$$y(x_{n+1}) \approx y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

onde $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$, caso se tenha sempre $|x_n - x_{n-1}| = h$.
Se o h for variável ter-se-á de substituir por $h(n)$.
Esta é a fórmula iteradora do método de Euler.

Example

Valor inicial: $y' = x^2y, y(0) = 1$. (Repare-se que se descobre facilmente que, na verdade, $y = e^{\frac{x^3}{3}}$).
Será importante relembrar que esta é uma equação diferencial linear
$y' - x^2y = 0$
e, como $p(x) = x^2$ é contínua em $\mathbb{R}$,
o problema tem solução única por um teorema dado numa disciplina de Análise que o aluno teve.
Se quisermos determinar $y(1)$, usando $h = 0.5$ constante, tendo em conta que $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ e $f(x, y) = x^2y$:

$$y(x_1) = y(0.5) \approx y_1 = 1 + 0.5(0^2 \times 1) = 1$$

$$y(x_2) = y(1) \approx y_2 = 1 + 0.5(0.5 \times 1) = 1.125$$

Example

Se quisermos determinar $y(1)$, usando $h = 0.2$ constante, tendo em conta que $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ e $f(x, y) = x^2 y$:

$$y(x_1) = y(0.2) \approx y_1^* = 1 + 0.2(0^2 \times 1) = 1$$

$$y(x_2) = y(0.4) \approx y_2^* = 1 + 0.2(0.2^2 \times 1) = 1.008$$

$$y(x_3) = y(0.6) \approx y_3^* = 1.008 + 0.2(0.4^2 \times 1.008) = 1.040256$$

$$y(x_4) = y(0.8) \approx y_4^* = 1.040256 + 0.2(0.6^2 \times 1.040256) = 1.115154$$

$$y(x_5) = y(1) \approx y_5^* = 1.115154 + 0.2(0.8^2 \times 1.115154) = 1.257894$$

O erro relativo para o primeiro caso, sabendo que verdadeiramente temos$y(1) = 1.395612$ é de $E_{y_2} = 19.5\%$ e, para o segundo caso, de $E_{y_5^*} = 9.9\%$.

Note-se que à medida que se calcula mais e mais passos, torna-se possível, se necessário, calcular y para outros x's intermédios.
Nota-se também que a convergência é lenta e se fizéssemos estudo para valores com diferentes aproximações o valor seria muito sensível a esses arredondamentos.
O erro global neste caso será:

$$E_n \leq \frac{h \times M}{2L}(e^{L(x_m - x_0)} - 1)$$

onde $|y''(x)| \leq M$ e L será a constante de Lipschitz definida através de:

Definition

Uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz a uma condição de Lipschitz no intervalo $J \subset D$, se existir constante $L \geq 0$, tal que

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq L|x_2 - x_1|, \forall x_1, x_2 \in J.$$

Note-se que assim teremos o Erro global de ordem $O(h)$.

Para se perceber que agora o facto de se ter precisão simples ou dupla pode fazer toda a diferença, repare no seguinte exemplo

Example

Tome o mesmo problema de valor inicial anterior. Se implementasse um algoritmo para calcular valores aproximados de $y(1)$, para diferentes passos e precisão, obteríamos o seguinte:

h	Precisão dupla	Precisão simples
10^{-1}	1.452017266	1.320016
10^{-4}	1.395668250	1.395539
10^{-5}	1.395618008	1.394884
10^{-7}	1.395611588	1.227960

Se nos lembrarmos que $y(1) = 1.395612425\ldots$, precisamente, pode-se dizer que o erro do arredondamento domina a partir de 10^{-4}.