Matemática Computacional

Aula 4 - Resoluçao de sistemas de equações lineares

Ricardo Moura

Eliminação de Gauss

Considere-se o sistema de equações lineares $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$. Os mais simples de resolver são aqueles em que $A = T$ matriz triangular superiorm, que podem ser resolvidos por substituição regressiva.

Example

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 6/3 = 2 \\ y = (-8 + 5 \times 2)/2 = 1 \\ x = (9 - 1 - 2) = 6 \end{cases}$$

Nota: Um sistema "triangular" é possível e determinado sse todos os elementos da diagonal principal da matriz dos coeficientes $\mathbf{T}$ forem não nulos.

Eliminação de Gauss

O método de Gauss consiste em transformar

$$[\mathbf{A}|\mathbf{B}] \to [\mathbf{T}|\mathbf{C}]$$

sistemas equivalentes aplicando uma sequência finita de operações elementares.

Example

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & 57 & 67 \\ 11 & 23 & -1 & 33 \\ 23 & -27 & 5 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{C_{1,3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 57 & 7 & 3 & 67 \\ -1 & 23 & 11 & 33 \\ 5 & -27 & 23 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{1,2}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 23 & 11 & 33 \\ 57 & 7 & 3 & 67 \\ 5 & -27 & 23 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3+L_1(5)]{L_2+L_1(57)} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 23 & 11 & 33 \\ 0 & 1318 & 630 & 1948 \\ 0 & 88 & 78 & 166 \end{array}\right]$$

Eliminação de Gauss

Example

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 23 & 11 & 33 \\ 0 & 1318 & 630 & 1948 \\ 0 & 88 & 78 & 166 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3+L_2(-\frac{88}{1318})}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 23 & 11 & 33 \\ 0 & 1318 & 630 & 1948 \\ 0 & 0 & \frac{47364}{18} & \frac{47364}{18} \end{array}\right] \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

No entanto, existem fontes de instabilidade neste método levando a que sistemas de equações mal condicionados tenham como solução valores aproximados bem distantes dos valores exatos.

Fontes de instabilidade

Na condensação

A operação mais utilizada é:

$$L_k \to m \times L_i + L_k, \quad \text{com} \quad i \neq k \quad \text{e} \quad m = -\frac{\text{elemento a reduzir}}{\text{pivot}}$$

ou seja, na verdade temos

$$(m \times L_i + L_k) \pm (|m| \times \Delta L_i + L_k) = c \pm \Delta c$$

e, dessa forma, o objetivo é minimizar Δc e, portanto, m deveria ser o menor possível.

Fontes de instabilidade

Na susbstituição regressiva

Em qualquer um dos passos da substituição, a última operação é a divisão pelo coeficiente D da incógnita a determinar e dessa forma sendo o numerador

$$N \pm \Delta N$$

será necessário minimizar o valor de $\frac{\Delta N}{D}$ e, portanto, D deveria ser o maior possível.

Gauss com escolha parcial de pivot

Este método consiste em escolher para a coluna onde se elimina o maior valor para pivot. Dessa forma, consegue-se diminuir as duas fontes de instabilidades referidas anteriormente.

Example

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & 57 & 67 \\ 11 & 23 & -1 & 33 \\ 23 & -27 & 5 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 11 & 56 & 67 \\ 0 & 36 & -3,4 & 33 \\ 23 & -27 & 5 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 57 & 57 \\ 0 & 36 & -3,4 & 33 \\ 23 & -27 & 5 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

Este processo sem equilibragem pode levar a alguns desvios devidos a problemas de escalas, dessa forma, pode-se logo à partida fazer a equilibragem e posteriormente usa o método de eliminação de Gauss com escolha parcial de pivot.

Gauss com escolha total de pivot

Em vez de procurar o maior valor por coluna, procura-se o maior valor por toda a matriz. Nos passos seguintes, efetua-se da mesma forma ignorando a linha e coluna utilizada na condensação. Este método exige um esforço de cálculo superior sem que haja melhorias significativas nos resultados, daí ser pouco utilizada.

Gauss-Jordan

Idêntico ao método de eliminação de Gauss, este processo (e todas as suas variantes) elimina todos os elementos acima da diagonal também para que se obtenha no fim a matriz identidade.

Example

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & -6 & -5 & | & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & | & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 1 & | & -7 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.16667 & -1 & -0.83335 & | & 1 \\ 0 & 1.6667 & 5 & 3.6667 & | & -4 \\ 0 & -3.6667 & 4 & 4.3334 & | & -11 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.8182 & -0.6364 & | & -0.5 \\ 0 & 1 & -1.0909 & -1.1818 & | & 3 \\ 0 & 0 & 6.8182 & 5.6364 & | & -9 \\ 0 & 0 & 2.1818 & 2.3636 & | & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -0.49999 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1.0001 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0.33326 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -1.9999 \end{bmatrix}$$

Decomposição LU de Doolittle

Para resolver $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ a decomposição de Doolittle explora também os sistemas triangulares.

Vamos supôr que se pode escrever $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ onde $\mathbf{L}$ é uma matriz triangular inferior e $\mathbf{U}$ é uma matriz triangular superior. O objetivo é encontrar estas matrizes.

Na verdade, $\mathbf{L}$ apenas tem de ter 1's na matriz diagonal.

Example

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} = \mathbf{LU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{bmatrix}$$

Decomposição LU de Doolittle

Example

Através de

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{bmatrix}$$

concluímos que
$u_{11} = 1$; $u_{12} = 2$; $u_{13} = 4$; $l_{21} = 3/1 = 3$; $u_{22} = 8 - 3 \times 2 = 2$; $u_{23} = 14 - 2 \times 4 = 2$; $l_{31} = 2/1 = 2$; $l_{32} = (6 - 2 \times 2)/2 = 1$ e $2 * 4 + 1 * 2 + u_{33} = 13 - 2 \times 4 - 1 \times 2 = 3$, ou seja,

$$\mathbf{LU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

Decomposição LU de Doolittle

Desta forma, temos $\mathbf{AX} = \mathbf{LUX} = \mathbf{B}$. Se, agora, considerarmos $UX = Y$ temos que apenas resolver em primeiro lugar $\mathbf{LY} = \mathbf{B}$, que se trata de um sistema tringular. Posteriormente, resolve-se $\mathbf{UX} = \mathbf{Y}$.

Example

Resolver $\mathbf{AX} = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \\ 4 \end{bmatrix}$

1.º passo: Decomposição LU

$$\mathbf{LU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

Decomposição LU de Doolittle

Example

2.º passo: Resolver $\mathbf{LY} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \\ 4 \end{bmatrix} = \mathbf{B}$ que pode ser resolvido através de substituição direta, obtendo-se $y_1 = 3$, $y_2 = 13 - 3 \times 3 = 4$ e $y_3 = 4 - 2 \times 3 - 4 = -6$.

3.º passo: Resolver $\mathbf{UX} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix} = \mathbf{Y}$ que pode ser resolvido através de substituição regressiva, obtendo-se $x_3 = -2$, $x_2 = 4$ e $x_1 = 3$.

Decomposição LU de Doolittle

Com este método basta resolver sistemas triangulares, no entanto, temos de fazer dois.
Outro problema é da matriz **A** só ter decomposição LU se todas as submatrizes principais tiverem determinante diferente de zero.

Example

As submatrizes principais do exemplo anterior tinham

$$|A_1| = |1|; |A_2| = det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}; |A_3| = |A| = 6$$

No entanto, a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ não tem os determinantes não nulos.

Pode-se resolver este problema trocando a 1.ª linha com a 2.ª.

Decomposição LU de Doolittle

Esta decomposição é extremamente útil, nomeadamente para o cálculo do determinante e para o cálculo da inversa de A.

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}$$

$$det(A) = det(L)det(U)$$

Contração

Proposition

Uma função de iteração $G(\mathbf{X}) = \mathbf{MX} + \mathbf{C}$ *é uma contração quando, pelo menos para uma norma, temos* $||M|| < 1$. *Caso seja uma contração, esta função produz sucessões* $\mathbf{X}_k = G(\mathbf{X_{k-1}})$ *convergentes para um ponto fixo de* G *a partir de qualquer ponto inicial* $\mathbf{X}_0$.

Método de Jacobi

Para qualquer um dos métodos será conveniente considerar a matriz decomposta da seguinte forma:

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U}$$

onde

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Método de Jacobi

Um dos métodos mais simples é o **método de Jacobi** tendo em conta que se tem

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \Leftrightarrow (\mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{X} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{DX} = -(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{X} + \mathbf{B}.$$

Dessa forma, este método consiste em iniciar-se com um $\mathbf{X}_0$ inicial e proceder-se iterativamente

$$\mathbf{X}^{(k)} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{X}^{(k-1)} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}$$

desde que $\mathbf{D}$ não tenha zeros na diagonal principal.

Método de Jacobi

Example

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ 4 \\ -12 \end{bmatrix}$$

Usando o ponto inicial $\mathbf{X}_0' = [0 \quad 0 \quad 0]$:
1.ª iteração:

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -3 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -16 \\ 4 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ 4 \\ -12 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{X}'^{(1)} = [-2 \quad 0.8 \quad -3]$$

Método de Jacobi

Example

2.ª iteração:

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -3 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -16 \\ 4 \\ -12 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{X}'^{(2)} = [-0.7 \quad 2.6 \quad -2.2]$$

3.ª iteração:

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -3 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -16 \\ 4 \\ -12 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{X}'^{(3)} = [-1.55 \quad 1.66 \quad -3.3]$$

Método de Jacobi

Example

Repetindo várias vezes temos

$$X^{(4)} = \begin{bmatrix} -0.765 \\ 2.39 \\ -2.64 \end{bmatrix}, X^{(5)} = \begin{bmatrix} -1.2775 \\ 1.787 \\ -3.215 \end{bmatrix}, \ldots,$$

$X^{(20)} = \begin{bmatrix} -0.9959 \\ 2.0043 \\ -2.0050 \end{bmatrix}, \ldots, X^{(40)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ Repare que na verdade o método converge porque

$$-\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -3 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -3 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & -1/2 \\ -3/5 & 0 & -1/5 \\ -1/2 & -1/4 & 0 \end{bmatrix}$$

tem norma igual a $0.8 < 1$.

Método de Gauss-Seidel

De

$$(\mathbf{D} + \mathbf{L})\mathbf{X} = -\mathbf{U}\mathbf{X} + \mathbf{B}$$

obtemos o **método de Gauss-Seidel** que consiste em iniciar-se com um $\mathbf{X}_0$ inicial e proceder-se iterativamente

$$\mathbf{X}^{(k)} = -(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}\mathbf{X}^{(k-1)} + (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{B}$$

desde que $\mathbf{D}$ não tenha zeros na diagonal principal.

Método de Richardson

De

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \Leftrightarrow (\mathbf{I_n} + (\mathbf{A} - \mathbf{I_n}))\mathbf{X} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{I_n}\mathbf{X} = (\mathbf{I_n} - \mathbf{A})\mathbf{X} + \mathbf{B}$$

obtemos o **método de Richardson** que consiste em iniciar-se com um $\mathbf{X}_0$ inicial e proceder-se iterativamente

$$\mathbf{X}^{(k)} = (\mathbf{I_n} - \mathbf{A})\mathbf{X}^{(k-1)} + \mathbf{B}$$

desde que **D** não tenha zeros na diagonal principal.