

# Sumário

## Prefácio

<b>1</b>	<b>O Sage e a Computação em Nuvem</b>	<b>1</b>
1.1	O Que É SageMath? . . . . .	1
1.2	Por Que SageMath? . . . . .	1
1.3	Onde Usar SageMath? . . . . .	3
1.3.1	<i>Off-line</i> . . . . .	3
1.3.2	<i>On-line</i> . . . . .	4
1.4	CoCalc: Guia de Uso . . . . .	6
1.4.1	Criando Um Projeto . . . . .	6
1.4.2	Sage Worksheet . . . . .	7
1.4.3	Jupyter Notebook . . . . .	13
1.4.4	Documentos L <sup>A</sup> T <sub>E</sub> X . . . . .	15
1.4.5	<i>Upload</i> de Arquivos . . . . .	16
1.4.6	Terminal de Comandos . . . . .	17
1.5	Projetos Colaborativos . . . . .	18
1.5.1	Adicione Colaboradores . . . . .	18
1.5.2	Notificações e <i>Chats</i> . . . . .	20
1.6	Ajuda . . . . .	22
<b>2</b>	<b>SageMath: Primeiros Passos</b>	<b>23</b>
2.1	Inserindo Comandos . . . . .	23
2.2	Comentários . . . . .	25
2.3	Objetos e Sintaxe de Comandos . . . . .	25
2.4	Obtendo Ajuda . . . . .	29

2.4.1	Descobrimdo Métodos . . . . .	29
2.4.2	O Comando de Ajuda:? . . . . .	30
2.4.3	Completamento <b>Tab</b> . . . . .	30
2.4.4	Acesso ao Código-Fonte . . . . .	31
2.4.5	Busca Google . . . . .	31
2.5	Números e Operações Aritméticas . . . . .	32
2.5.1	Tipos Numéricos . . . . .	32
2.5.2	Operações Básicas . . . . .	32
2.5.3	Expressões Lógicas . . . . .	34
2.5.4	Constantes Especiais . . . . .	35
2.5.5	Aproximação Numérica . . . . .	36
2.6	Variáveis . . . . .	37
2.6.1	Atribuição e Nomes . . . . .	37
2.6.2	Definindo Variáveis em Conjuntos Numéricos . . . . .	40
2.7	Variáveis Simbólicas . . . . .	42
2.8	Biblioteca de Funções . . . . .	43
2.8.1	Funções Aritméticas . . . . .	43
2.8.2	Funções Trigonométricas . . . . .	45
2.8.3	Funções Hiperbólicas . . . . .	47
2.9	Números e Funções Complexas . . . . .	47
2.9.1	Números Complexos . . . . .	47
2.9.2	Operações . . . . .	49
2.10	Salvando Objetos e Variáveis . . . . .	50
2.11	Cronometrando o Tempo . . . . .	51
2.12	Sage e L <sup>A</sup> T <sub>E</sub> X . . . . .	51
2.13	Problemas . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Introdução à Programação com Sage</b>	<b>57</b>
3.1	Blocos de Código . . . . .	57
3.2	Criando Funções . . . . .	58
3.2.1	Função def . . . . .	59
3.2.2	Função lambda . . . . .	61
3.3	Variáveis Locais e Globais . . . . .	63

## SUMÁRIO

3.4	Documentando o Código . . . . .	65
3.5	<i>Strings</i> . . . . .	66
3.6	Sequências: Listas, Tuplas e Dicionários . . . . .	67
3.6.1	Listas . . . . .	67
3.6.2	Criando Listas . . . . .	71
3.6.3	Tuplas . . . . .	77
3.6.4	Mapeando Listas e Tuplas . . . . .	79
3.6.5	Dicionários . . . . .	80
3.7	Condicionais . . . . .	82
3.7.1	if . . . . .	82
3.7.2	else . . . . .	83
3.8	Laços . . . . .	88
3.8.1	for . . . . .	88
3.8.2	while . . . . .	91
3.8.3	break e continue . . . . .	94
3.9	Compreensão de Listas . . . . .	98
3.10	Lidando com Erros . . . . .	100
3.10.1	Erros . . . . .	100
3.10.2	Tratando Erros . . . . .	104
3.10.3	Criando Exceções . . . . .	106
3.11	Criando um Programa com Sage em CoCalc . . . . .	107
3.11.1	Programa: A Conjectura de Collatz . . . . .	107
3.12	Problemas . . . . .	110
<b>4</b>	<b>Matemática Elementar</b>	<b>119</b>
4.1	Conjuntos . . . . .	119
4.2	Expressões Simbólicas . . . . .	122
4.2.1	Substituição . . . . .	122
4.2.2	Simplificação . . . . .	124
4.2.3	Expansão . . . . .	127
4.2.4	Fatoração . . . . .	130
4.3	Resolvendo Equações . . . . .	132
4.4	Resolvendo Sistemas de Equações . . . . .	135

4.4.1	Sistemas Lineares . . . . .	135
4.4.2	Sistemas Não Lineares . . . . .	136
4.5	Resolvendo Equações Numericamente . . . . .	138
4.6	Resolvendo Inequações . . . . .	140
4.7	Equações Diofantinas e de Congruência . . . . .	141
4.8	Polinômios . . . . .	142
4.9	Algumas Funções Estatísticas . . . . .	146
4.9.1	Medidas de Posição . . . . .	146
4.9.2	Medidas de Dispersão . . . . .	146
4.9.3	Histograma . . . . .	147
4.10	Problemas . . . . .	148
<b>5</b>	<b>Vetores, Matrizes e Álgebra Linear</b>	<b>151</b>
5.1	Vetores . . . . .	151
5.1.1	Construindo Vetores . . . . .	152
5.1.2	Operação com Vetores . . . . .	152
5.1.3	Norma . . . . .	153
5.2	Matrizes . . . . .	154
5.2.1	Criando Matrizes . . . . .	155
5.2.2	Matrizes Especiais . . . . .	158
5.2.3	Operações Básicas . . . . .	161
5.2.4	Funções Matriciais . . . . .	163
5.2.5	Submatrizes . . . . .	165
5.2.6	Concatenação de Matrizes . . . . .	169
5.2.7	Sistemas Lineares e Métodos de Escalonamento . . . . .	171
5.2.8	Exponencial de Uma Matriz . . . . .	173
5.3	Espaços e Subespaços Vetoriais . . . . .	173
5.3.1	Espaços Vetoriais . . . . .	174
5.3.2	Subespaços Vetoriais . . . . .	177
5.3.3	Operações entre Subespaços Vetoriais . . . . .	180
5.4	Produto Interno . . . . .	181
5.4.1	Gram-Schmidt . . . . .	184
5.5	Transformações Lineares . . . . .	192

## SUMÁRIO

5.5.1	Criando Transformações Lineares . . . . .	192
5.5.2	Matrizes Associadas a Transformações Lineares . . . . .	194
5.5.3	Operações com Transformações Lineares . . . . .	196
5.5.4	Injetividade, Sobrejetividade e Bijetividade . . . . .	197
5.5.5	Núcleo e Imagem . . . . .	198
5.6	Teoria Espectral . . . . .	200
5.6.1	Autovalores e Autovetores . . . . .	200
5.6.2	Diagonalização de Operadores . . . . .	203
5.6.3	Domínio, Contradomínio e Restrições . . . . .	205
5.6.4	Formas Canônicas . . . . .	207
5.7	Decomposições LU e QR . . . . .	210
5.8	Métodos para Testar Propriedades de Matrizes . . . . .	214
5.9	Problemas . . . . .	216
<b>6</b>	<b>Plot 2D</b>	<b>221</b>
6.1	Gráficos . . . . .	221
6.1.1	Gráfico Simples . . . . .	221
6.1.2	Múltiplos Gráficos no Mesmo Plano . . . . .	223
6.2	Curvas . . . . .	225
6.2.1	Curvas em Coordenadas Paramétricas . . . . .	225
6.2.2	Curvas Definidas Implicitamente . . . . .	226
6.2.3	Curvas em Coordenadas Polares . . . . .	226
6.3	Customizando Cores e Estilo . . . . .	227
6.4	Adicionando Informações . . . . .	234
6.4.1	Títulos, Legendas e Grades . . . . .	234
6.4.2	Textos e Setas . . . . .	237
6.5	Assíntotas Verticais ou Autointerseções . . . . .	238
6.6	Plotando Pontos e Segmentos de Retas . . . . .	241
6.7	Estilos de Marcações . . . . .	244
6.8	Customizando Figuras . . . . .	246
6.9	Opções de Preenchimento . . . . .	249
6.10	Campos de Vetores . . . . .	253
6.11	Curvas de Nível . . . . .	254

6.12	Objetos Geométricos . . . . .	257
6.12.1	Círculo, Disco, Elipse . . . . .	257
6.12.2	Polígonos . . . . .	260
6.13	Salvando Figuras . . . . .	262
6.14	Animações Gráficas . . . . .	262
6.14.1	Salvando Animações . . . . .	264
6.15	Problemas . . . . .	265
<b>7</b>	<b>Plot 3D</b>	<b>269</b>
7.1	Gráficos de Funções . . . . .	269
7.1.1	Customizando as Plotagens . . . . .	270
7.2	Superfícies Definidas Implicitamente . . . . .	272
7.3	Superfícies Paramétricas . . . . .	274
7.4	Coordenadas Cilíndricas e Superfície de Revolução . . . . .	276
7.5	Coordenadas Esféricas . . . . .	278
7.6	Curvas no Espaço Tridimensional . . . . .	279
7.7	Poliedros . . . . .	281
7.8	Salvando Figuras . . . . .	283
7.9	Problemas . . . . .	283
<b>8</b>	<b>Cálculo Diferencial e Integral</b>	<b>287</b>
8.1	Limites . . . . .	287
8.1.1	Limites de Funções . . . . .	288
8.1.2	Limites no Infinito . . . . .	291
8.1.3	Limites Laterais . . . . .	293
8.2	Derivadas . . . . .	295
8.2.1	Derivada de Funções de uma Variável . . . . .	295
8.2.2	Derivadas de Funções Definidas Implicitamente . . . . .	299
8.2.3	Derivadas de Ordem Superior . . . . .	300
8.2.4	Derivadas Parciais . . . . .	301
8.2.5	Derivadas e Matrizes . . . . .	303
8.3	Integral . . . . .	306
8.3.1	Integral Simples . . . . .	306

8.3.2	Integrais Definidas e Impróprias . . . . .	309
8.3.3	Integrais Duplas e Triplas . . . . .	311
8.3.4	Integral de Linha . . . . .	314
8.4	Campos de Vetores . . . . .	315
8.4.1	Gradiente . . . . .	316
8.4.2	Divergente . . . . .	317
8.4.3	Rotacional . . . . .	318
8.4.4	Laplaciano . . . . .	320
8.5	Somatórios e Séries . . . . .	321
8.5.1	Somatórios . . . . .	321
8.5.2	Séries . . . . .	323
8.5.3	Série de Taylor . . . . .	324
8.6	Transformada de Laplace . . . . .	325
8.7	Métodos Numéricos . . . . .	326
8.7.1	Otimização Numérica . . . . .	327
8.7.2	Integração Numérica . . . . .	330
8.8	Problemas . . . . .	337
<b>9</b>	<b>Equações Diferenciais Ordinárias</b>	<b>343</b>
9.1	EDOs de Primeira e Segunda Ordem . . . . .	344
9.1.1	O Método desolve . . . . .	344
9.1.2	O Problema de Valor Inicial . . . . .	351
9.2	EDOs de Ordem Superior . . . . .	354
9.2.1	Método desolve_laplace . . . . .	355
9.3	Gráficos de Soluções de EDOs . . . . .	360
9.4	Sistemas de Equações Diferenciais . . . . .	363
9.5	Resolvendo Equações Diferenciais Numericamente . . . . .	368
9.5.1	Algoritmo de Euler . . . . .	369
9.5.2	Algoritmo de Euler para Sistemas de EDOs . . . . .	372
9.5.3	Algoritmo de Runge-Kutta de Quarta Ordem . . . . .	374
9.5.4	Algoritmo de Runge-Kutta para Sistemas . . . . .	381
9.5.5	Resolvendo EDOs com o SciPy . . . . .	385
9.6	Resolução de EDOs em Séries de Potências . . . . .	388

9.7	Problemas . . . . .	393
<b>10</b>	<b>Soluções de Problemas com Sage</b>	<b>399</b>
10.1	Matemática Básica . . . . .	399
10.2	Desempenho . . . . .	401
10.3	Séries Numéricas . . . . .	403
10.4	Diferenciabilidade . . . . .	404
10.5	Funções Implícitas . . . . .	405
10.6	Máximos e Mínimos . . . . .	407
10.7	Aproximações Numéricas . . . . .	409
10.8	Cálculo Vetorial . . . . .	411
10.9	Aplicações da Integral Simples . . . . .	413
10.10	Equações Diferenciais . . . . .	415
10.11	Integral Dupla . . . . .	416
10.12	Matrizes . . . . .	419
10.13	Vetores, Retas e Planos . . . . .	422
10.14	Triedro de Frenet, Curvatura e Torção . . . . .	425
10.15	Fractais . . . . .	428
<b>11</b>	<b>Projetos com Sage</b>	<b>435</b>
11.1	Criptografia . . . . .	435
11.1.1	El Gamal . . . . .	438
11.1.2	RSA . . . . .	442
11.2	Braquistócrona . . . . .	444
11.3	Teorema Fundamental das Curvas . . . . .	448
<b>Apêndices</b>		
<b>A</b>	<b>Matrizes e Desempenho Computacional</b>	<b>453</b>
A.1	RDF <i>Versus</i> RR . . . . .	454
A.2	SR <i>Versus</i> AA . . . . .	455
A.3	NumPy . . . . .	456



## *SUMÁRIO*

<b>B</b>	<b>Otimização</b>	<b>459</b>
B.1	A Linguagem Cython . . . . .	459
B.2	A Linguagem Julia . . . . .	461
<b>C</b>	<b>Solução dos Problemas Propostos</b>	<b>465</b>
	<b>Referências</b>	<b>501</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>509</b>
	<b>Índice Remissivo dos Métodos</b>	<b>517</b>