# Lista 8: Fundamentos Estatísticos para Ciência dos Dados

Ricardo Pagoto Marinho

3 de maio de 2018

1. a) Gerando a matriz **amostra**:

```
covMat=matrix(c(4,9,-14,9,30,-44,-14,-44,94),ncol = 3)
L=t(chol(covMat))
mu=c(10,20,-50)
amostra=matrix(0,200,3)
for(i in 1:200){
    z=mvrnorm(1,c(0,0,0),matrix(c(1,0,0,0,1,0,0,0,1),3,3))
    amostra[i,]=mu+L%*%z
}
```

   b) Gerando a matriz de covariância $\sum$:

```
cMat=function(table){
    S=matrix(0,ncol(table),ncol(table))
    mu=apply(table,2,mean)
    for(i in 1:ncol(table)){
        for(j in 1:ncol(table)){
            S[i,j]=sum((table[,i]-mu[i])*(table[,j]-mu[j]))/nr
        }
    }
        return(S)
}
S=cMat(amostra)
```

   c) Gerando as matrizes de correlação $\rho$ e $\mathbf{R}$:

```
rho=matrix(0,3,3)
for(i in 1:3){
    for(j in 1:3){
        rho[i,j]=cor(amostra[,i],amostra[,j])
    }
}
estCorr=matrix(0,3,3)
for(i in 1:3){
    for(j in 1:3){
        estCorr[i,j]=S[i,j]/sqrt(S[i,i]*S[j,j])
    }
}
```

   Coincidentemente, as matrizes de correlação $\rho$ e $\mathbf{R}$ ficaram iguais.

2. A função para criar os 5000 valores da matriz R foi implementada da seguinte forma:

```
function(mu=c(0,0,0),sig=matrix(c(1,0,0,0,1,0,0,0,1),3,3),nlines,n
    require(MASS)
    L=t(chol(sig))
```

```
    amostra=matrix(0,nlines,ncolums)
    R=matrix(0,3,3)
    RR=as.list(numeric(9))
    dim(RR)=c(3,3)
    for(k in 1:5000){
        for(i in 1:nlines){
            z=mvrnorm(1,mu,sig)
            amostra[i,]=mu+L%*%z
        }
        amostra
        S=matrix(0,ncolums,ncolums)
        mu_s=apply(amostra,2,mean)
        for(i in 1:ncolums){
            for(j in 1:ncolums){
                S[i,j]=sum((amostra[,i]-mu[i])*(amostra[,j]-mu[j]))/nline
            }
        }
        for(i in 1:ncolums){
            for(j in 1:ncolums){
                R[i,j]=S[i,j]/sqrt(S[i,i]*S[j,j])
            }
        }
        for(i in 1:ncolums){
            for(j in 1:ncolums)
                RR[[i,j]][k]=R[i,j]
        }
    }
    return(RR)
}
```

Os histogramas dos 5000 valores de $R_{ij}$, sendo $i \neq j$, já que para $i = j$, $R_{ij} = 1$, são mostrados na Figura 1:

Os desvio-padrões aproximados de cada $R_{ij}$ são:

| $R_{ij}$ | Desvio-padrão |
|---|---|
| [1,2] | 0.0015 |
| [1,3] | 0.0005 |
| [2,1] | 0.0015 |
| [2,3] | 0.0001 |
| [3,1] | 0.0005 |
| [3,2] | 0.0001 |

3. • Temos que:

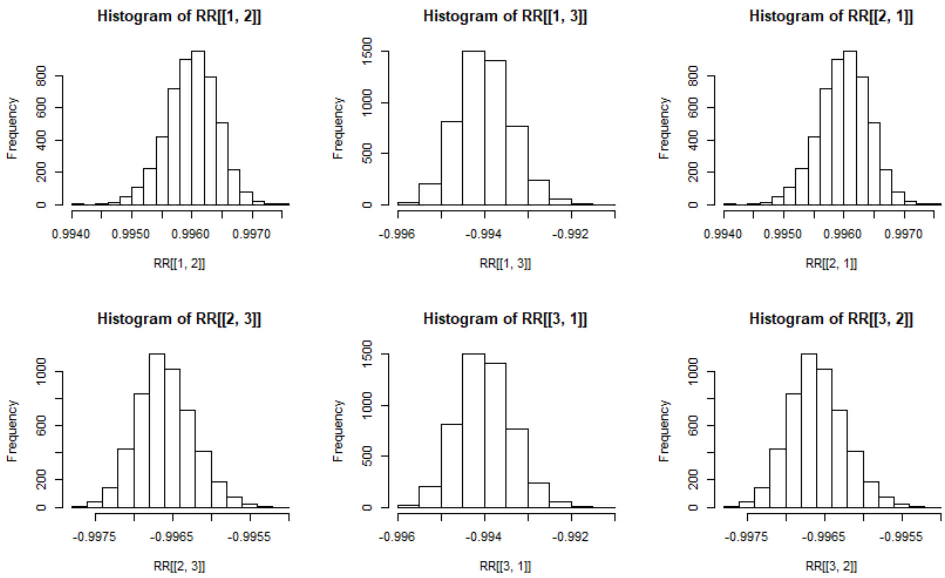


Figura 1: Histograms de $R_{ij}$

$$\rho = V^{-\frac{1}{2}} \sum V^{-\frac{1}{2}}$$

Sendo que $V^{-\frac{1}{2}}$ é uma matriz quadrada, diagonal com os elementos iguais à $\frac{1}{\sqrt{\sigma_{ii}}}$, onde $\sigma_{ii}$ são os elementos da diagonal principal de $\sum$. Portanto,

$$V^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & & & \\ & 1 & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{9}} & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{4}} \end{bmatrix}$$

Então:

$$\rho = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & & & \\ & 1 & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{9}} & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 9 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & & & \\ & 1 & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{9}} & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{4}} \end{bmatrix}$$

```
s=matrix(c(3,0,2,2,0,1,1,0,2,1,9,-2,2,0,-2,4),ncol=4)
v=matrix(c(1/sqrt(3),0,0,0,0,1,0,0,0,0,1/sqrt(9),0,0,0,0,0.5),
> m=v%*%(s%*%v)
> m
```

```
        [,1]      [,2]       [,3]       [,4]
[1,] 1.0000000 0.0000000  0.3849002  0.5773503
[2,] 0.0000000 1.0000000  0.3333333  0.0000000
[3,] 0.3849002 0.3333333  1.0000000 -0.3333333
[4,] 0.5773503 0.0000000 -0.3333333  1.0000000
```

- Dado $X' = (X_1, X_2, X_3, X_4)$, um vetor aleatório com vetor esperado $\mathbb{E}(X) = \mu = (0, 1, 0, -1)'$ e matriz de covariância

$$\sum = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 9 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Particionando

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \hline X_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^{(1)} \\ \hline X^{(2)} \end{bmatrix}$$

Sabe-se que $(X^{(1)}, X^{(2)})$ é uma normal bivariada e combinação linear de $X' = (X_1, X_2, X_3, X_4)$.

$$\mathbb{E}(X^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Como $X^{(1)}$ é combinação linear de $X_1$ e $X_2$, logo:

$$\mathbb{E}(AX^{(1)}) = (1, -1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

```
A=c(1,-1)
> m12=matrix(c(0,1),ncol=1)
> e=A%*%m12
> e
     [,1]
[1,]   -1
```

Portanto, $\mathbb{E}(AX^{(1)}) = -1$

- A matriz de covariância $\sum$ de $X^{(1)}$ é

$$\sum = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $Cov(AX^{(1)}) = (1, -1)Cov(X^{(1)}) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

  Logo:

```
A=c(1,-1)
cov12=matrix(c(3,0,0,1),ncol=2)
> A%*%(cov12%*%t(t(A)))
     [,1]
[1,]    4
>
```

- $$\mathbb{E}(X^{(2)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Temos que:
  $\mathbb{E}(BX^{(2)}) = B\mathbb{E}(X^{(2)})$

```
mu34=matrix(c(0,-1),ncol = 1)
> B=matrix(c(1,1,-1,2),ncol = 2)
> B%*%mu34
     [,1]
[1,]    1
[2,]   -2
```

- $Cov(AX^{(2)}) = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}]$

- $$Cov(BX^{(2)}) = \quad BCov(X^{(2)})B' = \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

```
cov2=matrix(c(9,-2,-2,4),ncol = 2)
> B%*%(cov2%*%t(B))
     [,1] [,2]
[1,]   17   -1
[2,]   -1   17
```

4. Como X é combinação linear de $Y_1$,

$$\mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{E}(c_1'X) = c'\mu$$

onde $c_1' = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ e $\mu = (-1, 0, 2)$, portanto,

$$\mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{E}(c_1'X) = c'\mu = -\frac{1}{4} + 0 + 1 = \frac{3}{4}$$

Além disso, a variância $\mathbb{V}(Y_1) = c_1' \sum c_1$, onde

$$\sum = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \text{-2} \\ \text{-2} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Logo,

```
c1=c(1/4,-1/4,1/2)
> sig=matrix(c(1,-2,0,-2,5,0,0,0,2),ncol = 3)
> c1%*%(sig%*%t(t(c1)))
       [,1]
[1,] 1.125
```

Para $Y_2$ fazemos a mesma coisa utilizando o vetor 'c' correto, ou seja: $c_2' = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$. Portanto,

$$\mathbb{E}(Y_2) = \mathbb{E}(c_2'X) = c'\mu = \frac{1}{4} + 0 - 1 = -\frac{5}{4}$$

e a variância $\mathbb{V}(Y_2) = c_2' \sum c_2$:

```
c2=c(1/4,1/4,-1/2)
> c2%*%(sig%*%t(t(c2)))
       [,1]
[1,] 0.625
```

Para obter a distribuição conjunta de $(Y_1, Y_2)$ precisamos da esperança $\mu_{12}$ e da matriz de covariância$\sum_{12}$. $\mu_{12}$ é obtido a partir das esperanças de $Y_1$ e $Y_2$, ou seja, $[\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}]$. Os elementos (1,1) e (2,2) da matriz de covariância são conhecidos e foram calculados anteriormente, *i.e.*, $\sigma_{11} = 1.125$ e $\sigma_{22} = 0.625$. Os elementos (1,2) e (2,1) são o mesmo, já que a matriz é simétrica e são encontrados nos elementos (1,2),(2,1) da matriz:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \sum [c_1, c_2]$$

```
> c=cbind(c1,c2)
> t(c)%*%(sig%*%c)
       c1     c2
c1  1.125 -0.750
c2 -0.750  0.625
```

Logo, $\sigma_{12} = \sigma_{21} = -0.75$. Portanto:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{5}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.125 & \text{-0.750} \\ \text{-0.750} & 0.625 \end{bmatrix}\right)$$

5. Para saber se duas v.a.s $i$ e $j$ são independentes, basta olhar para os elementos $i, j$ da matriz de covariância. Caso sejam 0, elas serão independentes, se for diferente de 0, elas não são. No caso de sub-vetores de variáveis, tem que olhar para a sub-matriz $i, j$ na matriz de covariância particionada. Portanto:

   - Não são independentes
   - São independentes
   - São independentes
   - São independentes
   - São independentes pois

     $$Cov(X_2, X_2 + \frac{5X_1}{2} - X_3) = Cov(X_2, X_2) + \frac{5}{2}Cov(X_2, X_1) - Cov(X_2, X_3) = 5 + \frac{5}{2} - 2 - 0 = 0$$

```
stif= matrix(scan("stiffness.txt"), ncol=5, byrow=T)
x = stiffness[,1:4]
mu = apply(x, 2, mean)
sigm = cov(x)
dev = x - matrix(mu, nrow=nrow(x), ncol=ncol(x), byrow=T)
d2est = diag(desv %*% (solve(sig) %*% t(dev)))
d2 = mahalanobis(x, mu, sig)
plot(d2, d2est)
anomal = d2 > qchisq(0.95,4)
x[anomal,]
nanom = sum(anomal)
pairs(rbind(x, x[anomal,]), pch="*", col=rep(c("black", "red"), c(
```

6. 7. - Setosa:

```
apply(iris[iris$Species=="setosa",1:4],2,mean)
Sepal.Length  Sepal.Width Petal.Length  Petal.Width
       5.006        3.428        1.462        0.246
> round(cov(iris[iris$Species=="setosa",1:4]),3)
             Sepal.Length Sepal.Width Petal.Length Petal.Width
Sepal.Length        0.124       0.099        0.016
0.010
Sepal.Width         0.099       0.144        0.012
0.009
Petal.Length        0.016       0.012        0.030
0.006
Petal.Width         0.010       0.009        0.006
0.011
```

```
round(cor(iris[iris$Species=="setosa",1:4]),3)
             Sepal.Length Sepal.Width Petal.Length Petal.Width
Sepal.Length        1.000       0.743        0.267
0.278
Sepal.Width         0.743       1.000        0.178
0.233
Petal.Length        0.267       0.178        1.000
0.332
Petal.Width         0.278       0.233        0.332
1.000
```

Versicolor:

```
apply(iris[iris$Species=="versicolor",1:4],2,mean)
Sepal.Length  Sepal.Width Petal.Length  Petal.Width
       5.936        2.770        4.260        1.326
> round(cov(iris[iris$Species=="versicolor",1:4]),3)
             Sepal.Length Sepal.Width Petal.Length Petal.Width
Sepal.Length        0.266       0.085        0.183
0.056
Sepal.Width         0.085       0.098        0.083
0.041
Petal.Length        0.183       0.083        0.221
0.073
Petal.Width         0.056       0.041        0.073
0.039
> round(cor(iris[iris$Species=="versicolor",1:4]),3)
             Sepal.Length Sepal.Width Petal.Length Petal.Width
Sepal.Length        1.000       0.526        0.754
0.546
Sepal.Width         0.526       1.000        0.561
0.664
Petal.Length        0.754       0.561        1.000
0.787
Petal.Width         0.546       0.664        0.787
1.000
```

Virginica:

```
apply(iris[iris$Species=="virginica",1:4],2,mean)
Sepal.Length  Sepal.Width Petal.Length  Petal.Width
       6.588        2.974        5.552        2.026
> round(cov(iris[iris$Species=="virginica",1:4]),3)
             Sepal.Length Sepal.Width Petal.Length Petal.Width
Sepal.Length        0.404       0.094        0.303
0.049
```

```
Sepal.Width          0.094         0.104          0.071
0.048
Petal.Length         0.303         0.071          0.305
0.049
Petal.Width          0.049         0.048          0.049
0.075
> round(cor(iris[iris$Species=="virginica",1:4]),3)
             Sepal.Length Sepal.Width Petal.Length Petal.Width
Sepal.Length         1.000         0.457          0.864
0.281
Sepal.Width          0.457         1.000          0.401
0.538
Petal.Length         0.864         0.401          1.000
0.322
Petal.Width          0.281         0.538          0.322
1.000
```

- Para Setosa, tamanho e comprimento das sépalas são as mais correlacionadas, enquanto que o tamanho das sépalas e das pétalas são as menos correlacionadas.

  Nas Versicolor, o tamanho das sépalas e tamanho da pétalas são as mais correlacionadas, por outro lado, o tamanho e comprimento das sépalas são as menos correlacionadas.

  Por fim, nas Virginicas, assim como nas Versicolor, o tamanho das sépalas e tamanho da pétalas são as mais correlacionadas, enquanto que o tamanho das sépalas e das pétalas são as menos correlacionadas.

- Para não ficar extenso, focarei apenas nas espécie Setosa. O processo para criar a distribuição das outros é equivalente, bata olhar os dois primeiros valores do vetor de média e os elementos (1,1),(1,2),(2,1) e (2,2) das matrizes de covariância. Setosa:

$$X^* = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = N_2\left(\begin{bmatrix} 5.006 \\ 3.428 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.124 & 0.099 \\ 0.099 & 0.143 \end{bmatrix}\right)$$

- $$m = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} + \sum_{12} \sum 22^( - 1) \begin{pmatrix} x_3 - \mu_3 \\ x_4 - \mu_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.006 \\ 3.428 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0.399 & 0.712 \\ 0.247 & 0.702 \end{bmatrix} \Big($$

  Para $x_3 = 1.8$ e $x_4 = 0.6$,

```
> mu=matrix(c(5.006,3.428),ncol = 1)
> sig=matrix(c(0.399,0.247,0.712,0.702),ncol = 2)
> x=matrix(c(0.338,0.354),ncol = 1)
```

```
> mu+sig%*%x
          [,1]
[1,] 5.392910
[2,] 3.759994
```

Para a matriz de covariância, temos:

$$V = \sum_{11} - \sum_{12} \sum_{22}^{-1} \sum_{21}$$

```
> s=round(cov(iris[iris$Species=="setosa",1:4]),3)
> s11=matrix(c(s[1,1],s[2,1],s[1,2],s[2,2]),ncol=2)
> s12=matrix(c(s[1,3],s[2,3],s[1,4],s[2,4]),ncol=2)
> s22=matrix(c(s[3,3],s[4,3],s[3,4],s[4,4]),ncol=2)
> s21=matrix(c(s[3,1],s[4,1],s[3,2],s[4,2]),ncol=2)
> v=s11-s12%*%(solve(s22)%*%s21)
> round(v,3)
      [,1]  [,2]
[1,] 0.111 0.088
[2,] 0.088 0.135
```

$DP_1 = \sqrt{\mathbb{V}(X_1)} = 0.352$ e $\sqrt{\mathbb{V}(X_1|X_3 = 1.8, X_4 = 0.6)} = 0.332$.

- 

$$\begin{aligned} m = & \quad m_1 + \sum_{12} \sum_{22}^{-1} (x_2 - m_2) = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} [\sigma_{33}]^{-1} (1.8 - \mu_3) \\ = & \quad \begin{pmatrix} 5.186 \\ 3.563 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V = & \quad \sum_{11} - \sum_{12} \sum_{22}^{-1} \sum_{21} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} [\sigma_{33}]^{-1} [\sigma_{31} \sigma_{32}] \\ = & \quad \begin{bmatrix} 0.115 & 0.093 \\ 0.093 & 0.139 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Para $X_4 = 0.6$:

$$\begin{aligned} m = & \quad m_1 + \sum_{12} \sum_{22}^{-1} (x_2 - m_2) = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{14} \\ \sigma_{24} \end{bmatrix} [\sigma_{44}]^{-1} (0.6 - \mu_4) \\ = & \quad \begin{pmatrix} 5.328 \\ 3.718 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V = & \quad \sum_{11} - \sum_{12} \sum_{22}^{-1} \sum_{21} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{14} \\ \sigma_{24} \end{bmatrix} [\sigma_{44}]^{-1} [\sigma_{41} \sigma_{42}] \\ = & \quad \begin{bmatrix} 0.115 & 0.091 \\ 0.091 & 0.136 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Para predizer $X_2$, é melhor olhar para $X_4$, pois $\mathbb{V}(X_2|X_4 = 0.6) = 0.136 < 0.139 = \mathbb{V}(X_2|X_3 = 1,8)$.
- $0.134 = \mathbb{V}(X_2|X3 = 1.8, X_4 = 0.6) < \mathbb{V}(X_2|X_4 = 0.6) = 0.136 < V(X2) = 0.144$, portanto, conhecer o valor de $X_3$ modifica pouco a predição de $X_2$

8. Temos:

$$\begin{aligned} \mu_c = & \mu_2 + \sum_{12} \sum_{22}^{-1} (x_1 - \mu_1) \\ = & \mu_2 + \rho\sqrt{\sigma_{22}} \frac{x_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sigma_c^2 = & \sum_{22} - \sum_{12} \sum_{22}^{-1} \sum_{21} \\ = & \sigma_{22} - \rho\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}} \frac{1}{\sigma_{11}} \rho\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}} \\ = & \sigma_{22}(1 - \rho^2) \end{aligned}$$

- Falso, pois $|\rho| < 1$, logo, o valor de $X_2$ é incrementado em $|\rho^2\sqrt{\sigma_{22}}| < 2\sqrt{\sigma_{22}}$. Portanto é menor do que 2 desvios-padrões.
- Falso, pois $\mathbb{V}(X_2|X_1 = x)$ não depende de x.
- Verdadeiro, já que $\rho^2 < 1$.
- Verdadeiro, pois $\mathbb{E}(X_2|X_1 = x_1)$ é uma função linear de $x_1$.

9. - A distribuição do vetor é uma distribuição normal.
   - $\mu = [1, 2]$ e $\sum = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
   - var.pts representa a matriz de covariância estimada a partir dos dados, já cov(pts) é a matriz de covariância real.
   - O comando apresentado limita o número de dígito pós vírgula, logo não apresenta a matriz exata.
   - O menor autovalor da matriz de covariância é $9.841374^{-15}$, enquanto o de cov(pts) é $7.646045^{-15}$.
   - A distribuição de $X_1$ e $X_2$ é uma Normal.
   - Como a distribuição de $X_1$ e $X_2$ é uma Normal, a de $(X_1, X_2, X_3)$ também é uma Normal.

10. - Primeiro devemos achar os autovetores da matriz de correlação X. Para isso, fiz as seguintes operações:

```
c=cor(wine[,2:14])
round(eigen(c)$vec[,1:2],2)
         [,1]   [,2]
 [1,]   -0.14  -0.48
 [2,]    0.25  -0.22
 [3,]    0.00  -0.32
 [4,]    0.24   0.01
 [5,]   -0.14  -0.30
 [6,]   -0.39  -0.07
 [7,]   -0.42   0.00
 [8,]    0.30  -0.03
 [9,]   -0.31  -0.04
[10,]    0.09  -0.53
[11,]   -0.30   0.28
[12,]   -0.38   0.16
[13,]   -0.29  -0.36
```

Dessa forma, temos os dois primeiros autovetores. Logo, os valores (??) da lista são:

$Y_{i1} = -0.14Z_{i1} + 0.25Z_{i2} + 0.00Z_{i3} + 0.24Z_{i4} - 0.14Z_{i5} - 0.39Z_{i6} - 0.42Z_{i7} + 0.30Z_{i8} - 0.31Z_{i9} + 0.09Z_{i10} - 0.30Z_{i11} - 0.38Z_{i2} - 0.29Z_{i13}$
$Y_{i2} = -0.48Z_{i1} - 0.22Z_{i2} - 0.32Z_{i3} + 0.01Z_{i4} - 0.30Z_{i5} - 0.07Z_{i6} - 0.00Z_{i7} - 0.03Z_{i8} - 0.04Z_{i9} - 0.53Z_{i10} + 0.28Z_{i11} + 0.16Z_{i2} - 0.36Z_{i13}$

- Região 1:

$$\begin{aligned} x = &\ [-5, 0] \\ y = &\ [-1, 3] \end{aligned}$$

Região 2:

$$\begin{aligned} x = &\ [-2.5, 2] \\ y = &\ [-4, 0] \end{aligned}$$

Região 3:

$$\begin{aligned} x = &\ [2, 4] \\ y = &\ [-1, 2] \end{aligned}$$