Trabalho Prático: Soma Máxima e Quadrado Mágico

Marcos Paulo Quintão Fernandes[1]

[1]Departamento de Ciência da Computação - Universidade Federal de Minas Gerais

1. Introdução

Os objetivos deste trabalho consistem em se encontrar a Soma Máxima em um intervalo dentro de um vetor dado (Seção 2.1) e a resolução de um Quadrado Mágico de lado *n*, onde o *n* é dado (Seção 2.2).

2. Solução do Problema

Foram implementados dois métodos distintos para solucionar o problema:

- `Soma Máxima de um vetor`
- `Encontrar alguma solução para o Quadrado Mágico`

2.1. Soma Máxima

O intervalo é inicialmente dado na forma de um vetor `V = [`v_1`, `v_2`, `v_3`, ..., `v_n`]`.

Iremos resolver este problema de baseado em uma solução de força bruta:

- força bruta - Para todo sub-intervalo compreendido nos índices (i,j) iremos calcular a soma de seu subintervalo iterando por todos valores v_k para todo $k \geq i$ e $k \leq j$. Complexidade $O(n^3)$, que corresponde ao custo iterar por todos os intervalos $O(n^2)$ multiplicada pelo custo de achar a soma de um intervalo $O(n)$.
- otimização da força bruta - Conseguimos calcular a soma de um intervalo dispondo de um vetor de prefixos. Imaginemos que possuímos um vetor p de tal forma que p_i armazena a soma de todos os elementos compreendidos de 1 a i. Conseguimos computar esse vetor em $O(n)$ com a seguinte recorrência: $p_i = p_{i-1} + v_i$. Dado que possuímos esse vetor, conseguimos efetuar a soma de um intervalo qualquer com a seguinte operação: soma(i,j) = p_j - p_{i-1}, ou seja, em $O(1)$. Complexidade $O(n^2)$, que corresponde ao custo iterar por todos os intervalos $O(n^2)$ multiplicada pelo custo de achar a soma de um intervalo $O(1)$.

2.2. Quadrado Mágico

A resolução do problema proposto foi dividida entre dois possíveis cenários: *n* par ou *n* ímpar.

n par

O quadrado de lado *n* par demanda a aplicação de um método de força bruta. Para cada posição do quadrado mágico, testamos todas as possibilidades de números que possam ocupá-la de forma que cada número seja usado apenas uma vez. Dessa forma, procuramos a solução em todos os $n^2!$ estados possíveis. O método de força bruta possui uma função principal descrita pelo algoritmo 1.

Algorithm 1 Pseudo-código do Quadrado Mágico por força bruta

```
function FORCA_BRUTA(i, usados)
    if solucao ja impressa then                                  ▷
        retorna
    end if

    if solucao viavel then
        imprime solucao viavel
    end if
    for j : 1..N^2 do
        if j ∉ usados then
            usados = usados ∪ j
            forca_bruta(i + 1, usados)
            usados = usados − {j}
        end if
    end for
end function
```

A aplicação do método de força bruta apresenta um alto custo computacional, dessa forma todas as variáveis foram implementadas como globais para aumentar a eficiência do programa. O custo dessa solução é $O(n^2!n^2)$.

n ímpar

O quadrado de lado *n* ímpar aceita uma solução sequencial que apresenta um menor custo computacional. [WikiHow 2017]

Para se resolver um quadrado mágico de lado *n* ímpar, inicialmente deve-se preencher a casa do meio da primeira linha com o valor 1.

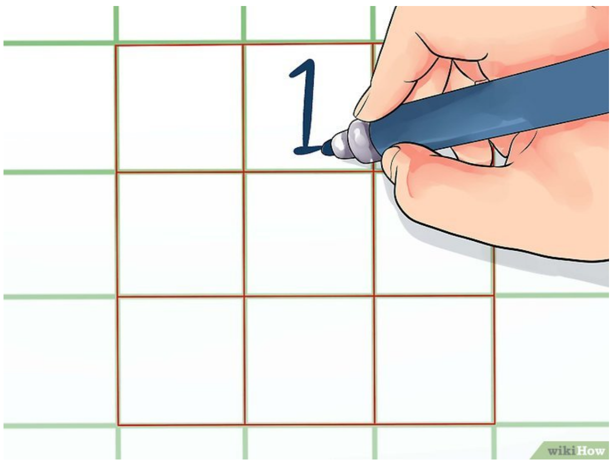

Figura 1. Primeiro passol

Em seguida deve-se “andar” em um padrão de uma célula para cima e uma célula para a direita. Ao chegar nas bordas do quadrado, deve-se continuar do outro lado, ou seja da última linha se pula para a primeira linha e da última coluna se pula para a primeira coluna.

Ao chegar na casa de destino, se ela estiver vazia, recebe o próximo número da sequência (2, 3, 4, 5,...n^2).

Se a casa estiver cheia, ou seja, já possuir um número, deve-se voltar a casa de partida e colocar o próximo número da sequência na casa imediatamente abaixo.

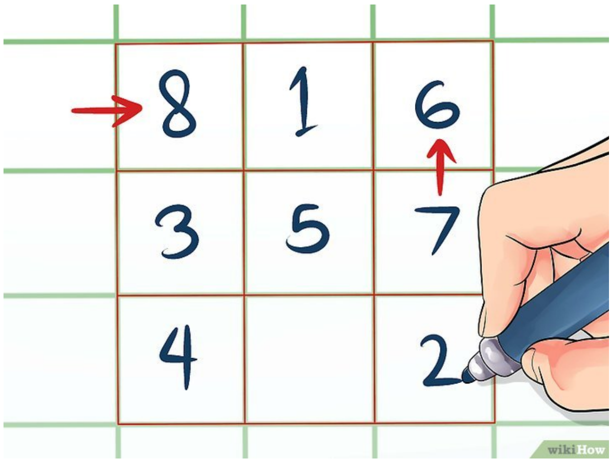

Figura 2. Passo sequencial

Teste do quadrado mágico

Foram executados testes para os quadrados de lado 3, 4 e 5. Vale ressaltar que para o teste de n=4 a solução demorou 22 horas para imprimir a resposta correta.

Referências

WikiHow (2017). WikiHow: how to solve a magic square.