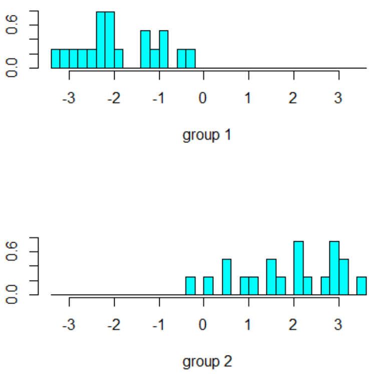
Lista 11: Fundamentos Estatísticos para Ciência dos Dados

Ricardo Pagoto Marinho

29 de maio de 2018

1. Fazendo a análise:

```
beetles <- read.table('BEETLES.DAT', col.names = c('
Measurement.Number', 'Species', 'transverse.groove.dist',
'elytra.length', 'second.antennal.joint.length',
'third.antennal.joint.length'))
library(dplyr)
beetle1 <- filter(beetles, Species == 1)[,3:6]
beetle2 <- filter(beetles, Species == 2)[,3:6]
n1 <- nrow(beetle1)
n2 <- nrow(beetle2)
beetle1.means <- apply(beetle1, 2, mean)
beetle2.means <- apply(beetle2, 2, mean)
w1 <- (n1 - 1) * var(beetle1)
w2 <- (n2 - 1) * var(beetle2)
sp1 <- 1 / (n1 + n2 - 2) * (w1 + w2)
a <- solve(sp1) %*% (beetle1.means - beetle2.means)
diag(sp1)^(1/2) * a
library(MASS)
beet.lda <- lda(Species ~ .-Measurement.Number, data = beetles)
beet.lda$scaling
beet.lda$scaling / a
plot(beet.lda)
```



2.
   - Para o caso de $c(1|2) = c(2|1)$ e $\pi_1 = \pi_2$, a comparação fica reduzida apenas à quantidade de indivíduos nas duas amostras, já que o que vai definir a região é qual função de densidade é a maior.
   - Para $\pi_1 = 0.001$, consequentemente $\pi_2 = 0.99$ e $c(1|2) = c(2|1)$, a função de classificação fica:

$$\begin{aligned}
\frac{f_1(x)}{f_2(x)} &> \tfrac{\pi_2}{\pi_1} \\
\frac{f_1(x)}{f_2(x)} &> \tfrac{0.99}{0.01} \\
\frac{f_1(x)}{f_2(x)} &> 99 \\
f_1(x) &> 99 f_2(x)
\end{aligned}$$

Ou seja, $f_1(x)$ deve ser mais do que 99 vezes maior do que $f_2(x)$

- Neste caso, com $c(1|2) = \frac{c(2|1)}{10}$ e $\pi_1 = 0.001$ e $\pi_2 = 0.99$ temos:

$$\begin{aligned}
\frac{f_1(x)}{f_2(x)} &> \tfrac{c(1|2)}{c(2|1)}\tfrac{\pi_2}{\pi_1} \\
\frac{f_1(x)}{f_2(x)} &> \tfrac{c(2|1)}{10}\tfrac{1}{c(2|1)}\tfrac{0.99}{0.01} \\
\frac{f_1(x)}{f_2(x)} &> \tfrac{0.99}{0.1} \\
\frac{f_1(x)}{f_2(x)} &> 9.9 \\
f_1(x) &> 9.9 f_2(x)
\end{aligned}$$

Ou seja, a regra do item anterior fica 10 vezes menor, já que aqui, $f_1(x)$ deve ser mais do que 9.9 vezes maior do que $f_2(x)$.

3.
- A precisão mede o quanto os resultados da classificação são úteis.
  V
- A revocação mede o quanto os resultados da aplicação da regra de classificação são completos.
  V
- A soma da precisão e revocação é igual a 1.
  F
-
$$Precisão = Revocação \times \frac{\mathbb{P}(X \in 1)}{\mathbb{P}(D(X) = 2)}$$

  V, pois pela regra de Bayes

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Como $\mathbb{P}(A|B) = Precisão$, $P(B|A) = Revocação$, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X \in 1)$ e $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(D(X) = 2)$, basta substituir na regra de Bayes.

- Existe um trade-off entre precisão e revocação: se aumentarmos uma métrica, a outra tem de diminuir.

  F

  Considerando que as probabilidades não muda, pela equação do item anterior, podemos ver que quando uma métrica aumenta, a outra também aumenta, *i.e.*

  $Precisão \propto Revocação$.

4. O custo esperado de má classificação é dado por:

$$ecm = c(2|1)\mathbb{P}(2| \in 1)\mathbb{P}(\pi_1) + c(1|2)\mathbb{P}(1| \in 2)\mathbb{P}(\pi_2)$$

- Como $\pi_1 \approx 0$, e vamos atribuir todo e qualquer item à classe 2, a probabilidade de uma classificação errada é quase 0, já que essa probabilidade é $\mathbb{P}(2| \in 1)$, ou seja, a probabilidade de classificarmos um elemento na população 2 dado que ele é da população 1. Contudo, a probabilidade de ele ser da população 1 é muito pequena (aproximadamente 0), portanto a probabilidade de classificação errada é baixa.
- Como $\pi_1 \approx 0$ e $c(2|1) \gg c(1|2)$, $ecm \approx c(1|2)\mathbb{P}(1| \in 2)\mathbb{P}(\pi_2)$

5. Temos uma distribuição de Bernoulli com média θ e variância $\theta(1-\theta)$. Nos é dado que θ está entre 15% e 35%, logo a variância é de 0.25 e o desvio padrão é de 0.5.

   Queremos que $|\hat{\theta} - \theta|$ seja menor do que 0.02 com uma probabilidade de 0.99, *i.e.*:

$$P(|\hat{\theta} - \theta| < 0.02) = 0.99$$

Podemos manipular essa probabilidade para que ela seja similar a uma distribuição normal $N(0,1)$

$$P(|\hat{\theta} - \theta| < 0.02) = 0.99$$
$$P\left(\frac{|\hat{\theta} - \theta|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{0.02}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 0.99$$

Assim, como a distribuição é uma normal $N(0,1)$, $\frac{0.02}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = 3$.

$$\begin{aligned}
\frac{0.02}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} &= 3 \\
0.02 &= \tfrac{3\sigma}{\sqrt{n}} \\
\sqrt{n} &= \tfrac{3\sigma}{0.02} \\
n &= \left(\tfrac{3\sigma}{0.02}\right)^2 \\
n &= 5625
\end{aligned}$$

Assim, a pesquisa deve ser feita com pelo menos 5625 pessoas.

6. Para um intervalo de confiança de 95%, $z_{95\%} = 1.96$.

   Como $SE = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, SE=0.007.

   Além disso, $z = \frac{c}{SE} \rightarrow c = 0.014$ Portanto, o intervalo é:

$$(\hat{\theta} - 0.014, \hat{\theta} + 0.014)$$