La Variable Continua

Thursday, 8 August 2024 10:04 p.m.

Variable Continua

No se sabe el espacio muestral

Ejemplo

Sea f(x) una función definida por

$$f(x)=\begin{cases} cx^2 & 0\le x\le 2 \\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

1. Calcule el valor de la constante c para que f(x) sea la función de densidad de la variable aleatoria X.
2. Calcule $P[0 < X \le 1]$.

1) $\int_0^2 cx^2$

$c\int_0^2 x^2dx \to \frac{1}{3}x^3c \to \frac{x^3}{3}c=1 \to \frac{(2)^3}{3}c=1 \to \frac{8}{3}c=1$

$\boxed{c=\frac{3}{8}}_{\#}$

$\int_0^1 cx^2$

$c\int_0^1 \frac{3}{8}x^2 \to \frac{1}{8}x^3=1 \to \frac{1}{8}(1)^3=1 \to \frac{1}{8} = \boxed{\frac{1}{8}}_{\#}$

Problema del flujo vehicular

En una cierta calle transitada se quiere medir el flujo vehicular. Una manera de hacerlo es medir el tiempo entre un automóvil y otro. Sea X es el tiempo transcurrido en segundos entre el tiempo en que un auto termina de pasar por un punto fijo y el instante en que el siguiente auto comienza a pasar por ese punto. La distribución del tiempo de avance tiene la forma

$$f(x)=\begin{cases} \frac{k}{x^4}, & si \quad x>1 \\ 0 & si \quad x\le 1\end{cases}$$

a) Determine el valor de k para la cual $f(x)$ es una función de densidad de probabilidad (fdp).

b) ¿Cuál será el valor esperado entre autos? ¿su varianza?

c) ¿Cuál será la probabilidad de que se tarde un auto más de 2 segundos? ¿A lo más 2?¿x segundos o menos?

a) $\int_1^\infty \frac{k}{x^4}$

$k\int_1^\infty x^{-4}dx \to k\left[\frac{x^{-3}}{-3}\right]_1^\infty = k\left(0+\frac{1}{3}\right) = \frac{k}{3}$

$\boxed{k=3}_{\#}$

b) $E(X) = \int_1^\infty x\frac{3}{x^4}dx$

$\int_1^\infty \frac{3x}{x^4}dx \to \int_1^\infty \frac{3}{x^3}dx = 3\int_1^\infty x^{-3}dx \to 3\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^\infty \to -\left[\frac{3}{2x^2}\right]_1^\infty = \boxed{\frac{3}{2}}_{\#}$

$\boxed{E(x)=\frac{3}{2}}_{\#}$

$Var(x) = E[(x-\mu)^2]$

$Var(x) = E(x^2)-\mu^2 = E(x^2)-E(x)^2$

$E(x^2)$

$E(x^2) \to \int_1^\infty x^2\left(\frac{3}{x^4}\right)dx = \int_1^\infty \frac{3}{x^2}dx = -\left[\frac{3}{x}\right]_1^\infty = 3$

$E(x)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$

$V(x) = 3-\frac{9}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}_{\#}$

$\boxed{V(x)=\frac{3}{4}}_{\#}$

c) $P(x>2)$

$\int_2^\infty \frac{3}{x^4}dx \to -[x^{-3}]_2^\infty = \boxed{\frac{1}{8}}_{\#}$

$P(x<2)$

$\int_1^2 \frac{3}{x^4}dx \to -[x^{-3}]_1^2 = -\left[\frac{1}{8}-1\right] = \boxed{\frac{7}{8}}_{\#}$

$P(x\le x)$

$\int_1^x \frac{3}{x^4}dx = -[x^{-3}]_1^x = \boxed{1-x^{-3}}_{\#}$