Universidade de São Paulo
Instituto de Física de São Carlos
Introdução à Física Computacional

Dinâmica Populacional

Ricardo Tetti Camacho - 10728098

São Carlos - 2019

1 Introdução

Para o estudo da dinâmica populacional são utilizados mapas logísticos e caos determinístico, para esse estudo será utilizado um modelo que quanto maior o número de indivíduos maior o número de descendentes sendo limitado por um número máximo. Podendo ser representado pela seguinte equação:

$$dN(t) = \alpha N(t)dt \tag{1}$$

Onde $N(t)$ representa a quantidade de indivíduos em um determinado tempo, dt é a variação infinitesimal de tempo e α é a taxa de reprodução. Como essa equação não mostra nenhum fator que limite seu crescimento ela não pode ser considerada um modelo realístico para o crescimento populacional, para isso é necessário limitar ela, podendo ser de uma maneira simples como colocar um número máximo de indivíduos (N_{max}).
O estudo desse modelo terá como resultado um mapa que tem dependência das condições iniciais e que poderá ter um comportamento caótico dependendo de tais condições.
A discretização da equação(1) tem como resultado, para sucessivos intervalos de tempo, a equação representada abaixo:

$$N_{i+1} = (1 + \alpha\Delta t)N_i \approx rN_i \tag{2}$$

$$r = 1 + \alpha\Delta t > 1 \tag{3}$$

Limitando o número de indivíduos com a relação $x_i \approx N_i/N_{max}$ é possível se obter a equação (4) que servira como base para todo projeto.

$$x_{i+1} = rx_i(1 - x_i) \tag{4}$$

A equação (4) representa um mapa logístico e descreve o crescimento populacional.

2 Métodos

2.1 Tratamento Geral

Para realizar a tarefa A do projeto, foi necessário primeiro montar os mapas logísticos para entender o comportamento do crescimento populacional, verificar se a população morre ao longo do tempo, se ela atinge estabilidade ou tem comportamento caótico. Para isso foi usado o seguinte program, representado na figura 1:

```
program escada
      implicit none
      integer:: i
      real(8):: x0, r1, x1

      open(unit = 1, file = "escada.dat",status = "replace", action = "write")

      x0 = 0.4d0
      r1 = 3.d0


      do i = 1,100

            x1 = r1*x0*(1-x0)

            write(1,*) x0, x1

            x0 = x1

            write(1,*) x1, x0
      enddo

      close(unit = 1)

end program
```

Figure 1: Programa Mapa Logistico

Onde foi alterando os valores de r e do x inicial para que fosse possível estudar os sistemas.
Para que se fosse estudado a evolução temporal do sistema mudando o x_0 e verificar o que ocorria em um certo intervalo de tempo foi utilizado o programa representado pela figura 2.

```
program tratamento_geral
      implicit none
      integer:: i
      real(8):: x1, r1

      open(unit = 1, file = "r1x1.dat",status = "replace", action = "write")

      r1 = 1.d0

      do i = 0,100
            x1 = x1*r1*(1-x1)
            write(1,*) i, x1
      enddo

end program
```

Figure 2: Programa Evolução Temporal

2.2 Rumo ao Caos

Para realizar a tarefa B do projeto foi utilizado o gráfico da bifurcação para a função dada pela equação (4), esse gráfico consiste em uma analise para um certo x a variação do r dentro de um intervalo Δr definido. Sendo assim é possível verificar quando r se mantém em um período oscilatório entre dois valores e assim suscetivamente até atingir um movimento caótico. Para isso foi montado o código indicado na figura 3 que calcula esses pontos.

```
program diagrama
      implicit none
      integer:: i
      real(8):: r, r0, x, rf


      open(unit = 1, file = "diagrama.dat",status = "replace", action = "write")

      r0 = 1.d0
      rf = 4.d0
      r = r0
      do while (r <= rf)
            r = r + 0.01
            x = 0.2
            do i = 1, 10000
                  x = x*r*(1-x)
                  if (i > 2000) then
                        write(1,*) r, x
                  endif
            enddo
      enddo
      close(unit = 1)
end program
```

Figure 3: Programa Bifurcação

2.3 Caos

Para começar a analisar sistemas caóticos é necessário entender quando o caos desse sistema pode convergir para um sistema estável ou divergir para um caótico, para o estudo dessa condição é necessário conhecer o Expoente de Lyapunov, que tem como função estimar a taxa de convergência ou divergência das soluções encontradas.
Para encontrar esse coeficiente serão estudados dois x_0 com uma diferença bem pequena e a partir disso verificar o seu grau de convergência ou divergência. Nisso foi implementado um programa em Fortran para que fosse calculado a distância, cuja equação está representado pela equação (5), ou seja, quando que elas se divergem uma da outra entre os dois caminhos traçados para valores inicias diferentes e com isso é possível encontrar o expoente de Lyapunov com uma regressão linear na e ver que esse coeficiente pode ser tomado como o coeficiente angular da reta obtida, o programa usado se encontra na figura 4.

$$d(i) = |G^{(i)}(x_0 + \epsilon) - G^{(i)}(x_0)| \tag{5}$$

```
program lyapunov
      implicit none
      integer:: i, n, k
      real(8):: r, x0, eps, d, t, h, x, xeps
      real(8):: soma, plam, lambda, p, f
      real, dimension(60) :: vetor


      read(*,*) r
      read(*,*) x0
      read(*,*) eps

      open(unit = 1, file = "dist_out.dat",status = "replace", action = "write")

!!!!!!!!!!!!!!!!!!! CALCULO DISTANCIA ENTRE DOIS PERIODOS DIFERENTES
      x = x0
      xeps = x0 + eps

      do i = 1,1000
            x = x*r*(1-x)
            xeps = xeps*r*(1-xeps)
            d = abs(xeps - x)
            write(1,*) i, x ,d
      enddo
!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!!!!!!!!!!!!!!!!!! REGRESSÃO LINEAR
      do i = 1, 60
            x = x*r*(1-x)
            xeps = xeps*r*(1-xeps)
            f = abs(xeps- x)
            vetor(i) = f
      enddo
      p = (log(vetor(5)) - log(vetor(4)))
!!!!!!!!!!!!!!!!!
!!!!!!!!!!!!!!!!! CALCULO DE LAMBDA PELO SOMATORIO !!!!!!!!!
      soma = 0.d0
      n = 1000
      do k = 1, n
            plam = log(abs(r-2*r*x0))
            soma = soma + plam
      enddo

      lambda = soma/(real(n)-1)

      write(*,*) p ,lambda
end program
```

Figure 4: Expoente de Lyapunov

O programa representado acima tem como função não só calcular o expoente de Lyapunov pela distância representado pela equação (5), mas também pela formula apresentada na equação (6), que utiliza a reta tangente gerada pela função $G(x)$ e analisa seu coeficiente.

$$\lambda = \frac{1}{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} ln|G'(x_j)| \tag{6}$$

3 Resultados e discussão

3.1 Tratamento Geral

Para que seja explicado os resultados obtidos com a simulação do crescimento populacional com valores de r diferentes é necessário primeiro analisar os mapas logísticos obtidos.
Onde cada um desses gráficos representa para uma condição inicial fixa de x_0 e r variados para cada um dos mapas.
Com esses mapas é possível perceber que para a figura 4, com um $r = 1$, o crescimento tende a ser continuo e não tão rápido até atingir um valor máximo que se encontra próximo de 0.25.
Assim como pela figura 5, gráfico da evolução temporal, é possível perceber o crescimento descrito pelo mapa logístico para esse mesmo valor de r.

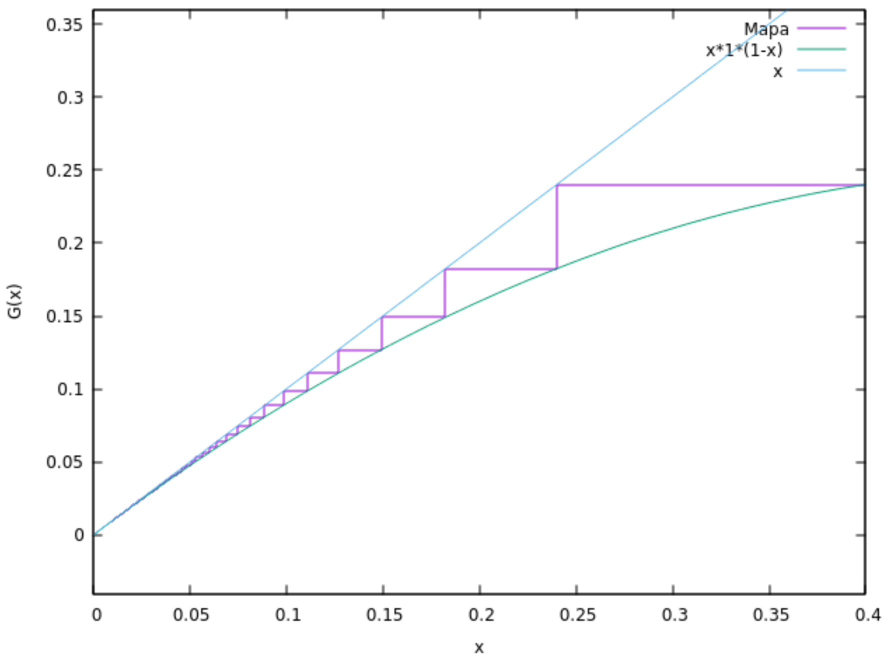


Figure 5: $x = 0.4$ e $r = 1$

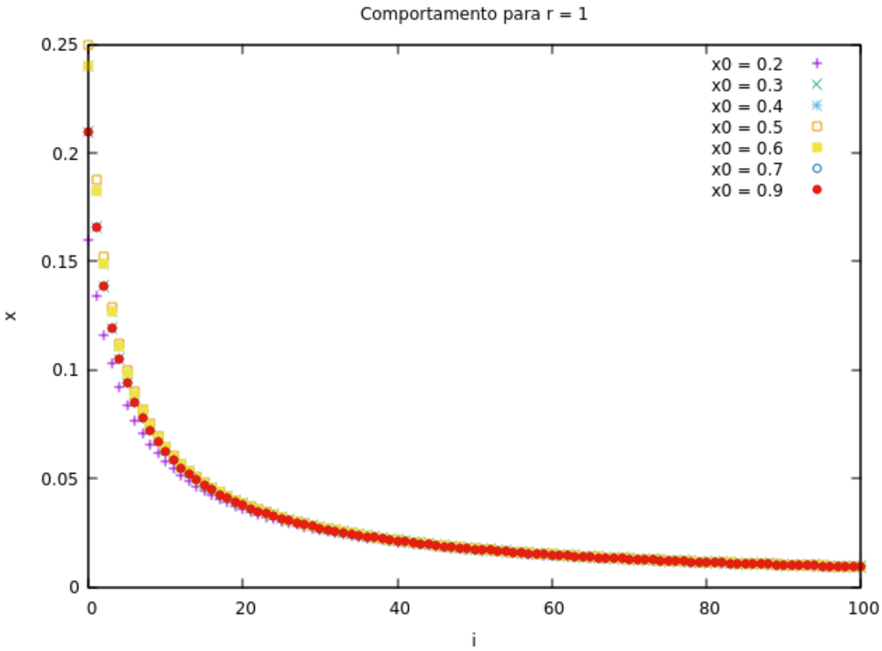


Figure 6: $r = 1$

Já para o $r = 2$, representado pela figura 6, o crescimento tende a atingir o seu máximo de maneira muito rápido, podendo ser visualizado tanto pelo mapa quanto pelo gráfico de evolução temporal (figura 7), que tambem mostra que independente do valor de x inicial ele tende sempre ao mesmo valor, isso se explica pelo fato da interseção da curva $G(x) = xr(1 - x)$ e da $f(x) = x$ ser sempre muito parecido independente do do x analisado.

Quando é colocado o $r = 3$, figura 8, é possível perceber que começa a ficar um pouco mais interessantes, e que a evolução do gráfico de evolução temporal ficara oscilando em torno de dois valores a partir de um certo x, isso ocorre devido a instabilidade do sistema, e pelo mapa logístico é possível observar isso quando começa a formar um retângulo ao redor da interseção das curvas $G(x)$ e $f(x)$. Assim como no gráfico de evolução temporal se verifica que ele diverge para em duas curvas que quando ligadas por linhas descreve um movimento oscilatório.

Para um r maior que 3.6, no nosso caso estudado para um um $r = 4$ percebesse que assim como no mapa logístico do $r = 3$ ele oscila entre dois pontos a partir de um certo valor de x, mas no caso do $r = 4$ ele oscila para todos os valor de x, como se pode observar pela figura 10 e também pelo gráfico da evolução temporal (figura 11).

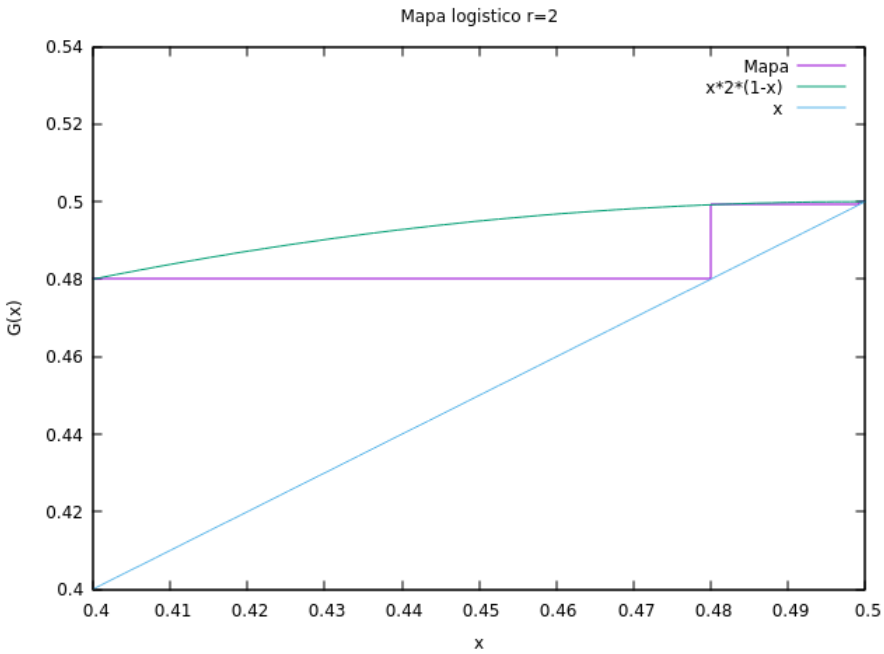


Figure 7: $x = 0.4$ e $r = 2$

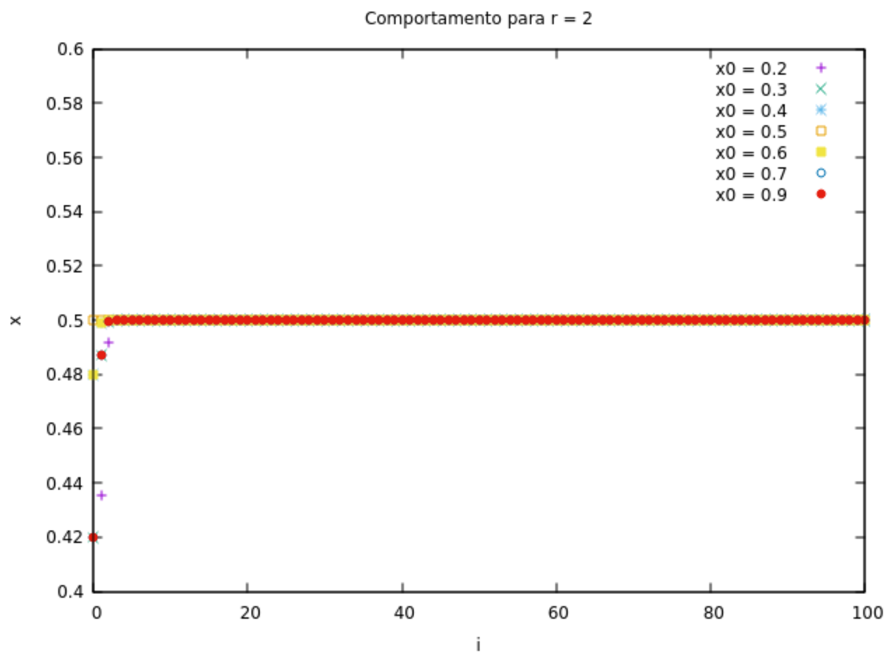


Figure 8: $r = 2$

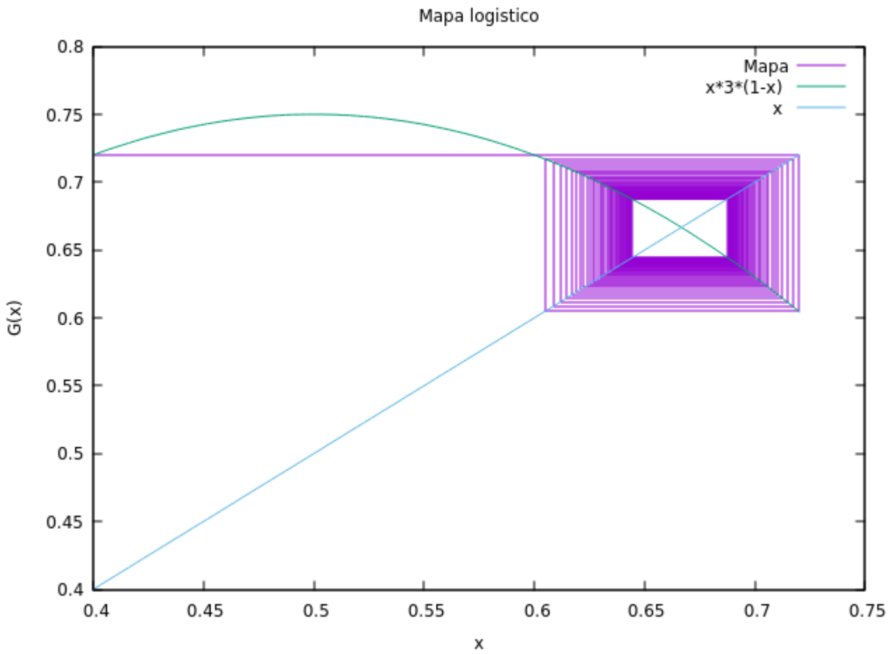


Figure 9: $x = 0.4$ e $r = 3$

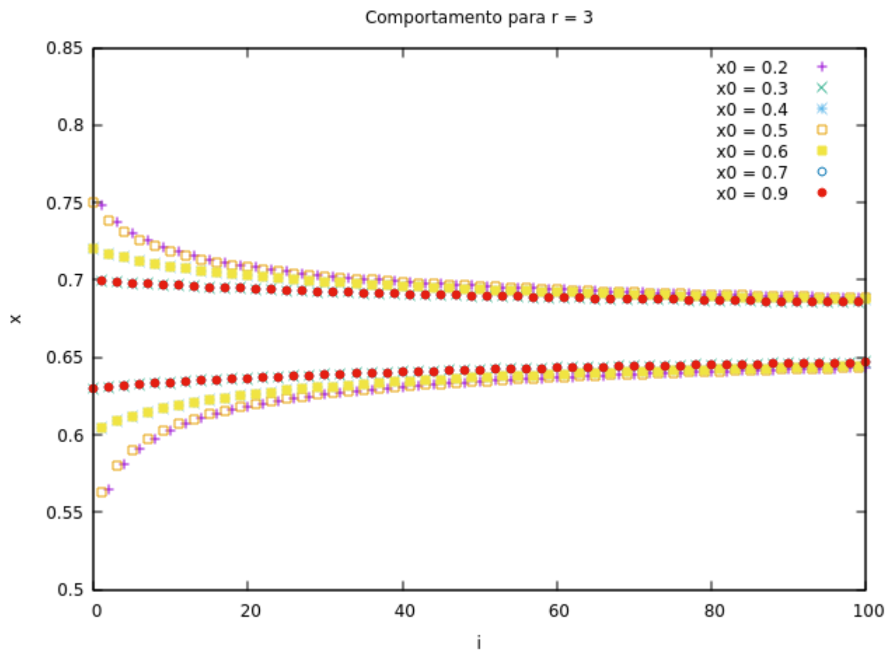


Figure 10: $r = 3$

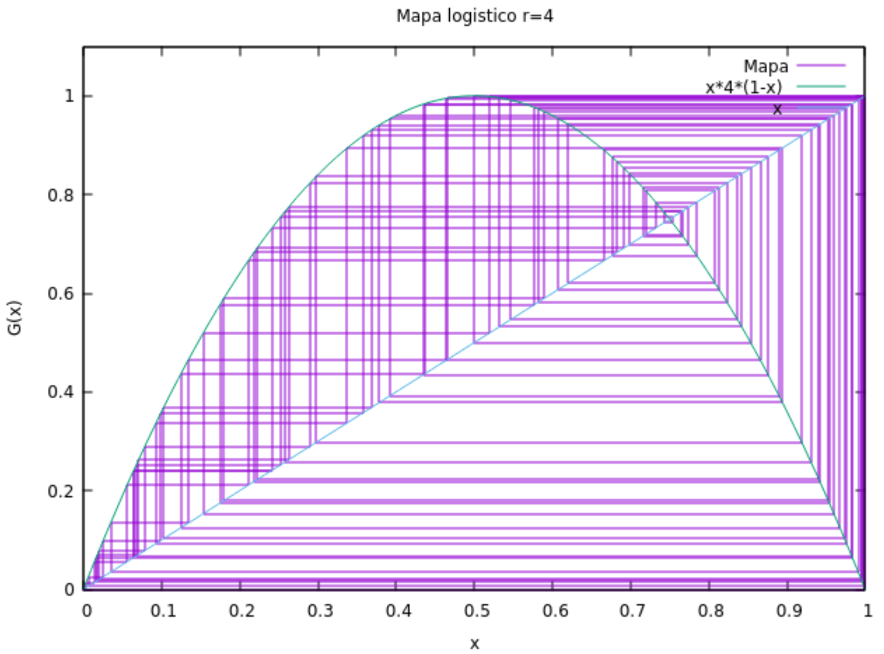


Figure 11: $x = 0.4$ e $r = 4$

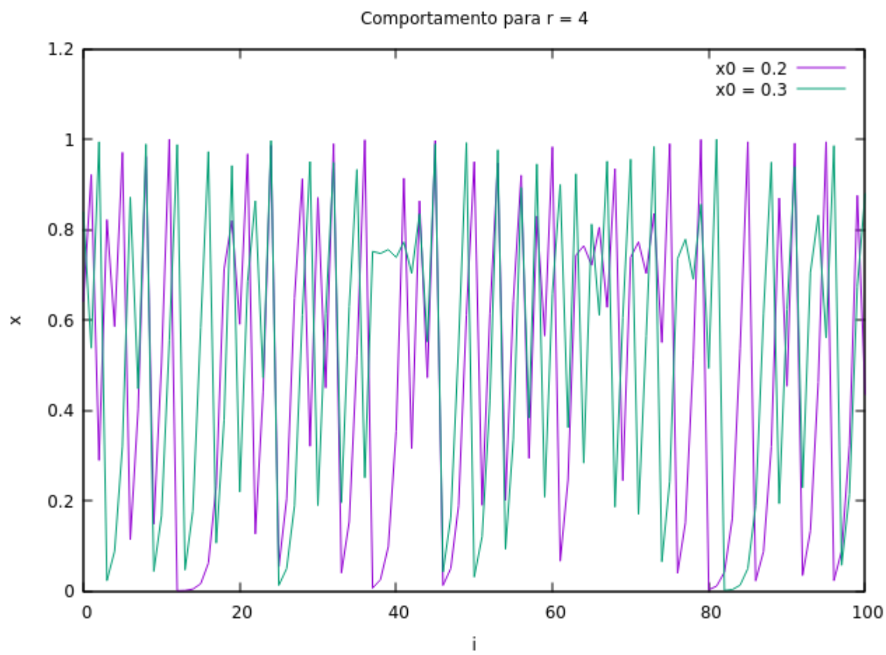


Figure 12: $r = 4$

3.2 Rumo ao Caos

Com o auxilio do programa mostrado nos métodos dessa parte foi possível obter o gráfico da bifurcação, mostrado na figura 12 para o r variando de 1 a 4 e na figura 13 com um ele variando de 2.8 a 4, sendo possível observar os pontos de duplicação. Com esse pontos é possível calcular a constante de Feigenbaum.

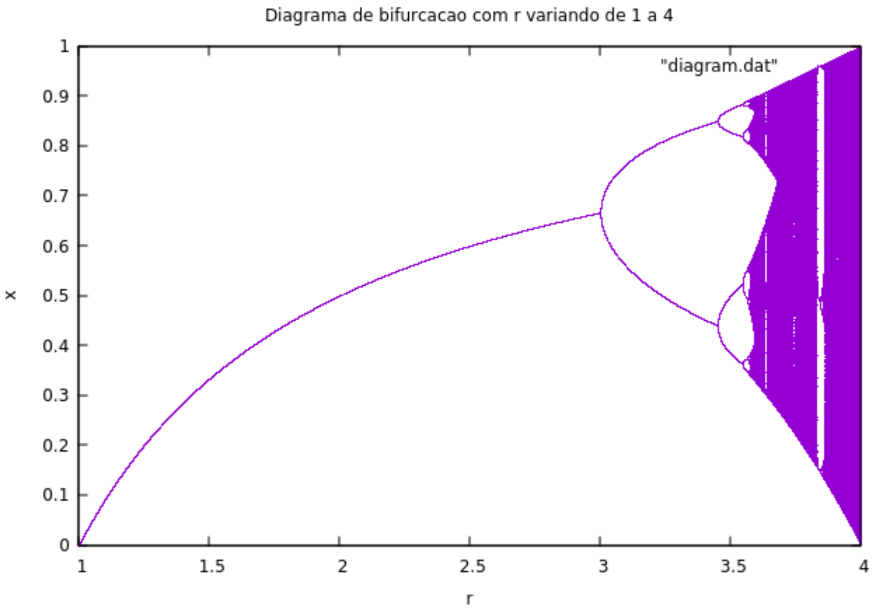


Figure 13: Bifurcação

Através da equação 5, com cada um dos r sendo a bifurcação consecutiva, representado pela tabela a seguir:

$$\delta = \frac{r_2 - r_1}{r_3 - r_2} \tag{7}$$

r_1	3
r_2	3.449
r_3	3.544
δ	4.7263

Com esse valores de r foi possível obter a constante de Feigenbaum com o valor de $\delta = 4.7263$, um valor semelhante ao encontrado na literatura, de $\delta = 4.6692$, com um erro de 1.01%. Isso se deve ao gráfico da bifurcação não ser mais tão preciso visualmente, devido a quantidade de pontos, para intervalos muito pequenos.

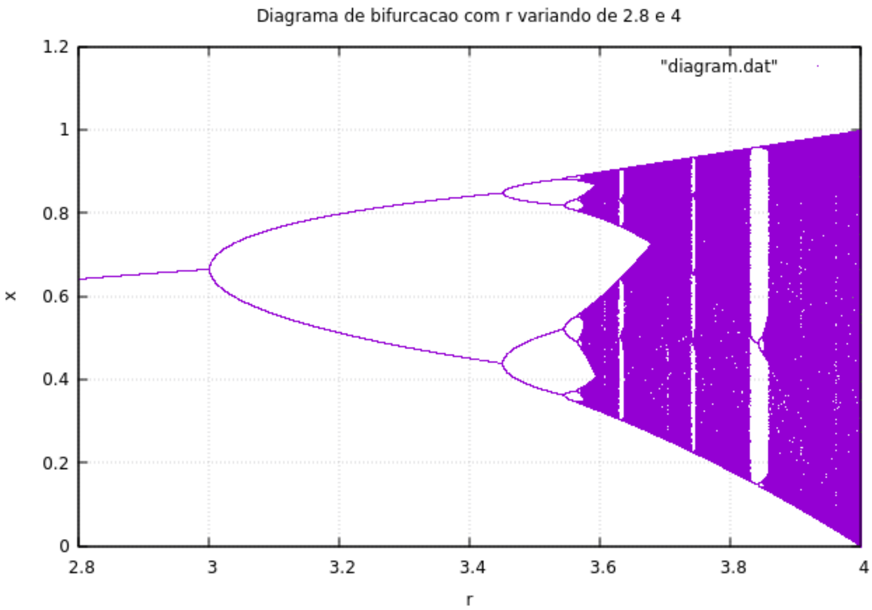
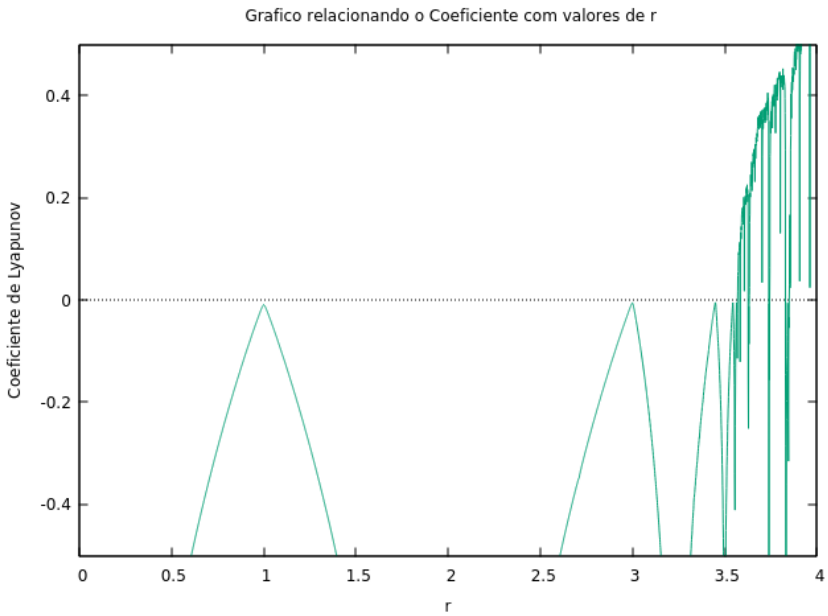


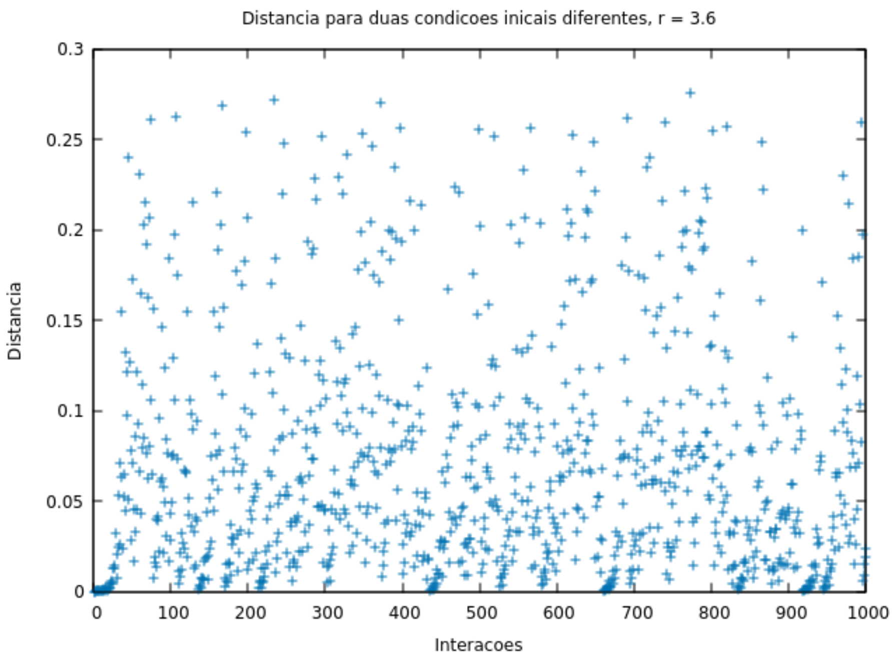
Figure 14: Bifurcação

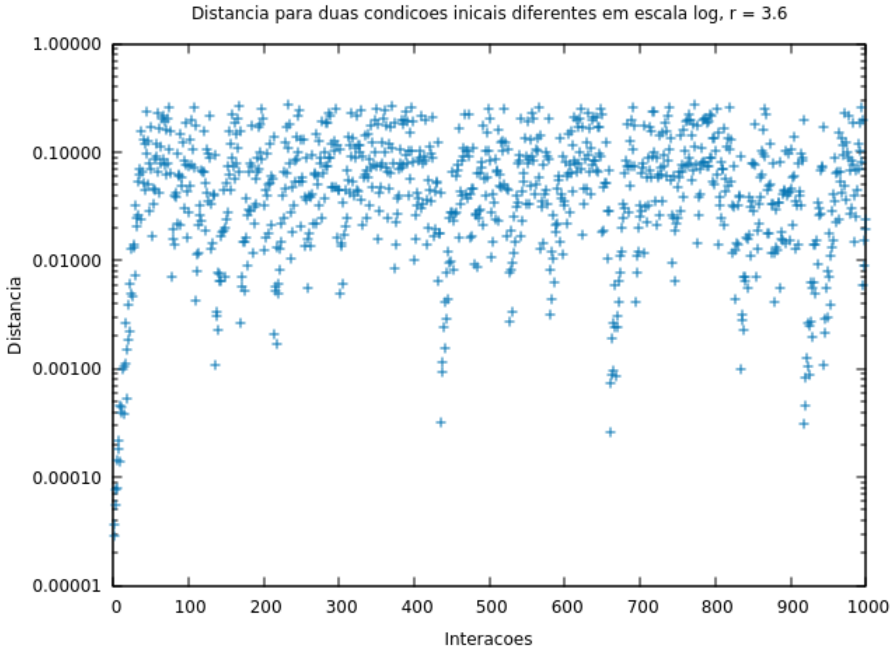
3.3 Caos

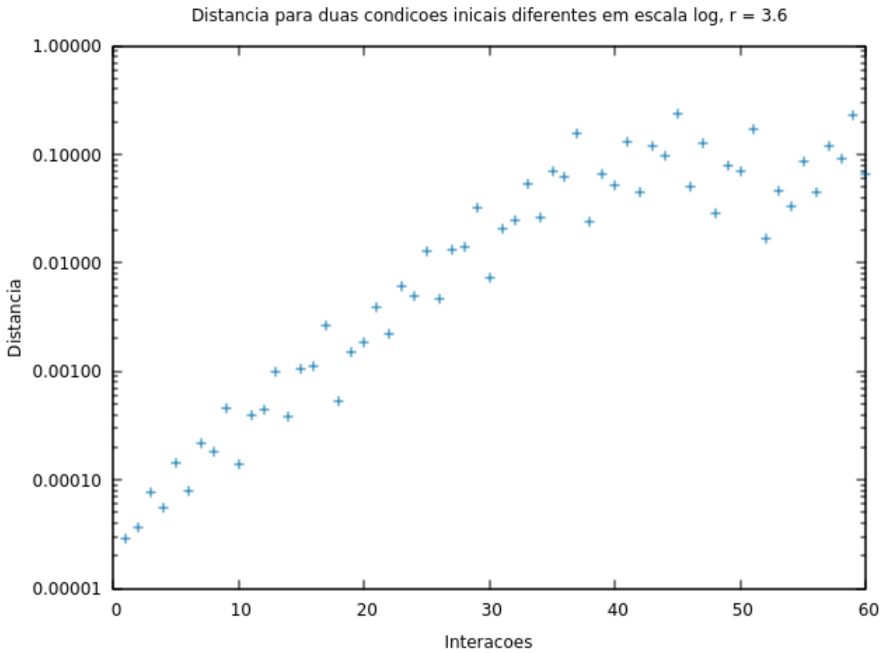
Para entender um pouco melhor os resultados foi plotado um gráfico mostrando o comportamento do coeficiente de Lyapunov.



Podemos tirar a seguinte interpretação desse gráfico, os valores de r que o coeficiente se encontra abaixo de 0 tem como resultado um sistema periodicamente estável ou estacionário, para valores que o coeficiente é maior que zero o sistema normalmente é instável e diverge e para coeficientes iguais a zero o sistema se conserva.
Isso pode ser verificado fazendo uma analise do crescimento ou decrescimento de duas populações com o valor de x_0 muito próximos e verificar a diferença conforme o sistema evolui. Utilizando o caso teste com $r = 3.6$, $x_0 = 0.1$ e $\epsilon = 10^{-5}$ se obtém os seguintes gráficos, representados abaixo.
O primeiro gráfico mostra a distância entre dois sistemas que estão em comportando caótico pois seu $r > 3.54$, como mostrado nas partes anteriores, esse gráfico possui esse comportamento devido a distancia entre os pontos ser sempre diferente, uma vez que qualquer mudança na condição inicial, mesmo que na ordem de 10^{-5}, mostra uma multiplicação de período grande de oscilações, já explicado com o gráfico da bifurcação (figura 13 e 14).
Já o segundo e o terceiro gráfico mostram a mesma coisa, mas o segundo para todas as 1000 interações e o terceiro para um intervalo menor, até 60 interações, ambos em escala logarítmica podendo ser observado a evolução inicial do sistema melhor. Com o uso da escala logarítmica é possível obter o coeficiente de Lyapunov quando analisada a terceira figura e assim percebendo que o seu sistema é caótico em seu todo.




Distancia para duas condicoes inicais diferentes em escala log, r = 3.6
Distancia
Interacoes
1.00000
0.10000
0.01000
0.00100
0.00010
0.00001
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000


Distancia para duas condicoes inicais diferentes em escala log, r = 3.6
Distancia
Interacoes
1.00000
0.10000
0.01000
0.00100
0.00010
0.00001
0
10
20
30
40
50
60