Conjunto: Colección no ordenada de elementos elimina los elementos repetidos.

A

$|A| = n \in \mathbb{Z}^+$

Si se cumple decimos que el conjunto era finito

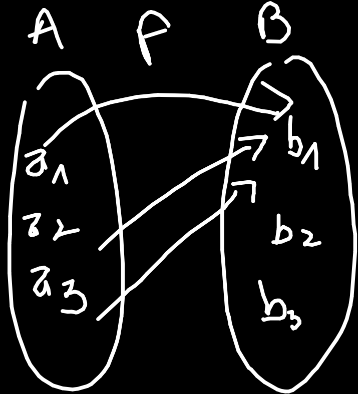
$A \subseteq B$ subconjunto

$P(A) = \{\text{subconjuntos de } A\}$

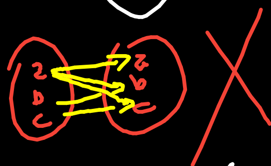
Si $|A| = n \Rightarrow |P(A)| = 2^n$

$A = \{a, b, c, d\}$

$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,d\}, A\}$

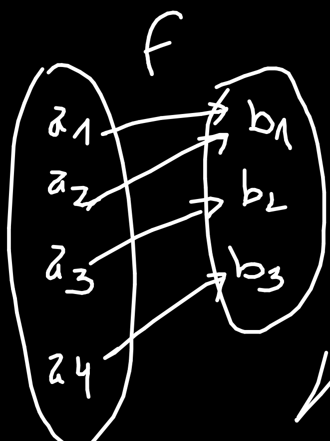


f es función porque todos los elementos de A tienen imagen



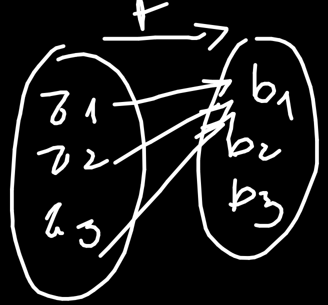
Si f es 1-1 inyectiva

$\forall\, a \in A\ \exists\ f(a) = b \in B$ tal que si $f(a_1) = f(a_2)$ $\Rightarrow a_1 = a_2$



Acá no sería inyectiva porque b_1 tiene 2 preimágenes a_1 y a_2

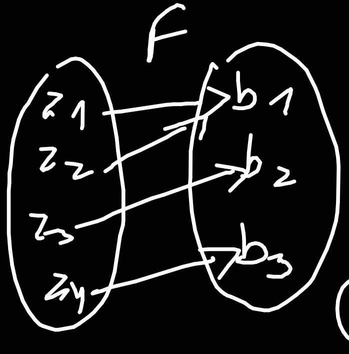
Sobreyectiva es cuando el Codominio = Recorrido



F es función pero no es sobreyectiva porque

el Codominio = $\{b_1, b_2, b_3\}$

Recorrido = $\{b_1\}$



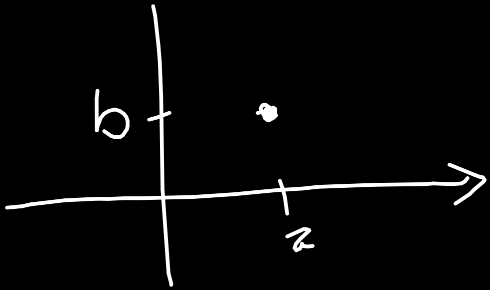
Esta función es sobreyectiva porque

Codominio = $\{b_1, b_2, b_3\}$

Recorrido = $\{b_1, b_2, b_3\}$

$\Rightarrow$ Cuando una función es inyectiva y sobreyectiva la función se denomina biyectiva

(a, b) relación cartesiana



(a, b) relación binaria

$\longrightarrow$ relacionado

$a \, R \, b$

$a \, \rho \, b \Longrightarrow (a, b) \in \rho$

$\rho \subset A \times B$

$\rho \subset A \times A$

ρ es reflexiva si $a \, \rho \, a \ \forall_{a \in A}$

ρ es simétrica si:

$a \, \rho \, b \Longrightarrow b \, \rho \, a$

ρ es transitiva si $a \, \rho \, b \wedge b \, \rho \, c$

$\Longrightarrow a \, \rho \, c$

386 estudiantes son consultados acerca de su situación académica en las asignaturas de Matem, Física y Química. Se obtienen los sgts resultados

- 276 aprobaron matem
- 110 aprobaron física, pero no química
- 146 aprobaron química
- 95 aprobaron física y matem
- 145 aprobaron física
- 76 aprobaron química y matem
- 15 aprobaron las tres asignaturas

¿Cuantos estudiantes aprobaron solo física? ¿Cuantos reprobaron las 3 asignaturas?

30 estudiantes solo aprobaron física.

$$|F \cap \underbrace{M^c \cap Q^c}| \quad \text{D'Morgan}$$

$$= |F \cap (M \cup Q)^c|$$

$$= |F| - |F \cap (M \cup Q)|$$

$$= 145 - |(F \cap M) \cup (F \cap Q)|$$

$$= 145 - (|F \cap M| + |F \cap Q| - |F \cap M \cap Q|)$$

$$= 145 - (95 + ? - 15) = 30$$

$$|F \cap Q| = ?$$

$$110 = |F \cap Q^c| = |F| - |F \cap Q|$$

$$110 = 145 - ?$$

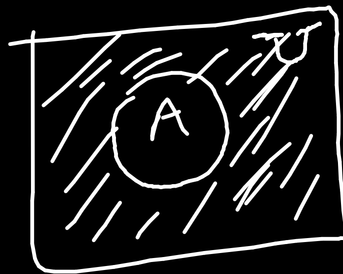
$$? = 145 - 110$$

$$? = 35$$

$$\boxed{|A \cap B^c| = |A| - |A \cap B|}$$

$$\underline{|F^c \cap Q^c \cap M^c|}$$

D' Morgan



$$= |(F \cup Q \cup M)^c|$$

$$= |U| - |F \cup Q \cup M|$$

$$= 386 - (|F| + |Q| + |M| - |F \cap Q| - |F \cap M| - |Q \cap M| + |F \cap Q \cap M|)$$

$$= 386 - (145 + 146 + 276 - 35 - 95 - 76 + 15)$$

$$= 10$$

10 estudiantes reprobaron las 3 asignaturas

Principio de Inclusión-Exclusión

Determine el conj. por extensión, dominio, recorrido y represente con diagramas sagitales la siguiente relación

$A = \{ x \in \mathbb{N} / x < 9 \}$

$B = \{ x \in \mathbb{N} / 5 < x < 25 \}$

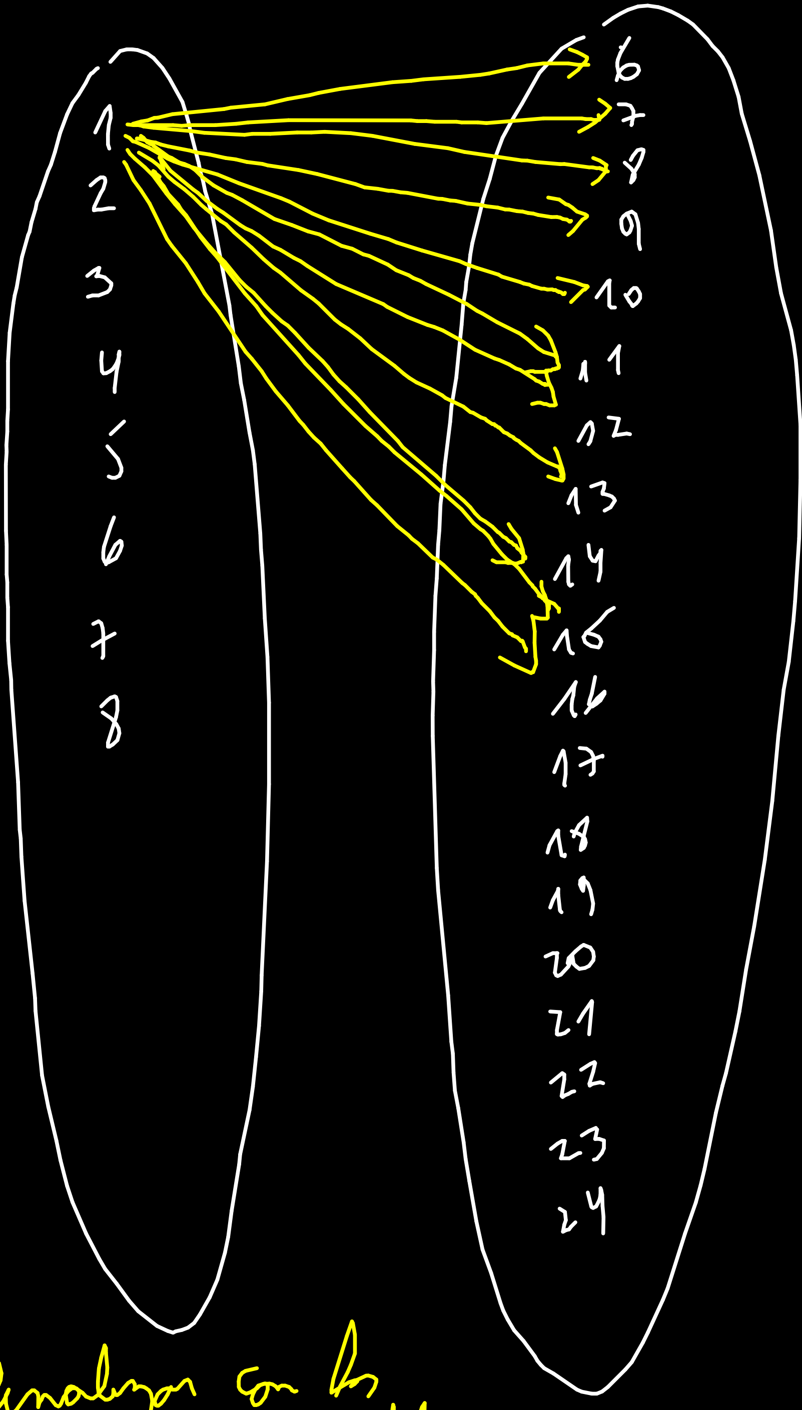
$\boxed{R \subseteq A \times B}$ $/ R = \{ (a, b) / a + b < 18 \}$

$\mathbb{N}_0$: Cardinals

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$B = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\}$

$R = \{ (1,6), (1,7), (1,8), \ldots, (1,16),$
$(2,6), (2,7), \ldots (2,15),$
$(3,6), (3,7) \ldots (3,14),$
$(4,6), (4,7) \ldots (4,13),$
$\vdots$
$(8,6), \ldots \quad (8,9) \}$



Finalizar con las flechas que faltan

Determine si la sgte relación

$R \subseteq A \times A$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$R = \{(2,1)\ (2,2)\ (3,1)\ (3,2)$
$(3,3)\ (4,1)\ (4,2)\ (4,3)\ (4,4)$
$(1,1)\}$

es reflexiva, simetrica y transitiva

reflexiva
significa que aRa $\forall a \in A$
Como $(1,1)$ $(2,2)$ $(3,3)$ y $(4,4) \in R$
$\Rightarrow R$ es reflexiva

Simetrica
$aRb \Rightarrow bRa$
$(2,1) \in R$ pero $(1,2) \notin R$
$\Rightarrow R$ no es simetrica

Transitiva
Si $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$
Es transitiva
$\therefore$ R no es una relación de equivalencia

Recordemos que permutaciones son ordenamientos con r elementos de un conjunto de n elementos distintos (sin repeticiones)

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

En el caso de permitir repeticiones

$$\Rightarrow P(n; n_1, \dots, n_r) = \frac{n!}{n_1! \cdots (n_r)!}$$

En cuanto las combinaciones son subconjuntos con r elementos de un conjunto de n elementos distintos sin orden en particular

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

¿De cuántas maneras distintas se pueden colocar en línea 9 bolitas, de las cuales 4 son blancas, 3 son amarillas y 2 son azules?

$$\frac{9!}{4! \cdot 3! \cdot 2!} = 1260 \text{ maneras distintas}$$

En una carrera de automóviles participan 50 autos. ¿De cuántas formas distintas se pueden repartir los 3 primeros lugares?

$$\frac{50!}{(50-3)!} = \boxed{117.600 \text{ formas distintas}}$$

¿Cuantos grupos de 4 alumnos se pueden formar con los 25 alumnos de un curso?

$$\frac{25!}{4!(25-4)!} = 12650$$

grupos se pueden formar

Principio del Palomar

$$X \xrightarrow{f} Y$$

$|X| = n \qquad |Y| = m$

Si $k = \frac{n}{m}$

$\Rightarrow \exists$ al menos k valores / $z_1 \dots z_k$ / $f(z_1) = \dots = f(z_k)$

Es decir existen k valores que están en la misma caja. Porque X al tener cardinalidad mayor al cod. Y, nos asegura que habrán varios términos en la misma categoría.

Ejemplo Si tengo 370 personas $\Rightarrow \exists$ al menos 2 personas que cumplen años el mismo día.

$X \xrightarrow{f} Y$

370 personas

365 días

1 día: P_1

2 día: P_2

. . . . .

365º día: P_{365}

P_{366}

donde lo mando ?

Distribución Binomial

Es uno de los tipos de distribuciones discretas de probabilidad más útiles. Se utiliza en la inspección de calidad, medicina, inventario, ventas, mercadotecnia, juegos de opiniones, ...

Éxito a la ocurrencia del evento
Fracaso a su no ocurrencia

⟹ probabilidad p
⟹ probabilidad $1-p$

Si el experimento se realiza n veces y c/u de ellos es independiente del otro
X la variable aleatoria que reporta el nº de éxitos en los n ensayos

⟹ nuestro interés $P(X=x)$

$$P(X \leq x) = \sum_{i=0}^{x} \binom{n}{i} p^{i} (1-p)^{n-i}$$

Si el n.º de ensayos solo fuera uno la distribución binomial sería sólo

Bernoulli $\begin{cases} p^{x}(1-p)^{1-x} & x = 0 \text{ ó } 1 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$

Ejercicios

Todos los días se seleccionan de manera aleatoria 15 unidades de un proceso de manufactura con el propósito de verificar el % de unidades defectuosas en la producción. Con base en información pasada, la prob. de tener una unidad defectuosa es de 0.05. La gerencia ha decidido detener la producción c/vez que una muestra de 15 unidades tenga 2 o más defectuosas

¿Cuál es la prob. de que en cualquier día la producción se detenga?

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$

$$= 1 - \left(\binom{15}{0} \cdot 0{,}05^{0} \cdot 0{,}95^{15} + \binom{15}{1} 0{,}05^{1} \cdot 0{,}95^{14} \right)$$

$$=$$

Distribución de Poisson

La v. a. POISSON representa el nº de eventos independientes que ocurren a una velocidad constante.

Ejemplo: el nº de personas que llegan a una tienda de autoservicios en un tiempo determinado, el nº de defectos en piezas similares para el material, el nº de bacterias en un cultivo.

Además ofrece una aprox. excelente a la binomial cuando p es pequeño y n grande

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} & x=0,1,2,\dots \quad \lambda>0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

λ es el nº promedio de ocurrencia del evento aleatorio por unidad de tiempo

Ejercicio

Los camiones llegan a una empresa de transporte con un tiempo medio entre llegada de 5 minutos. ¿Cuál es la prob. de que no llegue ningún camión durante un intervalo de 30 min?

$$P(X \leq 30) = \frac{e^{-5} \cdot 5^{0}}{0!} + \frac{e^{-5} \cdot 5^{1}}{1!} + \ldots + \frac{e^{-5} \cdot 5^{30}}{30!}$$

$$=$$