Clase 3

Contenidos

- Transformada de Laplace

1 Más propiedades de la Transformada de Laplace

Recordemos de la última clase que la convolución de dos funciones es

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\ d\tau$$

y tiene la particularidad que la transformada de Laplace de una convolución es el producto de las transformadas:

$$\mathscr{L}(f * g) = F(s)G(s)$$

Estas propiedades permiten resolver **ecuaciones integrales** (la incógnita aparece en el integrando) y un caso particular son las ecuaciones integrales de Volterra:

$$f(t) = g(t) + \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\ d\tau$$

Ejemplo 1 *La ecuación que modela un circuito LRC en serie puede ser escrita como*

$$L\frac{di}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t) = E(t),$$

donde L, R, C son constantes, $i(t)$ es la corriente que circula por el circuito, y $E(t)$ es el voltaje de la fuente. Por ejemplo, si $L = 0.1H$ $R = 2\Omega$, $C = 0.1F$, $i(0) = 0$, y el voltaje viene dado por $E(t) = 120t - 120tH(t-1)$, la corriente $i(t)$ queda determinada por la solución de la ecuación diferencial

$$0.1\frac{di}{dt} + 2i(t) + \frac{1}{0.1}\int_0^t i(t) = 120t - 120tH(t-1)$$

Aplicando la Transformada de Laplace, se obtiene

$$\begin{aligned}
0.1sI(s) + 2I(s) + 10\frac{I(s)}{s} &= \frac{120}{s^2} - \left(\frac{120}{s^2} + \frac{120}{s}\right)e^{-s} \\
(s^2 + 20s + 100)I(s) &= \frac{1200}{s} - \frac{1200e^{-s}}{s} - 1200e^{-s} \\
I(s) &= \frac{1200}{s(s+10)^2} - \frac{1200e^{-s}}{s(s+10)^2} - \frac{1200e^{-s}}{(s+10)^2}
\end{aligned}$$

Aplicando fracciones parciales, obtenemos:

$$I(s) = 1200\left(\frac{1/100}{s} - \frac{1/100}{s+10} - \frac{1/10}{(s+10)^2} - \frac{1/100}{s}e^{-s} + \frac{1/100}{s+10}e^{-s} + \frac{1/10}{(s+10)^2}e^{-s} - \frac{1}{(s+10)^2}e^{-s}\right)$$

Y ahora invertimos usando lo aprendido en las clases anteriores:

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = 1$$
$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s}\right) = 1 \cdot H(t-1)$$
$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+10}\right) = e^{-10t}$$
$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s+10}\right) = e^{-10(t-1)}H(t-1)$$
$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+10)^2}\right) = te^{-10t}$$
$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{(s+10)^2}\right) = (t-1)e^{-10(t-1)}H(t-1)$$

Para finalmente obtener la solución:

$$\begin{aligned} i(t) &= 1200\left(\frac{1}{100} - \frac{e^{-10t}}{100} - \frac{te^{-10t}}{10} - \frac{1}{100}H(t-1) + \frac{1}{100}e^{-10(t-1)}H(t-1)\right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{10}(t-1)e^{-10(t-1)}H(t-1) - (t-1)e^{-10(t-1)}H(t-1)\right) \end{aligned}$$

$$i(t) = 12(1 - H(t-1)) - 12(e^{-10t} - e^{-10(t-1)}H(t-1)) - 120te^{-10t} - 1080(t-1)e^{-10(t-1)}H(t-1)$$

Teorema 1 (Transformada de una función periódica) *Si $f(t)$ es continua por tramos en $[0, +\infty[$, de orden exponencial y periódica con período T, entonces*

$$\mathscr{L}(f(t)) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt$$

Ejercicio 1 *Se define la siguiente "onda cuadrada" de período $T = 2$,*

$$E(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ 2, & 1 \le t < 2 \end{cases}$$

Determine $\mathscr{L}(E(t))$.

2 La Función Delta de Dirac

A menudo, fuerzas externas de una magnitud muy grande actúan sobre los sistemas mecánicos durante períodos muy cortos de tiempo. Un modelo para una situación como la descrita es

$$\delta_a(t-t_0) \equiv \begin{cases} 0, & 0 \leq t < t_0 - a \\ \dfrac{1}{2a}, & t_0 - a < t < t_0 + a \\ 0, & t \geq t_0 + a \end{cases}$$

donde a, t_0 son positivos y representan el instante de tiempo de duración $2a$ donde se aplica la fuerza. El modelo descrito se llama la función **impulso unitario**, pues tiene la particularidad que para cualquier $a > 0$, $\displaystyle\int_0^\infty \delta_a(t-t_0)\ t = 1$. En el límite $a \to 0$, la expresión anterior deja de ser una función de valores reales, sin embargo, es extremadamente útil.
Definimos $\delta(t-t_0)$ como la expresión que satisface:

1. $\begin{cases} \infty, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases}$

2. $\displaystyle\int_0^\infty \delta(t-t_0)\ dt = 1$

Y a este impulso unitario se le conoce como la **función delta de Dirac**.

Si asumimos $\mathscr{L}(\delta(t-t_0)) = \lim_{a\to 0} \mathscr{L}(\delta_a(t-t_0))$, entonces se tiene el siguiente teorema:

Teorema 2 (Transformada de la Delta de Dirac) *Para $t_0 > 0$,*

$$\mathscr{L}(\delta(t-t_0)) = e^{-st_0}$$

Observación 1 *Note que $\displaystyle\lim_{t_0\to 0} \mathscr{L}(\delta(t-t_0)) = 1$, por lo que parece razonable definir $\mathscr{L}(\delta(t)) = 1$.*

Ejercicio 2 *Resuelva la ecuación diferencial $y'' + y = 4\delta(t-2\pi)$, $\quad y(0) = 1$, $\quad y'(0) = 0$*

Ejercicio 3 *Resuelva la ecuación diferencial $y'' + y = \alpha\delta(t-2\pi) + \beta\delta(t-4\pi)$, $\quad y(0) = 1$, $\quad y'(0) = 0$*

Ejercicio 4 *Resuelva la ecuación diferencial $y'' + 3y' + 2 = e^{-t} - \delta(t-3)$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 0$*