Estructuras Discretas INF-313

Sergio Hernández, Mónica Acevedo
shernandez@ucm.cl, macevedo@ucm.cl

Facultad de Ciencias de la Ingeniería

UNIVERSIDAD CATOLICA DEL MAULE

Introducción

- Los grafos son estructuras discretas que consisten de vértices y aristas que conectan los vértices. Existen disintos tipos de grafos, dependiendo si las aristas tienen o no dirección, si existen múltiples aristas para un mismo vértices o si se permiten o no lazos.

Introducción

- Los grafos son estructuras discretas que consisten de vértices y aristas que conectan los vértices. Existen disintos tipos de grafos, dependiendo si las aristas tienen o no dirección, si existen múltiples aristas para un mismo vértices o si se permiten o no lazos.
- Los grafos aparecen en muchos problemas de ingenería, matemáticas aplicadas y ciencias de la computación.

Introducción

- Los grafos son estructuras discretas que consisten de vértices y aristas que conectan los vértices. Existen disintos tipos de grafos, dependiendo si las aristas tienen o no dirección, si existen múltiples aristas para un mismo vértices o si se permiten o no lazos.
- Los grafos aparecen en muchos problemas de ingeniería, matemáticas aplicadas y ciencias de la computación.
- La mayoría de estos problemas están relacionados con la representación (grafos densos, poco densos) y búsqueda en grafos (por ejemplo, ruta más corta entre una ciudad y otra).

Grafos

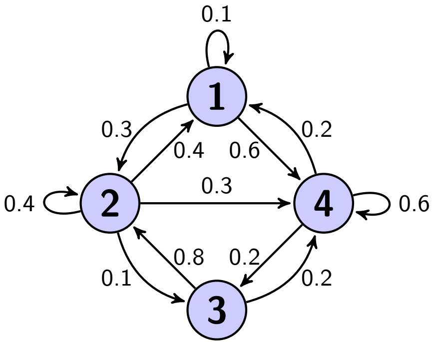
Definición

Un grafo es una tupla $G = (V, E)$ donde V es un conjunto (finito o infinito) de vértices, puntos o nodos y E es un una colección finita de aristas. El conjunto E contiene elementos de la unión de todos los subconjuntos con uno o dos elementos del conjunto V. Esto quiere decir, que cada elemento de E es un subconjunto de uno o dos elementos de V.

Grafos

Los vértices u y v son adyacentes o vecinos si hay una arista (u, v). En este caso u y v se denominan extremos de la arista o también que la arista es incidente en cada uno de sus extremos. Los grafos se presentan mediante diagramas en el plano de forma natural.

Ejemplo

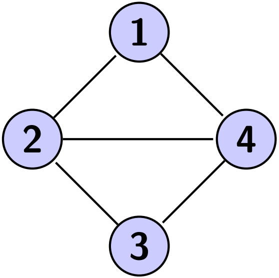


$$G = (V, E)$$
$$V = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$E = [(1,4), (4,1), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (4,3), (3,4), (2,4), (1,1), (2,2), (4,4)]$$

Grafos Simples

Definición

Un grafo simple es un grafo en el cual existe sólo una arista $\{u, v\}$ para conectar dos vértices u y v.

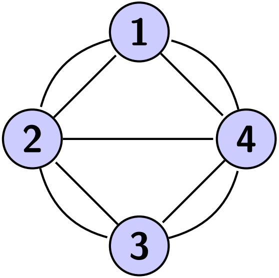


$$
\begin{aligned}
G &= (V, E)\\
V &= \{1, 2, 3, 4\}\\
E &= [(1, 4), (1, 2)\\
&\quad (2, 3), (4, 3), (2, 4)]
\end{aligned}
$$

Multi-Grafos

Definición

Un multi-grafo simple es un grafo en el cual existe más de una arista $\{u, v\}$ para conectar dos vértices u y v (aristas paralelas). También se presentan lazos, es decir arista que tienen el mismo vértice en los extremos.



$$
\begin{aligned}
G &= (V, E) \\
V &= \{1, 2, 3, 4\} \\
E &= [(1,4), (4,1), (1,2), (2,1) \\
&\quad (2,3), (3,2), (4,3), (3,4) \\
&\quad (2,4)]
\end{aligned}
$$

Grafos

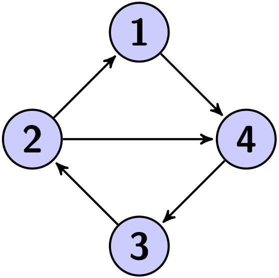
Grado de un Vértice

El grado de un vértice v en un grafo G, se escribe $grd(v)$, es igual al número de aristas en G que contienen a v, es decir que inciden sobre v.
Por lo cual se tiene el siguiente resultado:
Teorema La suma de los grados de los vértices de un grafo G es igual al doble del número de aristas en G.
Un vértice es par o impar si su grado es un número par o impar.
Un vértice de grado cero se denomina vértice aislado.

Grafos dirigidos

Definición

Un grafo dirigido es un grafo en el cual cada arista $\{u, v\}$ consiste en un par ordenado de vértices u y v.

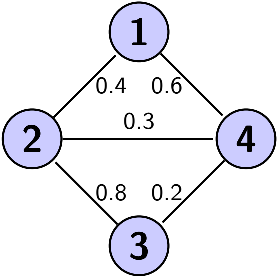


$$G = (V, E)$$
$$V = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$E = [(1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (2, 4)]$$

Grafos ponderados

Definición

Un grafo ponderado es un grafo en el cual cada arista $\{u, v\}$ tiene un peso $w_{u,v}$ asociado.



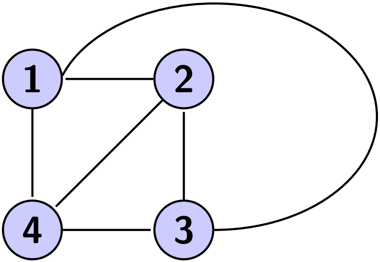
$$
\begin{aligned}
G &= (V, E) \\
V &= \{1, 2, 3, 4\} \\
E &= [(1,4), (2,1) \\
&\qquad (3,2), (4,3), (2,4)]
\end{aligned}
$$

$$
w_{1,4} = 0.6 \quad w_{2,1} = 0.4
$$
$$
w_{3,2} = 0.8 \quad w_{4,3} = 0.2
$$
$$
w_{2,4} = 0.3
$$

Grafos Completos

Definición

Un grafo completo sobre n vértices denotado por K_n es un grafo simple con una arista por cada par de vértices distintos.

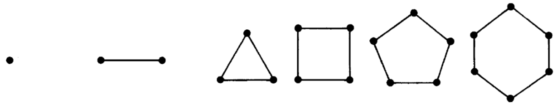


$$
\begin{aligned}
G &= (V, E) \equiv K_4 \\
V &= \{1, 2, 3, 4\} \\
E &= [(1,4), (1,2), (1,3) \\
&\qquad (2,3), (3,4), (2,4)]
\end{aligned}
$$

Grafos Regulares

Definición

Un grafo G es regular de grado k o k-regular si sus vértices tienen grado k, si todos los vértices tienen el mismo grado.
Un grafo G es conexo si existe una arista entre dos de sus vértices.
Los grafos regulares conexos de grado 0, 1 o 2 se describen con facilidad.
El grafo conexo 0-regular es el grafo trivial con un vértice y sin ninguna arista.
El grafo conexo 1-regular es el grafo con dos vértices y una arista que los que los une. El grafo conexo 2-regular con n vértices es el grafo que consta de un solo n-ciclo.

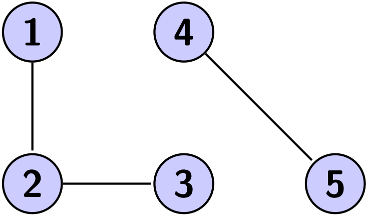


i) 0-regular *ii)* 1-regular *iii)* 2-regular

Grafos Bipartitos

Definición

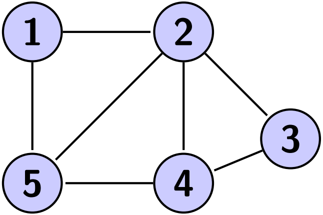
Un grafo $G = (V, E)$ es bipartito si existen dos subconjuntos V_1 y V_2 (posiblemente vacíos) de V tal que si $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y $V_1 \cup V_2 = V$, entonces cada arista en E es incidente sobre un vértice en V_1 y un vértice en V_2, es decir cada arista en G une un vértice de V_1 con un vértice de V_2.



$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$E = [(1, 2), (2, 3), (4, 5)]$$
$$V_1 = \{1, 3, 4\}$$
$$V_2 = \{2, 5\}$$

Listas de adyacencia

Una forma de representar grafos es mediante listas de adyacencia.

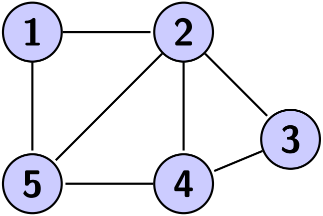


Vértice	Vértices adyacentes
1	2,5
2	1,5,4,3
3	2,4
4	2,5,3
5	1,2,4

Matriz de adyacencia

Otra forma de representar un grafo $G = (V, E)$ es mediante una matriz de adyacencia A. La matriz de adyacencia $A = (a_{ij})$ es una matriz de orden $|V| \times |V|$, tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el vértice } \{i, j\} \in E \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$