# Clase 5

**Contenidos**

- Ecuaciones Diferenciales como modelos matemáticos.

Esta semana veremos cómo las ecuaciones diferenciales se han utilizado para responder a problemas en diversas ciencias.

## 1 Modelos Lineales

### 1.1 Dinámica Poblacional

Un modelo muy simple de crecimiento poblacional establece que el ritmo al que la población cambia en un tiempo $t$, es proporcional a la cantidad de individuos que existen en ese tiempo. Si la población en el tiempo $t$ se denota por $P(t)$, y se sabe que la población para el tiempo $t = t_0$ es $P_0$ individuos, el modelo de crecimiento poblacional es dado por

$$\frac{dP}{dt} = kP, \quad P(t_0) = P_0 \tag{1}$$

donde $k$ es una constante de proporcionalidad que indica que la población *crece* si $k > 0$, y *decrece* si $k < 0$. Notemos que la anterior es una ecuación separable y lineal, por lo que se puede resolver por cualquiera de esos métodos. Usando el segundo, con $p(t) = -k$ y el factor $\mu(t) = e^{-kt}$, la ecuación diferencial se traduce a

$$\begin{aligned} e^{-kt}\frac{dP}{dt} - ke^{-kt}P &= 0 \\ \frac{d}{dt}(e^{-kt}P) &= 0 \\ e^{-kt}P(t) &= C \\ P(t) &= Ce^{kt} \end{aligned}$$

Además, imponiendo la condición $P_0 = P(t_0)$ nos dice que $C = \dfrac{P_0}{e^{kt_0}}$, por lo que la función que describe el crecimiento poblacional (1) es

$$P(t) = P_0 e^{k(t-t_0)} \tag{2}$$

El modelo de crecimiento poblacional se utiliza en biología para medir el crecimiento de poblaciones de microorganismos. En economía, esta ecuación modela el interés compuesto continuamente. El mismo modelo se utiliza en física para medir estabilidad de una sustancia radioactiva (calculando la vida media) e incluso, para datar la edad de fósiles.

**Ejemplo 1** *Suponga que usted realiza un depósito de \$100.000 a 3 años plazo en su entidad bancaria, la cual le ofrece una tasa de interés compuesta continuamente del 3% anual. Estime el monto final de la operación.*

**Solución:**
El modelo de interés continuo es

$$\frac{dC}{dt} = kC,$$

donde $C(t)$ es el monto total en el tiempo $t$ ($t$ en años), y $k$ es la tasa de interés anual. Así, la ecuación diferencial que modela el problema es

$$\frac{dC}{dt} = 0.03C,$$

cuya solución es (2). En este caso, $t_0 = 0$ es el momento en el que se realiza el depósito, $C_0$ es el monto inicial (es decir, $C_0 = 100.000$) y $k = 0.03$ es la tasa de interés anual. De este modo, tenemos que el capital para el tiempo $t$ es

$$C(t) = 100.000e^{0.03t},$$

y la estimación a 3 años plazo es

$$C(3) = 100.000e^{0.03\cdot 3} \approx \$118.417$$

**Ejercicio 1** *Un reactor convierte el uranio 238 relativamente estable en el isótopo plutonio 239. Después de 15 años se determina que 0,043% de la cantidad inicial $A_0$ de plutonio se ha desintegrado. Encuentre la vida media de este isótopo si la tasa de desintegración es proporcional a la cantidad restante.*

**Comentario:** La vida media de una sustancia es simplemente el tiempo que tardan la mitad de los átomos inicialmente presentes en desintegrarse, o transformarse en átomos de otro elemento.

## 1.2 Ley de Enfriamiento de Newton

La temperatura de un objeto cambia al entrar en contacto con los alrededores. La Ley de enfriamiento de Newton, establece que la razón de cambio de la temperatura $T(t)$ de un cuerpo inmerso en un medio de temperatura constante $T_m$ es proporcional a la diferencia $T_m - T$. Esto es

$$\frac{dT}{dt} = \alpha(T_m - T) \tag{3}$$

En esta formulación, la constante de proporcionalidad $\alpha$ es siempre positiva.

Observamos que esta ecuación diferencial es separable y lineal, por lo que podemos usar cualquiera de esos métodos para resolverla. Usando la segunda, con $p(t) = \alpha$, $q(t) = \alpha T_m$ y $\mu(t) = e^{\alpha t}$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} + \alpha T &= \alpha T_m \\
e^{\alpha t} + \alpha e^{\alpha t} T &= \alpha e^{\alpha t} T_m \\
\frac{d}{dt}(e^{\alpha t} T) &= \alpha e^{\alpha t} T_m \\
e^{\alpha t} T &= e^{\alpha t} T_m + C \\
T(t) &= T_m + Ce^{-\alpha t}
\end{aligned}$$

Notamos que si $t \to +\infty$, $T(t) \to T_m$, es decir, el objeto tiende a equilibrar la temperatura del ambiente.

**Ejercicio 2** *Un termómetro que marca $70°F$ de temperatura ambiente es puesto sobre un horno precalentado a temperatura constante. A través del vidrio de la puerta del horno, un observador registra dos temperaturas para el termómetro: $110°F$ después de 30 segundos, y $145°F$ al minuto. ¿A qué temperatura se encuentra el horno?*

**Solución:**

Sea $T(t)$ la temperatura del termómetro en el instante $t$, medido en minutos, y sea $T_H$ la temperatura del horno. La medición al inicio nos dice que $T(0) = 70$. La ecuación que modela el problema es entones

$$\frac{dT}{dt} = \alpha(T_H - T),$$

donde $\alpha$ y $T_H$ son constantes a determinar. La solución de la ecuación diferencial está dada por $T(t) = T_H + Ce^{-\alpha t}$, donde las condiciones del problema nos dejan 3 ecuaciones:

$$\begin{aligned} T_H + C &= 70, \quad (T(0) = 70) && (4)\\ T_H + Ce^{-\alpha/2} &= 110, \quad (T(0.5) = 110) && (5)\\ T_H + Ce^{-\alpha} &= 145, \quad (T(1) = 145) && (6) \end{aligned}$$

Resolvemos el sistema eliminando $T_H$ de todas las ecuaciones. En particular, al restar convenientemente (5)-(4) y (6)-(5) se obtiene

$$\begin{aligned} Ce^{-\alpha/2} - C &= 40\\ Ce^{-\alpha} - Ce^{-\alpha/2} &= 35 \end{aligned}$$

En esta última ecuación, resulta

$$Ce^{-\alpha} - Ce^{-\alpha/2} = 25 \implies e^{-\alpha/2}(Ce^{-\alpha/2} - C) = 35 \implies e^{-\alpha/2} \cdot 40 = 35$$
$$e^{-\alpha/2} = \frac{7}{8} \implies \alpha = -2\ln\left(\frac{7}{8}\right)$$

Reemplazando en la ecuación $Ce^{-\alpha/2} - C = 40$ se desprende que $C = -320$, y finalmente $T_H = 390$, que es la temperatura del horno.

### 1.3 Circuitos en Serie

Para un circuito en serie que consiste en una resistencia y una bobina (**circuito LR**), la Ley de Voltajes de Kirchhoff establece que la suma de la caída de voltaje en la bobina $\left(L\frac{di}{dt}\right)$ y la caída de voltaje en el resistor ($iR$) debe ser igual al voltaje suministrado en el circuito. Así obtenemos una ecuación diferencial para la corriente $i(t)$:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t), \tag{7}$$

donde $L$ es la inductancia (en Henry, $H$) y $R$ es la resistencia (en Ohms, $\Omega$).
Si en lugar de una bobina consideramos un condensador con capacitancia $C$ (en Farad, $F$) la caída de potencial está dada por $\frac{q(t)}{C}$, donde $q(t)$ es la carga en el condensador en el instante $t$. Luego, para un circuito en serie que consiste en un resistor y un condensador (**circuito RC**), tenemos

$$Ri + \frac{1}{C}q(t) = E(t), \tag{8}$$

pero como sabemos, la corriente $i(t)$ y la carga $q(t)$ están relacionadas por $i(t) = \frac{dq}{dt}$, por lo que podemos reescribir la ecuación anterior:

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t) \tag{9}$$

Observemos que en ambos casos, las ecuaciones son lineales, pero la solución depende de la forma del potencial $E(t)$.

# Clase 5

**Ejemplo 2** *Suponga una batería de 12 volts conectada a un circuito en serie, en a cual la inductancia es de 0.5 Henry y la resistencia es de 10 $\Omega$. Determine la corriente $i(t)$, con la condición que $i(0) = 0$.*

**Solución:**
De los datos del problema y la ecuación (7), tenemos que resolver

$$0.5\frac{di}{dt} + 10i = 12, \quad i(0) = 0$$

Para resolver usando el método de las ecuaciones lineales de primer orden, debemos dividir por 0.5:

$$\frac{di}{dt} + 20i = 24,$$

de donde tenemos que $p(x) = 20, q(x) = 24$ y el factor $\mu(x) = e^{20t}$. En consecuencia, tenemos

$$\begin{aligned} e^{20t}\frac{di}{dt} + 20e^{20t}i &= 24e^{20t} \\ (e^{20t}i(t))' &= 24e^{20t} \\ e^{20t}i(t) &= \frac{24}{20}e^{20t} + C \\ i(t) &= 1.2 + Ce^{-20t}. \end{aligned}$$

La condición inicial $i(0) = 0$, nos lleva a $C = -1.2$, por lo que la corriente está dada por

$$i(t) = 1.2 - 1.2e^{-20t}$$