Clase 1

Contenidos

- Definiciones y Terminología.

Si consideramos solo el nombre de este curso, Ecuaciones Diferenciales, nos lleva de inmediato a considerar una ecuación que está compuesta por derivadas $y',\ y'',\ y'''....$

Este tipo de ecuaciones generalmente son representaciones a problemas asociados a razón de cambio, como por ejemplo, la rapidez con la que cambia la temperatura de una habitación debidamente calefaccionada una vez que se enfrenta a la temperatura ambiente una vez ventilada. El modelo del crecimiento de una población dependiendo del tiempo. El modelo adecuado para obtener un control de población en un medio restringido. La oscilación de un resorte,no amortiguado y amortiguado, y así un sin fin de aplicaciones.

El resolver una ecuación diferencial es algo que hemos realizado en cursos previos, al menos en casos particulares y simples. Por ejemplo, en Cálculo Integral, nos preguntamos ¿qué función es aquella que al derivarla es 0?. Si utilzamos notación algebraica para representar el problema sería considerando a $f(x) = y$, tal que, $y' = 0$. Así resolver el problema se reduce a buscar la antiderivada de y', encontrar y, de tal manera que se cumpla $y' = 0$.

Otro ejemplo un tanto más compleja sería $y' = y$, que en lenguaje usual sería ¿qué función al derivarla es ella misma?.

Sin duda que al final del curso sabremos enfrentar problemas de ecuaciones diferenciales mucho más complejos que los enunciados. Más aún, podremos resolver problemas propios de la física o la ingenieria donde tendremos que describir la ecuación diferencial que lo representa, posteriormente resolver y finalmente concluir los resultados encontrados.

Definición 1 *Se dice que una ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes es una ecuación diferencial.*

En el caso de que las derivadas sea de una variable dependiente respecto a una variable independiente se le conoce como Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

$$\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx} = y \quad \text{Ecuación Diferencial Ordinaria}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = xy \quad \text{Ecuación Diferencial Parcial}$$

Observación 1 *Las derivadas a lo largo del curso se escribirán usando la notación de Leibniz,*

$$\frac{dy}{dx}, \ \frac{d^2y}{dx^2}, \ \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots$$

o bien la notación prima,

$$y', \ y'', \ y''' \ldots$$

Esta última se utiliza solo las primeras tres derivadas. En general la n-ésima derivada de y se describe como $\frac{d^ny}{dx^n}$.

Definición 2 *El orden de una ecuación diferencial ordinaria o parcial, es el orden de la mayor derivada en la ecuación.*

Según lo anterior,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$$

es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.

También podríamos escribir una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden con una variable dependendiente de la forma,

$$F(x, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

o también,

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

Definición 3 *Se denomina una solución de la ecuación diferencial en el intervalo I a cualquier función ϕ, definida sobre tal intervalo I y que tiene al menos n derivadas continuas en I, las cuales cuando se sustituyen en una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden reduce la ecuación a una identidad.*

Observación 2 *Notar que una ecuación diferencial es una ecuación de funciones, donde las funciones que componen la ecuación son las derivadas de la solución.*

La solución de una ecuación diferencial está definida sobre un conjunto determinado, en el caso se le conoce como dominio de la solución. Si la ecuación diferencial es ordinaria se lo conoce como intervalo de solución o intervalo de validez.

Ejemplo 1 *Observe que las funciones indicadas es una solución de la ecuación diferencial en $\mathbb{R}$.*

(a.) $\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}, \quad y = \frac{1}{16}x^4$

(b.) $y'' - 2y' + y = 0; \quad y = xe^x$

Sol.:
Parte (a).
Si $y = \frac{1}{16}x^4$*, entonces,*

$$y' = \frac{1}{4}x^3 \tag{1}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}x^3. \tag{2}$$

Por otro lado,

$$xy^{\frac{1}{2}} = x\left(\frac{1}{16}x^4\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$
$$= x\left(\frac{1}{4}x^2\right) \tag{4}$$
$$= \frac{1}{4}x^3 \tag{5}$$

Así, por (1) y (5) hemos probado que si $y = \frac{1}{16}x^4$*, entonces* $\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}$*. El caso (b) se desarrolla de forma análoga y queda para el lector.*

Ejercicio 1 *Determine los valores de* m *para que* $\Phi(x) = e^{mx}$ *sea soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales.*

(a.) $y'' - y' - 12y = 0$ *(b.)* $6y'' - y' - y = 0$

Observación 3 *Si* $\Phi(x)$ *es una solución para una ecuación diferencial, notar que el dominio de* Φ *como solución estará restringido a las condiciones que la ecuación diferencial imponga.*

Familias de soluciones.

Recordemos que cuando se evalua una antiderivada o una integral indefinida en cálculo, se usa una constante c de integración. Del mismo modo al resolver una ecuación diferencial de primer orden $F(x, y, y') = 0$, en general se obtiene una constante c arbitraria.
Una solución que contiene una constante arbitraria representa un conjunto $G(x, y, c) = 0$ de soluciones al que se le da el nombre de familia uniparamétrica de soluciones.
Una solución de una ecuación diferencial libre de parámetro c se le llama solución particular.

Problemas de valores iniciales.

Generalmente nos interesa problemas en los que se busca una solución $y(x)$ de modo que la $y(x)$ satisfaga las condiciones impuestas por el problema. Por ejemplo,

Resolver: $F(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) = 0$
sujeta a: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

donde $y_0, y_1, ..., y_{n-1}$ son constantes reales específicas de manera arbitraria, se llama problema de valores iniciales (PVI), donde los valores de $y(x)$ y sus primeras $n-1$ derivadas en un solo punto x_0 como $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ se llaman condiciones iniciales.
En el caso de un PVI de Primer orden

$$\begin{array}{rl} \text{Resolver:} & \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ \text{sujeta a:} & y(x_0) = y_0 \end{array}$$

Ejercicio 2 *Muestre que* $y = \dfrac{1}{x^2+c}$ *es solución de* $y' + 2xy^2 = 0$. *Luego el problema con la misma ecuación diferencial pero con la condición* $y(0) = -1$

Ejercicio 3 *Muestre que* $x = c_1\cos(4t) + c_2\sin(4t)$ *es una familia de soluciones de la ecuación* $x'' + 16x = 0$ *Encuentre una solución del problema de valores iniciales*

$$x'' + 16x = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2, \quad x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Notemos que al considerar un PVI nos podemos preguntar la **existencia** de una solución y la **unicidad** de la misma. Podríamos considerar la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$ como lo hicimos para presentar un PVI de primer orden con el fin de enunciar el siguiente teorema de existencia y unicidad de una solución.

Teorema 1 (Existencia y Unicidad.) *Sea* R *una región rectangular en el plano* (xy) *definida por* $a \leq x \leq b, \;\; c \leq y \leq d$ *que contiene el punto* (x_0, y_0) *en su interior. Si* $f(x,y)$ *y* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *son continuas en* R*, entonces existe algún intervalo* $I_0 : x_0 - h < x < x_0 + h, \;\; h > 0$*, contenido en* $a \leq x \leq b$ *y una función única* $y(x)$*, definida en* I_0*, que es solución del problema de valores inciales.*

Ejemplo 2 *En el caso de* $\dfrac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}$ *sujeta a* $y(2) = 1$*, tiene una única solución.*

Sol.:
Utilicemos el Teorema de Existencia y Unicidad. Consideremos, $f(x,y) = x(y)^{\frac{1}{2}}$ En una región rectangular R en el plano tal que $(2,1) \in R$, en este caso consideremos $R := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 1 < x < 3, \quad 0 < y < 2\}$.
Ahora $f(x,y) = xy^{\frac{1}{2}}$ es continua en R. Por otro lado, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x}{2y^{1/2}}$ es también continua en R.
Así por Teorema de Existencia y Unicidad podemos asegurar que existe $0 < h < 1$ tal que,

$$I_0 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 1 + h < x < 3 - h, \quad h < y < 2 - h\}$$

Por lo tanto en I_0 el PVI tiene solución única.

Clase 1

Campos de direcciones.

Notemos que una solución $y = y(x)$ de una ecuación diferencial de primer orden $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ es necesariamente una función diferenciable sobre su intervalo I de definición, también debe ser continua en I. Por tanto la curva solución en I no debe tener discontinuidades y debe poseer una recta tangente en cada punto $(x, y(x))$ donde la pendiente de la recta tangente está dada el valor de la primera derivada $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ en este punto. Luego si se evalua f de forma sistemática en una red de puntos rectangulares en el plano xy y se traza "pequeño" segmento de recta en cada punto (x, y) de la red con pendiente $f(x, y)$, entonces la colección de estos segmento de recta se llama campos de direcciones o campos de pendientes.

Importante!!! el campo de direcciones indica la forma de la familia de curvas solución.

Ejercicio 4 *Utilice un campo de direcciones para trazar una cuva solución aproximada para el PVI,*

$$\frac{dy}{dx} = \sin(x), \quad y(0) = -\frac{3}{2}$$