Clase 4 - Unidad 2

Contenidos

- Ecuaciones lineales y no-homogéneas de Orden n

1 Coeficiente Indeterminados - Aniquiladores

Consideramos una ecuación diferencial lineal de orden n

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g(x) \tag{1}$$

con $a_1, \ldots, a_n$ constantes. Utilizando el operador diferencial

$$D^k = \frac{d^k}{dx^k}$$

esta ecuación diferencial se puede escribir por

$$a_n D^n y + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots a_1 D + a_0 = g(x).$$

Simplificando podemos definir el operador diferencial lineal

$$L = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 \tag{2}$$

y así la ecuación diferencial (1) queda escrita

$$L(y) = g(x).$$

1.1 Factorización de operadores

El operador diferencial (2) puede ser factorizado cuando el polinomio característico

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \cdots + a_1 m + a_0 = 0 \tag{3}$$

se factoriza. La idea es que si r_1 es una raíz de la ecuación auxiliar (3) entonces

$$L = (D - r_1) P(D),$$

donde la expresión $P(D)$ es un operador diferencial de orden $n-1$. Por ejemplo si tratamos D como una variable algebraica, entonces el operador

$$D^2 + 5D + 6$$

puede ser factorizado por

$$(D+2)(D+3) \qquad \text{o por} \qquad (D+3)(D+2).$$

Entonces si una función $y = f(x)$ posee una segunda derivada, se tiene

$$(D^2 + 5D + 6)y = (D+2)(D+3)y = (D+3)(D+2)y.$$

En general se tiene:

Propiedad: Los factores de un operador diferencial lineal con coeficientes constantes conmutan.

1.2 Operadores de Aniquilación.

Si L es un operador diferencial con coeficientes constantes y f es una función suficientemente diferenciable tal que

$$L(f(x)) = 0$$

entonces se dice que L es un **aniquilador** de la función f.

Ejemplo. Una función constante $y = k$ es anaquilada por D, ya que $Dk = 0$. La función $y = x$ es aniquilada por el operador diferencial D^2.

Aniquilador de polinomios: El operador diferencial D^n aniquila a cada una de las funciones

$$1, x, x^2, x^3, \ldots, x^{n-1}.$$

Como consecuencia de esto y que la diferenciación puede ser hecha término a término, se tiene que un polinomio

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1}x^{n-1}$$

puede ser aniquilado por encontrar un operador que aniquila a la potencia más grande de x.

Observación 1 (Importante) *Las funciones que son aniquiladas por el operador diferencial L de orden n son simplemente aquellas funciones que son obtenidas de la solución general de la ecuación diferencial homogenea*

$$L(y) = 0.$$

Aniquilador de funciones exponenciales. El operador $(D - \alpha)^n$ aniquila cada una de las funciones

$$e^{\alpha x}, \quad xe^{\alpha x}, \quad x^2 e^{\alpha x}, \quad \ldots, \quad x^{n-1}e^{\alpha x}$$

Ejemplos.

1. Un aniquilador de la función $1 - 5x^2 + 8x^3$ es D^4.
2. Un aniquilador de la función e^{-3x} es el operador $(D + 3)$
3. Un aniquilador de la función $4e^{2x} - 10xe^{2x}$ es el operador $(D - 2)^2$.

Aniquilador de funciones trigonométricas. El operador diferencial

$$[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)]^n$$

aniquila cada una de las siguientes funciones

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x), \quad xe^{\alpha x}\cos(\beta), \quad x^2 e^{\alpha x}\cos(\beta), \quad \ldots, x^{n-1}e^{\alpha x}\cos(\beta)$$

$$e^{\alpha x}\sin(\beta x), \quad xe^{\alpha x}\sin(\beta x), \quad x^2 e^{\alpha x}\sin(\beta x), \quad \ldots, x^{n-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

Ejemplo. Un operador diferencial que aniquila

$$5e^{-x}\cos(2x) - 9e^{-x}\sin(2x)$$

es $D^2 + 2D + 5$.

Caso especial. Si $\alpha = 0$ y $n = 1$ tiene como un caso especial

$$D^2 + \beta^2$$

Ejemplo. El operador $D^2 + 16$ aniquilirá cualquier combinación lineal de $\sin(4x)$ y $\cos(4x)$.

Observación 2: Si L es un operador diferencial que satisface

$$L(y_1) = 0 \qquad \text{y} \qquad L(y_2) = 0$$

entonces L aniquila a cualquier combinación lineal de y_1 e y_2.
Observación 3: Supongamos que L_1 y L_2 son dos operadores diferenciales con coeficientes constantes tal que L_1 aniquila y_1 y L_2 aniquila y_2, pero $L_1(y_2) \neq 0$ y $L_2(y_1) \neq 0$. Entonces el producto de operadores diferenciales L_1L_2 aniquila la suma $c_1y_1 + c_2y_2$.

1.3 Coeficientes Indeterminados

La idea es la siguiente, supongamos que tenemos una ecuación diferencial escrita en la forma

$$L(y) = g(x)$$

donde $g(x)$ es una combinación lineal de funciones de la forma

$$k, \quad x^m, \quad x^m x^{\alpha x}, \quad x^m e^{\alpha x}\cos(\beta x), \quad \text{y} \quad x^m e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

y m es un entero no-negativo, α, β son números reales. Si L_1 es un operador de aniquilación de $g(x)$, entonces se tiene que

$$L_1L(y) = 0.$$

Resolver esta ecuación diferencial lineal homogenea con coeficientes constantes de orden más alto ayuda a determinar la forma de una solución particular de la ecuación diferencial original

$$L(y) = g(x)$$

Ejemplo. Resolver la ecuación diferencial lineal no-homogenea con coeficientes constantes

$$y'' + 3y' + 2y = 4x^2$$

mediante coeficientes indeterminados.

Solución:
Paso 1: Primero se resuelve la ecuación diferencial homogénea

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

la cual tiene como solución a la función complementaria

$$y_c = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}.$$

Paso 2: Como D^3 aniquila $4x^2$, observamos que

$$D^3(D^2 + 3D + 2)y = 4D^3x^2$$

es lo mismo que

$$D^3(D^2 + 3D + 2)y = 0.$$

La ecuación diferencial auxiliar de quinto orden

$$m^3(m^2 + 3m + 2) = 0 \qquad \text{o} \qquad m^3(m + 1)(m + 2) = 0$$

tiene las raíces $m_1 = m_2 = m_3 = 0, m_4 = -1$ y $m_5 = -2$. Entonces la solución general es

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-x} + c_5e^{-2x}$$

donde lo que esta a en rojo corresponde a la función complementaria. Esto significa que una forma b
' ica de la solución particular y_p:

$$y_p = A + Bx + Cx^2.$$

Para obtener los valores de A, B y C se reemplaza en la ecuación original y se resuelve el sistema. Se puede obtener que $A = 7, B = -6$ y $C = 2$. Entonces

$$y_p = 7 - 6x + 2x^2$$

Paso 3. La solución general de la ecuación original es dada por $y = y_c + y_p$ o

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + 7 - 6x + 2x^2.$$