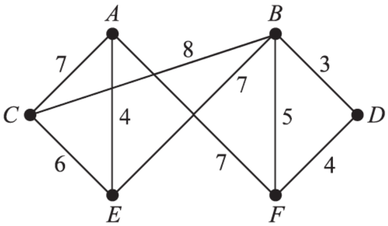
Estructuras Discretas INF-313

Sergio Hernández, Mónica Acevedo
shernandez@ucm.cl, macevedo@ucm.cl

Facultad de Ciencias de la Ingeniería
UNIVERSIDAD CATOLICA DEL MAULE

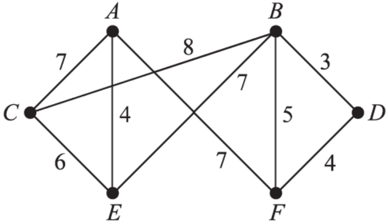
Recordatorio

- Encontrar un árbol de expansión mínima del grafo ponderado de la figura.



Recordatorio

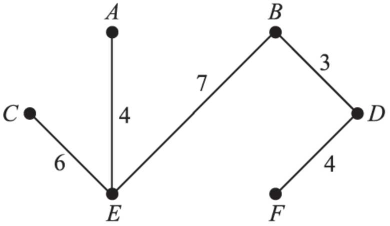
- Encontrar un árbol de expansión mínima del grafo ponderado de la figura.

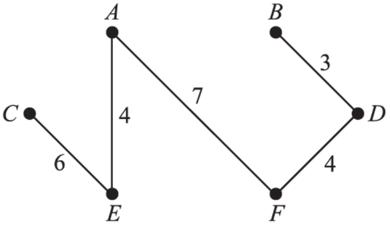


Árboles de Expansión Mínima

Se tenía dos algoritmos: Algoritmo de Prim y Algoritmo de Kruskall

Ejemplos





Observaciones

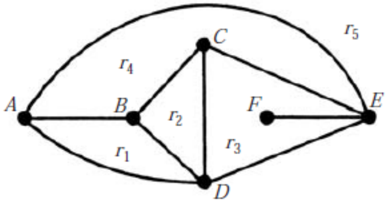
- El peso de un árbol de expansión mínima es único, aunque el árbol de expansión mínima en sí no lo es.
- Cuando dos o más aristas tienen el mismo peso pueden ocurrir distintos árboles de expansión mínima.
- Estos algoritmos se ejecutan fácilmente cuando el grafo es pequeño. De lo contrario es necesario un método computacional.

Mapas y Regiones

Mapa

Una multigrafo plano finito (sus aristas no se cruzan)se denomina mapa. Donde el mapa es conexo si el multigrafo subyacente es conexo. Un mapa divide el plano en varias regiones.
La frontera de cada región de un mapa consta de aristas. Algunas veces las aristas forman un ciclo.
El grado de una región r ($grd(r)$), se entiende como la longitud del ciclo o camino cerrado que rodea a la región.

Ejemplo



Resultado

Teorema

La suma de los grados de las regiones de un mapa es igual al doble del número de aristas.
Fórmula de Euler que relacion el número de vértices, el número de aristas y el número de regiones de cualquier mapa conexo es

$$V - E + R = 2 \tag{1}$$

Otro Resultado

Teorema

Sea G un grafo plano conexo con p vértices y q aristas, donde $p \geq 3$. Entonces $q \geq 3p - 6$

$$V - E + R = 2 \tag{2}$$

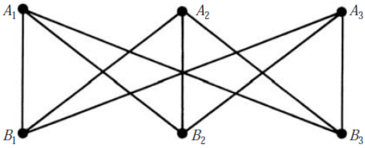
Otro Resultado

Teorema

Sea G un grafo plano conexo con p vértices y q aristas, donde $p \geq 3$. Entonces $q \geq 3p - 6$

$$V - E + R = 2 \qquad (2)$$

- Consideremos el grafo de servicios, es decir a tres casas, A_1, A_2, A_3, deben conectarse las tomas de agua, gas y electricidad, B_1, B_2, B_3 como se ilustra en la figura.



Teorema de Kuratowski

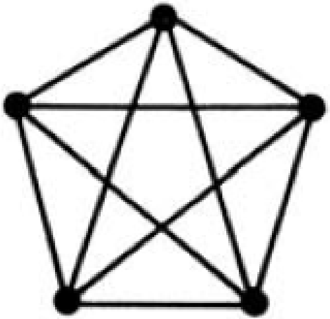
- Durante muchos años los matemáticos intentaron caracterizar los grafos planos y los grafos no planos. Este problema fue resuelto finalmente en 1930 por el matemático polaco K. Kuratowski.

Teorema de Kuratowski

- Durante muchos años los matemáticos intentaron caracterizar los grafos planos y los grafos no planos. Este problema fue resuelto finalmente en 1930 por el matemático polaco K. Kuratowski.

Teorema

Un grafo no es plano si y sólo si contiene un subgrafo homeomorfo al ejemplo anterior de grafo o al siguiente grafo



El Problema del Agente Viajero

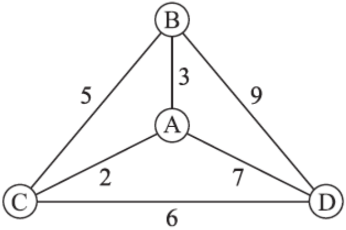
- Dado un conjunto de n vértices y las distancias w_{uv} para cada par de vértices u y v, encuentre la trayectoria de longitud mínima de manera que se visite cada vértice exactamente una sola vez y al final se regrese al vértices inicial.

El Problema del Agente Viajero

- Dado un conjunto de n vértices y las distancias w_{uv} para cada par de vértices u y v, encuentre la trayectoria de longitud mínima de manera que se visite cada vértice exactamente una sola vez y al final se regrese al vértices inicial.

Teorema

El grafo completo K_n con $n \geq 3$ vértices tiene $H = \dfrac{(n-1)!}{2}$ circuitos hamiltonianos.



Observaciones

- El problema del agente viajero se resolvió para el grafo completo ponderado en el ejemplo anterior al enumerar y determinar los pesos de sus tres posibles circuitos hamiltonianos.
- No obstante, para un grafo con muchos vértices, hacer lo anterior puede ser impráctico o incluso imposible. Por ejemplo, un grafo completo con 15 vértices tiene más de 40 millones de circuitos hamiltonianos.

Observaciones

- El problema del agente viajero se resolvió para el grafo completo ponderado en el ejemplo anterior al enumerar y determinar los pesos de sus tres posibles circuitos hamiltonianos.
- No obstante, para un grafo con muchos vértices, hacer lo anterior puede ser impráctico o incluso imposible. Por ejemplo, un grafo completo con 15 vértices tiene más de 40 millones de circuitos hamiltonianos.

Algoritmo del vecino más próximo

Este algoritmo, que empieza en un vértice dado, escoge la arista con peso mínimo hacia el siguiente vértice posible; es decir, al vértice más próximo. Esta estrategia continúa en cada vértice sucesivo hasta que se completa un circuito hamiltoniano.

Ejemplo

- Sea G el grafo ponderado de la tabla en la figura.

	P	Q	R	S	T
P		18	22	15	20
Q	18		11	12	22
R	22	11		16	10
S	15	12	16		13
T	20	22	10	13	

- El algoritmo del vecino más próximo se aplica a G en a) P y b) Q
- en P, sería $|PSQRTP| = 15 + 12 + 11 + 10 + 20 = 68$
- en Q, sería $|QRTSPQ| = 11 + 10 + 13 + 15 + 18 = 67$

Caminos Más Cortos

- Existen múltiples rutas T entre los vértices y por lo tanto nos interesa encontrar la menor ruta (camino más corto)

Caminos Más Cortos

- Existen múltiples rutas T entre los vértices y por lo tanto nos interesa encontrar la menor ruta (camino más corto)
- No todos los vértices pueden ser alcanzados (grafo no conexo).

Caminos Más Cortos

- Existen múltiples rutas T entre los vértices y por lo tanto nos interesa encontrar la menor ruta (camino más corto)
- No todos los vértices pueden ser alcanzados (grafo no conexo).
- Pueden existir múltiples aristas y ciclos (multi-grafos).

Algoritmo Dijkstra

Require: $G = (V, E, w), u \in V, w : E \mapsto \mathbb{R}+$
Ensure: $D(u, v) \leq \infty \quad \forall v \in V$

$D(u, v) \leftarrow w(u, v)$ para todos los vértices v vecinos de u
$D(u, v) \leftarrow \infty$ para todos los vértices v no vecinos de u
$U \leftarrow \{u\}$
while $U \neq V$ **do**
  $k \leftarrow$ vértice menor valor $D(u, k)$, tal que $k \in V \setminus U$
  $D(u, v) \leftarrow \text{MIN}(D(u, v), D(u, k) + w(k, v))$ para todos los vecinos v de k
  $U \leftarrow U \cup \{k\}$
end while

Ejemplo

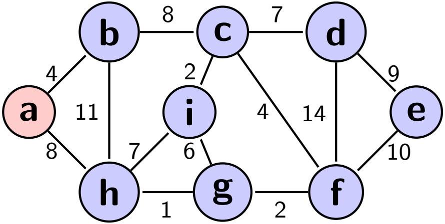


Figure: Ejecución del algoritmo Dijkstra en un grafo ponderado