Clase 6 - Unidad 2

Contenidos

- Movimiento Resorte-Masa.

Para esta clase consideraremos dos leyes físicas, **Ley de Hooke** y **Segunda Ley de Newton**, para estudiar el comportamiento del movimiento de un resorte bajo ciertas condiciones.

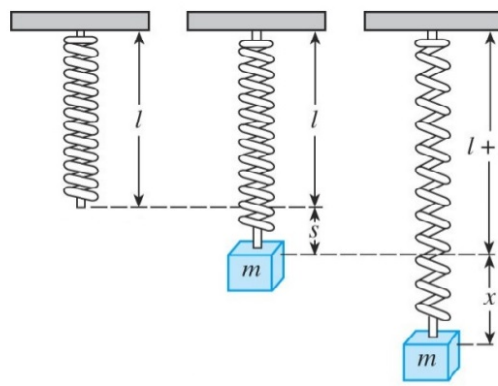
La **Ley de Hooke** establece que el alargamiento unitario que experimenta un cuerpo elástico es directamente proporcional a la fuerza aplicada sobre el mismo. Es decir, el resorte mismo ejerece una fuerza restauradora F opuesta a la dirección de elongación y proporcional a la cantidad de elongación s.

$$\frac{F}{s} = k$$

(*) k es una constante de proporcionalidad (constante del resorte).

La **Segunda Ley de Newton** establece que la razón de cambio del momentum es igual a la fuerza neta aplicada sobre un objeto.

Notar que al unir una masa m a un resorte este se alarga una cantidad s y logra una posición de equilibrio en el cual su peso W se equilibra mediante la fuerza restauradora ks, $W - ks = 0$.
($W = mg$, donde $g = 9.8 m/s^2$).



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(s+x) + mg = -kx \tag{1}$$

Si la masa se desplaza por una cantidad x de su posición de equilibrio, la fuerza restauradora del resorte es $k(x+s)$.
De (1) nos queda,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Si $w^2 = \dfrac{k}{m}$, tenemos como ecuación auxiliar $m^2 + w^2 = 0$ que tiene por solución $m = wi$ y $m = -wi$, por tanto podemos encontrar como solución a la ecuación diferencial,

$$x(t) = c_1\cos(wt) + c_2\sin(wt)$$

desde aquí tenemos,

- El período: $T = \dfrac{2\pi}{w}$.
- frecuencia circular: $w = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ (medido en radianes por segundos).
- La frecuencia natural: $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{w}{2\pi}$.

Ejemplo 1 *Una masa de 900gr alarga el resorte en 15 cm. En t=0 se libera la masa desde un punto 20 cm más abajo de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 14cm/s. Determine la ecuación del movimiento.*

Sol.:
Desde la Ley de Hooke se tiene ($g = 9,8m/s^2 = 980cms/s^2$):

$$\begin{aligned} 900 \cdot 980 &= 15k \\ 58800 &= k \end{aligned}$$

Note que k está dada en cms/s^2. Así el modelo del problema queda dado por,

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \\ \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{58800}{900}x = 0 \\ \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{196}{3}x = 0 \end{aligned}$$

Al resolver el modelo, tenemos que

$$x(t) = c_1 \cos\left(\frac{14}{\sqrt{3}}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{14}{\sqrt{3}}t\right)$$

En el problema reconocemos los datos $x(0) = 20$, y $x'(0) = -14$. Dado esto se tiene, $c_1 = 20$ y $c_2 = -\sqrt{3}$. Así,

$$x(t) = 20\cos\left(\frac{14}{\sqrt{3}}t\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{14}{\sqrt{3}}t\right).$$

Observación 1 *Utilizando trigonometría podríamos describir el modelo de la forma* $x(t) = A\sin(wt + \phi)$ *donde,* $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ *y* $\tan(\phi) = \frac{c_1}{c_2}$.

En el caso de una **Ecuación Diferencial Movimiento Libre Amortiguado** las fuerzas amortiguadas que actúan sobre un cuerpo son proporcionales a la velocidad instantanea, es decir,

$$\frac{F_c}{\frac{dx}{dt}} = \beta$$

(β es una constante de amortiguamiento positiva).
La ecuación del movimiento la podemos describir por medio de la Segunda Ley de Newton obteniendo,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt}$$

si $\dfrac{\beta}{m} = 2\lambda$ y a su vez, $\dfrac{k}{m} = w^2$, nos determina la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + wx = 0 \tag{2}$$

Donde tenemos como ecuación auxiliar, $m^2 + 2\lambda m + w^2 = 0$ por solución,

$$m_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - w^2}, \quad m_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - w^2}$$

Por consecuencia se tiene los siguientes casos,

- **Caso 1** Si $\lambda^2 - w^2 > 0$, el sistema está sobreamortiguado, (no existe movimiento oscilatorio).

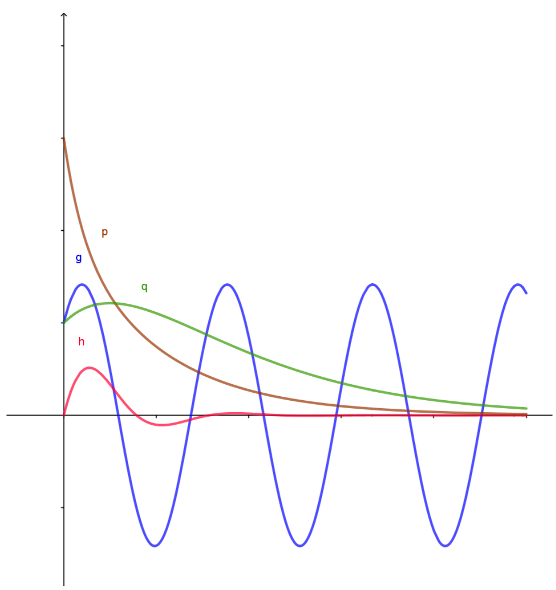
$$x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 e^{\sqrt{\lambda^2 - w^2}t} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda^2 - w^2}t})$$

- **Caso 2** Si $\lambda^2 - w^2 = 0$, el sistema está criticamente amortiguado, (cualquier ligera disminución en la fuerza de amortiguamiento, daría como resultado un momivimiento oscilatorio.)

$$x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 + c_2 t).$$

- **Caso 3** Si $\lambda^2 - w^2 < 0$, el sistema está subamortiguado, el coficiente de amortiguamiento es menor que la constante del resorte, en este caso existe oscilación pero la amplitud de la cuva va disminuyendo en el tiempo

$$x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 \cos(\sqrt{(\lambda^2 - w^2)}t) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda^2 - w^2})).$$



- g: Movimiento libre no amortiguado.
- h: Movimiento subamortiguado.
- p:Movimiento sobreamortiguado.
- q: Movimiento críticamente amortiguado.