Estructuras Discretas INF-313

Sergio Hernández, Mónica Acevedo
shernandez@ucm.cl, macevedo@ucm.cl

Facultad de Ciencias de la Ingeniería

Principio del palomar

Palomar o Principio de las cajas de Dirichlet

Sea f una función de un conjunto finito X a un conjunto finito Y, tal que $|X| = n$ y $|Y| = m$. Si $k = \frac{n}{m}$ entonces hay al menos k valores $a_1, \ldots, a_k$ talque:

$$f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_k)$$

Principio del palomar

Ejemplo: Pruebe que en toda familia de 7 miembros tiene que haber dos personas cuya suma o diferencia de edades es múltiplo de 10

Principio del palomar

Ejemplo:Pruebe que en toda familia de 7 miembros tiene que haber dos personas cuya suma o diferencia de edades es múltiplo de 10

Un múltiplo de 10 se identifica con un 0 en la última posición. Por consiguiente, si las edades de dos miembros de la familia terminan en el mismo dígito, entonces la diferencia de las edades es múltiplo de 10.
Si consideramos ahora en cuanto a la suma, que dígitos suman 10, podemos observar las siguientes combinaciones
$(0,0);(1,9);(2,8);(3,7);(4,6);(5,5);(6,4);(7,3);(8,2);(9,1)$
¿Cúantos tipos de cajas tenemos?
Si observamos podemos tener 6 cajas, como son 7 personas, de acuerdo con el principio de las cajas, habrá al menos una caja con dos números. Si las últimas cifras de estos números son iguales, entonces podemos asegurar que hay dos personas cuya diferencia de edades es múltiplo de 10 y si dichas cifras son diferentes, entonces podemos asegurar que hay dos personas cuya suma de edades es múltiplo de 10.

Principio de la Adición y Principio de la Multiplicación

Principio de la Adición

Si $A_1, \cdots, A_n$ son conjuntos finitos y disjuntos dos a dos, entonces el cardinal de $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ es la suma de los cardinales de cada conjunto. Es decir

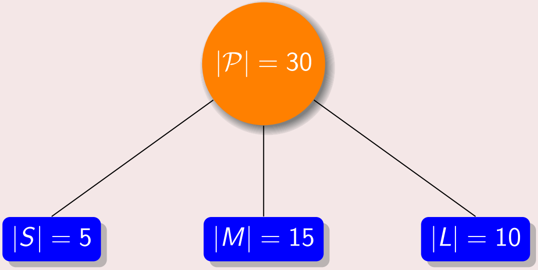
$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$

Principio de la Adición

Ejemplo: Un concurso sortea una polera que puede venir en distintas tallas (S,M y L). Al hacer un sorteo aleatorio, ¿Cuál es la probabilidad de sacar una polera talla M o L?

Principio de la Adición

Ejemplo: Un concurso sortea una polera que puede venir en distintas tallas (S,M y L). Al hacer un sorteo aleatorio, ¿Cuál es la probabilidad de sacar una polera talla M o L?



$$P(M \cup L) = P(M) + P(L) = \frac{15}{30} + \frac{10}{30} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Principio de la Adición y Principio de la Multiplicación

Principio Multiplicativo

Suponga que existe un procedimiento A que puede ser dividido en m sub-tareas $A = \{A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m\}$, donde cada una de las sub-tareas puede ser realizada de $n_i = |A_i|$ formas.
La cantidad total de maneras de realizar la tarea $n = |A|$ es entonces:

$$|A| = |A_1| \times |A_2| \times \cdots \times |A_m|$$
$$n = n_1 \times n_2 \times n_m$$

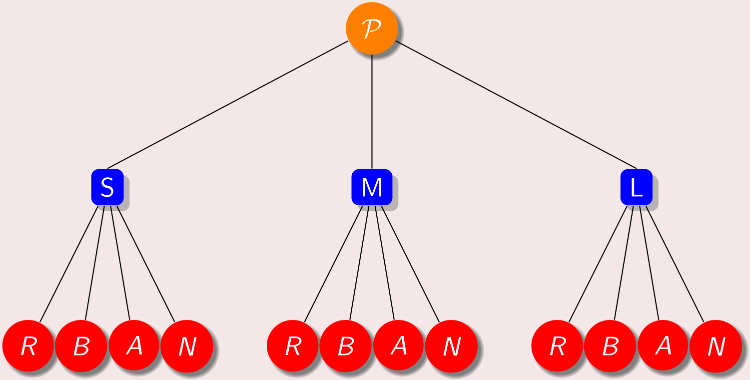
Principio Multiplicativo

Ejemplo: ¿Cuántas combinaciones distintas $P_i \in \mathcal{P} = \{Talla \times Color\}$ de poleras podemos escoger?

Principio Multiplicativo

Ejemplo: ¿Cuántas combinaciones distintas $P_i \in \mathcal{P} = \{Talla \times Color\}$ de poleras podemos escoger?

$$Talla = \{S, M, L\}$$
$$Color = \{R, B, A, N\}$$



Principio de Inclusión-Exclusión

Principio de inclusión-exclusión

Considera los casos en que los elementos del conjunto A se pueden repartir en varios subconjuntos $A_1, \cdots, A_m$ de modo que dichos subconjuntos puedan tener elementos en común. En otras palabras, si un procedimiento A puede ser realizado en m formas distintas $A = \{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m\}$, y cada forma tiene de $n_i = |A_i|$ pasos. La cantidad total de maneras de realizar la tarea $n = |A|$ es entonces:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right| = \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{i,j\,:\,1\leq i<j\leq m} |A_i \cap A_j| + \sum_{i,j,k\,:\,1\leq i<j<k\leq m} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{m+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_m|$$

Principio de Inclusión-Exclusión

Ejemplo: En un grupo de 100 personas, un total de 43 hablan inglés, 27 hablan francés y 50 hablan español. Sabemos también que 16 personas hablan inglés y francés,20 hablan inglés y español y 18 hablan francés y español. Finalmente, 10 personas hablan los tres idiomas. ¿Cuántas personas no hablan ninguno de los tres idiomas?

Principio de Inclusión-Exclusión

Ejemplo: En un grupo de 100 personas, un total de 43 hablan inglés, 27 hablan francés y 50 hablan español. Sabemos también que 16 personas hablan inglés y francés,20 hablan inglés y español y 18 hablan francés y español. Finalmente, 10 personas hablan los tres idiomas. ¿Cuántas personas no hablan ninguno de los tres idiomas?

$|I^c \cap F^c \cap E^c| = |(I \cup F \cup C)^c| = 100 - |I \cup F \cup C|$

$100 - (|I| + |F| + |E| - |I \cap F| - |I \cap E| - |F \cap E| + |I \cap F \cap E|)$

$100 - (43 + 27 + 50 - 16 - 20 - 18 + 10)$

$100 - (76)$

24