Clase 5 - Unidad 3

Contenidos

- Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales

Coeficientes indeterminados. En la Unidad II utilizamos el método de coeficientes indeterminados que fue útil para encontrar soluciones particulares de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas. Son herramientas que adaptaremos para la solución de sistemas de ecuaciones lineales no homogeneos.
Coeficientes indeterminados en la ecuación matricial $X' = AX + F(t)$ lo podemos utilizar si las componentes de $F(t)$ son constantes, polinomios, funciones exponenciales, senos y cosenos o sumas y productos finitos de estas funciones.

Ejemplo 1 *Resuelva*

$$X' = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Sol.: Debemos resolver inicialmente el sistema homogéneo,

$$X' = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X$$

Determinamos la ecuación característica

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

Se tiene como valores propios, $\lambda_1 = i, \quad \overline{\lambda}_1 = -i$. Para encontrar los vectores propios, debemos resolver, En el caso $\lambda = i$

$$\begin{bmatrix} -1-i & 2 \\ -1 & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

utilizando elimación de Gauss-Jordan, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} -1-i & 2 & |0 \\ -1 & 1-i & |0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1+i & |0 \\ -1-i & 2 & |0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1+i & |0 \\ -i & 1+i & |0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1+i & |0 \\ 0 & 0 & |0 \end{bmatrix}$$

obteniendo que $k_1 = (1-i)k_2$, si consideramos $k_2 = 1$, tenemos $K_1 = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix}$

Para $\overline{\lambda_1} = -i$ se tiene,

$$\begin{bmatrix} -1+i & 2 \\ -1 & 1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

utilizando elimación de Gauss-Jordan, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} -1+i & 2 & |0 \\ -1 & 1+i & |0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1-i & |0 \\ -1+i & 2 & |0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1-i & |0 \\ i & 1-i & |0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1-i & |0 \\ 0 & 0 & |0 \end{bmatrix}$$

obteniendo que $k_1 = (1+i)k_2$, si consideramos $k_2 = 1$, tenemos $\overline{K_1} = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix}$.

Así, $B_1 = \frac{1}{2}\left[K_1 + \overline{K_1}\right]$ y $B_2 = \frac{i}{2}\left[-K_1 + \overline{K_1}\right]$ se tiene X_c,

$$X_c = c_1 \begin{bmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \cos t - \sin t \\ -\sin t \end{bmatrix}$$

Dado que $F(t) \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \end{bmatrix}$, tenemos que $X_p = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ Sustituyendo en el sistema original tenemos,

$$\begin{aligned} 0 &= -a + 2b - 8 \\ 0 &= -a + b + 3 \end{aligned}$$

De donde se obtiene $a = 14$ y $b = 11$ por lo tanto $X_p = \begin{bmatrix} 14 \\ 11 \end{bmatrix}$ Y el sistema inicial tien por solución,

$$X = c_1 \begin{bmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \cos t - \sin t \\ -\sin t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 14 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Variación de parámetros

Definición 1 *Si $X_1, X_2, ..., X_n$ es un conjunto fundamental de soluciones del sistema homogéneo $X' = AX$ en un intervalo I, donde la solución general es de la forma $X = \Phi(t)C$. Donde C es el vector columna de constantes y $\Phi(t)$ es la matriz con vectores columnas $X_1, X_2, ..., X_n$. Esta última se llama matriz fundamental.*

Observación 1 *La independencia lineal de los vectores columnas que componen $\Phi(t)$ en el intervalo I garantiza que $\det(\Phi) \neq 0$, por tanto podemos afirmar que $\Phi(t)$ tiene inversa, $\Phi^{-1}(t)$.*

Definamos

$$U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}$$

tal que $X_p = \Phi(t)U(t)$ es una solución particular al sistema no homogéneo $X' = AX + F(t)$ de donde se tiene sustituyendo,

$$\Phi(t)U'(t) + \Phi'(t)U(t) = A\Phi(t)U(t) + F(t)$$

dado que $\Phi'(t) = A\Phi(t)$, se tiene,

$$\begin{aligned} Phi(t)U'(t) + A\Phi(t)U(t) &= A\Phi(t)U(t) + F(t) \\ U'(t) &= \Phi^{-1}(t)F(t) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$U(t) = \int \Phi^{-1}(t)F(t)dt \Longrightarrow X_p = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)F(t)dt$$

así podemos representar la solución al sistema no homogéneo de la forma,

$$X = \Phi(t)C + \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)F(t)dt$$

Ejercicio 1 *Resuelva el sistema*

$$X' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{bmatrix}$$

Matriz exponencial.
Recordemos del cálculo que podemos definir,

$$e^{at} = 1 + at + a^2\frac{t^2}{2!} + a^3\frac{t^3}{3!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \frac{t^k}{k!} \tag{1}$$

donde la serie (1) es convergente para todo t. Si se usa esta serie, con la identidad I en vez de 1 y la matriz A de constantes de orden $n \times n$ en lugar de a, podemos definir la matriz exponencial.

Definición 2 *Para cualquier matriz A de $n \times n$*

$$e^{At} = 1 + At + A^2\frac{t^2}{2!} + A^3\frac{t^3}{3!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!}$$

Utilizando la serie y la convergencia uniforme de esta podemos afirmar que $\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At}$, teniendo como consecuencia que e^{At} es solución de $X' = AX$. Por lo tanto, e^{At} es una matriz fundamental.
Por lo realizado en variaciones de parametros podemos afirmar que la solución de un sistema no homogéneo tiene la forma,

$$X = X_c + X_p = e^{At}C + e^{At}\int_0^t e^{-As}F(s)ds.$$

Ejemplo 2 *Si $X(t) = e^{At}$ es una solución del PVI*

$$X' = AX, \; X(0) = I.$$

Determine $\mathscr{L}\{e^{At}\}$.

Sol.: Sea $x(s) = \mathscr{L}\{X(t)\} = \mathscr{L}\{e^{A}t\}$, si aplicamos la transformada de Laplace en la ecuación diferencial, se tiene,

$$\begin{aligned} s(x(s)) - X(0) &= Ax(s) \\ (sI - A)\,x(s) &= I \\ x(s) &= (sI - A)^{-1} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathscr{L}\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1} \Longrightarrow \mathscr{L}\{(sI - A)^{-1}\} = e^{At}$.

Ejercicio 2 *Use la transformada de Laplace para calcular e^{At} para $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.*