Estructuras Discretas INF-313

Sergio Hernández, Mónica Acevedo
shernandez@ucm.cl, macevedo@ucm.cl

Facultad de Ciencias de la Ingeniería

UNIVERSIDAD CATOLICA DEL MAULE

Probabilidad Discreta

Sea Ω un conjunto finito o contablemente infinito. Las variables aleatorias discretas toman valores $0 \leq P(X) \leq 1$ para toda $\{X = x_i \in \Omega\}$.
En este caso, la función de probabilidad $p(x_i) = P(X = x_i)$ se llama una *función de densidad de probabilidad* y posee las siguientes propiedades:

$$p(x_i) \geq 0 \qquad \forall i,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

Ejemplo : Problema del cumpleaños

¿Cuál es la probabilidad que de un grupo de n personas, 2 estén el mismo día de cumpleaños?

Ejemplo : Problema del cumpleaños

¿Cuál es la probabilidad que de un grupo de n personas, 2 estén el mismo día de cumpleaños? Sea $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ un grupo de personas y $x = \{1, 2, 3, \ldots, 365\}$ los dias del dia del año, entonces si cada persona p_j tiene igual probabilidad de haber nacido cualquier dia p_i del año, entonces:

$$\sum_{i=1}^{365} p(x = i) = \sum_{i=1}^{365} \frac{1}{365} = 1$$

Ejemplo : Problema del cumpleaños

¿Cuál es la probabilidad que de un grupo de n personas, 2 estén el mismo día de cumpleaños? Sea $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ un grupo de personas y $x = \{1, 2, 3, \ldots, 365\}$ los dias del dia del año, entonces si cada persona p_j tiene igual probabilidad de haber nacido cualquier dia p_i del año, entonces:

$$\sum_{i=1}^{365} p(x = i) = \sum_{i=1}^{365} \frac{1}{365} = 1$$

Sea $P_* = \{p_i, p_j\} \subset P$ un subconjunto de 2 elementos de P tal que $x_i = x_j$, entonces la probabilidad que ninguna persona esté el mismo día de cumpleaños.

$$\begin{aligned} P(P_*)^C &= \frac{365}{365} * \frac{364}{365} * \frac{363}{365} * \cdots * \frac{365-(n-1)}{365} \\ &= \frac{365 * 364 * 363 * \cdots (365-(n-1))}{365^n} \end{aligned}$$

Entonces $P(P_*) + P(P_*)^C = 1$

Teorema Binomial

El teorema Binomial entrega los coeficientes de la expansión en serie de potencia de un binomio $a + b$.
Por ejemplo:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b) * (a+b) * (a+b) \\ &= (a^2 + 2 * a * b + b^2)(a+b) \\ &= a^3 + 3 * a^2 * b + 3 * a * b^2 + b^3\end{aligned}$$

Teorema Binomial

El teorema Binomial entrega los coeficientes de la expansión en serie de potencia de un binomio $a + b$.
Por ejemplo:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)*(a+b)*(a+b)\\ &= (a^2+2*a*b+b^2)(a+b)\\ &= a^3+3*a^2*b+3*a*b^2+b^3\end{aligned}$$

Teorema Binomial

Sean $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ reales y n un entero positivo, entonces:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Coeficientes Binomiales

Es posible escribir los coeficientes binomiales mediante un triángulo de Pascal donde los contornos son 1 y cualquier número interior es la suma de los enteros arriba de él.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

Variable aleatoria de Bernoulli

En particular la variable aleatoria de Bernoulli tiene la siguiente *función de densidad de probabilidad* :

$$p(x) = \begin{cases} p & \text{si } x = 1 \\ q = 1 - p & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Variable aleatoria de Bernoulli

En particular la variable aleatoria de Bernoulli tiene la siguiente *función de densidad de probabilidad* :

$$p(x) = \begin{cases} p & \text{si } x = 1 \\ q = 1 - p & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Si queremos repetir el experimento n veces de manera independiente cada una de ellas, tenemos:

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^{n-k} q^k = 1$$

Distribución Binomial

De manera más general, ahora consideremos n repeticiones independientes del experimento, tal que la probabilidad de encontrar k elementos $x = 1$ sigue una distribución binomial:

$$p(x = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{(n-k)}$$

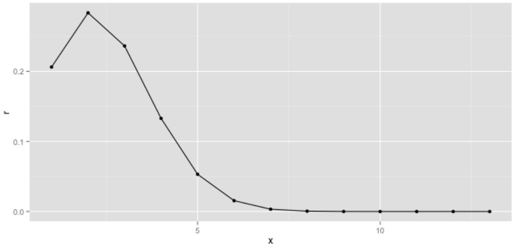
Ejemplo : Distribución Binomial

Suponga que hay doce preguntas distintas en una prueba con alternativas. Cada respuesta tiene cinco posibles respuestas, pero sólo una es correcta. ¿Cuál es la probabilidad de responder todas las respuestas correctas si el estudiante responde de manera aleatoria?

Ejemplo : Distribución Binomial

Suponga que hay doce preguntas distintas en una prueba con alternativas. Cada respuesta tiene cinco posibles respuestas, pero sólo una es correcta. ¿Cuál es la probabilidad de responder todas las respuestas correctas si el estudiante responde de manera aleatoria? La probabilidad de responder cada pregunta de manera correcta es $p = 0.2$, entonces la probabilidad de responder las 12 respuestas correctas es:

$$p(x = 12) = \binom{12}{12} 0.2^{12}(1 - 0.2)^{(0)} = 0.2^{12} = 4.096e - 09$$



Distribución de Poisson

La distribución de Poisson con parámetro λ tiene la siguiente forma:

$$p(x = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}$$

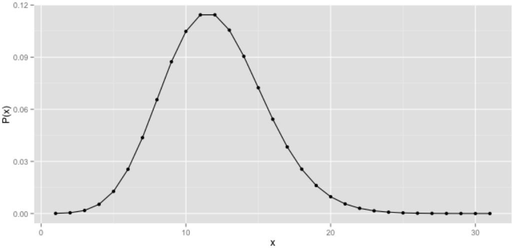
Ejemplo : Distribución de Poisson

Si en promedio cruzan 12 vehículos por un puente cada minuto. ¿Cuál es la probabilidad de que crucen 16?

Ejemplo : Distribución de Poisson

Si en promedio cruzan 12 vehículos por un puente cada minuto. ¿Cuál es la probabilidad de que crucen 16? La media de la distribución de Poisson es $\lambda = 12$, entonces la probabilidad de observar 16 autos es:

$$p(x = 16) = \frac{e^{-12}12^{16}}{16!} = 0.05429334$$



Ley de eventos de los raros

Consideremos la distribución Binomial con parámetros n y $p \ll 1$. Si hacemos $p = \lambda/n$ y tomamos el límite:

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \lambda/n)^n = e^{-\lambda}$$

Ley de eventos de los raros

Consideremos la distribución Binomial con parámetros n y $p \ll 1$. Si hacemos $p = \lambda/n$ y tomamos el límite:

$$\lim_{n\to\infty}(1-\lambda/n)^n = e^{-\lambda}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(X=k) &= \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{(n-k)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-k)!k!}(\lambda/n)^k(1-\lambda/n)^{(n-k)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}(\lambda^k/k!)(1-\lambda/n)^n(1-\lambda/n)^{-k} \\
&= \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}
\end{aligned}$$