Guía Series

Contenidos

- Resolución por series

1. Determine el radio y el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias:
   (a) $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\dots$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}x^n$
2. Sabiendo la serie de potencias
$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$
   (a) Determine una serie de potencias para xe^x-x alrededor de $x=0$
   (b) Determine una serie de potencias para $e^{-x^2/2}$ alrededor de $x=0$.
3. Sabiendo que la serie de potencias de la función $f(x)=\frac{1}{1-x}$ en torno a $x=0$ es
$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,$$
   determine:
   (a) Una serie de potencias para $\frac{1}{(1-x)^2}$ alrededor de $x=0$, junto con su intervalo de convergencia.
   (b) Una serie de potencias para $\frac{1}{1+x}$ alrededor de $x=0$, junto con su intervalo de convergencia.
   (c) Una serie de potencias para $\frac{1}{1+x^2}$, alrededor de $x=0$, junto con su intervalo de convergencia.
   (d) Una serie de potencias para $\arctan(x)$ alrededor de $x=0$, junto con su intervalo de convergencia. Deduzca que
$$\pi=4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$
4. En los siguientes ejercicios determine una serie de potencias centrada en el punto dado, si se sabe que la función resuelve la ecuación diferencial:
   (a) $y=e^x$ alrededor de $x=0$. $y'-y=0, \quad y(0)=1$
   (b) $y=\frac{1}{x}$ alrededor de $x=1$. $x^2y'+xy=0, \quad y(1)=1$
5. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales usando la resolución por series, alrededor del punto ordinario $x=0$:
   (a) $y''-xy=0$

(b) $y'' - 2xy + y = 0$
(c) $y'' + x^2y' + xy = 0$
(d) $(x-1)y'' + y' = 0$
(e) $y'' - (x+1)y' - y = 0$
(f) $(x^2+1)y'' - 6y = 0$
(g) $(x^2+2)y'' + 3xy' - y = 0$

6. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales con la condición inicial dada.

(a) $(x-1)y'' - xy' + y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 6$
(b) $(x+1)y'' - (2-x)y' + y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$
(c) $y'' - 2y' + 8y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0$

7. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales, sabiendo que $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación:

(a) $2xy'' - y' + 2y = 0$
(b) $2xy'' + 5y' + xy = 0$
(c) $4xy'' + \frac{y'}{2} + y = 0$
(d) $2x^2y'' - xy' + (x^2+1)y = 0$
(e) $3xy'' + (2-x)y' - y = 0$
(f) $2xy'' - (3+2x)y' + y = 0$