Clase 3

Contenidos

- Ecuaciones Diferenciales Separables, Lineales y Exactas.

Dentro de esta semana pretenderemos aprender a resolver ciertas ecuaciones diferenciales por medio de sus formas y características algebraicas.

Definición 1 (Ecuaciones Diferenciales Separables.) *Se dice que una ecuación diferencial de primer orden de la forma*

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

es separable o que tiene variables separables.

Método de resolución de una ecuación diferencial separable:
Si consideramos $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$ y $h(y) \neq 0$ tenemos,

$$\frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx} = g(x).$$

Por terminos de comodidad podríamos definir

$$p(y) = \frac{1}{h(y)}$$

así la ecuación diferencial se escribe

$$p(y)\frac{dy}{dx} = g(x).$$

Si $y = \Phi(x)$ es solución se tiene que,

$$p(y)\frac{dy}{dx} = p(\Phi(x))\Phi'(x)dx.$$

Por tanto, la solución de la ecuación diferencial se puede obtener por medio de

$$\int p(\Phi(x))\Phi'(x)dx = \int g(x)dx,$$

o bien,

$$\int p(y)dy = \int g(x)dx$$

si $H(y)$ es la antiderivada de $p(y)$ y $G(x)$ la antiderivada de $g(x)$ nos queda,

$$H(y) = G(x) + c.$$

Observación 1 *Si no se pudiese despejar la variable (y), hemos encontrado una solución implícita de la ecuación diferencial inicial.*
Si podemos despejar (y) hemos encontrado la función explícita que satisface la ecuación difereciancial inicial.

Notemos que el caso más sencillo de una ecuación diferencial de variables separables sería de la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x),$$

en este caso $h(y) = 1$.

Para la solución de ella basta que integramos a ambos lados de la igualdad, nos queda

$$y = \int g(x)dx = G(x) + c,$$

donde precisamente $G(x)$ es la antiderivada de $g(x)$.

Ejemplo 1 *Resuelva:* $\frac{dy}{dx} = -2xy^2$

Sol.:
Notemos que la ecuación diferencial es separable, ya que si consideramos $-2x = g(x)$ y $h(y) = y^2$, se tiene,

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

Para construir la solución separemos la ecuación diferencial

$$\frac{1}{y^2}dy = -2xdx$$

$$\int \frac{1}{y^2}dy = \int -2xdx$$

$$\frac{1}{y} = x^2 + c$$

En este caso podemos encontrar explícitamente la solución,

$$y = \frac{1}{x^2 + c}$$

.
Así la solución de $\frac{dy}{dx} = -2xy^2$ es $\Phi(x) = \frac{1}{x^2 + c}$.

Ejercicio 1 *Determine la solución para las siguientes ecuaciones diferenciales.*

(a.) $x^2\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1+x}{\arctan(y)} = 0$ *(b.)* $(\sqrt{(1-x^2)})y' + \dfrac{1}{y} = 0$

Definición 2 (Ecuaciones Diferenciales Lineales.) *Se dice que una ecuación diferencial de primer orden de la forma*

$$a_1(x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + a_0(x)y = g(x)$$

es una ecuación diferencial lineal en la variable dependiente y.
Si $g(x) = 0$ la llamaremos ecuación diferencial lineal homogénea, de lo contrario le llamaremos no homogénea.

Método de solución de una ecuación difrencial lineal:

Si tenemos

$$a_1(x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + a_0(x)y = g(x)$$

multiplicamos la expresión por $\dfrac{1}{a_1(x)}$,obtenemos $\dfrac{a_0(x)}{a_1(x)} = p(x)$ y a su vez, $\dfrac{g(x)}{a_1(x)} = q(x)$. Encontrando otra forma de representar una ecuación diferencial lineal

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x). \tag{1}$$

Para buscar las soluciones de este tipo de ecuaciones diferenciales recordemos la fórmula de la derivada del producto de funciones,

$$(u \cdot v)' = u'v + v'u.$$

Ahora, consideremos la ecuación 1, y amplifiquemos por $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$, nos queda

$$\left(e^{\int p(x)dx}\right)\frac{dy}{dx} + e^{\int p(x)dx}p(x)y = e^{\int p(x)dx}q(x) \tag{2}$$

Observemos que si utilizamos regla de la cadena para μ se tiene

$$\mu'(x) = p(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Si reemplazamos μ y μ' en ecuación 2 nos queda,

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu'(x)y = e^{\int p(x)dx}q(x) \tag{3}$$

notemos que por la regla de la multiplicación en el miembro izquierdo de la ecuación tenemos,

$$(\mu(x)y)' = e^{\int p(x)dx}q(x).$$

Si desarrollamos tenemos,

$$(\mu(x)y) = \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx$$

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx$$

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx$$

Así, si la ecuación es de la forma ecuación (1), la solución es de la forma,

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx.$$

Ejemplo 2 *Resuelva la ecuación* $xy' + 2y = 3$

Sol.:
Notemos que podemos re-escribir la ecuación diferencial multiplicando por $\frac{1}{x}$ obtenemos

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{3}{x}.$$

Ahora consideremos $\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{\ln(x^2)} = x^2$. Si amplificamos por μ en la ecuación anterior se tiene

$$x^2y' + 2xy = 3x$$

donde podemos re-ordenar de la forma

$$\left(x^2y\right)' = 3x$$

$$x^2y = \frac{3}{2}x^2 + c$$

$$y = \frac{3}{2} + \frac{c}{x^2}$$

Así la ecuación $xy' + 2y = 3$ tiene por solución $y = \frac{3}{2} + \frac{c}{x^2}$.

Ejercicio 2 *Detemine una solución para la ecuación diferencial*

$$(x^2 - 9)\frac{dy}{dx} + xy = 0$$

Considere las restricciones de la ecuación diferencial y defina el dominio de la solución.

Definición 3 *Una expresión diferencial* $M(x, y)dx+N(x, y)dy$ *es una diferencial exacta en una región* R *del plano* xy *si corresponde a una diferencial de alguna función* $f(x, y)$ *definida en* R*. Una ecuación diferencial de primer orden de la forma*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

es una ecuación exacta si la expresión del lado izquierdo es exacta.

Para resolver una ecuación diferencial exacta debemos inicialmente probar si la expresión diferencial es exacta. Para ello consideremos el siguiente teorema.

Teorema 1 *Sean $M(x,y)$ y $N(x,y)$ continuas y con primeras derivadas parciales continuas en una región rectangular R. Entonces una condición necesaria y suficiente de que $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ sea una diferencial exacta es*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Método de solución de una ecuación diferencial exacta:
Consideremos que

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

es una ecuación diferencial exacta. Entonces podemos afirmar que existe una función f tal que,

$$M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} \text{ y } N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Además, las componentes de la ecuación diferencial satisfacen

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Consideremos, $M(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}$. Así tenemos,

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y).$$

Observemos que $g(y)$ es una función que debe depender solo de y.
Ahora debemos encontrar la función $g(y)$. Para ello, podemos utilizar $N(x,y)$ y derivar respecto a y a la expresión que hemos encotrado para $f(x,y)$, es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + g'(y)$$

Así se tiene que,

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$$

Ahora para encontrar g,

$$g(y) = \int \left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right) dy$$

Asi volvemos a la expresión de $f(x,y)$. donde hemos encontrado la solución de la ecuación con la forma $f(x,y) = c$.

Ejemplo 3 *Determine si la ecuación diferencial $2xydx + (x^2 - 1)dy = 0$ es exacta, de serlo encuentre la solución.*

Sol.:
En este caso, $M(x, y) = 2xy$ y $N(x, y) = (x^2 - 1)$, se tiene,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Por lo tanto podemos afirmar que la ecuación diferencial es exacta. Dado esto, podemos asegurar que existe una función $f(x, y) = c$ que satisface la ecuación diferencial, donde

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1$$

Si integramos $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ respecto a x se tiene,

$$f(x, y) = x^2 y + g(y).$$

Ahora encontremos $g(y)$. Usemos la expresión que encontramos para f.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + g'(y).$$

En el caso sabemos que $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$, es decir

$$x^2 + g'(y) = x^2 - 1$$
$$g'(y) = -1$$
$$g(y) = -y$$

Dado esto $f(x, y) = x^2 y - y$ y la solución de la ecuación en forma implícita es $x^2 y - y = c$ de donde podemos algebraicamente encontrar, $y = \dfrac{c}{1 - x^2}$.

Observación 2 *Observemos que existen ecuaciones difrenciales de la forma*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

que no son exactas. Algunas de ellas podemos transformarla en una ecuación diferencial exacta al amplificar la ecuación por un factor $\mu(x, y)$.

Para encontrar el factor integrante μ consideraremos lo siguiente,

- Si $\frac{M_y - N_x}{N}$ es una función que depende de x exclusivamente, se tiene que

$$\mu(x) = e^{\int \left(\frac{M_y - N_x}{N}\right) dx}$$

- Si $\frac{N_x - M_y}{M}$ es una función que depende solo de y, se tiene que

$$\mu(y) = e^{\int \left(\frac{N_x - M_y}{M}\right) dy}$$

Ejercicio 3 *Muestre que la ecuación diferencial* $(2y^2 + 3x)dx + 2xydy = 0$. *no es exacta. Encuentre un factor integrante que la transforme en exacta y resuelva la ecuación diferencial.*

Casos Especiales:

Hay ecuaciones diferenciales que podemos transformarla en algunas conocidas después de una sustitución adecuada.

Caso 1: La **ecuación de Bernoulli**, es de la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)y^n$$

particularmente, si n=0, n=1 es solo una ecuación diferencial lineal. Si consideramos $u = y^{1-n}$ reduce cualquier Ecuación de Bernoulli en una lineal.

Ejercicio 4 *Determine una solución para la ecuación*

$$x\frac{dy}{dx} + y = x^2y^2.$$

Caso 2: Si la ecuación diferencial es de la forma $\frac{dy}{dx} = f(Ax + By + C)$ se reduce siempre a una ecuación con variables separables por medio de la sustitución $u = Ax + By + C$

Ejercicio 5 *Determine una solución para la ecuación*

$$\frac{dy}{dx} = (-2x + y)^2 - 7.$$