Clase: Formulación Problemas de Transporte y Asignación

1

Formulación de Problemas de Transporte y Asignación

- Problema de Transporte
- Problema de Asignación
- Problema de Flujo Capacitado con Costo Mínimo

2

Problema de Transporte

- Este problema se presenta usualmente en el área de planificación de la distribución de bienes y servicios desde varios puntos de oferta a diferentes puntos de demanda.

3

Problema de Transporte

- Generalmente, la cantidad disponible de bienes en cada punto de oferta es limitada y la cantidad necesaria de bienes en cada punto de demanda es conocida.

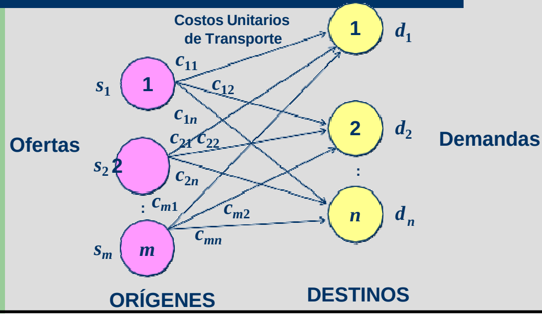
4

Problema de Transporte

- El objetivo de un problema de transporte es minimizar los costos de transporte de los bienes enviados desde *m orígenes* (cada uno con una oferta s_i) hacia *n destinos* (cada uno con una demanda d_j), cuando el costo unitario de transporte desde un origen *i* a un destino *j* es c_{ij}.

5

Problema de Transporte: Representación en Red



6

Formulación Matemática para el Problema de Transporte

$$\text{Minimizar } z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.a. \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i\,,\; i = 1,..,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j\,, \quad j = 1,..,n$$

$$x_{ij} \geq 0,\; \forall i,j$$

- x_{ij} = cantidad de unidades transportadas desde el origen i al destino j,
- c_{ij} = costo unitario de transporte desde el origen i al destino j,
- s_i = oferta disponible en el origen i,
- d_j = cantidad demandada en el destino j.

Estructura de un Problema de Transporte

$$\text{Minimizar } z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{mn}x_{mn}$$

$$\begin{array}{l}
\text{s.a } x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} \qquad\qquad\qquad\qquad = s_1 \\
\qquad\qquad x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} \qquad\qquad = s_2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = s_m \;\; x_{11} \\
\quad + \qquad\qquad x_{21} + \quad \ldots \quad + \;\; x_{m1} \qquad\qquad = d_1 \\
\qquad x_{12} + \qquad\qquad x_{22} + \quad \ldots \quad + \;\; x_{m2} \qquad = d_2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\qquad\qquad x_{1n} + \qquad\qquad x_{2n} + \quad \ldots \quad + x_{mn} = d_n
\end{array}$$

$$x_{ij} \geq 0,\; \forall i,j$$

Estructura de un Problema de Transporte

- Gracias a la estructura especial de los problemas de transporte, se tiene la siguiente propiedad:
- Propiedad de Integralidad

  Cuando s_i y d_j tienen valores enteros, todas las asignaciones (variables básicas), en toda solución básica factible, tendrán valores enteros.

Condición para que Existan Soluciones Factibles

- Una condición necesaria y suficiente para que un problema de transporte tenga soluciones factibles es que la oferta total de la red sea igual a la demanda total, es decir:

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

- Si esta condición no se cumple, se puede introducir un nodo ficticio de oferta o demanda para captar la holgura y satisfacer esta condición.

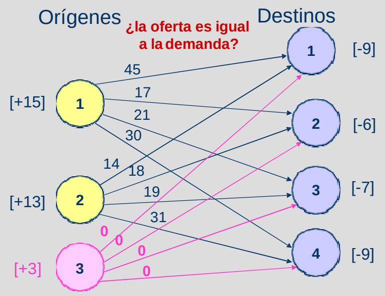
Observaciones para el Modelo

- La suma de la oferta total debe ser igual a la suma de la demanda total.
- Matemáticamente, se tiene una restricción redundante.
- No es posible alterar una única oferta o demanda, pues el modelo dejará de tener sentido.

Observaciones para el Modelo

- La suma de la oferta total debe ser igual a la suma de la demanda total.
- Matemáticamente, se tiene una restricción redundante.
- No es posible alterar una única oferta o demanda, pues el modelo dejará de tener sentido.

Ejemplo



Los costos unitarios de los arcos de nodos ficticios tienen costo cero sólo si no existe multa por no atender la demanda o costos de inventario por guardar stock.

13

Problema de Asignación

- El problema de asignación es un caso especial del modelo de transporte, en el que los recursos se asignan a las actividades en términos de uno a uno.
- De esta forma, cada recurso debe asignarse únicamente a una actividad particular o ***asignación***.
- Por lo tanto, el número de recursos disponibles ***debe ser igual*** al número de actividades.

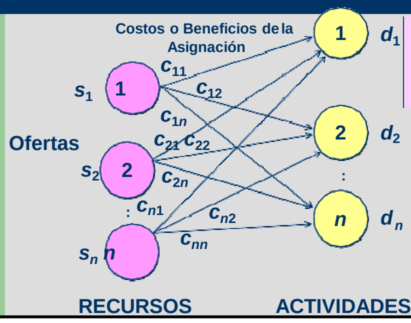
14

Problema de Asignación

- El objetivo de un problema de asignación es determinar en que forma deben realizarse todas las asignaciones, buscando obtener el mejor valor óptimo (minimizar los costos totales o maximizar los beneficios totales).

15

Problema de Asignación: Representación en Red



Donde:
- Todo s_i y $d_j = 1$
- Nº recursos = Nº actividades

16

Formulación Matemática para el Problema de Asignación (Caso de Minimización)

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

s.a.

$$\sum^{n} x = 1, i = 1,2,\ldots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1,2,\ldots,n$$

$$x_{ij} \geq 0, \forall i, j$$

- **x_{ij} = es una variable binaria ($x_{ij} \in \{0, 1\}$), que toma un valor igual a uno si el recurso i es asignado a la actividad j,**

  contrario.
- **c_{ij} = corresponde al costo de asignar el recurso i a la actividad j.**

17

Condición para que Existan Soluciones Factibles

- Una condición necesaria y suficiente para que un problema de asignación tenga soluciones factibles es que el número de recursos de la red sea igual al número de actividades, es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

- Si esta condición no se cumple, se puede introducir un nodo ficticio de recursos o de actividades para captar la holgura y satisfacer esta condición.

18

Ejemplo

- Un administrador necesita asignar tres diferentes trabajos a tres trabajadores. Basándose en la experiencia de los trabajadores, sabe que es diferente el tiempo requerido por cada uno para terminar cada trabajo. Al administrador le gustaría minimizar el número de horas requeridas por los tres trabajadores, ya que el salario por hora es el mismo para los tres.

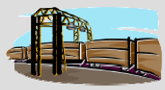
Matriz de Horas Requeridas por Trabajo

	Trabajo 1	Trabajo 2	Trabajo 3
Trabajador 1	11	12	17
Trabajador 2	7	11	21
Trabajador 3	5	8	15

19

Problema de Flujo Capacitado con Costo Mínimo

- El objetivo es minimizar los costos de envío a través de una red de servicios de transporte desde los orígenes (plantas, etc.) hasta los destinos (puntos de venta), incluyendo puntos de transbordo, donde cada arco de la red tiene una capacidad de flujo limitada.


20

Aplicaciones Típicas del Problema de Flujo Capacitado con Costo Mínimo

Tipo de Aplicación	Nodos de Oferta	Nodos de Transbordo	Nodos de Demanda
Operación de una red de distribución	Fuentes de bienes	Centros de acopio Intermedios	Clientes
Gestión de los residuos sólidos	Fuentes de residuos sólidos	Plantas de procesamiento	Vertederos
Operación de una red de abastecimiento	Centros de venta	Bodegas intermedias	Plantas de proceso
Coordinación de la mezcla de productos en las plantas	Plantas	Ensamblaje de un producto específico	Mercado del producto específico

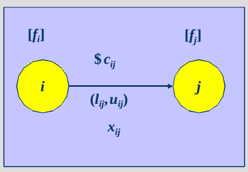
21

Problema de Flujo Capacitado con Costo Mínimo

- Se basa en las siguientes hipótesis :
  - A cada arco se le asocia un costo de flujo unitario (no negativo).
  - Los arcos pueden tener límites inferiores positivos de capacidad.
  - Los arcos pueden tener límites superiores positivos de capacidad.
  - Todo nodo en la red puede funcionar como origen o como destino.

22

Representación de la Red



Se tiene una red capacitada $G = (N, A)$, donde:

- x_{ij}= cantidad de flujo del nodo i al nodo j,
- c_{ij} = costo unitario del flujo del nodo i al nodo j,
- u_{ij}= capacidad máxima del arco (i, j),
- l_{ij} = capacidad mínima del arco (i, j),
- f_i = flujo neto en el nodo i,
- f_j = flujo neto en el nodo j.

23

Flujo Neto de Cada Nodo

- Si $f_j > 0$, el nodo j corresponde a un nodo de origen u oferta.
- Si $f_j < 0$, el nodo j corresponde a un nodo de demanda.
- Si $f_j = 0$, el nodo j corresponde a un nodo transbordo.

flujo que sale del nodo j – flujo que entra al nodo j = f_j

24

Formulación Matemática del Problema de Flujo Capacitado con Costo Mínimo

$$\text{Minimizar } z = \sum_{(i,j)\in A}\sum c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{\substack{k \\ (j,k)\in A}} x_{jk} - \sum_{\substack{i \\ (i,j)\in A}} x_{ij} = f_j, \; j \in N$$

$$l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij}$$

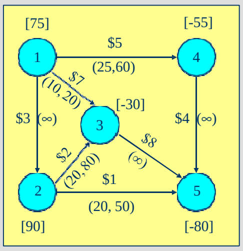
Donde:

- N = conjunto de los nodos de la red,
- A = conjunto de los arcos de la red,
- x_{ij} = cantidad de flujo del nodo i al nodo j,
- c_{ij} = costo unitario del flujo del nodo i al nodo j,
- u_{ij} = capacidad máxima del arco (i, j),
- l_{ij} = capacidad mínima del arco (i, j),
- f_j = flujo neto en el nodo j.

25

Ejemplo

- Una red de tuberías conecta dos plantas desalinadoras de agua a tres ciudades.
- Los nodos 1 y 2 representan las plantas desalinisadoras y los nodos 3, 4 y 5 representan las ciudades.



26