INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Profesor:

WLADIMIR EDUARDO SOTO SILVA

Temario Clase

Algoritmo de Ramificación y Acotamiento

Conceptos Básicos

Se basa en la idea de desarrollar una ENUMERACIÓN INTELIGENTE de los puntos candidatos a la solución optima entera de un problema.

Es una instancia de “ Divide y Conquista”

Definición de Ramificación y Acotamiento

El termino Ramificación, se refiere al hecho de que este método realiza particiones en el espacio de soluciones (generando "ramas").

El termino Acotamiento, resalta que la prueba de optimalidad de la solución va eliminando las particiones utilizando los resultados calculados a lo largo de la enumeración (podamos "ramas")

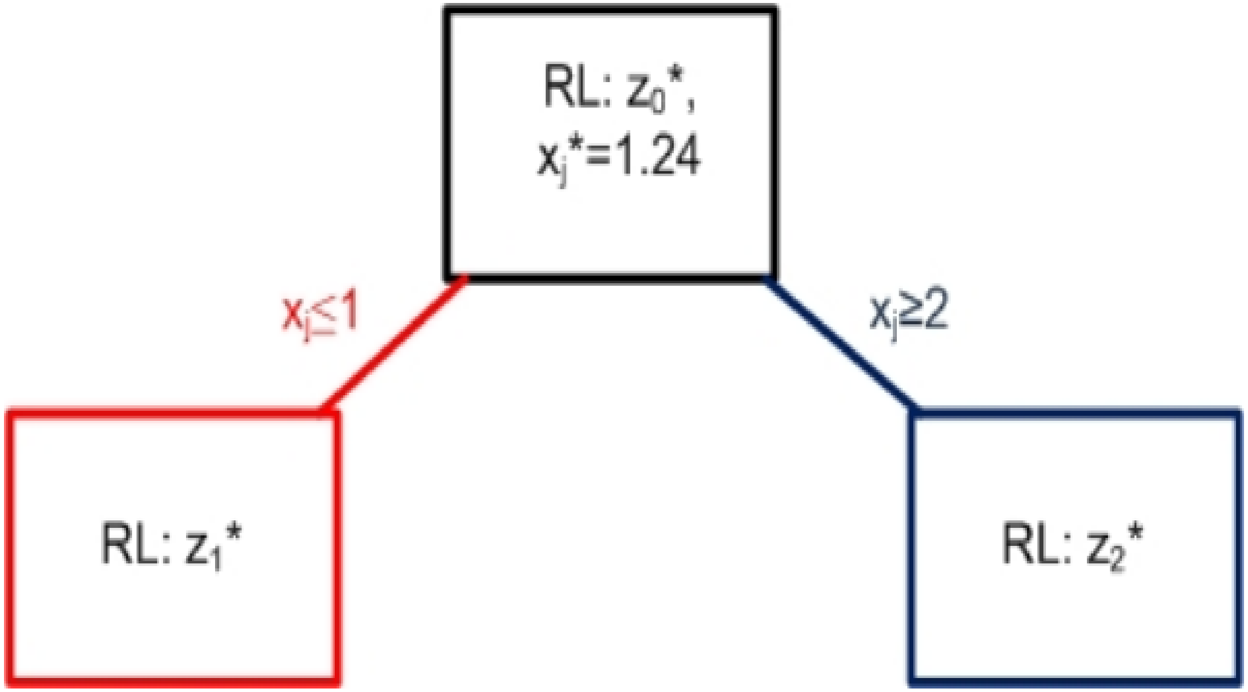
Como generar ramas?

- Consideremos un problema de PE, tal que el valor optimo de unas de las variables del problema es xj (no entera)

- Generamos dos ramas:
  - Una añadiendo la restricción $x_j \leq \lfloor x_j^* \rfloor$
  - Y otra añadiendo la restricción $x_j \geq \lfloor x_j^* \rfloor + 1.$

- Por ejemplo, si xj=1.27, entonces se generan dos ramas:
  - Una añadiendo la restricción $x_j \leq 1.$
  - Y otra añadiendo la restricción $x_j \geq 2.$

Como generar ramas?



Como generar ramas?

En cada sub-problema se definen nuevas ramas y así sucesivamente

Cuando un sub-problema entrega una solución entera, esa solución se llama solución de apoyo y entrega una cota inferior o limite inferior al problema.

Cuando un sub-problema entrega una solución continua, esa solución entrega una cota superior o limite superior al problema.

Definición de RL (PE)=P0

- Consideremos el siguiente problema de PE:

$$\max z = \{5x_1 + 8x_2 : x_1 + x_2 \leq 6, 5x_1 + 9x_2 \leq 45, x_1,\ x_2 \text{ enteros}\}$$

- Entonces el problema de RL de PE (P0) es:

$$P_0 : \quad \max z = \{5x_1 + 8x_2 : x_1 + x_2 \leq 6, 5x_1 + 9x_2 \leq 45, x_1,\ x_2 \geq 0\}$$

Definición de las primeras ramas P1 y P2.

- Al resolver P0 tenemos que:

$$z_0^* = 41\frac{1}{4},\ x_1 = \frac{9}{4} = 2.25,\ x_2 = \frac{15}{4} = 3.75.$$

- Para generar los nuevos sub-problemas (P1 y P2) tomaremos la variable x2, una rama incluye la restricción :

$$x_2 \leq \|3.75\| \leq 3$$

y la otra rama incluye la restricción

$$x_2 \geq \|3.75\| + 1 \geq 4$$

Definición de las primeras ramas P1 y P2

Resolución de las primeras ramas P1 y P2.

- El problema P1, se define por:

$$P_1: \ \max z = \{5x_1 + 8x_2 : x_1 + x_2 \leq 6, 5x_1 + 9x_2 \leq 45, x_2 \leq 3, x_1,\ x_2 \geq 0\}$$

y su solución es:

$$z_1^* = 39,\ x_1 = 3,\ x_2 = 3.$$

- Debido a que esta es una solución entera, pasa a ser una solución de apoyo.

Resolución de las primeras ramas P1 y P2.

- El problema P2, se define por:

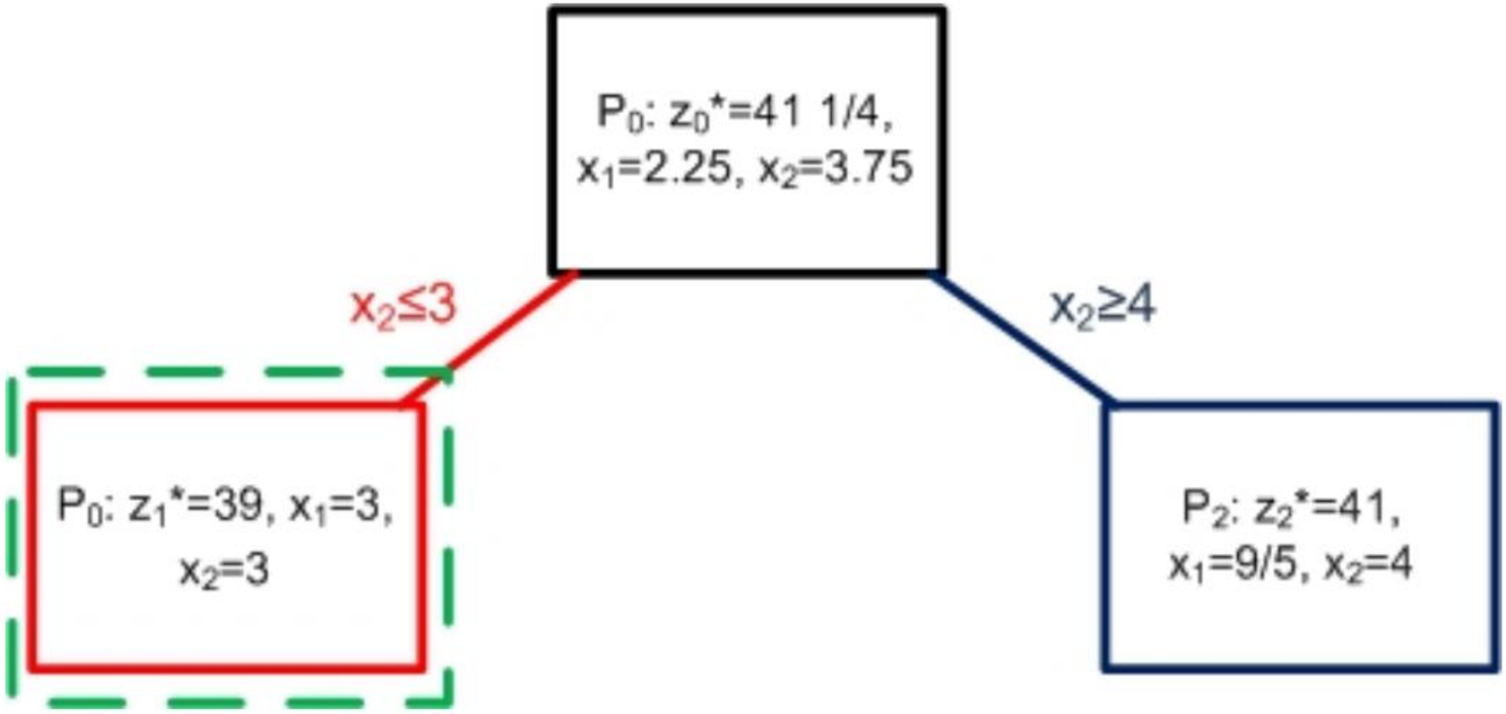
$$P_2: \ \max z = \{5x_1 + 8x_2 : x_1 + x_2 \leq 6, 5x_1 + 9x_2 \leq 45, x_2 \geq 4, x_1, \ x_2 \geq 0\}$$

y su solución es:

$$z_2^* = 41, \ x_1 = \frac{9}{5}, \ x_2 = 4$$

- Debido a que esta es una solución no es entera, generamos nuevas ramas.

Resolución de las primeras ramas P1 y P2.



Definición de las ramas P3 y P4

Al resolver P2 tenemos que:

$$z_2^* = 41,\ x_1 = \frac{9}{5} = 1.80,\ x_2 = 4.$$

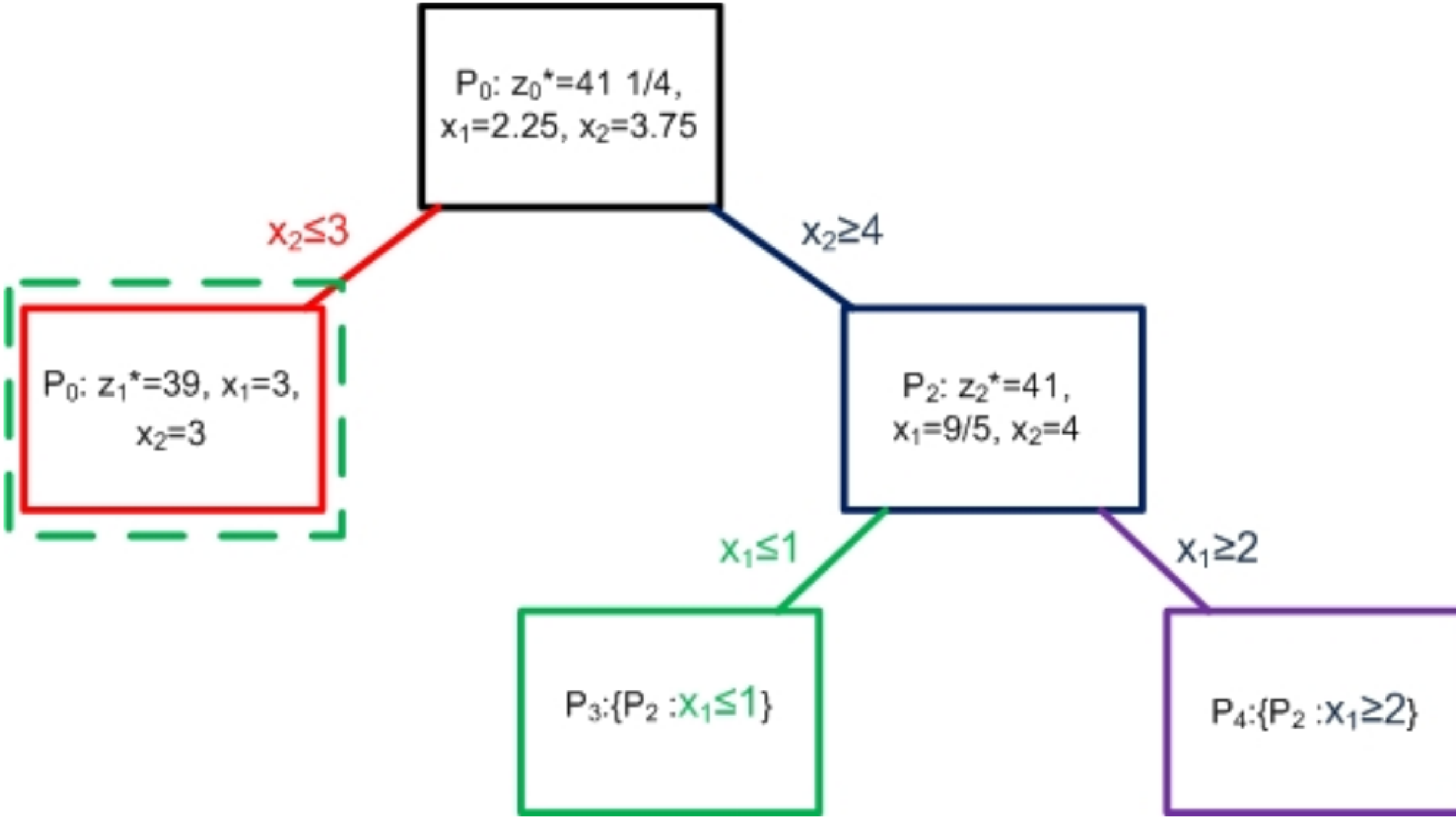
Para generar los nuevos sub-problemas (P3 y P4) tomaremos la variable x1, una rama incluye la restricción :

$$x_1 \leq \|1.80\| \leq 1$$

y la otra incluye la restricción

$$x_1 \geq \|1.80\| + 1 \geq 2.$$

Definición de las ramas P3 y P4



Resolución de las ramas P3 y P4

- El problema P3 se define por:

$$P_3: \max z = \{5x_1 + 8x_2 : x_1 + x_2 \leq 6, 5x_1 + 9x_2 \leq 45, x_2 \geq 4, x_1 \leq 1, x_1,\ x_2 \geq 0\}$$

y su solución es

$$z_3^* = 40\frac{5}{9},\ x_1 = 1,\ x_2 = \frac{40}{9} \approx 4.44.$$

Debido a que esta solución no es entera, generamos nuevas ramas.

Resolución de las ramas P3 y P4

- El problema P4 se define por:

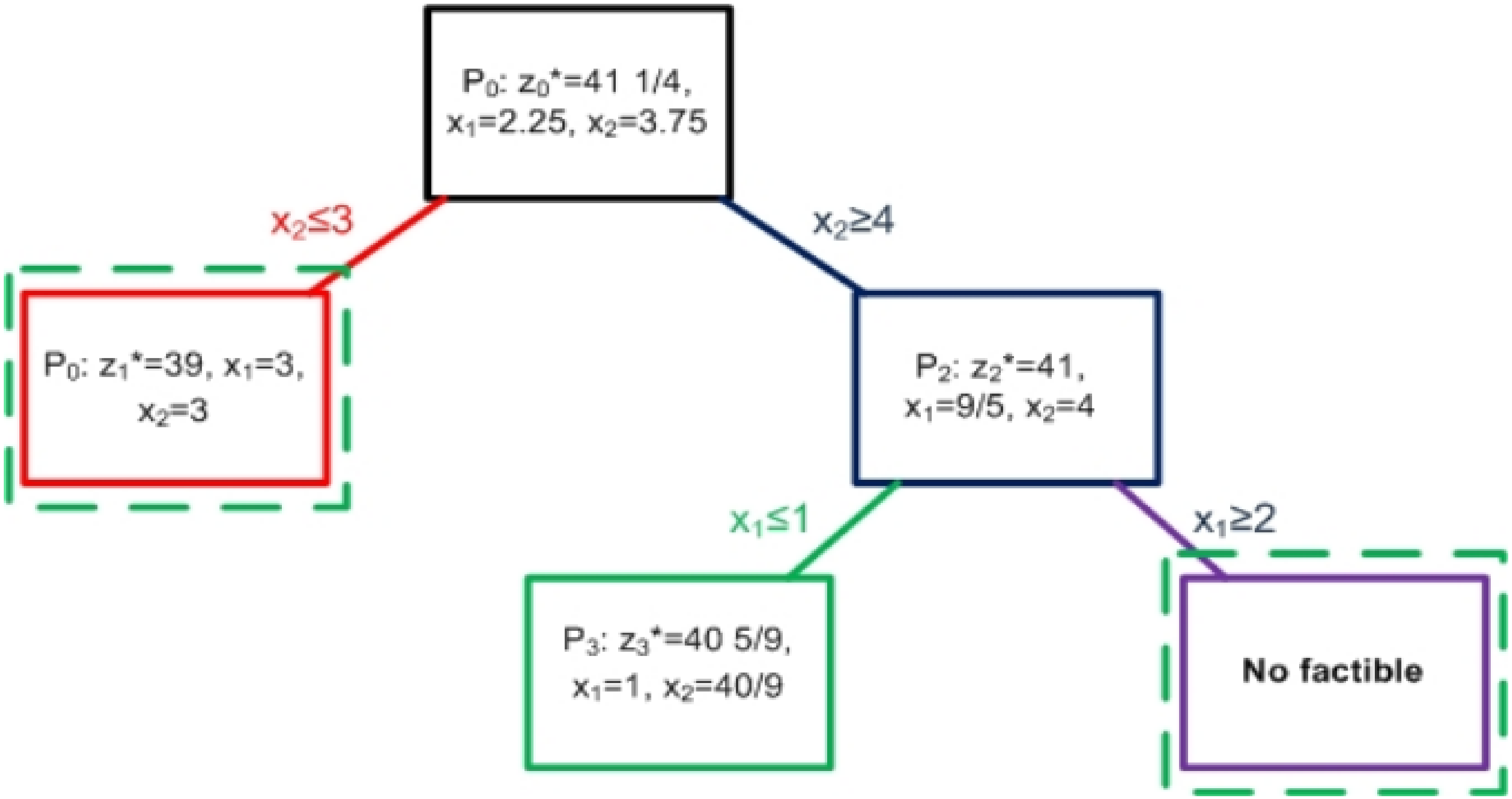
$$P_3: \max z = \{5x_1 + 8x_2 : x_1 + x_2 \leq 6, 5x_1 + 9x_2 \leq 45, x_2 \geq 4, x_1 \geq 2, x_1, x_2 \geq 0\}$$

y su solución es

No- Factible.

Debido a que esta solución no es entera, generamos nuevas ramas.

Resolución de las ramas P3 y P4



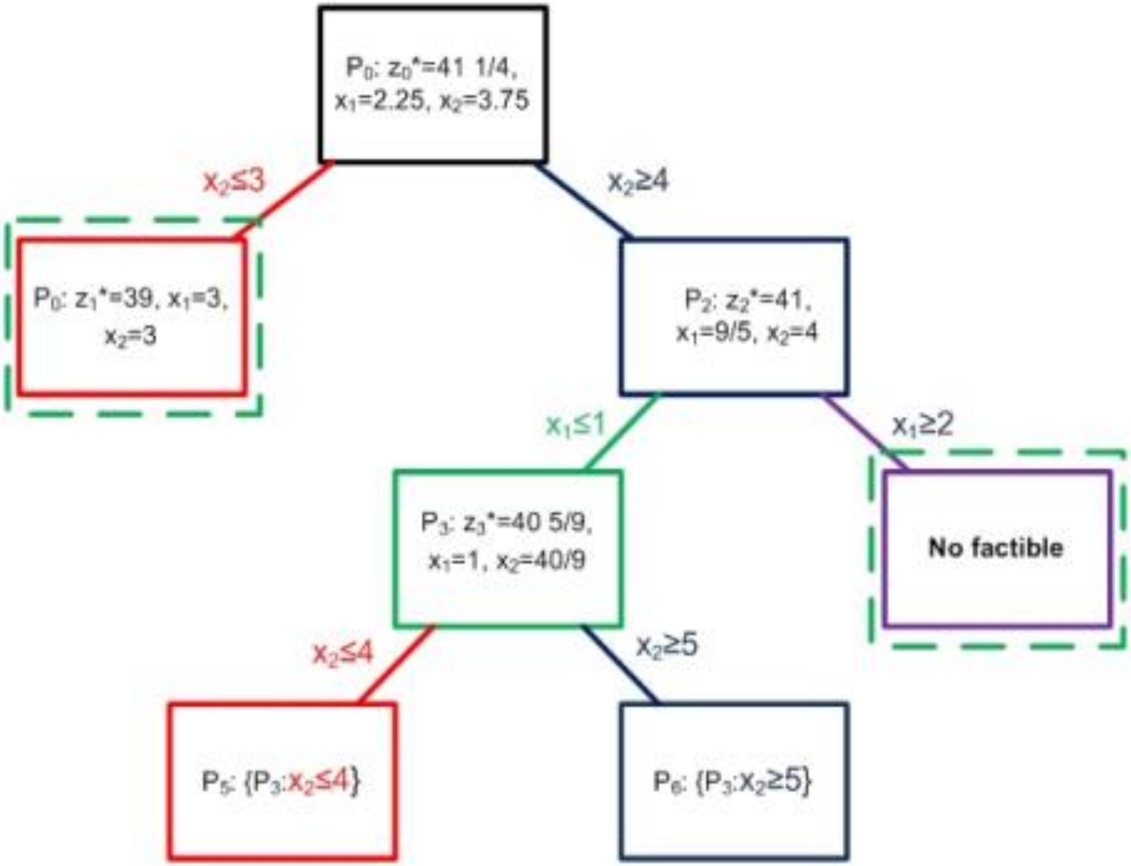
Definición de las ramas P5 y P6

- Al resolver P3 tenemos que

$$z_2^* = 40\frac{5}{9},\ x_1 = 1,\ x_2 = \frac{40}{9}.$$

- Para generar los nuevos subproblemas (P5 y P6) tomaremos la variable x2, una rama incluye la restricción $x_2 \leq \left\| \frac{40}{9} \right\| \leq 4$ y la otra rama incluye la restricción $x_2 \geq \left\| \frac{40}{9} \right\| + 1 \geq 5$

Definición de las ramas P5 y P6



Resolución de las ramas P5 y P6

- El Problema P5 se define por

$$P_5:\ \max z = \{5x_1 + 8x_2 : x_1 + x_2 \leq 6, 5x_1 + 9x_2 \leq 45, x_2 \geq 4, x_1 \leq 1, x_2 \leq 4, x_1,\ x_2 \geq 0\}$$

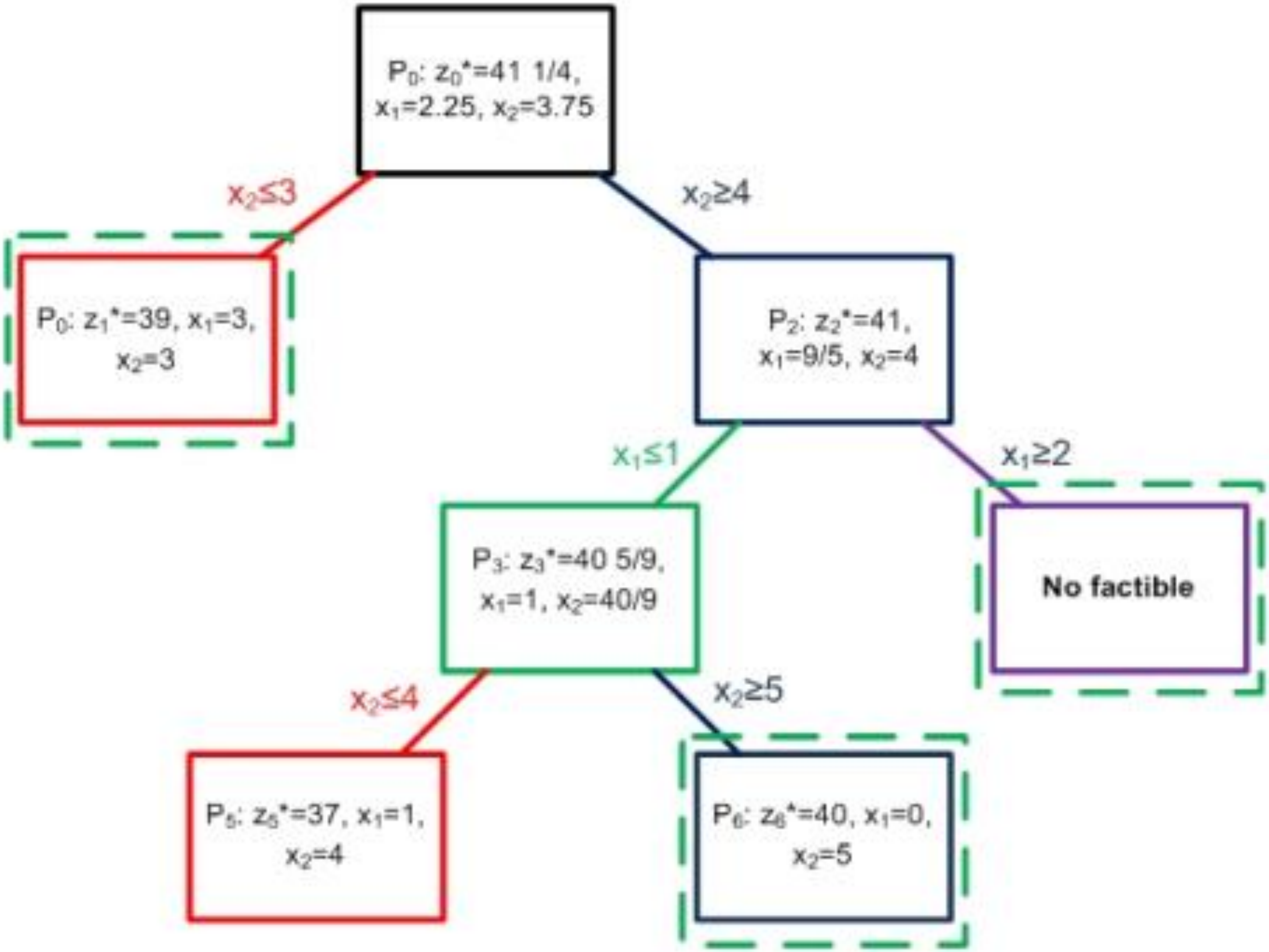
y su solución es $z_5^* = 37,\ x_1 = 1,\ x_2 = 4$ .Esta es una solución entera pero no es mejor que $z_1^* = 39,$, por lo que no pasa a ser una solución de apoyo.

- El problema P6 se define por:

$$P_5:\ \max z = \{5x_1 + 8x_2 : x_1 + x_2 \leq 6, 5x_1 + 9x_2 \leq 45, x_2 \geq 4, x_1 \leq 1, x_2 \leq 4, x_2 \geq 5, x_1,\ x_2 \geq 0\}$$

y su solución es $z_6^* = 40,\ x_1 = 0,\ x_2 = 5$. Debido a que esta es una solución entera y mejor que $z_1^* = 39,$, para a ser la nueva solución de apoyo.

Resolución de las ramas P5 y P6



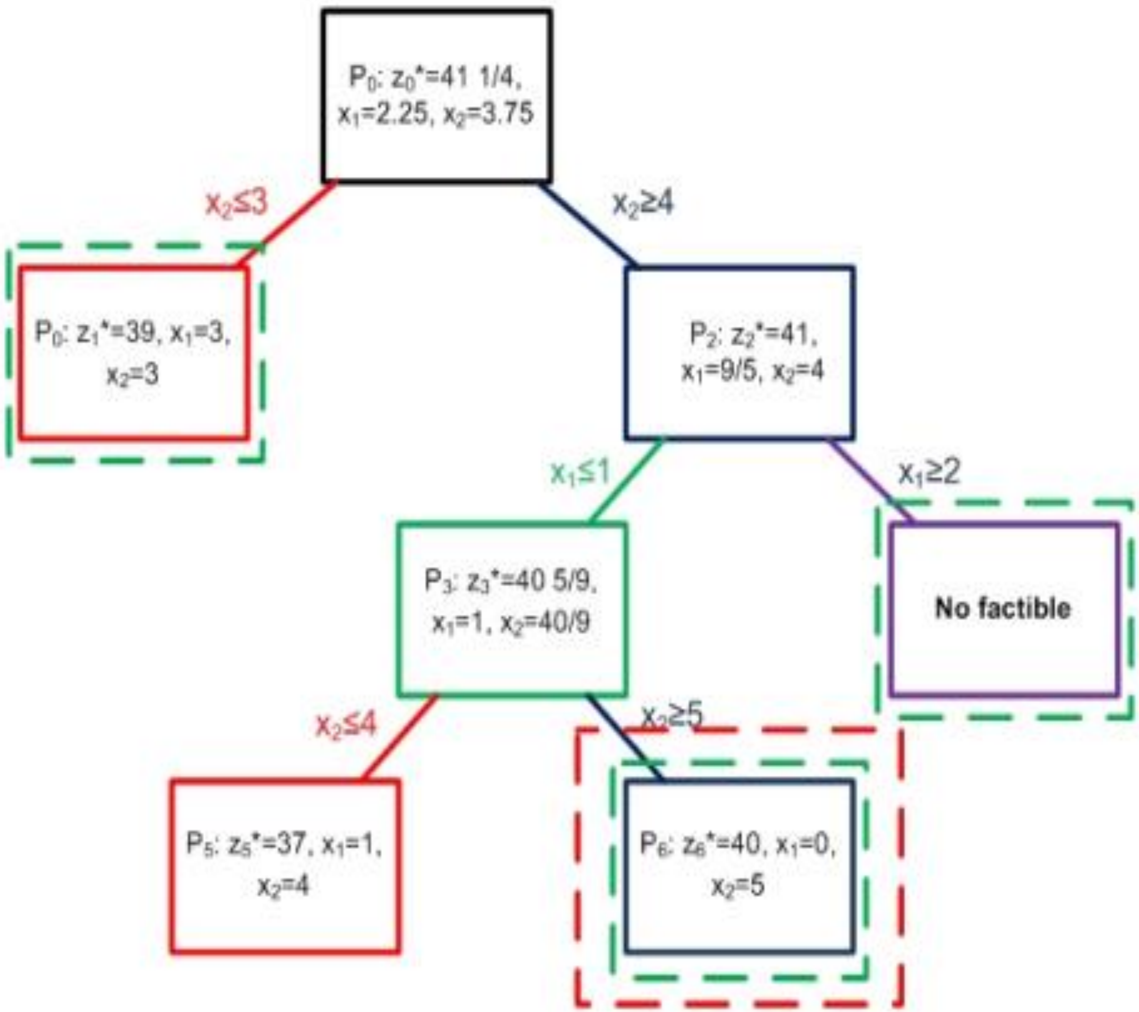
Definición de nuevas ramas

- Debido a que hemos obtenido una solución de apoyo y no podemos seguir generando ramas, entonces esta solución de apoyo es la solución optima.

- Es decir la solución optima al problema original de P.E. es

$$z^* = 40,\ x_1^* = 0 \text{ y } x_2^* = 5.$$

Solución final



Criterios Para Cerrar Un Nodo

- Si la solución del subproblema tiene variables enteras.
- Si el problema no tiene solución (problema no factible)
- Si el valor optimo es menor (mayor) que el Z * apoyo encontrado hasta esa iteración en un problema de maximización (minimización)

Definición del Problema de P.E Binario

- Consideremos el siguiente problema de P.E. (Binaria)

$$
\begin{aligned}
\max z = & \quad 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 \\
\text{subject to} & \\
6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 & \leq 10 \\
x_3 + x_4 & \leq 1 \\
-x_1 + x_3 & \leq 0 \\
-x_2 + x_4 & \leq 0 \\
x_i & \in \{0, 1\} \forall i
\end{aligned}
$$

Definición del problema de RL(PE) =P0

- La relajación lineal del problema anterior esta dado por.

$$
\begin{aligned}
\max z = \quad & 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 \\
\text{subject to} \quad & \\
6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq \quad & 10 \\
x_3 + x_4 \leq \quad & 1 \\
-x_1 + x_3 \leq \quad & 0 \\
-x_2 + x_4 \leq \quad & 0 \\
x_i \in \quad & [0,1] \forall i
\end{aligned}
$$

Definición de los Problemas P1 y P2

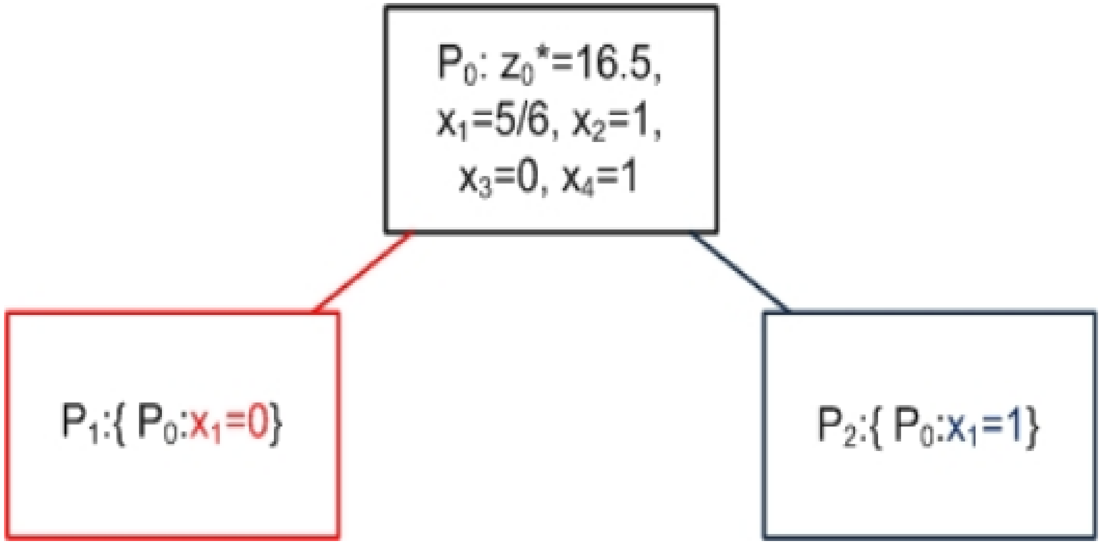
- Al resolver P0 tenemos que

$$z_0^* = 16.5, x_1 = \frac{5}{6}, x_2 = 1, x_3 = 0 \; y \; x_4 = 1$$

- Para generar las ramas P1 y P2 tomemos la variable x1, una rama incluirá la restricción $x_1 \leq 0$ y la otra $x_1 \geq 1$

- Sin embargo, puesto que $0 \leq x_1 \leq 1$ entonces lo que en realidad se define que en P1, $x_1 = 0$; y en P2, $x_1 = 1$.

Definición de los Problemas P1 y P2



Resolución de las primeras ramas P1 y P2

- El problema P1 se define por:

$$P_1 : \{P_0 : x_1 = 0\}$$

y su solución es $z_1^* = 9,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0$ y $x_4 = 1$. Debido a que esta es una solución entera, para a ser una solución de apoyo.

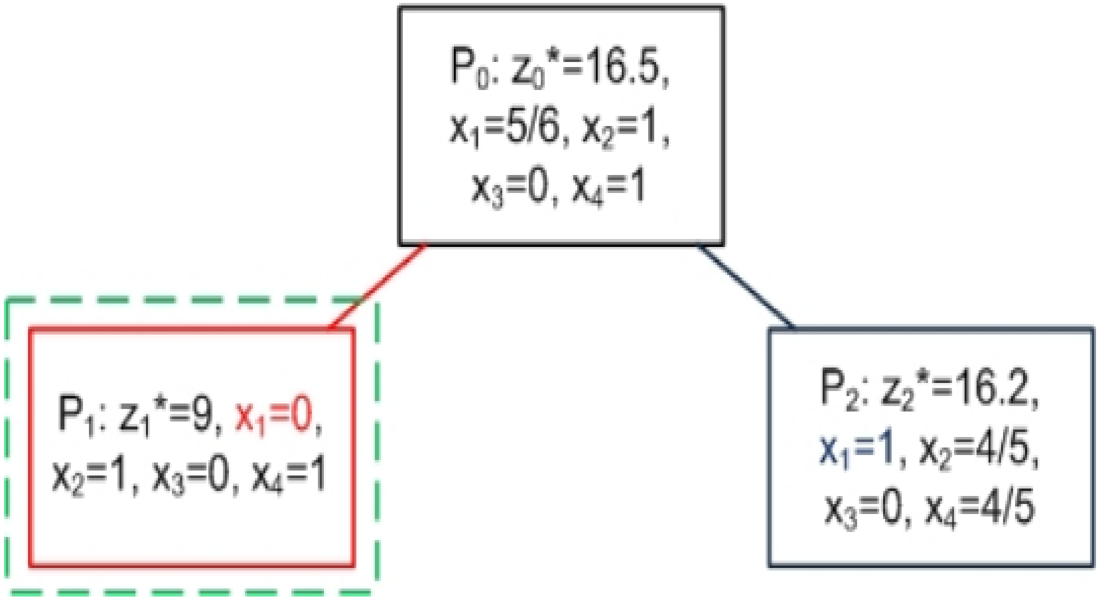
- El problema P2 se define por:

$$P_2 : \{P_0 : x_1 = 1\}$$

y su solución es $z_2^* = 16.2,\ x_1 = 0,\ x_2 = \frac{4}{5},\ x_3 = 0$ y $x_4 = \frac{4}{5}$. Debido a que esta solución no es entera, generamos nuevas ramas.

- Sabemos que el valor óptimo cumple con $z_{PE}^* \in [9, 16.2]$.

Resolución de las primeras ramas P1 y P2



Definición de las ramas P3 y P4

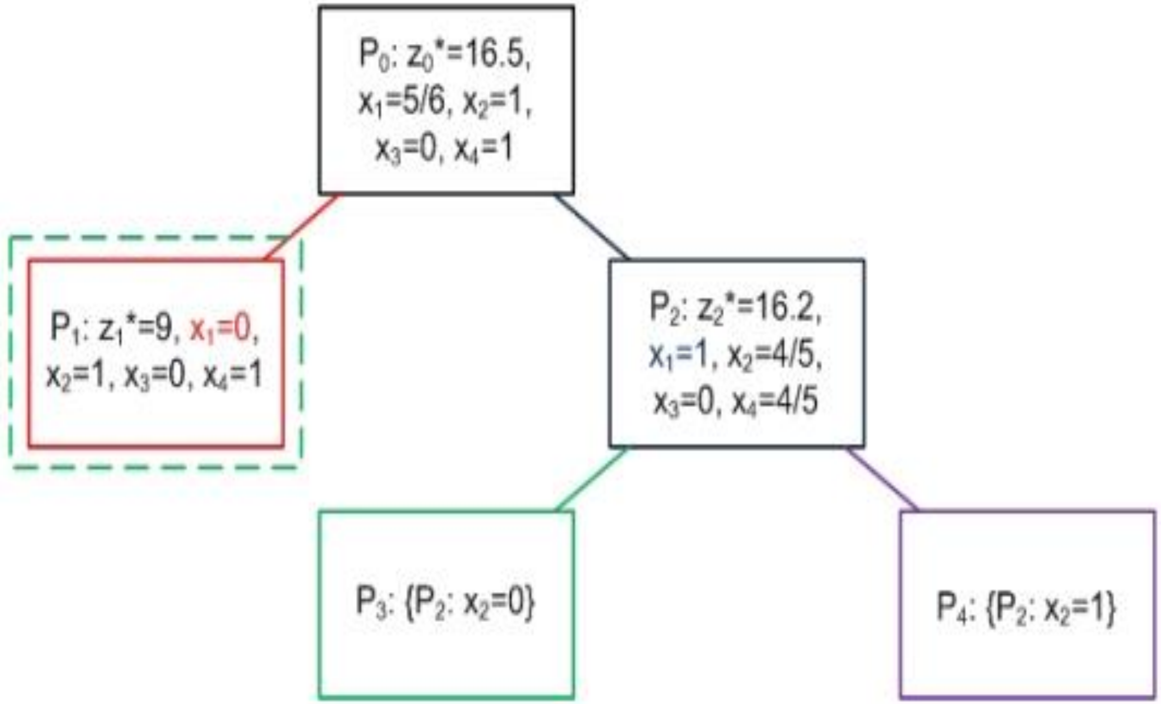
- Al resolver P2 tenemos que

$$z_2^* = 16.2, x_1 = 0\ x_2 = \frac{4}{5}, x_3 = 0\ y\ x_4 = \frac{4}{5}$$

- Para generar los nuevos subproblemas (P3 y P4) tomaremos la variable x2, una rama incluye la restricción $x_2 \leq \|0.8\| \leq 0$ y la otra incluye la restricción $x_2 \geq \|0.8\| + 1 \geq 1$.

- Sin embargo, puesto que $0 \leq x_2 \leq 1$ entonces lo que en realidad se define que en P3: $x_2 = 0$; y en P4; $x_2 = 1$

Definición de las Ramas P3 y P4



Resolución de las Ramas P3 y P4

- El problema P3 se define por:

$$P_3 : \{P_2 : x_2 = 0\}$$

y una solución es $z_3^* = 13\frac{4}{5} = 13.8,\ x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = \frac{4}{5}$ y $x_4 = 0$. Debido a que esta es una solución no entera, podemos generar ramas.

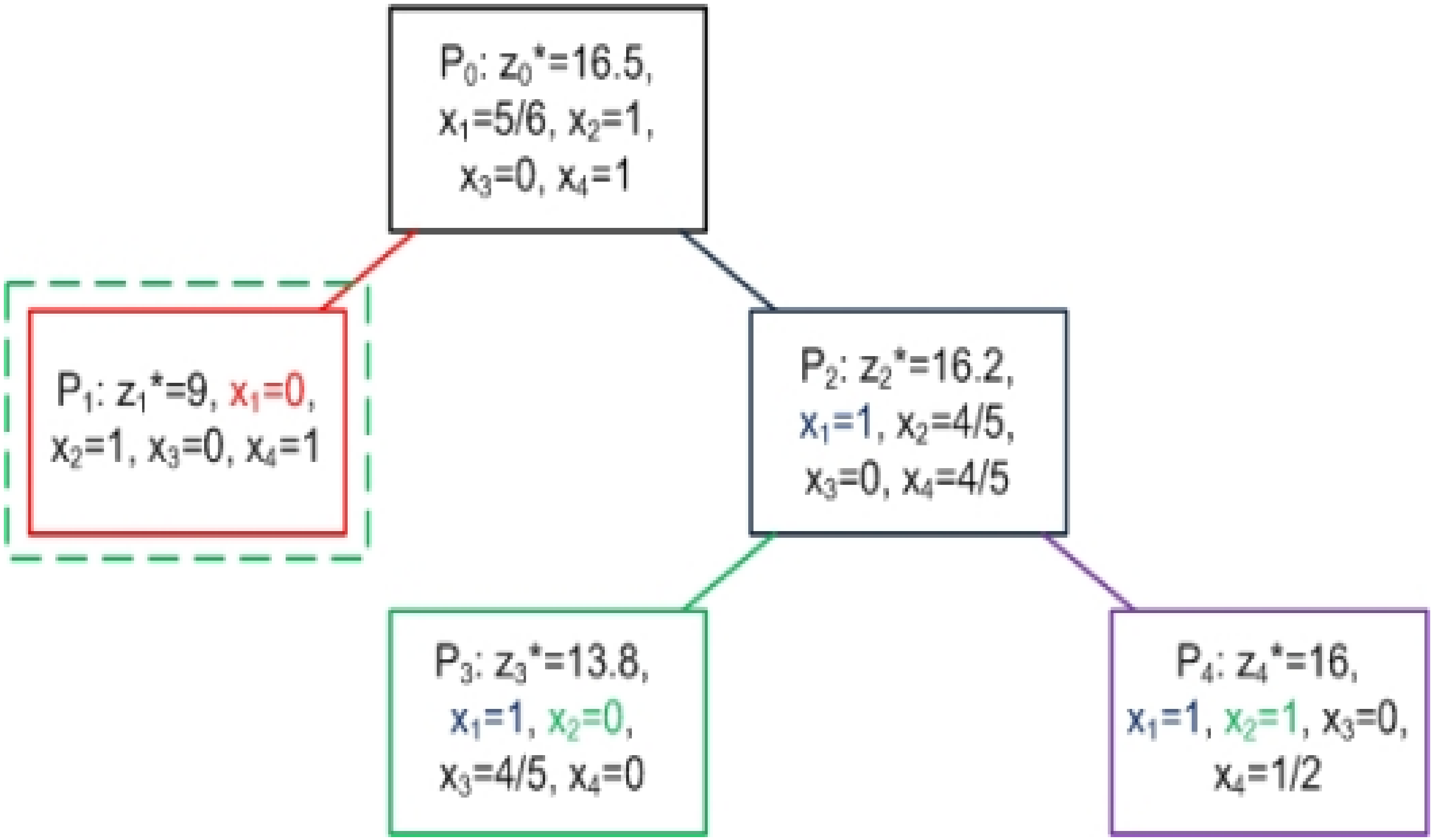
- El problema P4 se define por:

$$P_4 : \{P_2 : x_2 = 1\}$$

y su solución es $z_2^* = 16,\ x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0$ y $x_4 = 0.5$. Debido a que esta solución no es entera, pero, generamos nuevas ramas. Como Z4 es mayor que Z3, entonces ramificaremos desde esta problema.

- Sabemos que el valor optimo cumple con $z_{PE}^* \in [9, 16]$

Resolución de las ramas P3 y P4



Definición de las ramas P5 y P6

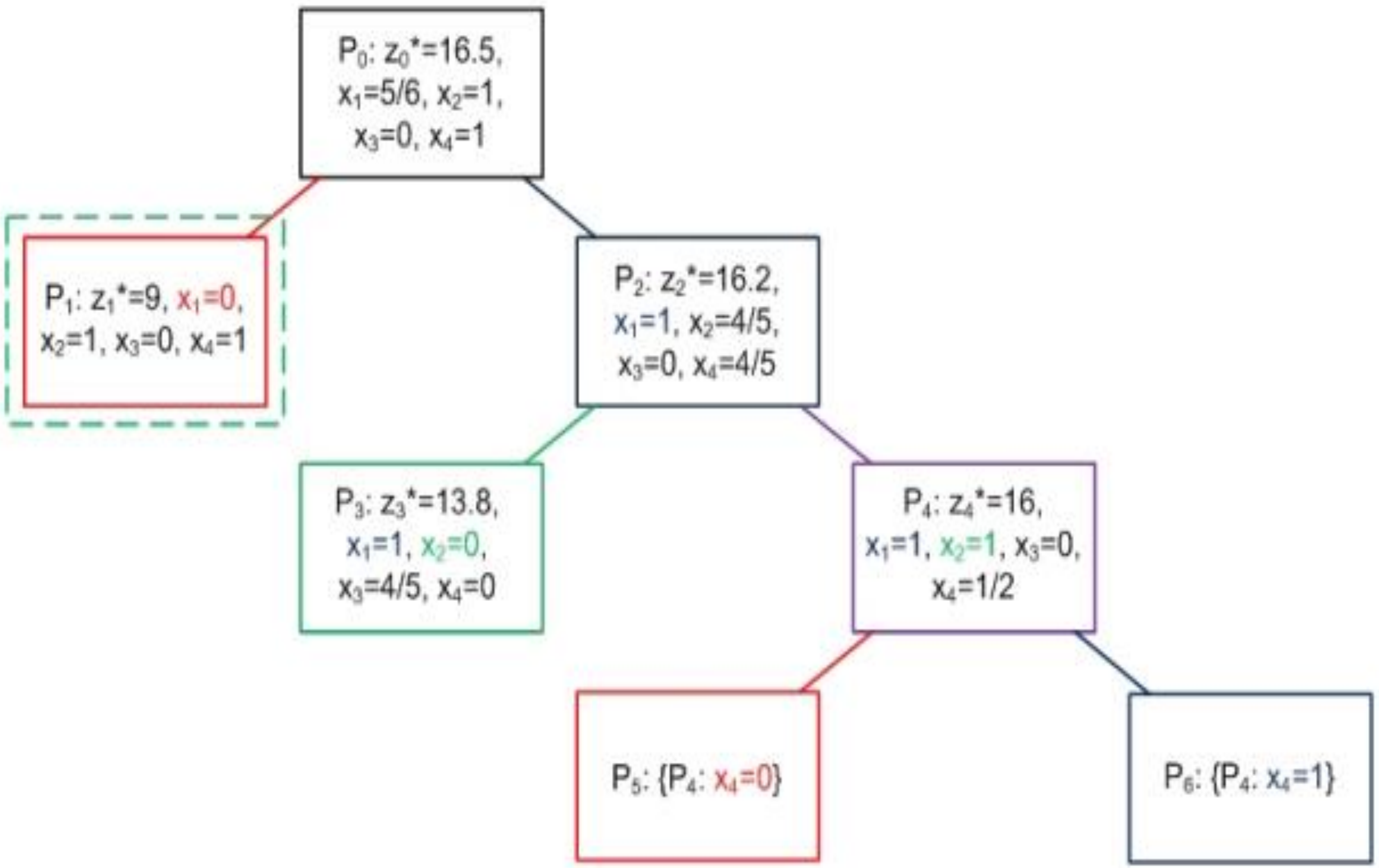
- Al resolver P4 tenemos que

$$z_4^* = 16,\ x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0 \text{ y } x_4 = \frac{1}{2}.$$

- Para generar los nuevos subproblemas (P5 y P6) tomaremos la variable x4, una rama incluye la restricción $x_2 \leq \|0.5\| \leq 0$ y la otra rama incluye la restricción $x_2 \geq \|0.5\| + 1 \geq 1$

- Sin embargo, puesto que $0 \leq x_4 \leq 1$ entonces lo que en realidad se define que en P5, $x_4 = 0;$ y en P6 $x_4 = 1.$

Definición de las Ramas P5 y P6



Resolución de las ramas P5 y P6

- El problema P5 se define por:

$$P_5 : \{P_4 : x_4 = 0\}$$

y su solución es $z_5^* = 15\frac{1}{5} = 13.8,\ x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = \frac{1}{5}$ y $x_4 = 0.$ .Debido a que esta es una solución no entera, podemos generar ramas.

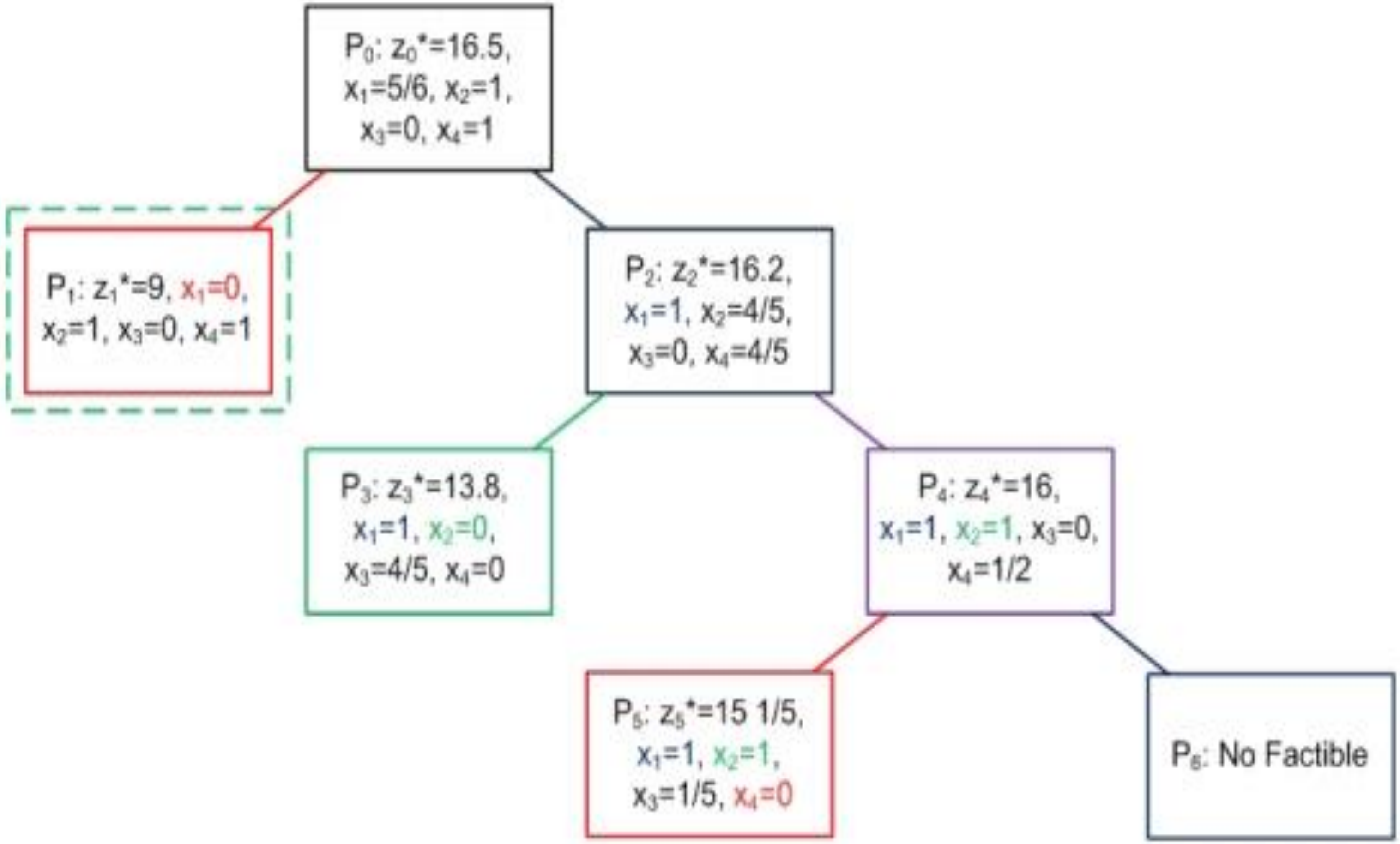
- El problema P6 se define por:

$$P_6 : \{P_4 : x_4 = 1\}$$

y es NO FACTIBLE, por lo que se cierra ese nodo de búsqueda.

- Sabemos que el valor optimo cumple con $z_{PE}^* \in \left[9, 15\frac{1}{5}\right]$.

Resolución de las ramas P5 y P6



Definición de las ramas P5 y P6

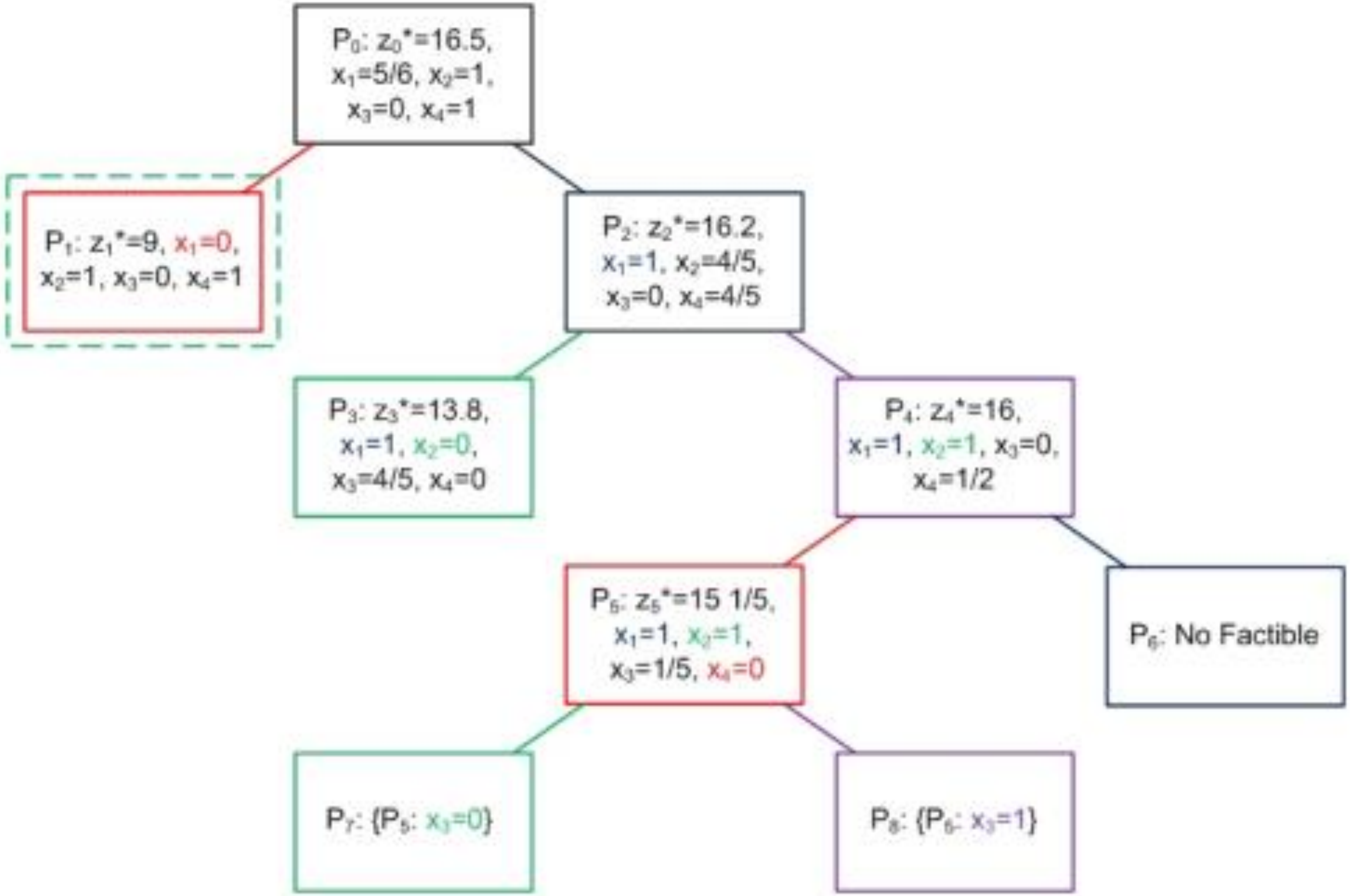
- Al resolver P5 tenemos que

$$z_5^* = 15\frac{1}{5},\ x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = \frac{1}{5} \text{ y } x_4 = 0.$$

- Para generar los nuevos subproblemas (P7 y P8) tomaremos la variable x3, una rama incluye la restricción $x_3 \leq \left\|\frac{1}{5}\right\| \leq 0$ y la otra rama incluye la restricción $x_3 \geq \left\|\frac{1}{5}\right\| + 1 \geq 1$

- Sin embargo, puesto que $0 \leq x_3 \leq 1$ entonces lo que en realidad se define que en P7, $x_3 = 0;$ y en P8 $x_3 = 1.$

Definición de las ramas P7 y P8



Resolución de las ramas P7 y P8

- El problema P7 se define por

$$P_7 : \{P_5 : x_3 = 0\}$$

y su solución es $z_7^* = 14,\ x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0 \text{ y } x_4 = 0.$. Debido a que esta es una solución entera y $z_7^* = 14 \geq z_{apoyo}$, entonces esta pasa a ser nuestra solución de apoyo.

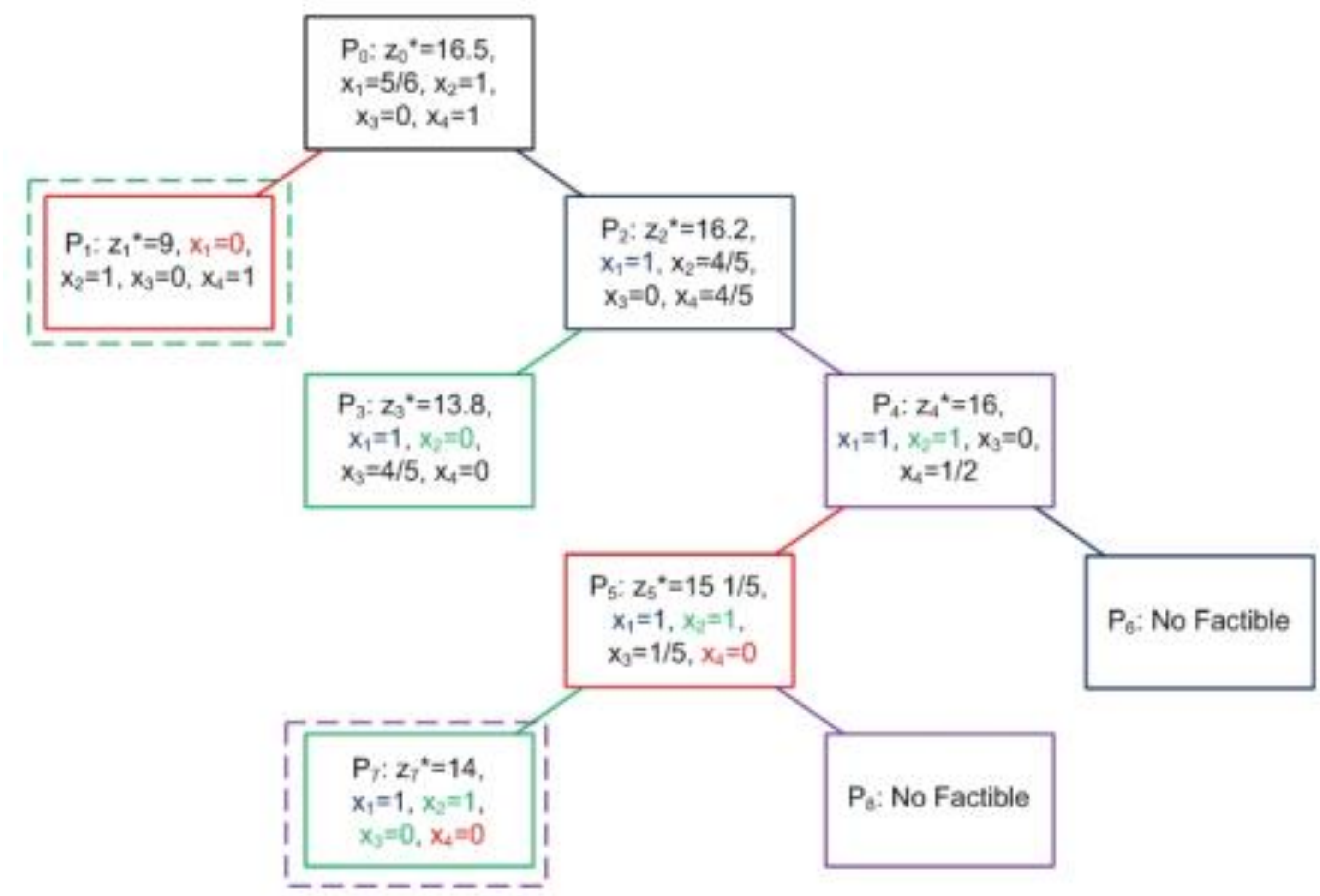
- El problema P8 se define por

$$P_8 : \{P_5 : x_3 = 1\}$$

y es NO FACTIBLE, por lo que se cierra ese nodo de búsqueda.

- Sabemos que el valor optimo cumple con $z_{PE}^* \in [9, 14]$.

Resolución de las ramas P7 y P8

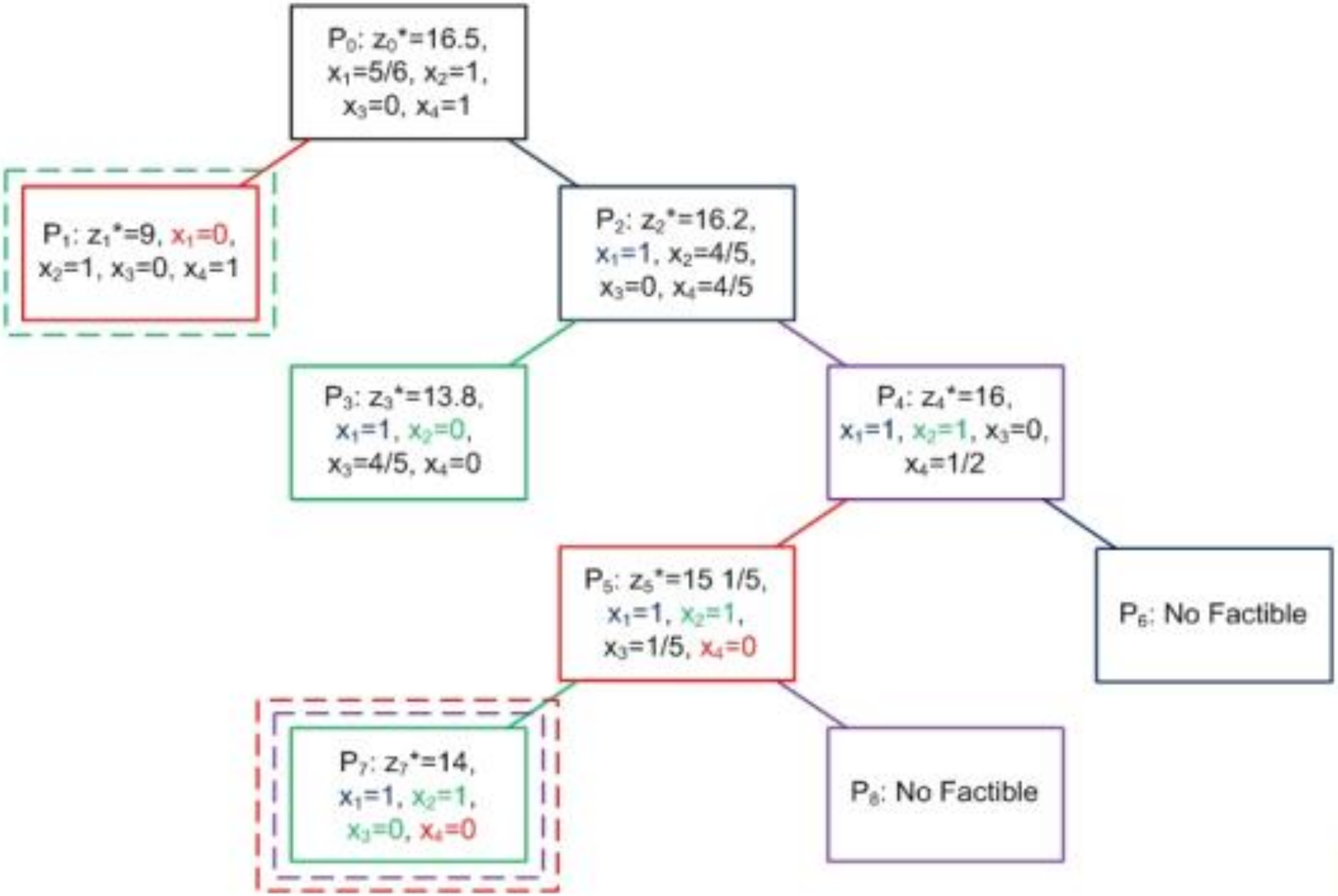


Definición de mas ramas

- Solo se podría generar ramas a partir de P3, sin embargo $z_3 \leq z_{apoyo}$ y dado que se trata de un problema de maximización, es posible que encontremos una mejor solución a partir de este nodo.

- Por lo tanto, hemos resuelto el problema tal que la solución optima esta dada por la solución del nodo P7.

Solución Optima



Ejercicio Ramificación y Acotamiento

Max Z= 3x1 + 4x2

Sujeto a

2x1 + x2<=6

2x1 + 3x2<=9

x1, x2 Enteros

SOLUCION MEDIANTE SIMPLEX TRADICIONAL:

Z= 51/4

X1= 9/4

X2= 3/2