Clase 2

Contenidos

- Ecuaciones lineales y homogéneas de Orden n

1 Primeros métodos para Ecuaciones Homogéneas

1.1 Reducción de Orden

Por lo que vimos la clase anterior, las ecuaciones lineales y homogéneas de segundo orden admiten dos soluciones linealmente independientes. Si conocemos una, es natural preguntarse si podemos encontrar la otra. La respuesta es afirmativa, y procedemos como sigue:

Comenzando por la ecuación diferencial lineal y homogénea de segundo orden

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

dividamos la ecuación por $a_2(x)$ para obtener una forma estándar:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{1}$$

Supongamos que $y_1(x)$ es una solución conocida de esta ecuación, con $y_1(x) \neq 0$, $\forall x \in I$, y definamos $y = uy_1$. Entonces, $y' = u'y_1 + uy_1'$, $\quad y'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$, y por lo tanto (**??**) se transforma en

$$\begin{aligned} u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' + P(x)(u'y_1 + uy_1') + Q(x)uy_1 &= 0 \\ u\underbrace{(y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1)}_{=0} + u''y_1 + u'(2y_1' + P(x)y_1) &= 0 \\ u''y_1 + u'(2y_1' + P(x)y_1) &= 0 \end{aligned}$$

Finalmente, tras definir $w = u'$, la última ecuación se traduce a $w'y_1 + w(2y_1' + P(x)y_1) = 0$, que es una ecuación lineal de primer orden, por lo que se resuelve con las técnicas de la unidad anterior.

Ejemplo: Se sabe que $y_1 = x^2$ es una solución de la ecuación diferencial $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$. Utilice el método de reducción de orden para determinar la solución general para el intervalo $I =]0, \infty[$.

Solución: Lo primero es reescribir la ecuación diferencial a

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0$$

Definiendo $y = u \cdot x^2$, y seguir las líneas precedentes, llegamos a la ecuación

$$\begin{aligned} w'y_1 + w(2y_1' + P(x)y_1) &= 0 \\ w'x^2 + w\left(4x - \frac{3}{x}x^2\right) &= 0 \\ w'x^2 + wx &= 0 \end{aligned}$$

que desarrollamos como en la unidad anterior. Dividimos por x^2:

$$w'x^2 + wx = 0 \implies w' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{p(x)} w = 0$$

y el factor integrante es $\mu(x) = e^{\int p(x)\ dx} = e^{\int \frac{1}{x}\ dx} = e^{\ln|x|} = x\ (x > 0)$, por lo que después de multiplicar por $\mu(x)$ obtenemos

$$xw' + w = 0 \implies (xw)' = 0 \implies xw = C \implies w = \frac{C}{x}$$

Como $w = \dfrac{C}{x}$, obtenemos $u = C\ln(x)$, por lo que $y = x^2\ln(x)$ es la otra solución. Finalmente, la solución general es

$$y = c_1x^2 + c_2x^2\ln(x)$$

Ejercicio: Se sabe que $y = e^x$ es solución de la ecuación $y'' - 2y' + y = 0$. Utilice el método de reducción de orden para determinar la solución general sobre $\mathbb{R}$.

Ejercicio: Se sabe que $y = xe^x$ es solución de la ecuación $y'' - 2y' + y = 0$. ¿Qué debería ocurrir al usar el método de reducción de orden? Compruebe.

1.2 Ecuaciones Lineales y Homogéneas con coeficientes constantes

Si consideramos una ecuación lineal y homogénea de segundo orden en la cual todos los $a_i(x)$ son funciones constantes, es decir,

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{2}$$

hay una función que, por su naturaleza, traduce la ecuación diferencial en una algebraica. Nos referimos a la función exponencial, e^x, ya que tiene la particularidad que $y'' = y' = y$. Es evidente que e^x no resuelve todas las ecuaciones del tipo (**??**), pero sí nos da una dirección a seguir. La función e^{mx} satisface $y'' = m^2y,\ y' = my$, por lo que traduce la ecuación diferencial anterior a una ecuación algebraica:

$$am^2y + bmy + cy = 0 \implies y(am^2 + bm + c) = 0$$

$$\implies am^2 + bm + c = 0.$$

Esta ecuación cuadrática nos da los valores de m que satisfacen la ecuación,

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

y en definitiva, las funciones e^{mx} que resuelven la ecuación diferencial.

Recordamos las tres posibilidades para las soluciones:

1. **Raíces Reales Distintas:** Cuando $b^2 - 4ac > 0$, las raíces de la ecuación cuadrática asociada son reales y distintas. Estos valores m_1, m_2 nos dicen que la ecuación general será de la forma

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}$$

2. **Raíces Reales Repetidas:** Cuando $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación cuadrática tiene una raíz real repetida m_1 (es decir, se forma un cuadrado de binomio $(m - m_1)^2$). Este valor m_1 nos dice que una de las funciones resuelve la ecuación es $y = e^{m_1 x}$. La otra se puede encontrar por el método de Reducción de orden, y es simplemente $y = xe^{m_1 x}$, de modo que la solución general es ahora
$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x}$$

3. **Raíces Complejas:** Cuando $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación cuarática tiene dos raíces complejas conjugadas $m_1 = \alpha + \beta i,\ m_2 = \alpha - \beta i$. En este caso, la solución general es de la forma
$$y = c_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + c_2 e^{(\alpha-\beta i)x}$$
y, recordando la **Fórmula de Euler** $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$, no es difícil llegar a que la solución general será en este caso
$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x))$$

Ejemplos:

1. Resolver $2y'' - 5y' - 3y = 0$
2. Resolver $y'' - 10y' + 25y = 0$
3. Resolver $y'' - 4y' - 7y = 0$

1.2.1 Orden superior a 2

Si trabajamos en ecuaciones lineales y homogéneas de orden superior a 2, con la sustitución $y = e^{mx}$ obtendremos un polinomio de grado mayor que 2. Recordemos que, si trabajamos sobre los complejos, un polinomio se puede escribir como
$$p(x) = (x - a_1)^{m_1}(x - a_2)^{m_2} \dots (x - a_k)^{m_k},$$
donde los a_i son las **raíces** del polinomio, y los m_i sus **multiplicidades** respectivas. Para las soluciones de las ecuaciones diferenciales, cada raíz tiene asociada su estructura de solución asociada, e^{mx}, y las multiplicidades estarán asociadas a la multiplicación por potencias de x. Por ejemplo, si la raíz tiene multiplicidad 2, la solución general era $(c_1 x + c_2)e^{mx}$. Si la raíz es de multiplicidad 3, digamos $(x - m)^3$ entones la solución será de la forma $(c_2 x^2 + c_1 x + c_0)e^{mx}$, y así sucesivamente.

Ejemplo: Determine la solución de la ecuación diferencial $y''' + 3y'' - 4y = 0$.

Solución: El polinomio asociado a la sustitución $y = e^{mx}$ es $p(m) = m^3 + 3m^2 - 4$. Debemos buscar sus raíces, por lo que intentaremos primero con las posibles raíces racionales, que son $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$:
$$\begin{aligned}
&p(1) = 0 \longrightarrow m = 1 \text{ es raíz}\\
&p(-1) = -2 \neq 0 \longrightarrow m = -1 \text{ no es raíz}\\
&p(2) = 16 \neq 0 \longrightarrow m = 2 \text{ no es raíz}\\
&p(-2) = 0 \longrightarrow m = -2 \text{ es raíz}\\
&p(4) \neq 0 \longrightarrow m = 4 \text{ no es raíz}\\
&p(-4) \neq 0 \longrightarrow m = -4 \text{ no es raíz}
\end{aligned}$$

Clase 2

Hemos descubierto 2 raíces (de 3 posibles). La raíz restante se puede obtener por diversos métodos (división larga, Regla de Ruffini, etc), y se deduce que es $m = -2$. Esto quiere decir que el polinomio se puede descomponer como $p(m) = (m-1)(m+2)^2$, y tenemos entonces las soluciones:

$$\begin{aligned} m &= 1, \text{ multiplicidad } = 1 \longrightarrow c_1 e^x \\ m &= -2, \text{ multiplicidad } = 2 \longrightarrow (c_2 x + c_3)e^{-2x} \end{aligned}$$

y en consecuencia, la solución general de la ecuación general es

$$y = c_1 e^x + (c_2 x + c_3)e^{-2x}$$

Ejercicio: Resuelva la ecuación diferencial $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.