Investigación de Operaciones. Clase 3: Programación Matemática – Solución Gráfica

Profesor Wladimir Soto

UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL MAULE

Programación Matemática

Programación Matemática

Tipo mas común de aplicación:

Asignar recursos escasos a actividades

Programación $\neq$ Programación Matemática

Programación = Planeación

PLANEACIÓN DE LAS ACTIVIDADES

Modelo Estándar de Programación Matemática

$$\text{Maximizar / Minimizar} \quad z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\text{Sujeto a} \quad g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \begin{Bmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{Bmatrix} \quad b_i \quad i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

Componentes del Modelo

- x_j son llamadas *variables de decisión*. Estas son las variables que se controlan.
- $$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \begin{Bmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{Bmatrix} b_i$$

  son las *restricciones funcionales o tecnológicas*.
- $x_j \geq 0$ corresponden a las *restricciones de no negatividad*.
- $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es la *función objetivo*.

UNIVERSIDAD CATOLICA DEL MAULE

Factibilidad y Optimalidad

- Una *solución factible* **x** es aquella que satisface todas las restricciones (las tecnológicas y de no negatividad).
- El conjunto de todas las soluciones factibles es denominado *región factible*.
- La función objetivo permite obtener una ordenación de las soluciones factibles.
- Una *solución óptima* es una solución factible que conduce al valor más favorable de la función objetivo.

Factibilidad y Optimalidad

- El mejor valor de la función objetivo que es obtenido se denomina *valor óptimo*.
- Por lo tanto, el propósito de un problema de programación matemática es determinar las soluciones factibles que maximizan (o minimizan) la función objetivo, es decir, encontrar la solución factible que genere el *mejor valor de z*.

Introducción a la Programación Lineal

Programación Lineal

Un problema de programación lineal es un caso especial de programación matemática, donde *f* y $g_1, \ldots, g_m$ son funciones **lineales**.

$$\text{Maximizar/Minimizar} \quad z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

$$\text{Sujeto a} \quad a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{in} x_n \begin{Bmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{Bmatrix} b_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

Construcción de un Modelo Matemático (4)

Ejemplo
Wyndor Glass
Corporation

Maximizar $z = 3x_1 + 5x_2$

Sujeto a:

$$x_1 \leq 4$$
$$2x_2 \leq 12$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Max/Min} \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{Sujeto a} \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \begin{Bmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{Bmatrix} b_i \, , \; i = 1,\ldots,m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,\ldots,n$$

UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL MAULE

Supuestos de un Problema de Programación Lineal

(i) proporcionalidad

(ii) aditividad

(iii) divisibilidad

(iv) certidumbre

→ **linealidad**

Supuesto 1: Proporcionalidad

- La contribución de cada actividad al valor de la función objetivo es proporcional al aporte de xj
- Por lo tanto, no se consideran economías de escalas ni costos iniciales de implantación de cada actividad.

Supuesto 2: Aditividad

- No existe interacción entre las actividades, tanto en la función objetivo como en las restricciones.
- Por lo tanto, el valor total de cada función se puede obtener sumando las contribuciones individuales de las actividades respectivas.

Supuesto 3: Divisibilidad

- Las unidades de cada actividad se pueden dividir en cualquier nivel fraccional, permitiendo valores no enteros en las variables de decisión.

Supuesto 4: Certidumbre

- Todos los parámetros del modelo son constantes conocidas, es decir, no se incorpora la naturaleza probabilística de los parámetros.
- Una alternativa para superar esta limitación es realizar un análisis de sensibilidad o post-óptimo.

El problema de la industria de juguetes.

Galaxia produce dos tipos de juguetes:

- Camiones
- Muñecas

Los recursos están limitados a:

- 1200 Kg de plástico especial.
- 40 horas de producción semanalmente.

El problema de la industria de juguetes.

Requerimientos de Marketing.

- La producción total no puede exceder de 800 docenas.
- El número de docenas de Camiones no puede exceder al número de muñecas por más de 450.

El problema de la industria de juguetes.

Requerimientos Tecnológicos.

- Los camiones requiere 2 kilos de plástico y 3 minutos de producción por docena.
- Las muñecas requiere 1 kilo de plástico y 4 minutos de producción por docena.

El problema de la industria de juguetes.

¿Como lo hacen actualmente ?

- Fabricar la mayor cantidad del producto que deje mejores ganancias, el cual corresponde a Camiones (US$8 de utilidad por docena).
- Usar la menor cantidad de recursos para producir Muñecas, porque estos dejan una menor utilidad (US$5 de utilidad por docena).

El problema de la industria de juguetes.

El plan común de producción consiste en:

Camiones = 550 docenas

Muñecas = 100 docenas

Utilidad = US$ 4900 por semana

El gerente busca determinar cuantas docenas debe producir de cada producto para **maximizar** las ganancias de la compañía.

El problema de la industria de juguetes

Solución:

Variables de decisión

X_1 = Cantidad producida de Camiones (en docenas por semana).

X_2 = Cantidad producida de Muñecas (en docenas por semana).

Función objetivo

- Maximizar la ganancia semanal.

El problema de la industria de juguetes

Max $8X_1 + 5X_2$ (Ganancia semanal)

Sujeto a:

$2X_1 + 1X_2 <= 1200$ (Cantidad de plástico)

$3X_1 + 4X_2 <= 2400$ (Tiempo de producción)

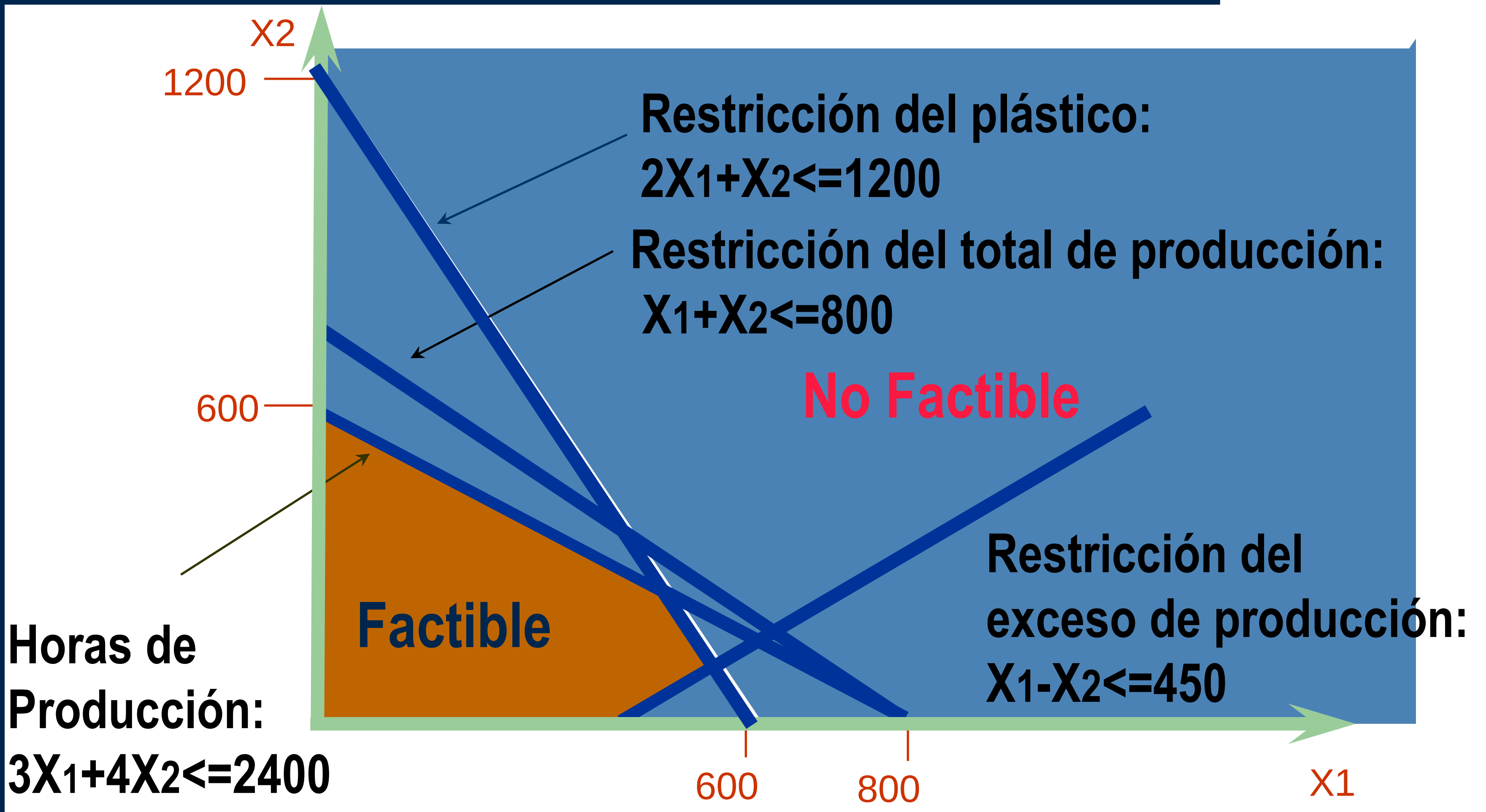
$X_1 + X_2 <= 800$ (Limite producción total)

$X_1 - X_2 <= 450$ (Producción en exceso)

$X_1 >= 0$ (No Negatividad)

$X_2 >= 0$

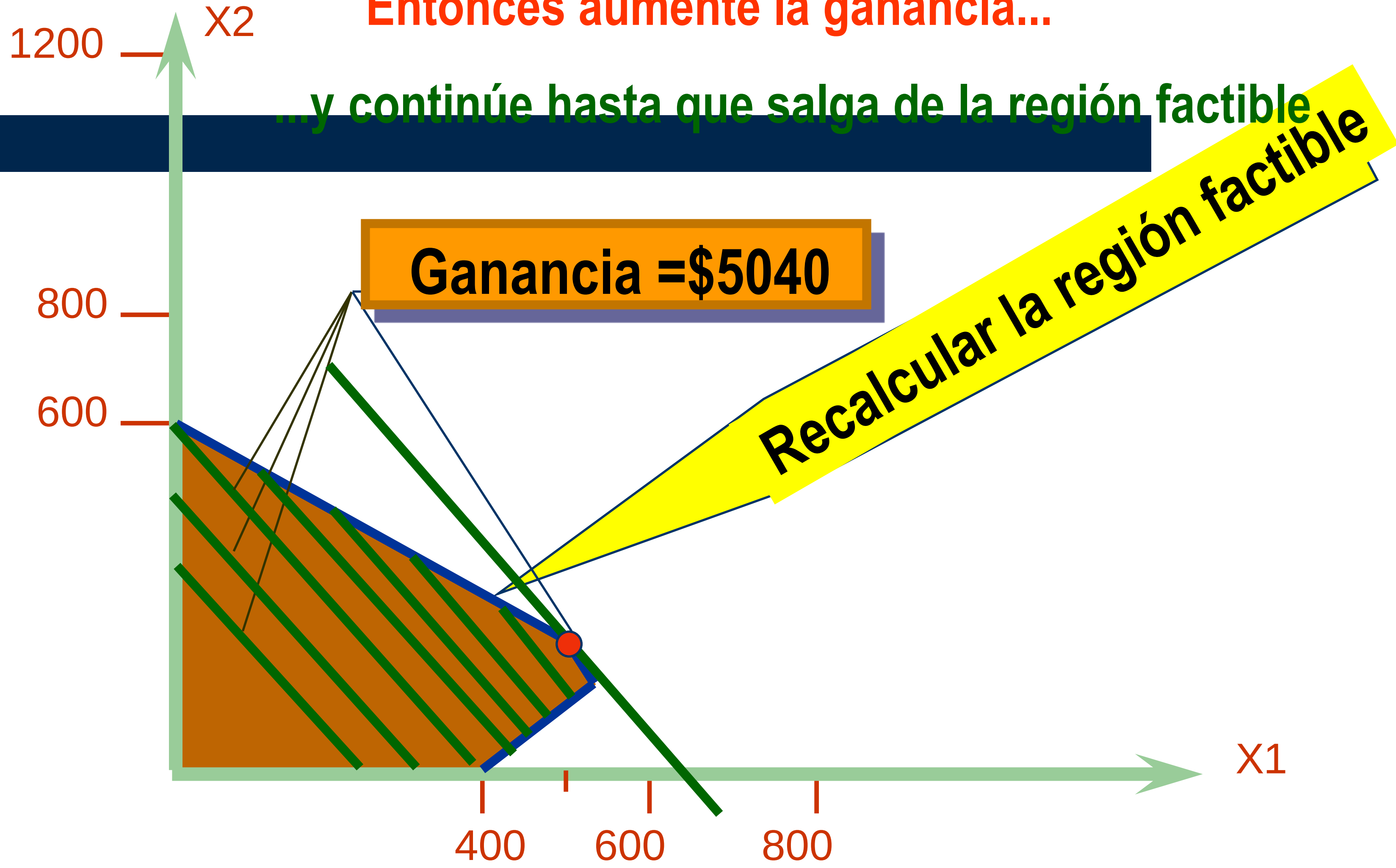
El problema de la industria de juguetes (Solución Gráfica)



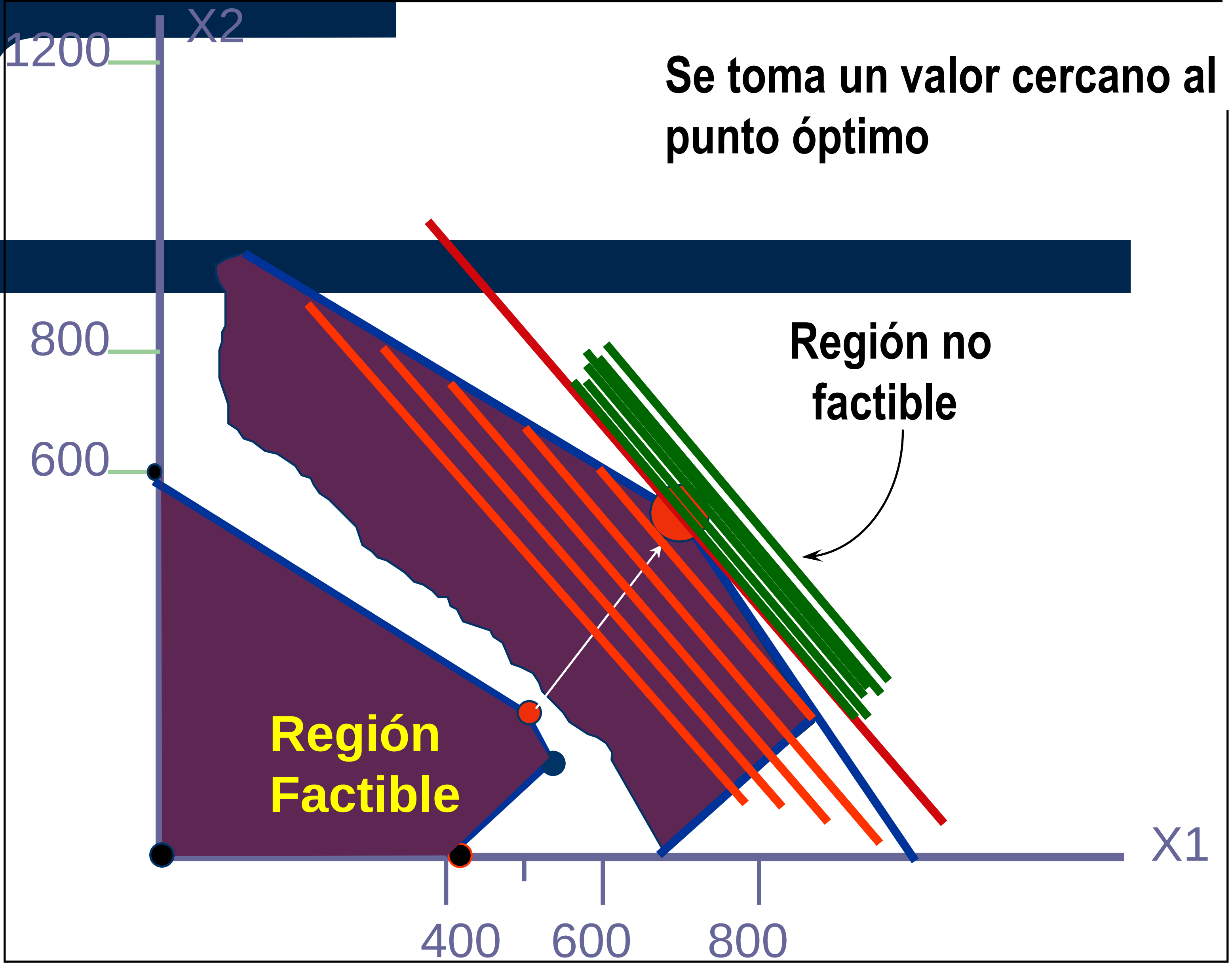
comenzar con una ganancia dada de = $2,000...

Entonces aumente la ganancia...

...y continúe hasta que salga de la región factible



Se toma un valor cercano al punto óptimo



Resumen de la solución óptima

Space Rays = 480 docenas
Zappers = 240 docenas
Ganancia = $5040

* Esta solución utiliza todas las materias primas (plástico) y todas las horas de producción.
* La producción total son 720 docenas (no 800).
* La producción de Space Rays excede a la de Zappers por solo 240 docenas y no por 450.

Solución Gráfica de Problemas de Programación Lineal

- Cuando en un problema de programación lineal existen **sólo dos variables de decisión** es posible realizar un procedimiento de solución a través de un análisis gráfico (sólo existen dos dimensiones).

Ejercicio en Clases

- Ejercicio N°1, Guía de Ejercicios N°1

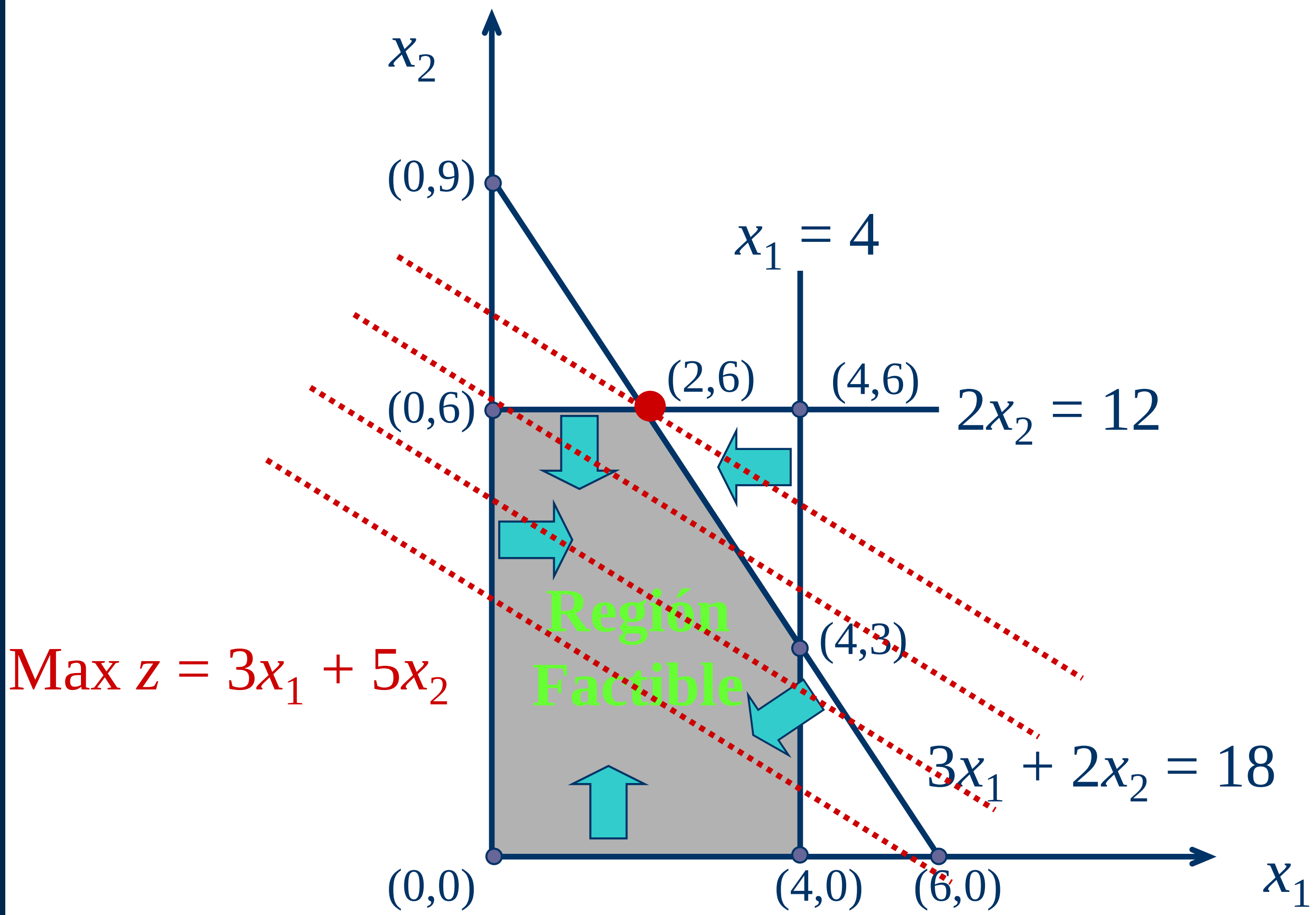
Ejercicio en Clases

Desarrollo Ejercicio

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\begin{array}{llcl} \text{s. a.} & x_1 & \leq & 4 \\ & 2x_2 & \leq & 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 & \leq & 18 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

Análisis Gráfico
Ejemplo de Wyndor Glass Co.



Resultado del Análisis Gráfico
Ejemplo de Wyndor Glass Co.

- La ***solución óptima*** es $x_1 = 2$ puertas por minuto, $x_2 = 6$ ventanas por minuto.
- El ***valor óptimo*** es $z = \$36$ por minuto.

Ejemplo Prototipo 2: Caravanas de Marco Polo Inc.

Se debe transportar higo seco de Bagdad a la Meca en camellos (dos jorobas) y dromedarios (una joroba).

Restricciones	Por cada animal		Límite
	Dromedarios	Camellos	
Carga (kg.)	500	1.000	10.000 (mínimo)
Heno (fardos)	4	3	60 (máximo)
Agua (litros)	80	100	1.600 (máximo)
Arriendo (pazuzas)	$5,0	$11,0	

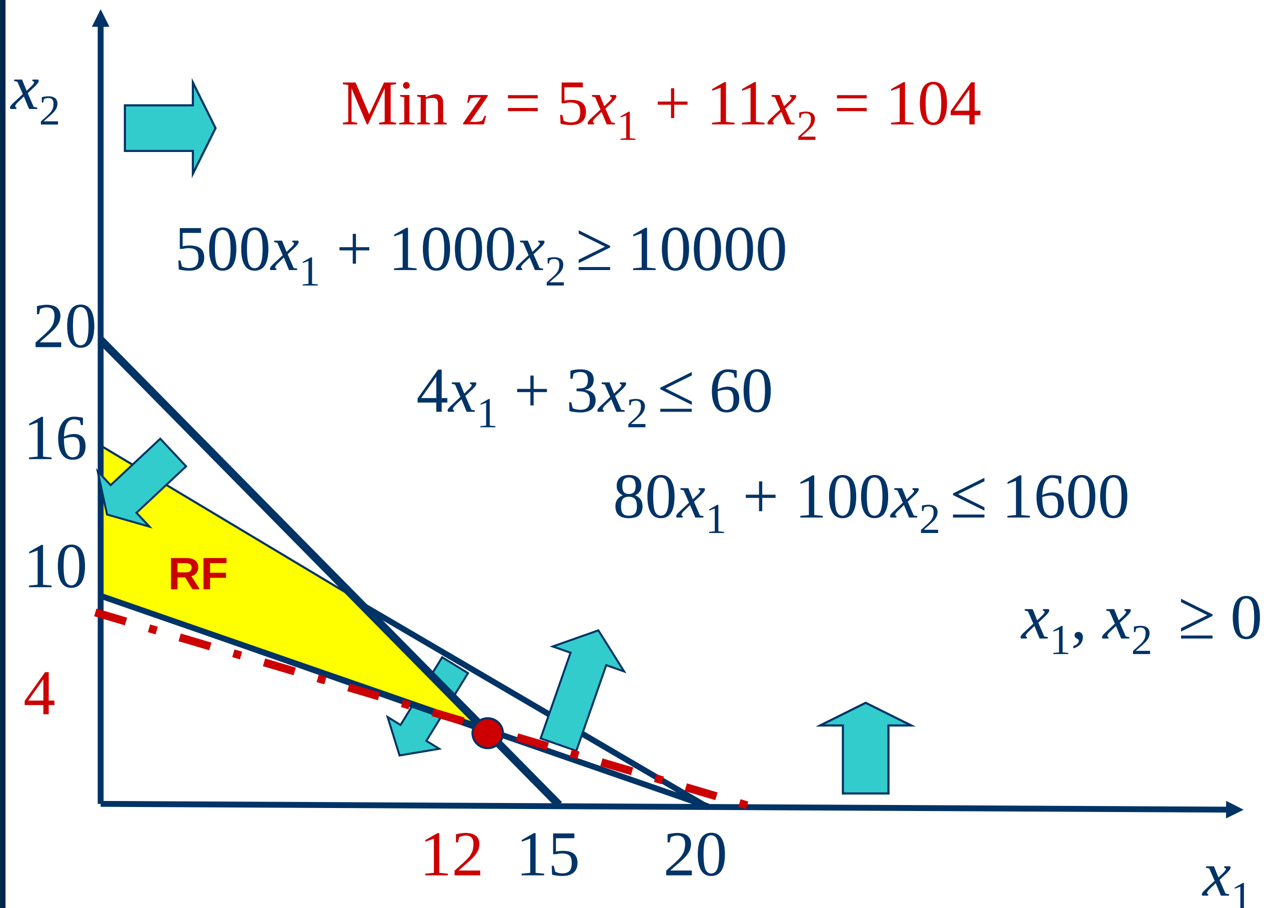
¿Cuántos camellos y dromedarios deben ser usados para minimizar el arriendo a pagar al pastor?

Formulación Matemática del Ejemplo Caravanas de Marco Polo Inc.

- El modelo de programación lineal es:

$$
\begin{array}{l}
\text{Minimizar } z = 5x_1 + 11x_2 \\
\text{s.a.} \\
\qquad 500x_1 + 1.000x_2 \geq 10.000 \\
\qquad 4x_1 + 3x_2 \leq 60 \\
\qquad 80x_1 + 100x_2 \leq 1.600 \\
\qquad x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Análisis Gráfico
Ejemplo Caravanas de Marco Polo Inc.



Resultado del Análisis Gráfico
Ejemplo Caravanas de Marco Polo Inc.

- La ***solución óptima*** es arrendar $x_1 = 12$ dromedarios y $x_2 = 4$ camellos.
- El ***valor óptimo*** es $z = 104$ pazuzas.

Procedimiento para la Solución Gráfica (1)

- Paso 1: Identificar los valores permitidos para x_1 y x_2
  a) Convertir la desigualdad en igualdad y trazar la recta que representa la ecuación.
  b) Elegir cualquier punto de prueba que no esté sobre la recta trazada. Se sugiere usar el punto (0, 0).
  c) Sustituir el punto de prueba en la expresión del lado izquierdo de la desigualdad.

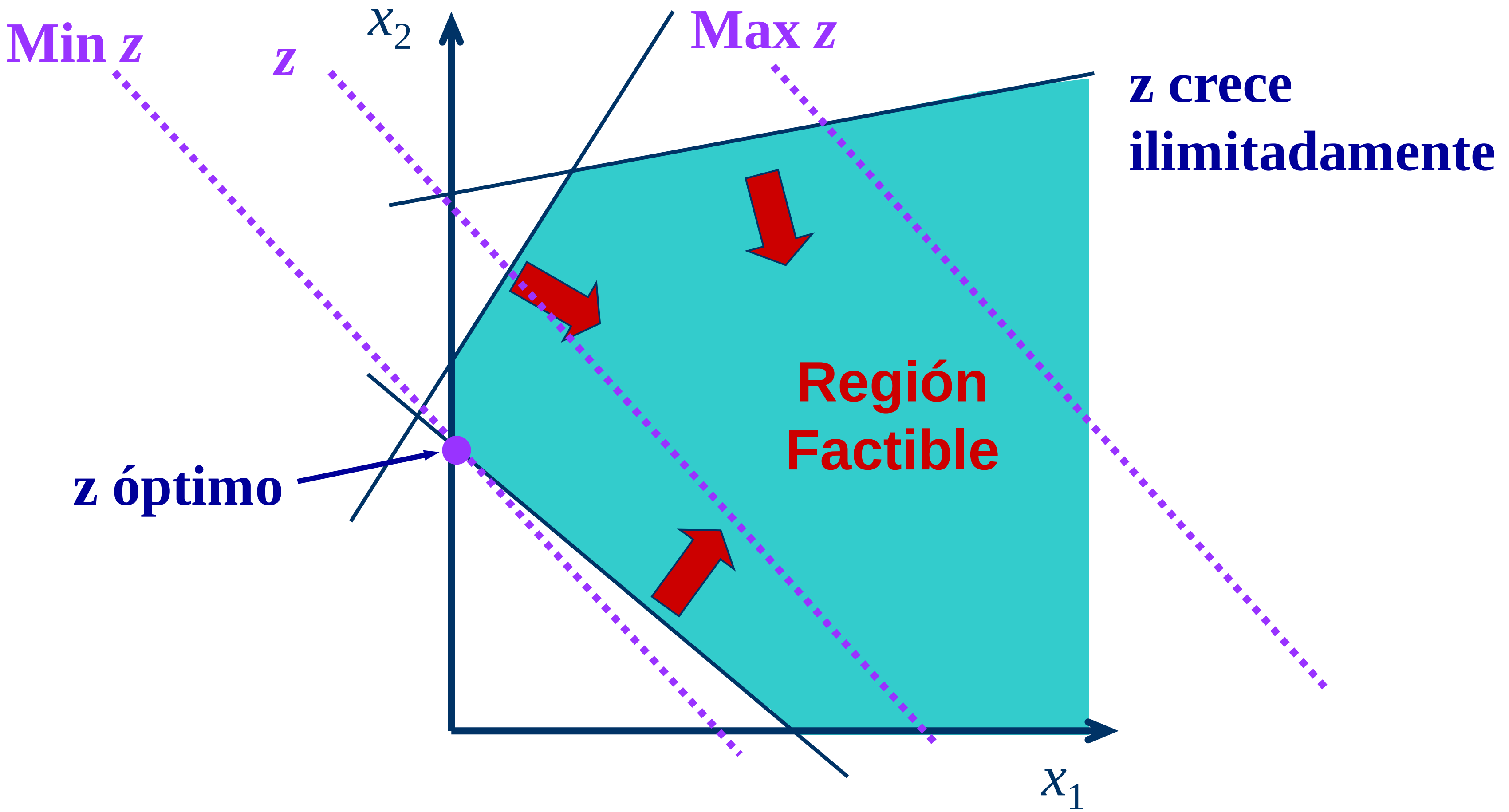
Procedimiento para la Solución Gráfica (2)

- Si el punto de prueba satisface la desigualdad original, entonces la recta trazada en el paso (a) y todos los puntos que están al mismo lado que el punto de prueba satisfacen la desigualdad.
- En el caso contrario, la recta trazada en el paso (a) y todos los puntos que no están al mismo lado que el punto de prueba satisfacen la desigualdad.

Procedimiento para la Solución Gráfica (3)

- Paso 2: Las funciones objetivos forman una familia de rectas paralelas. Se debe crear una recta y desplazarla hasta encontrar el valor óptimo.

Regiones Factibles No Acotadas



Lecturas Control N°1 – Lunes 28 de Septiembre a las 18:00 hrs.

- Clases.

- Texto Guía (***Winston, Investigación de Operaciones***):

Capítulos 1, 2 y secciones 3.1 y 3.2, del Capítulo 3.

Investigación de Operaciones. Clase 3: Programación Matemática – Solución Gráfica

Profesor Wladimir Soto