Clase 5 - Unidad 2

Contenidos

- Variación de parámetros.

Consideremos la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x) = g(x)$$

la cual puede ser escrita de la forma

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x).$$

Para determinar una solución particular buscamos una solución de la forma

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

donde y_1 e y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones en un intervalo I de la ecuación diferencial homogenea asociada. Usando la regla del producto para derivar y_p dos veces, obtenemos

$$\begin{aligned}
y_p' &= u_1y_1' + y_1u_1' + u_2y_2' + y_2u_2' \\
y_p'' &= u_1y_1'' + y_1'u_1' + y_1'u_1'' + u_1'y_1 + u_2y_2'' + y_2'u_2' + y_2u_2'' + u_2'y_2'.
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial y agrupando se obtiene

$$\begin{aligned}
y_p'' + P(x)y_p' =& u_1(y_1'' + Py_1' + Qy_1) + u_2(y_2'' + Py_2' + Qy_2) + y_1u_1'' + u_1'y_1' \\
&+ y_2u_2'' + u_2'y_2' + P(y_1u_1' + y_2u_2') + y_1'u_1' + y_2'u_2' \\
=& \frac{d}{d_1}(y_1u_1') + \frac{d}{dx}(y_2u_2') + P(y_1u_1' + y_2u_2') + y_1'u_1' + y_2'u_2' \\
=& \frac{d}{dx}(y_1u_1' + y_2u_2') + P(y_1u_1' + y_2u_2') + y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x).
\end{aligned}$$

Como buscamos determinar dos funciones desconocidas u_1 y u_2, necesitamos dos ecuaciones. Debido a lo anterior, se puede asumir que las funciones satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned}
y_1u_1' + y_2u_2' &= 0 \\
y_1'u_1' + y_2'u_2' &= f(x)
\end{aligned}$$

Por la regla de Cramer, la solución del sistema puede ser expresada en términos de determinantes:

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = -\frac{y_2f(x)}{W} \qquad \text{y} \qquad u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{y_1f(x)}{W}, \tag{1}$$

donde

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2 \end{vmatrix}, \qquad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}, \qquad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}. \tag{2}$$

De esta manera las funciones u_1 y u_2 se obtienen por integrar los resultados obtenidos en (1). El determinante W es el Wronskiano de y_1 e y_2. Como y_1 e y_2 son linealmente independientes en I, sabemos que $W(y_1(x), y_2(x)) \neq 0$ para cada x en el intervalo.

1 Método de variación de parámetros para ecuaciones de segundo orden.

Resolveremos una ecuación lineal de la forma

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = g(x), \tag{3}$$

donde a_2, a_1 y a_0 son constantes.

1. Determinar la solución complementaria $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$ de la ecuación diferencial homogenea asociada:
$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$$
2. Calcular el Wronskiano $W(y_1(x), y_2(x))$.
3. Dividiendo en (3) por a_2, se obtiene una ecuación de la forma
$$y'' + Py' + Qy = f(x).$$
4. Determinar u_1 y u_2 por integrar
$$u_1' = \frac{W_1}{W} \qquad \text{y} \qquad u_2' = \frac{W_2}{W},$$
donde W, W_1, W_2 son definidos en (2).
5. Una solución particular es
$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$$
6. La solución general de la ecuación es
$$y = y_c + y_p$$

Ejemplo 1 *Resolver la ecuación diferencial*

$$y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}$$

utilizando el método de variación de parámetros.

Solución: De la ecuación auxiliar $m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2$ se obtiene

$$y_c = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}.$$

Considerando $y_1 = e^{2x}$ e $y_2 = xe^{2x}$, se obtiene el Wronskiano

$$W(e^{2x}, xe^{2x}) = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & 2xe^{2x} + e^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x}.$$

Como la ecuación diferencial ya tiene como término lider igual a 1, entonces se tiene que $f(x) = (x+1)e^{2x}$. Luego se tiene que

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^{2x} \\ (x+1)e^{2x} & 2xe^{2x} + e^{2x} \end{vmatrix} = -(x+1)xe^{4x}, \qquad W_2 = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & (x+1)e^{2x} \end{vmatrix} = (x+1)e^{4x}.$$

Luego se tiene que

$$u_1' = -\frac{(x+1)xe^{4x}}{e^{4x}} = -x^2 - x, \qquad u_2' = \frac{(x+1)e^{4x}}{e^{4x}} = x+1$$

Se sigue que

$$u_1 = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \qquad \text{y} \qquad u_2 = \frac{x^2}{2} + x.$$

Por lo tanto

$$y_p = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)e^{2x} + \left(\frac{x^2}{2} + x\right)xe^{2x} = \frac{x^3e^{2x}}{6} + \frac{x^2e^{2x}}{2}$$

y

$$y = y_c + y_p = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + \frac{x^3e^{2x}}{6} + \frac{x^2e^{2x}}{2}$$

Observación 1 *Al integrar las funciones u_1 y u_2 no es necesario agregar las constantes de integración. Esto es debido a que*

$$\begin{aligned} y = y_c + y_p &= c_1y_1 + c_2y_2 + (u_1 + a_1)y_1 + (u_2 + b_1)y_2 \\ &= (c_1 + a_1)y_1 + (c_2 + b_1)y_2 + u_1y_1 + u_2y_2 \\ &= C_1y_1 + C_2y_2 + u_1y_1 + u_2y_2. \end{aligned}$$

Ejemplo 2 *Resolver la ecuación diferencial*

$$y'' - y = \frac{1}{x}$$

Solución: La ecuación auxiliar $m^2 - 1$ tiene como soluciones $m_1 = -1$ y $m_2 = 1$. Por lo tanto

$$y_c = c_1e^x + c_2e^{-x}.$$

Se puede calcular que $W(e^x, e^{-x}) = -2$ y

$$u_1' = -\frac{e^{-x}(1/x)}{-2}, \qquad u_1 = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \frac{e^{-t}}{t}dt$$

$$u_2' = \frac{e^{x}(1/x)}{-2}, \qquad u_2 = -\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \frac{e^{t}}{t}dt$$

Como tales integrales no se pueden obtener de manera elemental, entonces se debe escribir

$$y_p = \frac{1}{2}e^x\int_{x_0}^{x} \frac{e^{-t}}{t}dt - \frac{1}{2}e^{-x}\int_{x_0}^{x} \frac{e^{t}}{t}dt$$

y por lo tanto

$$y = y_c + y_p = c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{1}{2}e^x\int_{x_0}^{x} \frac{e^{-t}}{t}dt - \frac{1}{2}e^{-x}\int_{x_0}^{x} \frac{e^{t}}{t}dt$$

Clase 5 - Unidad 2

1.1 Ecuaciones de grado superior.

El método para resolver una ecuación diferencial de segundo orden no-homogenea puede ser generalizado a ecuaciones diferenciales de orden n que puede ser escrita en la forma

$$y^{(n)} + P_{n-1}(x) + \cdots + P_1(x)y' + P_0(x)y = f(x).$$

Si $y_c = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$ es la función complementario de esta ecuación, entonces una solución particular es

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + \cdots + u_n(x)y_n(x),$$

donde las funciones $u_k', k = 1, 2, \ldots, n$ son determinados por las n ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} y_1u_1' + y_2u_2' + \cdots y_nu_n' &=& 0 \\ y_1'u_1' + y_2'u_2' + \cdots y_n'u_n' &=& 0 \\ \vdots && \vdots \\ y_1^{(n-1)}u_1' + y_2^{(n-1)}u_2' + \cdots y_n^{(n-1)}u_n' &=& f(x) \end{array}$$

En este caso, usando la regla de Cramer se obtiene

$$u_k' = \frac{W_k}{W}, k = 1, \ldots, n$$

donde W es el Wronskiano de $y_1, \ldots, y_n$ y W_k es el determinante obtenido por reemplazar la $k-$ésima columna del Wronskiano por la columna ordenada llenada de arriba hacia abajo por $(0, 0, \ldots, 0, f(x))$.
Ejemplo. Cuando $n = 3$, la solución particular

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3,$$

donde y_1, y_2, y_3 constituye un conjunto linealmente independiente de soluciones de la ecuación diferencial homogénea asociada y u_1, u_2, u_3 son determinados por

$$u_1' = \frac{W_1}{W}, \qquad u_2' = \frac{W_2}{W}, \qquad u_3' = \frac{W_3}{W},$$

con

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 & y_3 \\ 0 & y_2' & y_3' \\ f(x) & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 & y_3 \\ y_1' & 0 & y_3' \\ y_1'' & f(x) & y_3'' \end{vmatrix}, \quad W_3 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ y_1' & y_2' & 0 \\ y_1'' & y_2'' & f(x) \end{vmatrix}, \quad W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$$