# Estructuras Discretas INF-313

Sergio Hernández, Mónica Acevedo
shernandez@ucm.cl, macevedo@ucm.cl

Facultad de Ciencias de la Ingeniería

UNIVERSIDAD CATOLICA DEL MAULE

# Introducción

- Dado dos grafos $G$ y $G'$ nos interesa saber si son iguales (isomorfos).

# Introducción

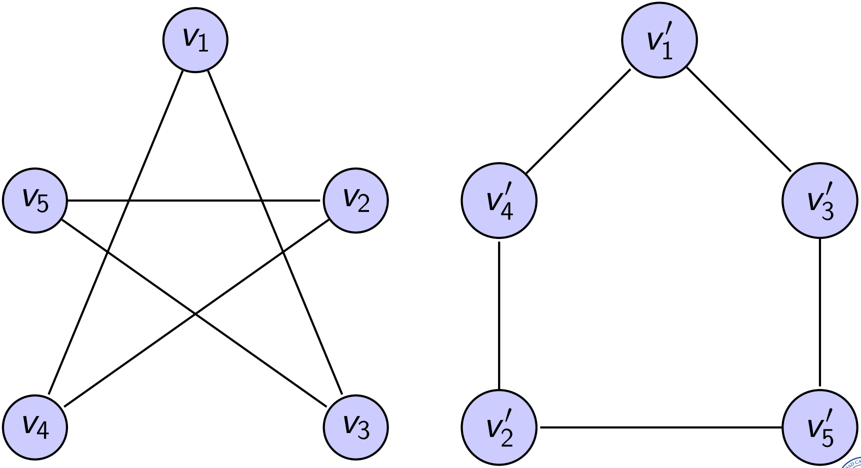
- Dado dos grafos $G$ y $G'$ nos interesa saber si son iguales (isomorfos).

## Definición

Dos grafos $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ son **isomorfos** si existe $f$ una función biyectiva $f : V \mapsto V'$, tal que para cualquier elemento $v$ y $w$ pertenecientes a $V$ tenemos:

$$\{v, w\} \in E \iff \{f(v), f(w)\} \in E' \quad (1)$$

# Ejemplos



# Propiedades invariantes

| | |
|---|---|
| Número de vértices | 5 |
| Número de aristas | 5 |
| Grado de los vertices | 2 |
| Conexiones | $G$ y $G'$ son conexos |
| Ciclos | $G$ y $G'$ son aciclicos |
| Valores propios | $G$ y $G'$ tienen valores propios identicos |

# Biyección

$f$

| $V$ | $V'$ |
|---|---|
| $v_1$ | $v_1'$ |
| $v_2$ | $v_2'$ |
| $v_3$ | $v_3'$ |
| $v_4$ | $v_4'$ |
| $v_5$ | $v_5'$ |

# Resultado

**Teorema**

Dos grafos $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ son **isomorfos** si y solo si existe una matriz de permutación $P$ y algún orden de sus vértices, tal que sus matrices de adyacencia $A(G)$ y $A(G')$ son iguales.

$$A(G) = P \times A(G') \times P^T \tag{2}$$

# Resultado

**Teorema**

Dos grafos $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ son **isomorfos** si y solo si existe una matriz de permutación $P$ y algún orden de sus vértices, tal que sus matrices de adyacencia $A(G)$ y $A(G')$ son iguales.

$$A(G) = P \times A(G') \times P^T \tag{2}$$

$A(G) =$

| | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $v_1$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $v_2$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $v_3$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $v_4$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $v_5$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

$A(G') =$

| | $v'_1$ | $v'_2$ | $v'_3$ | $v'_4$ | $v'_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $v'_1$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $v'_2$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $v'_3$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $v'_4$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $v'_5$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

# Grafos Homeomorfos

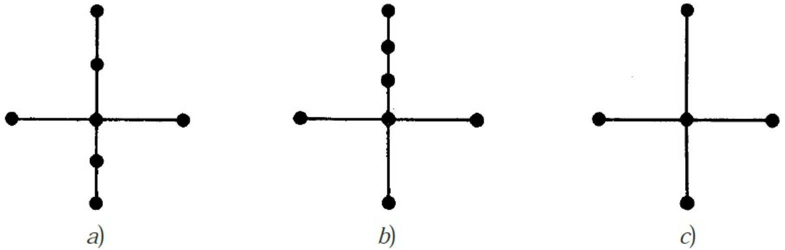
**Definición**

Dado cualquier grafo $G = (V, E)$, es posible obtener un nuevo grafo al dividir una arista de G con vértices adicionales. Dos grafos G y G' son **homeomorfos**, si es posible obtenerlos a partir del mismo grafo o grafos isomorfos al aplicar este método.

# Grafos Homeomorfos

## Definición

Dado cualquier grafo $G = (V, E)$, es posible obtener un nuevo grafo al dividir una arista de G con vértices adicionales. Dos grafos G y G' son **homeomorfos**, si es posible obtenerlos a partir del mismo grafo o grafos isomorfos al aplicar este método.



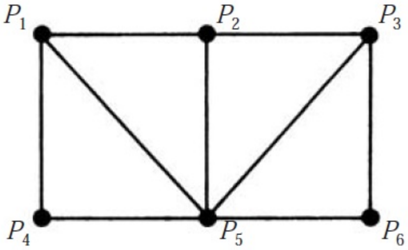

Los grafos a) y b) en la figura no son isomorfos, aunque son homoeomorfos puesto que pueden obtenerse a partir del grafo c) al agregar vértices apropiados.

# Caminos y Conectividad

## Trayectorias o Caminos

Dado un grafo $G = (V, E)$, una trayectoria o camino es una secuencia alternada de vértices y aristas de la forma
$v_0,\ e_1,\ v_1,\ e_2,\ v_2,\ \cdots\ ,\ e_{n-1},\ v_{n-1},\ e_n,\ v_n$
donde cada arista $e_i$ contiene a los vértices $v_{i-1}$ y $v_i$ (que aparecen a los lados de $e_i$ en la secuencia). El número $n$ de aristas se denomina longitud del camino. Cuando no hay ambiguedad, un camino se denota por su secuencia de vértices $(v_0, v_1, \cdots, v_n)$. Se dice que el camino es cerrado si $v_o = v_n$. En caso contrario, se dice que el camino o trayectoria es de $v_0$ a $v_n$ o entre $v_0$ y $v_n$, o que une $v_0$ y $v_n$.
Un camino o trayectoria simple es en el que todos los vértices son distintos (en el que todas las aristas son diferentes se denomina recorrido). Un ciclo es un camino cerrado de longitud 3 o más donde todos los vértices son distintos excepto $v_0 = v_n$. Un ciclo de longitud $k$ se denomina $k$-ciclo.

# Ejemplo




Si consideramos las siguientes secuencias del grafo de la figura:

- $\alpha = (P_4, P_1, P_2, P_5, P_1, P_2, P_3, P_6)$
- $\beta = (P_4, P_1, P_5, P_2, P_6)$
- $\gamma = (P_4, P_1, P_5, P_2, P_3, P_5, P_6)$
- $\delta = (P_4, P_1, P_5, P_3, P_6)$

¿Cuáles son nuestras apreciaciones según la definición anterior?

# Conectividad y componentes conexos

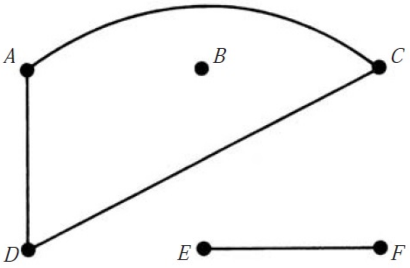
## Conexo

Un grafo $G = (V, E)$ es conexo si existe un camino entre dos de sus vértices.
Suponga que G es un grafo. Un subgrafo conexo $H$ de G se denomina **componente conexo de G** si H no está contenido en ningún subgrado conexo más grande de G.

# Conectividad y componentes conexos

## Conexo

Un grafo $G = (V, E)$ es conexo si existe un camino entre dos de sus vértices.
Suponga que G es un grafo. Un subgrafo conexo $H$ de G se denomina **componente conexo de G** si H no está contenido en ningún subgrado conexo más grande de G.




Ejemplo: el grafo de la figura tiene tres componentes conexos, dado por los subgrafos de vértices $\{A, C, D\}$, $\{E, F\}$ y $\{B\}$

# Distancia y diámetro

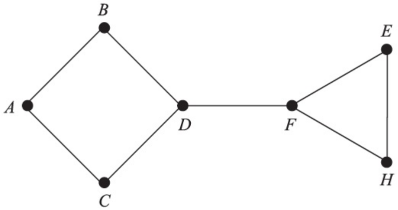
## Distancia y diámetro

Considere un grafo conexo G. La distancia entre los vértices $u$ y $v$ en G, que se escribe $d(u, v)$, es la longitud de la ruta más corta entre $u$ y $v$. El diámetro $G$, lo cual se escribe $diam(G)$, es la distancia máxima entre dos puntos cualesquiera en G

# Distancia y diámetro

## Distancia y diámetro

Considere un grafo conexo G. La distancia entre los vértices $u$ y $v$ en G, que se escribe $d(u, v)$, es la longitud de la ruta más corta entre $u$ y $v$. El diámetro $G$, lo cual se escribe $diam(G)$, es la distancia máxima entre dos puntos cualesquiera en G




Ejemplo: el grafo de la figura tiene $d(A, F) = 3$ y $diam(G) = 4$

# Puntos de corte y puentes

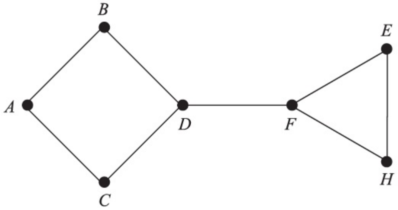
## Definición

Sea G un grafo conexo. Un vértice $v$ en G se denomina **punto de corte** si $G - v$ es disconexo. ($G - v$ es el grafo obtenido a partir de G al eliminar $v$ y todas las aristas que contienen a $v$). Una arista $e$ de G se denomina **puente** si $G - e$ es disconexo ($G - e$ es el grafo obtenido a partir de G al eliminar la arista $e$).

# Puntos de corte y puentes

## Definición

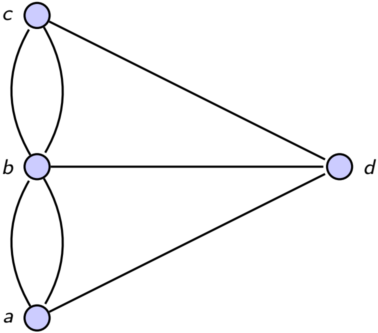
Sea G un grafo conexo. Un vértice $v$ en G se denomina **punto de corte** si $G - v$ es disconexo. ($G - v$ es el grafo obtenido a partir de G al eliminar $v$ y todas las aristas que contienen a $v$). Una arista $e$ de G se denomina **puente** si $G - e$ es disconexo ($G - e$ es el grafo obtenido a partir de G al eliminar la arista $e$).




Ejemplo: De acuerdo al grafo anterior la arista $\{D, F\}$ es un puente y los vértices $D$ y $F$ son puntos de corte.

# Aplicación de Grafos

- Durante el siglo XIII, en Prusia el rio Pregel cruzaba la ciudad dejando dos pequeñas islas que se conectaban a traves de 7 puentes.
- Utilizando teoría de grafos, podemos modelar el problema si asumimos que los puentes corresponden a las aristas de un grafo.
- Supongamos que deseamos recorrer el grafo visitando cada puente solamente una vez, llegando finalmente al vértice inicial.



# Ciclos Eulerianos

## Ciclos Eulerianos

Dado un grafo $G$, un ciclo Euleriano es una trayectoria que visita cada una de las aristas solamente una vez, es decir recorrido cerrado.

# Ciclos Eulerianos

**Ciclos Eulerianos**

Dado un grafo $G$, un ciclo Euleriano es una trayectoria que visita cada una de las aristas solamente una vez, es decir recorrido cerrado.

**Teorema (Euler,1736)**

Un grafo conexo es Euleriano si y solo si cada vertice tiene grado par.

# Ejemplo

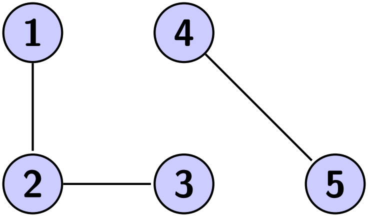



Figure: Grafo no conexo $G = G_1 \cup G_2$. Existen dos sub-grafos conexos $G_1$ y $G_2$ para los cuales existe una trayectoria entre cada uno de los vértices del sub-grafo.

# Ejemplo

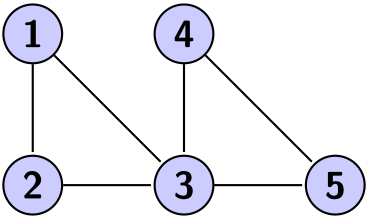



Figure: Grafo conexo $G$. Cada vÃ©rtices es par, por lo tanto podemos garantizar que existe un ciclo Euleriano.

# Ejemplo

## Ciclos Hamiltonianos

Dado un grafo $G$, un ciclo Hamiltoniano es una trayectoria que visita cada uno de las vértices solamente una vez.

# Ejemplo

## Ciclos Hamiltonianos

Dado un grafo $G$, un ciclo Hamiltoniano es una trayectoria que visita cada uno de las vértices solamente una vez.

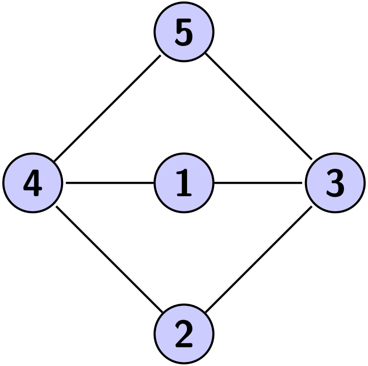



Figure: Grafo conexo $G = (V, E)$ con $|V| = 5$ y $|E| = 6$. Los vértices tienen grado **impar** por lo tanto el grafo no tiene un ciclo Euleriano. El grafo **no** tiene un ciclo Hamiltoniano.

# Ejemplo

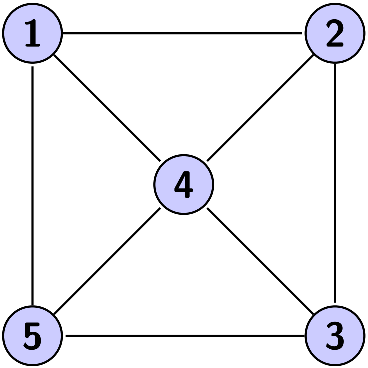
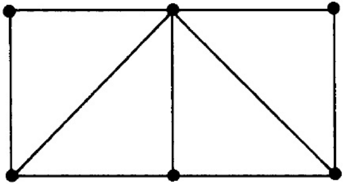
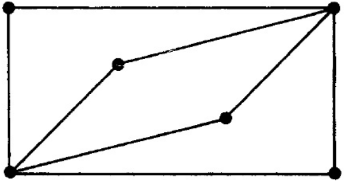



Figure: Grafo conexo $G = (V, E)$ con $|V| = 5$ y $|E| = 8$. Los vÃ©rtices tienen grado **impar** por lo tanto el grafo no tiene un ciclo Euleriano. El grafo **si** tiene un ciclo Hamiltoniano.





¿Cuál de los siguientes grafos es euleriano?
¿Cuál de los siguientes grafos es hamiltoniano?

Al observar los grafos conexos pueden ser hamiltonianos. De acuerdo a G. A. Dirac se tiene una condición suficiente:

**Teorema**

Sea G un grafo conexo con $n$ vértices. Entonces G es hamiltoniano si $n \geq 3$ y $n \leq grd(v)$ para cada vértice v en G.