Matemáticas Discretas ICI-427

Sergio Hernández
shernandez@ucm.cl

Facultad de Ciencias de la Ingeniería

Introducción

- Los árboles son estructuras de datos que sirven para representar relaciones jerárquicas, lo cual es equivalente a decir que existen relaciones lógicas entre los vértices de un grafo.

Definición

Un grafo acíclico es un grafo que no contiene ciclos. Un **árbol** es un grafo acíclico conexo. En un árbol, dos vértices cualquiera están conectados por una única ruta.

Introducción

- Es posible demostrar que cualquier grafo $G = (V, E)$ es un árbol si se cumple una de las siguientes afirmaciones:
  - G es conexo y acíclico.
  - G tiene $n = |V|$ vértices, es conexo y tiene $n - 1$ aristas.
  - G es acíclico y tiene $n - 1$ aristas.

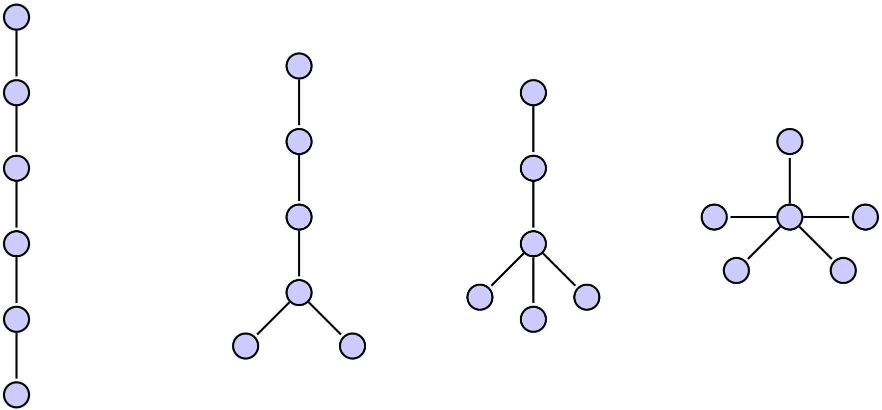
Introducción

- Es posible demostrar que cualquier grafo $G = (V, E)$ es un árbol si se cumple una de las siguientes afirmaciones:
  - G es conexo y acíclico.
  - G tiene $n = |V|$ vértices, es conexo y tiene $n - 1$ aristas.
  - G es acíclico y tiene $n - 1$ aristas.

Definición

Sea T un árbol, entonces $|E| = |V| - 1$

Ejemplos



Arboles de Expansión

- Es posible construir árboles eliminando vértices de un grafo, si y solo si G es conexo

Arboles de Expansión

- Es posible construir árboles eliminando vértices de un grafo, si y solo si G es conexo

Definición

El **árbol de expansión** T de un gráfo G es un sub–grafo de G que contiene todos los vértices de G.

UNIVERSIDAD CATOLICA DEL MAULE

Ejemplo

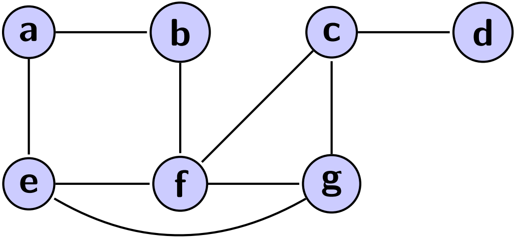


Figure : Grafo conexo con ciclos

Ejemplo

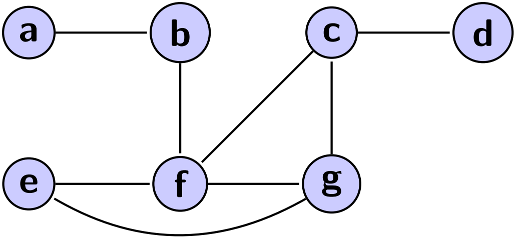


Figure : Se elimina $\{a, e\}$

Ejemplo

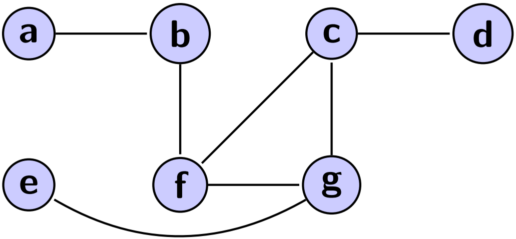


Figure : Se elimina $\{e, f\}$

Ejemplo

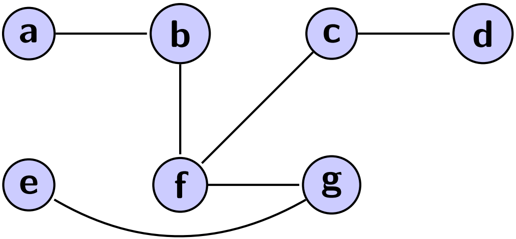


Figure : Se elimina $\{c, g\}$

Arboles de Expansión Mínimos

- Existen muchos arboles de expansión para un grafo.

Arboles de Expansión Mínimos

- Existen muchos arboles de expansión para un grafo.
- Al mismo tiempo, es posible construir árboles de expansión para grafos ponderados.

Arboles de Expansión Mínimos

- Existen muchos arboles de expansión para un grafo.
- Al mismo tiempo, es posible construir árboles de expansión para grafos ponderados.

Definición

Dado un grafo ponderado (G, w) donde $G = (V, E)$ y $w : E \mapsto \mathbb{R}$, un **arbol de expansión mínima** es un arbol de expansión en el que la suma de los pesos w de las aristas es mínima.

Algoritmo de Prim

- El algoritmo de Prim construye un arbol visitando vértices de manera iterativa hasta que se obtiene un árbol de expansión mínima.

Algoritmo de Prim

- El algoritmo de Prim construye un arbol visitando vértices de manera iterativa hasta que se obtiene un árbol de expansión mínima.
- Se comienza desde un vértice cualquiera y en cada iteración se agrega la arista que tenga el mínimo peso y no complete un ciclo.

Algoritmo de Prim

- El algoritmo de Prim construye un arbol visitando vértices de manera iterativa hasta que se obtiene un árbol de expansión mínima.
- Se comienza desde un vértice cualquiera y en cada iteración se agrega la arista que tenga el mínimo peso y no complete un ciclo.
- La complejidad computacional del algoritmo de Prim es O(V log V).

Ejemplo

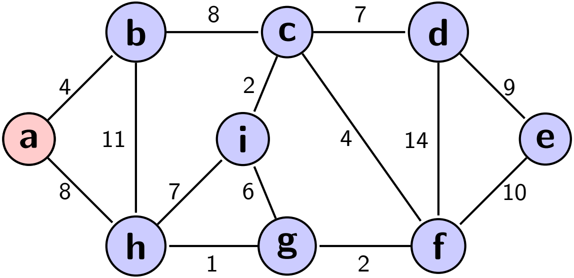


Figure : Ejecución del algoritmo Prim en un grafo ponderado

Ejemplo

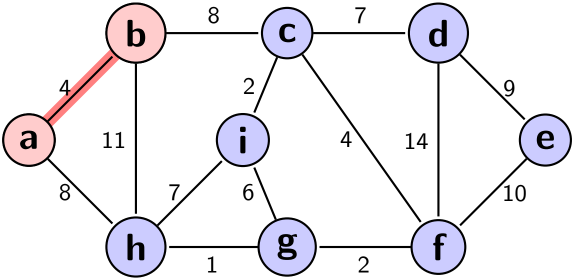


Figure : Ejecución del algoritmo Prim en un grafo ponderado

Ejemplo

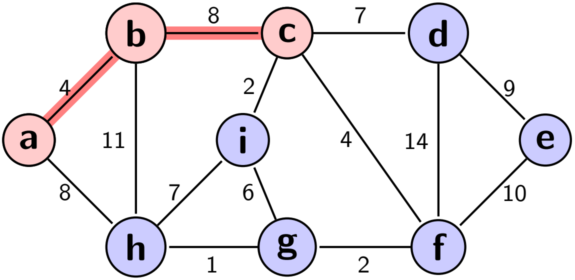


Figure : Ejecución del algoritmo Prim en un grafo ponderado

Ejemplo

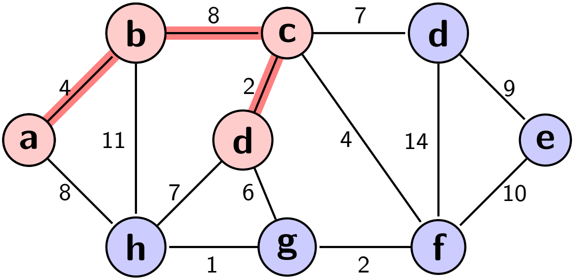


Figure : Ejecución del algoritmo Prim en un grafo ponderado

Ejemplo

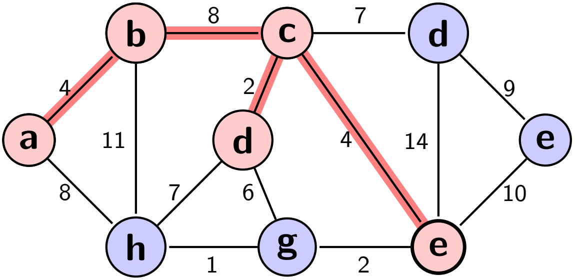


Figure : Ejecución del algoritmo Prim en un grafo ponderado

Ejemplo

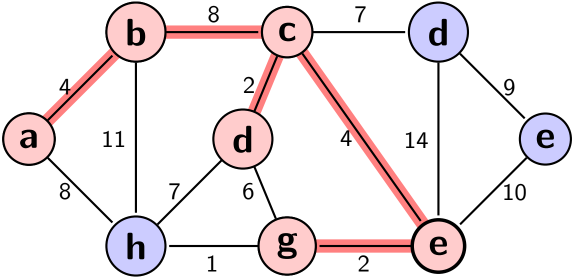


Figure : Ejecución del algoritmo Prim en un grafo ponderado

Ejemplo

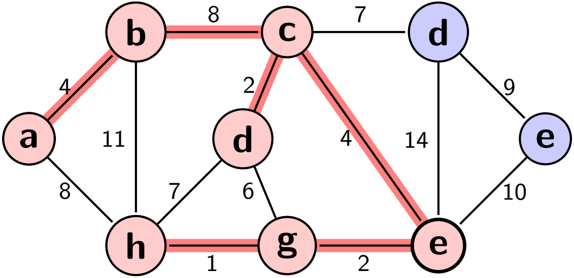


Figure : Ejecución del algoritmo Prim en un grafo ponderado

Ejemplo

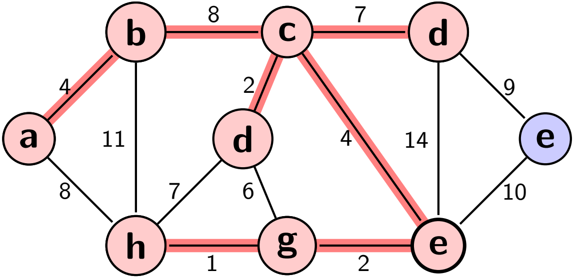


Figure : Ejecución del algoritmo Prim en un grafo ponderado

Ejemplo

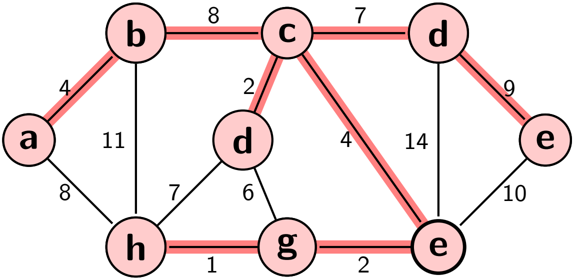


Figure : Ejecución del algoritmo Prim en un grafo ponderado

Algoritmo de Kuskal

- El algoritmo de Kruskal construye un arbol visitando aristas de manera iterativa hasta que se obtiene un árbol de expansión mínima.

Algoritmo de Kuskal

- El algoritmo de Kruskal construye un arbol visitando aristas de manera iterativa hasta que se obtiene un árbol de expansión mínima.
- Se comienza desde un vértice cualquiera y en cada iteración se agrega la arista que tenga el mínimo peso y no complete un ciclo.

Algoritmo de Kuskal

- El algoritmo de Kruskal construye un arbol visitando aristas de manera iterativa hasta que se obtiene un árbol de expansión mínima.
- Se comienza desde un vértice cualquiera y en cada iteración se agrega la arista que tenga el mínimo peso y no complete un ciclo.
- La complejidad computacional del algoritmo de Kruskal es O(E log E).

UNIVERSIDAD CATOLICA DEL MAULE

Ejemplo

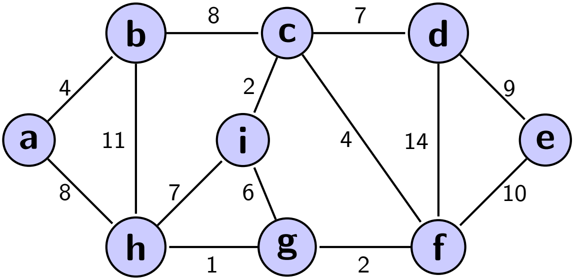


Figure : Ejecución del algoritmo Kruskal en un grafo ponderado

Ejemplo

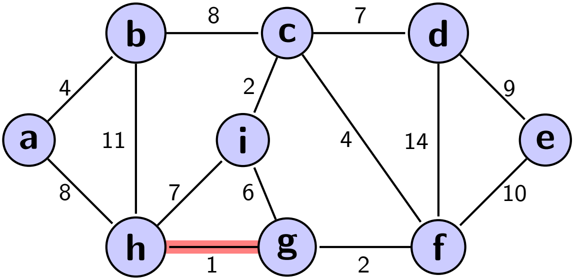


Figure : Ejecución del algoritmo Kruskal en un grafo ponderado

Ejemplo

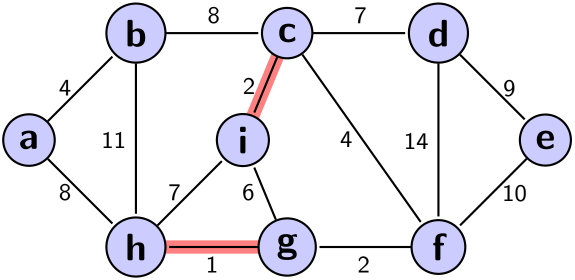


Figure : Ejecución del algoritmo Kruskal en un grafo ponderado

Ejemplo

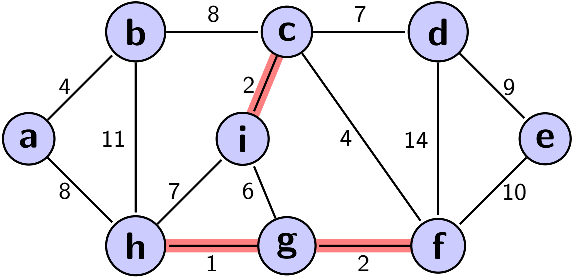


Figure : Ejecución del algoritmo Kruskal en un grafo ponderado

Ejemplo

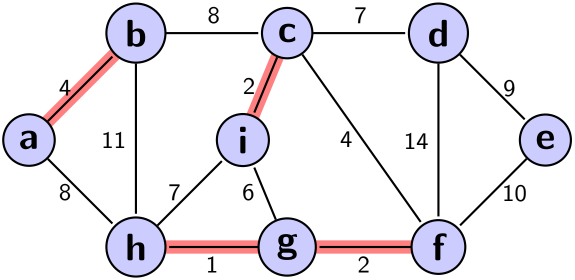


Figure : Ejecución del algoritmo Kruskal en un grafo ponderado

Ejemplo

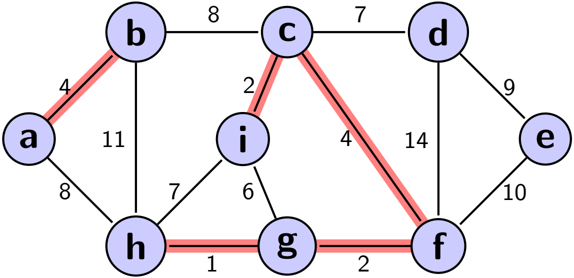


Figure : Ejecución del algoritmo Kruskal en un grafo ponderado

Ejemplo

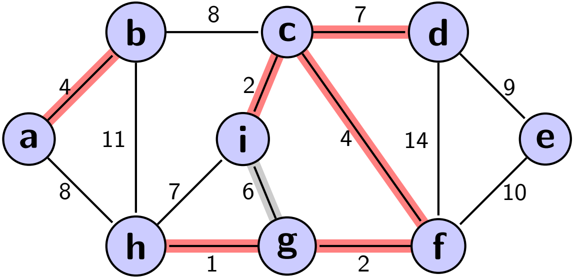


Figure : Ejecución del algoritmo Kruskal en un grafo ponderado

Ejemplo

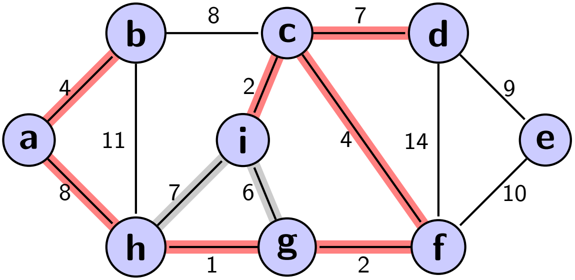


Figure : Ejecución del algoritmo Kruskal en un grafo ponderado

Ejemplo

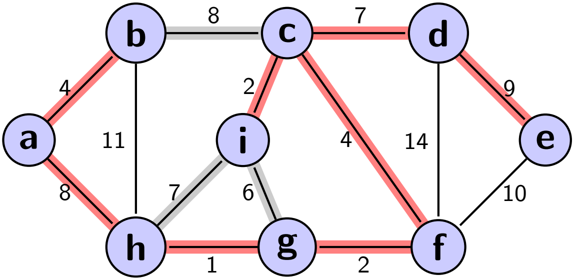


Figure : Ejecución del algoritmo Kruskal en un grafo ponderado

UNIVERSIDAD CATOLICA DEL MAULE

Ejemplo

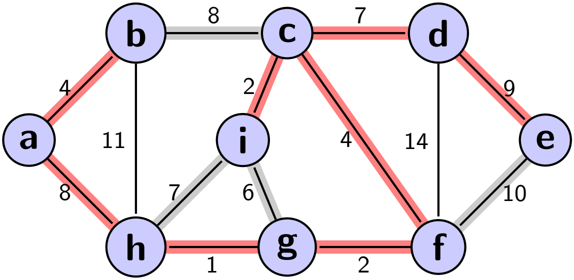


Figure : Ejecución del algoritmo Kruskal en un grafo ponderado

Ejemplo

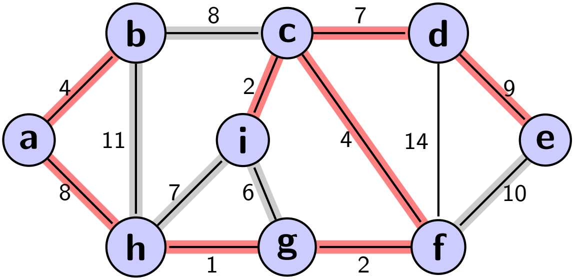


Figure : Ejecución del algoritmo Kruskal en un grafo ponderado

Ejemplo

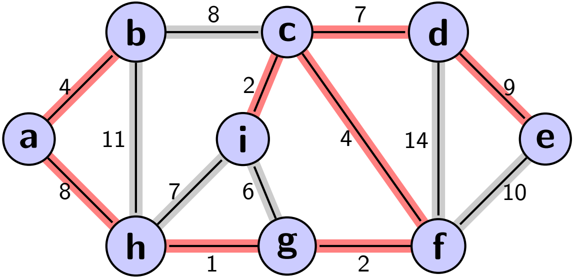


Figure : Ejecución del algoritmo Kruskal en un grafo ponderado