Clase 2

Contenidos

- Transformada de Laplace

1 Más propiedades de la Transformada de Laplace

En esta clase revisaremos más propiedades de la Transformada de Laplace, de modo de construir una lista más extensa de transformadas, y por lo tanto, reducir el tiempo de operación al momento de resolver ecuaciones diferenciales.

Teorema 1 (Traslación en el eje "s") *Si $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$, entonces*

$$\mathscr{L}(e^{at}f(t)) = F(s-a), \quad s > a$$

Ejercicio 1 *Determine la función $y(t)$ cuya transformada de Laplaces es* $Y(s) = \dfrac{1}{s^2+2s+3}$

Ejercicio 2 *Resolver la ecuación diferencial* $y'' - 6y' + 9y = t^2e^{3t}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 17.$

En ingeniería, es muy frecuente encontrar situaciones donde el modelo necesita de una función dicotómica (encendido/apagado). Esta función se llama la **función escalón** o **función de Heaviside**, y se define matemáticamente por

$$H(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}$$

La función de Heaviside es muy útil para escribir una función por tramos. Por ejemplo, si la función $f(t)$ está definida por

$$f(t) = \begin{cases} g(t), & 0 \leq t < a \\ h(t), & t \geq a \end{cases},$$

entonces $f(t) = g(t)(1 - H(t-a)) + h(t)H(t-a)$. En particular,

$$H(t-a) - H(t-b) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ 1, & a \leq t < b \\ 0, & t \geq b \end{cases}$$

Ejercicio 3 *Escriba la función por tramos*

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ g(t), & a \leq t < b \\ 0, & t \geq b \end{cases}$$

utilizando la función de Heaviside.

Clase 2

Observación 1 *Consideremos una función $f(t)$ definida para $t \geq 0$. Observe que el gráfico de la función*

$$f(t-a)H(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ f(t-a), & t \geq a \end{cases}$$

coincide con el gráfico de $f(t)$ desplazado en a unidades a la derecha. Note que la introducción de la función de Heaviside es importante pues no tenemos información de $f(t-a)$ en el intervalo $0 \leq t < a$ (o equivalente, no tenemos información de $f(t)$ si $t < 0$).

Teorema 2 (Traslación en el eje t) *Si $F(s) = \mathscr{L}(f(t))$ y $a > 0$, entonces*

$$\mathscr{L}(f(t-a)H(t-a)) = e^{-as}F(s)$$

Observación 2 *Para encontrar la transformada de Laplace de una expresión del tipo $g(t)H(t-a)$, es necesario un poco de álgebra. Primero, debemos redefinir $g(t) = \tilde{g}(t-a)$. De este modo, $g(t)H(t-a) = \tilde{g}(t-a)H(t-a)$, y el teorema se aplica sobre $\tilde{g}$.*

Ejemplo 1 *Determinar la transformada de Laplace de $e^t H(t-a)$.*

Solución: Sea $\tilde{g}(t-a) = e^t \implies \tilde{g}(t) = e^{t+a} = e^a e^t$. Luego, la transformada de Laplace de $\tilde{g}(t)$ es

$$\tilde{G}(s) = e^a \cdot \frac{1}{s-1}$$

Por lo que

$$\mathscr{L}(g(t)H(t-a)) = \mathscr{L}(\tilde{g}(t-a)H(t-a)) = e^{-as}\tilde{G}(s) = e^{-a(s-1)}\frac{1}{s-1}$$

Ejercicio 4 *Resuelva la ecuación diferencial $y' + 2y = f(t), \quad y(0) = 2$ donde*

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 3 \\ e^t, & t \geq 3 \end{cases}$$

Teorema 3 (Derivadas en la variable s) *Si $F(s) = \mathscr{L}(s)$, y $n = 1, 2, 3, \ldots,$ entonces*

$$\mathscr{L}(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s)$$

Ejemplo 2 *La transformada de Laplace de la función te^{2t} se puede determinar de dos formas distintas:*

1. *Usando la traslación en el eje s, pues*

$$\mathscr{L}(t) = \frac{1}{s^2} \implies \mathscr{L}(te^{2t}) = \frac{1}{(s-2)^2}$$

2. *Usando la derivada en la variable s, pues*

$$\mathscr{L}(e^{2t}) = \frac{1}{s-2} \implies \mathscr{L}(te^{2t}) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s-2)}\right) = \frac{1}{(s-2)^2}$$

Clase 2

Definición 1 *Sean f, g dos funciones continuas por tramo en el intervalo $[0, \infty[$. Se define la* **convolución** *de f con g, y se denota $f * g$ a la integral*

$$f * g = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau)\ d\tau$$

Observación 3 *La convolución de funciones es una operación conmutativa, es decir*

$$f * g = g * f$$

Teorema 4 (Transformada de la convolución) *Si f, g son funciones continuas por tramo en $[0, \infty[$, entonces*

$$\mathscr{L}(f * g) = F(s)G(s)$$

Ejercicio 5 *Determine* $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{(s^2+1)^2}\right)$.

Corolario 1 (Transformada de la Integral) *Si $F(s) = \mathscr{L}(f)$, entonces*

$$\mathscr{L}\left(\int_0^t f(\tau)\ d\tau\right) = \frac{F(s)}{s}$$

Ejercicio 6 *Resuelva la ecuación*

$$f(t) = 3t^2 - e^{-t} - \int_0^t f(\tau) e^{t-\tau}\ d\tau$$