Clase 1 - Unidad 3

Contenidos

- Transformada de Laplace

1 Transformada de Laplace

Si $f(x,y)$ es una función de dos variables, entonces la integral definida de f con respecto a una de las variables es una función con respecto a la otra variable. De manera similar, dado $K(s,t)$ una integral definida de la forma

$$\int_a^b K(s,t)f(t)dt$$

transforma una función f en la variable t en una función F con respecto a la variable s. Nos interesa cuando integrar sobre el intervalo $[0,\infty[$. Si $f(t)$ es definida para $t \geq 0$, entonces la integral impropia $\int_0^\infty K(s,t)f(t)dt$ es definida por el límite

$$\int_0^\infty K(s,t)f(t)dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b K(s,t)f(t)dt.$$

Si este límite existe se dice que la integral existe o es convergente y en caso contrario se dice que no existe y es divergente.

La función $K(s,t)$ se llama el kernel de la transformada. Si se elige $K(s,t) = e^{-st}$ se tiene un caso especial de transformada.

Definición 1 *Sea f una función definida para $t \geq 0$. Entonces la integral*

$$\mathscr{L}(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

se dice la **transformada de Laplace** *de f, siempre que la integral sea convergente.*

Ejemplo 1 *Calcular $\mathscr{L}(f(t))$ donde $f(t) = 1$.*

Solución: De la definición se tiene

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(1) &= \int_0^\infty e^{-st}(1)dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^\infty e^{-st}dt \\ &= \lim_{b\to\infty}\left.\frac{-e^{-st}}{s}\right|_0^b = \lim_{b\to\infty}\frac{-e^{-sb}+1}{s} = \frac{1}{s}\end{aligned}$$

siempre que $s > 0$. En otras palabras, cuando $s > 0$, el exponente $-sb$ es negativo y $e^{-sb} \to 0$. La integral diverge para $s < 0$.

Observación: Para simplificar la escritura se anotará $|_0^\infty$ para acortar $\lim_{b\to\infty}(\ )|_0^b$. Por ejemplo

$$\mathscr{L}(1) = \int_0^\infty e^{-st}(1)dt = \left.\frac{-e^{-st}}{s}\right|_0^\infty = \frac{1}{s}, \qquad s > 0$$

Ejemplo 2 *Calcular* $\mathscr{L}(t)$.

Ejemplo 3 *Calcular* $\mathscr{L}(e^{-3t})$.

1.1 $\mathscr{L}$ es una transformación lineal

Para una combinación lineal de funciones, tenemos

$$\int_0^\infty e^{-st}[\alpha f(t) + \beta g(t)]dt = \alpha \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt + \beta \int_0^\infty e^{-st} g(t)dt$$

cuando ambas integrales convergen para $s > c$. Por lo tanto se tiene

$$\mathscr{L}(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha\mathscr{L}(f(t)) + \beta\mathscr{L}(g(t)) = \alpha F(s) + \beta G(s).$$

Es decir $\mathscr{L}$ es una transformación lineal.

Ejemplo 4

$$\mathscr{L}(1 + 5t) = \mathscr{L}(1) + 5\mathscr{L}(t) = \frac{1}{s} + \frac{5}{s^2}$$

Teorema 1 (Transformadas de algunas funciones básicas)

1. $\mathscr{L}(1) = \dfrac{1}{s}, \quad s > 0$
2. $\mathscr{L}(t^n) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \quad s > 0$
3. $\mathscr{L}(e^{at}) = \dfrac{1}{s-a}, \quad s > a$
4. $\mathscr{L}(\sin(kt)) = \dfrac{k}{s^2 + k^2}, \quad s > 0$
5. $\mathscr{L}(\cos(kt)) = \dfrac{s}{s^2 + k^2}, \quad s > 0$
6. $\mathscr{L}(\sinh(kt)) = \dfrac{k}{s^2 - k^2}, \quad s > |k|$
7. $\mathscr{L}(\cosh(kt)) = \dfrac{s}{s^2 - k^2}, \quad s > |k|$

1.2 Condiciones suficientes para la existencia de $\mathscr{L}(f(t))$

La integral que define la transformada de Laplace no siempre converge. Las condiciones que garantizan la existencia $\mathscr{L}(f(t))$ son que f sea una función continua por tramo en $[0,\infty[$ y que f sea de orden exponencial para $t > T$.

Definición 2 *Una función f es continua por tramo en $[0,\infty[$ si en cualquier intervalo $0 \leq a \leq t \leq b$ hay a lo más un número finito de puntos $t_k, k = 1, 2, \ldots, n$ en los cuales f es discontinua.*

Definición 3 *Una función f se dice que tiene orden exponencial c si existen constantes $c, M > 0$ y $T > 0$ tal que $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para todo $t > T$.*

Teorema 2 *Si f es continua por tramo en $[0,\infty[$ y de orden exponencial c, entonces $\mathscr{L}(f(t))$ existe para $s > c$.*

Teorema 3 *Si f es continua por tramo en $[0,\infty[$ y de orden exponencial y $F(s) = \mathscr{L}(f(t))$, entonces $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$.*

2 Transformada Inversa

Si $F(s)$ representa la transformada de Laplace de una función $f(t)$, que es $\mathscr{L}(f(t)) = F(s)$, entonces decimos que $f(t)$ es la **transformada de Laplace inversa** de $F(s)$ y se denota por $f(t) = \mathscr{L}^{-1}(F(s))$.

Transformada	Transformada inversa
$\mathscr{L}(1) = \dfrac{1}{s}$	$1 = \mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s}\right)$
$\mathscr{L}(t) = \dfrac{1}{s^2}$	$t = \mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s^2}\right)$
$\mathscr{L}(e^{-3t}) = \dfrac{1}{s+3}$	$e^{-3t} = \mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s+3}\right)$

Teorema 4 (Algunas transformadas inversas)

1. $1 = \mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s}\right)$
2. $t^n = \mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{n!}{s^{n+1}}\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$
3. $e^{at} = \mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s-a}\right)$
4. $\sin(kt) = \mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{k}{s^2+k^2}\right)$
5. $\cos(kt) = \mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{s}{s^2+k^2}\right)$

Ejemplo 5 *Calcular $\mathscr{L}\left(\dfrac{1}{s^5}\right)$ y $\mathscr{L}\left(\dfrac{1}{s^2+7}\right)$*

2.1 $\mathscr{L}^{-1}$ es una transformación lineal

La transformada de Laplace inversa es también una transformación lineal, es decir

$$\mathscr{L}^{-1}(\alpha F(s) + \beta G(s)) = \alpha \mathscr{L}^{-1}(F(s)) + \beta \mathscr{L}^{-1}(G(s))$$

Ejemplo 6 *Calcular* $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{-2s+6}{s^2+4}\right)$

2.2 Aplicación a EDOs

Teorema 5 *Si* $f, f', f'', \dots f^{(n-1)}$ *son funciones continuas en* $[0, \infty[$*, con* $c, M, T \in \mathbb{R}$ *constantes reales tales que* $\forall\ t > T$ $|f^{(k)}(t)| \leq Me^{ct}$*, y si* $f^{(n)}$ *continua por tramos en* $[0, \infty[$*, entonces*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f') &= sF(s) - f(0), \\
\mathcal{L}(f'') &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0), \\
&\ \vdots \\
\mathcal{L}(f^{(n)}) &= s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0),
\end{aligned}$$

donde $F(s) = \mathcal{L}(f)$*.*

Ejemplo 7 *Sea* $f(t) = \sin(t)$*. Entonces* $f(0) = 0$ *y* $F(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$*. Como* $(\sin(t))' = \cos(t)$*, usando el teorema podemos verificar que*

$$\mathcal{L}(\cos(t)) = \mathcal{L}(\sin(t)') = sF(s) - f(0) = \frac{s}{s^2+1}.$$

Una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes se representa esquemáticamente por

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = g(t) \tag{1}$$

Aplicando la Transformada de Laplace en la ecuación anterior, y usando el teorema, vemos que se transforma en una ecuación algebraica para $Y(s)$:

$$a_n(s^nY(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \dots - y^{(n-1)}(0)) + a_{n-1}(s^{n-1}Y(s) + \dots) + \dots + a_1(sY(s) - y(0)) + a_0Y(s) = G(s), \tag{2}$$

resultando entonces una expresión de la forma

$$P(s)Y(s) = G(s) \implies Y(s) = \frac{G(s)}{P(s)}$$

La ecuación diferencial quedará reducida entonces a encontrar una función $y(t)$ cuya transformada de Laplace sea $\dfrac{G(s)}{P(s)}$.

Ejemplo 8 *Resolvamos la ecuación diferencial* $y' + 3y = 13\sin(2t), \quad y(0) = 6.$

Aplicando la Transformada de Laplace a toda la ecuación, quedando:

$$sY(s) - y(0) + 3Y(s) = 13 \cdot \frac{2}{s^2+4}$$

Vemos entonces que, agrupando convenientemente, podemos despejar $Y(s)$:

$$\begin{aligned}
(s+3)Y(s) &= \frac{26}{s^2+4} + y(0) \\
(s+3)Y(s) &= \frac{26}{s^2+4} + 6 \\
Y(s) &= \frac{1}{s+3}\left(\frac{26}{s^2+4} + 6\right) \\
Y(s) &= \frac{26}{(s+3)(s^2+4)} + \frac{6}{s+3},
\end{aligned}$$

Podemos descomponer la expresión $\dfrac{26}{(s+3)(s^2+4)}$ *vía fracciones parciales:*

$$\begin{aligned}
\frac{26}{(s+3)(s^2+4)} &= \frac{A}{s+3} + \frac{Bs+C}{s^2+4} \\
26 &= A(s^2+4) + (Bs+C)(s+3),
\end{aligned}$$

obteniendo $A = 2, B = -2, C = 6$. *De este modo, obtenemos*

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{8}{s+3} + \frac{-2s+6}{s^2+4} \\
Y(s) &= \frac{8}{s+3} - 2\cdot\frac{s}{s^2+4} + 6\cdot\frac{1}{s^2+4}
\end{aligned}$$

Para determinar $y(t)$, usamos el teorema 1 en el sentido inverso:

$$\begin{array}{rccc}
Y(s) = & \dfrac{8}{s+3} & -2\cdot\dfrac{s}{s^2+4} & +3\cdot\dfrac{2}{s^2+4} \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
y(t) = & 8e^{-3t} & -2\cos(2t) & +3\sin(2t)
\end{array}$$

Observe que las condiciones iniciales ya están incorporadas en el cálculo.

En resumen, el proceso que seguimos es el siguiente:

1. Comenzamos con nuestro problema de valor inicial.
2. Aplicamos la Transformada de Laplace en toda la ecuación.
3. Obtenemos una ecuación algebraica para $Y(s)$, y despejamos: $Y(s) = \dfrac{G(s)}{P(s)}$
4. La solución del PVI será la función $y(t)$ cuya transformada de Laplace es justamente $\dfrac{G(s)}{P(s)}$.

Ejercicio 1 *Resolver la ecuación diferencial*

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-4t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 5$$