Series

Contenidos

- Resolución por Series.

1 Repaso de Series

Dada una sucesión de números $\{c_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, se definen las sumas parciales de la sucesión por $S_k = \sum_{n=0}^{k} c_n$. La serie es el límite de estas sumas parciales:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} c_n$$

Si el límite existe, se dice que la serie es **convergente** y si no, se dice **divergente**.

Resumimos los resultados importantes:

Teorema 1 (Criterio de Cauchy) *Si la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *es convergente, entonces necesariamente*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0.$$

Observación 1 *Generalmente, el Criterio de Cauchy se utiliza en su versión contrarrecíproca: Si* $\lim_{n\to\infty} c_n \neq 0$, *entonces la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *es divergente.*

Teorema 2 (Criterio del Cociente) *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *una serie con* $c_n > 0$, $\forall\, n$, *y sea*

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}.$$

Entonces:

1. *Si* $L > 1$, *la serie es divergente.*
2. *Si* $L < 1$, *la serie es convergente.*
3. *Si* $L = 1$, *el criterio no decide.*

Ejemplo 1 *Para la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 e^{-n}$ *tenemos que* $c_n = n^3 e^{-n}$. *Luego,*

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 e^{-(n+1)}}{n^3 e^{-n}} = e^{-1} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} = e^{-1} < 1,$$

por lo que la serie es convergente.

Teorema 3 (Criterio de la Integral) *Sea $f(x)$ una función continua, decreciente y positiva en el intervalo $[1, +\infty[$, y definimos $c_n \equiv f(n)$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ y la integral $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ tienen el mismo comportamiento (ambas convergen o ambas divergen).*

Ejercicio 1 *Determine los valores de p de modo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ sea convergente.*

Teorema 4 (Criterio de Leibniz) *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n$ una serie con $c_n > 0$, $\forall\ n$. Si c_n es decreciente y* $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$, *entonces la serie es convergente.*

Ejemplo 2 *Para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ tenemos que $c_n = \frac{1}{n}$. Esta serie es claramente decreciente, pues como* $n < n+1$ *tenemos que* $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$. *Por otro lado, en el límite $n \to \infty$ tenemos que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Como se cumplen ambas condiciones, podemos asegurar que la serie es convergente.

Ejercicio 2 *Muestre que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ es convergente.*

Teorema 5 *Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ es convergente, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ también es convergente.*

Definición 1 *Una serie se dice* **sbsolutamente convergente** *si $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ converge.*

2 Repaso de Series de Potencias

Una serie de potencias centrada en $x = a$ es una expresión de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n,$$

donde los coeficientes $c_n \in \mathbb{R}$. Resumimos los resultados importantes:

Definición 2 *Una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ se dice* **convergente** *en el punto x, si la sucesión de sumas parciales converge, es decir, si $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} c_n (x-a)^n$ existe. Si no existe, entonces se dice* **divergente** *en el punto x.*

Definición 3 *Cada serie de potencias tiene un* **radio de convergencia** *R, definido de modo tal que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ converge (absolutamente) para $|x-a|<R$, y diverge para $|x-a|>R$. El radio de convergencia es*

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|,$$

con las precauciones adicionales que si $R=0$, entonces la serie converge únicamente en su centro $x=a$, y $R=\infty$ nos dice que la serie converge en todo $\mathbb{R}$.

Definición 4 *Cada serie de potencias tiene un* **intervalo de convergencia**, *es decir, un intervalo I tal que la serie de potencias converge para cada punto $x\in I$. Si el radio de convergencia es R, entonces la serie converge para cualquier $x\in]a-R,a+R[$. Notemos que la convergencia está asegurada en el interior del intervalo, por lo que el análisis en la frontera ($x=a\pm R$) se hace en forma independiente.*

Ejemplo 3 *Determine el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.*

Solución: En este caso, vemos que el centro es $x=0$, y que $c_n=1$, $\forall\ n$. Podemos entonces calcular el radio de convergencia:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{1}\right| = 1,$$

por lo que la serie converge (absolutamente) si $|x-0|<1$, es decir, en el intervalo $]-1,1[$. El análisis en $x=\pm 1$ se hace por separado:

Para $x=1$, la serie es $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ que es divergente (Criterio de Cauchy).
Para $x=-1$, la serie es $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ y también es divergente (Criterio de Cuchy).
Por lo tanto, el intervalo de convergencia es $I=]-1,1[$.

Ejercicio 3 *Determine el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.*

Definimos la función $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, con dominio en el intervalo de convergencia de la serie. Dentro del radio de convergencia, la función $f(x)$ es continua, diferenciable e integrable. En tal caso, la derivada e integral se obtienen efectuando la operación "término a término":

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}, \qquad \int_a^x f(t)\ dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

Definición 5 *Una función $f(x)$ se dice* **analítca** *en el punto $x=a$ si puede ser representada por medio de una serie de potencias de radio $R>0$ (o $R=\infty$).*

Ejemplo 4 *La función $f(x) = e^x$ en el punto $x = 0$ se puede representar por la serie*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

Su radio de convergencia es $R = \infty$, por lo que la serie converge en todo $\mathbb{R}$. Así, por ejemplo, está permitido derivar:

$$\begin{aligned}(e^x)' &= 0 + 1 + \frac{2x}{2} + \frac{3x^2}{6} + \frac{4x^3}{24} + \dots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots \\ &= e^x\end{aligned}$$

o evaluar en $x = 1$:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

3 Solución de EDOs a través de series

Comenzamos con la ecuación

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \tag{1}$$

lineal y homogénea de segundo orden, y sea

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{2}$$

la forma estándar obtenida dividiendo por $a_2(x)$. Un punto x_0 se dice un **punto ordinario** de la ecuación diferencial (1) si las funciones $P(x)$ y $Q(x)$ de la forma estándar (2) son analíticas en x_0. Un punto que no es ordinario se dice un **punto singular** de la ecuación.

Ejemplo 5 *El punto $x = 0$ es un punto ordinario para la ecuación $y'' + xy = 0$, pero es un punto singular para $xy'' + y = 0$.*

Teorema 6 *Si $x = x_0$ es un punto ordinario de (1), siempre podemos encontrar dos funciones linealmente independientes, representadas en forma de serie de potencias centradas en x_0. Una solución por series converge al menos en un intervalo de la forma $|x - x_0| < R$, donde R es la distancia desde x_0 al punto singular más cercano.*

Observación 2 *Una solución de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$ se dice una solución en torno al punto ordinario x_0. La distancia R del teorema anterior también se puede calcular si los puntos singulares son complejos.*

Ejemplo 6 *Los complejos $1 \pm 2i$ son puntos singulares de la ecuación $(x^2 - 2x + 5)y'' + xy' - y = 0$. Entonces, $x_0 = 0$ es un punto ordinario, y el teorema anterior nos asegura que podremos encontrar soluciones en términos de series de potencias. Independiente de cuáles sean estas soluciones, el intervalo de convergencia es* al menos *$|x| < \sqrt{5}$ porque $R = \sqrt{5}$ es la distancia del complejo $x = 0$ $(0 + 0i)$ al complejo $1 + 2i$.*

Observación 3 *En el caso de las ecuaciones lineales es suficiente estudiar el caso $x_0 = 0$ porque las soluciones en torno a un punto ordinario $x = a$ se obtienen con el cambio de variable $t = x - a$, de modo que analizar la situación alrededor de $x = a$ es equivalente a analizar en torno a $t = 0$.*

Ejemplo 7 *Resolver la ecuación diferencial $y'' + y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.*

Solución:

De lo que vimos en la unidad anterior, sabemos que la solución es $y = \sin(x)$. Este ejemplo nos sirve para demostrar la forma de la serie de potencias asociada.

Como no hay puntos singulares, el teorema nos asegura que la convergencia es al menos para $|x| < \infty$, es decir, sobre todo $\mathbb{R}$.

Buscaremos una solución en forma de serie de potencias, $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Insertando en la ecuación diferencial, obtenemos:

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n = 0$$

Para poder agrupar términos, necesitamos desplazar la serie de la izquierda:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0\\
&\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)x^n + c_n x^n = 0\\
&\sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+2}(n+2)(n+1) + c_n)x^n = 0
\end{aligned}$$

Como la serie es idénticamente cero, podemos concluir que

$$c_{n+2}(n+2)(n+1) + c_n = 0, \quad \forall\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Esta relación de recurrencia permite deducir los coeficientes en términos de c_0, c_1, puesto que:

$$\begin{aligned}
n &= 0, & 2c_2 + c_0 = 0 &\implies c_2 = -\frac{c_0}{2}\\
n &= 1, & 6c_3 + c_1 = 0 &\implies c_3 = -\frac{c_1}{6}\\
n &= 2, & 12c_4 + c_2 = 0 &\implies c_4 = -\frac{c_2}{12} = \frac{c_0}{24}\\
n &= 3, & 20c_5 + c_3 = 0 &\implies c_5 = -\frac{c_3}{20} = \frac{c_1}{120}\\
n &= 4, & 30c_6 + c_4 = 0 &\implies c_6 = -\frac{c_4}{30} = -\frac{c_0}{720}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

De modo que la solución queda expresada en términos de c_0, c_1:

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + c_6x^6 + \dots$$
$$y = c_0 + c_1x - \frac{c_0}{2}x^2 - \frac{c_1}{6}x^3 + \frac{c_0}{24}x^4 + \frac{c_1}{120}x^5 - \frac{c_0}{720}x^6 + \dots$$
$$y = c_0\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \dots\right) + c_1\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \dots\right)$$

Utilizando las condiciones iniciales $y(0) = 0, y'(0) = 1$ obtenemos

$$y(0) = 0 \implies c_0 = 0$$
$$y'(0) = 1 \implies c_1 = 1$$

por lo tanto, la solución de la ecuación diferencial es

$$y = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \dots$$

que corresponde a la serie de potencias de la función $\sin(x)$:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Ejercicio 4 *Resuelva la ecuación diferencial* $y'' + xy = 0$

Ejercicio 5 *Resuelva la ecuación diferencial* $y'' + (1+x)y = 0$

4 Soluciones en torno a Puntos singulares

Un punto singular x_0 se dice **regular** sobre la ecuación diferencial (1) si las funciones $p(x) = (x - x_0)P(x)$, $q(x) = (x - x_0)^2Q(x)$ son analíticas en x_0 (aquí, $P(x), Q(x)$ son las funciones que surgen de la forma estándar (2)). Si no es regular, se dice que x_0 es un punto singular **irregular** de la ecuación.

Para resolver la ecuación diferencial (1) alrededor de un punto singular, usamos el siguiente teorema:

Teorema 7 (Teorema de Frobenius) *Si $x = x_0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial (1), entonces existe al menos una solución de la forma*

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^{n+r},$$

donde r es una constante a determinar.

En la práctica, el teorema de Frobenius se usa de la misma forma que en la solución por series de la sección anterior. Sin embargo, debemos determinar la constante r, la cual no tiene que ser necesariamente un entero. Para ello, podemos utilizar la siguiente definición.

Definición 6 *Sea x_0 un punto singular regular de la ecuación diferencial (1) con su forma estándar definida en (2). Llamamos la* **ecuación indicial** *del punto x_0 a la ecuación*

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0,$$

donde

$$p_0 = \lim_{x \to x_0} (x - x_0) p(x), \qquad q_0 = \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 Q(x)$$

Ejemplo 8 *Resolver la ecuación diferencial $3xy'' + y' - y = 0$*

Solución:

Claramente, $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación, por lo que podemos utilizar el Teorema de Frobenius. Buscamos entonces una solución de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r}$:

$$\begin{aligned}
3xy'' + y' - y &= 3x \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r) x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 3c_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-1} + c_n (n+r) x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(3n+3r-2) c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= r(3r-2)c_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(3n+3r-2) c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \\
&= r(3r-2)c_0 x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1+r)(3n+3r+1) c_{n+1} x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \\
&= r(3r-2)c_0 x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1+r)(3n+3r+1) c_{n+1} - c_n) x^{n+r}
\end{aligned}$$

De donde se deduce:

$$r(3r-2)c_0 = 0 \qquad \wedge \qquad (n+1+r)(3n+3r+1)c_{n+1} - c_n = 0, \ \forall\, n$$

A partir de la opción $c_0 \neq 0$, se deduce que $r(3r-2) = 0$, que es la ecuación indicial que definimos anteriormente. Por lo tanto, en adelante trabajamos con $r = 0$ y $r = 2/3$. Escogiendo $r = 0$:

$$
\begin{aligned}
&n=0 \implies c_1 = c_0\\
&n=1 \implies c_2 = \frac{c_1}{8} = \frac{c_0}{8}\\
&n=2 \implies c_3 = \frac{c_2}{21} = \frac{c_0}{21\cdot 8}\\
&n=3 \implies c_4 = \frac{c_3}{40} = \frac{c_0}{40\cdot 21\cdot 8}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Similarmente, podemos escoger $r = \frac{2}{3}$, y luego:

$$
\begin{aligned}
&n=0 \implies c_1 = \frac{c_0}{5}\\
&n=1 \implies c_2 = \frac{c_1}{16} = \frac{c_0}{16\cdot 5}\\
&n=2 \implies c_3 = \frac{c_2}{33} = \frac{c_0}{33\cdot 16\cdot 5}\\
&n=3 \implies c_4 = \frac{c_3}{56} = \frac{c_0}{56\cdot 33\cdot 16\cdot 5}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Lo anterior determina entonces dos series, cuyos primeros términos son:

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= x^0(c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \dots)\\
&= c_0\left(1 + x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{21\cdot 8}x^3 + \dots\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_2(x) &= x^{2/3}(c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \dots)\\
&= c_0\left(x^{2/3} + \frac{1}{5}x^{5/3} + \frac{1}{16\cdot 5}x^{8/3} + \frac{1}{33\cdot 16\cdot 5}x^{11/3} + \dots\right)
\end{aligned}
$$

Por otra parte, si hubiésemos escogido $c_0 = 0$, la segunda condición quedará $(r+1)(3r+1)c_1 = 0$. En tal caso, podríamos haber escogido $r = -1$, $r = -1/3$, sin embargo, queda como ejercicio mostrar que a partir de estas soluciones llegaremos a la misma solución y_1, y_2 que obtuvimos usando la ecuación indicial.

Teorema 8 *Sea $x = 0$ un punto singular regular de la ecuación diferencial (1) y supongamos que las raíces de la ecuación indicial son números reales r_1, r_2, con $r_1 \geq r_2$. Entonces:*

- *Si $r_1 = r_2$, existen dos soluciones linealmente independientes de la forma*

$$
y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r_1}, \quad c_0 \neq 0
$$

$$
y_2 = y_1(x)\ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+r_1}
$$

- *Si* $r_1 > r_2$*, existen dos soluciones linealmente independientes de la forma*

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r_1}, \quad c_0 \neq 0$$

$$y_2 = C y_1(x)\ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}, \quad b_0 \neq 0,$$

  donde la constante C *podría ser 0.*