Clase 3

Contenidos

- Ecuaciones lineales y no-homogéneas de Orden n

1 Coeficientes Indeterminados - Superposición

El objetivo es resolver una ecuación diferencial lineal no-homogénea de la forma

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g(x).$$

donde $a_1, \ldots, a_n$ son constantes Para ello se necesitan dos cosas:

- Encontrar la solución general y_c de la ecuación diferencial homogénea asociada

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

  Esto se hace con los métodos que vimos la clase anterior.

- Encontrar una solución particular y_p de la ecuación diferencial no-homogénea

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g(x).$$

Entonces, como fue mencionado en el comienzo de la unidad, la solución general de la ecuación es dada por

$$y = y_p + y_c.$$

Objetivo: Desarrollar métodos para obtener soluciones particulares.

1.1 Métodos de los coeficientes indeterminados

Dada la ecuación diferencial lineal no homogénea

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g(x) \tag{1}$$

donde $a_1, \ldots, a_n$ son constantes. La idea en este método es conjeturar sobre la forma de y_p, lo cual se obtendrá observando la función $g(x)$. El método general es limitado a que la función $g(x)$ sea algunas de las siguientes:

- $g(x)$ puede ser una función constante.
- $g(x)$ puede ser una función polinomial.
- $g(x)$ puede ser una función exponencial $e^{\alpha x}$
- $g(x)$ puede ser seno o coseno $\sin(\beta x), \cos(\beta x)$
- $g(x)$ puede ser sumas finitas o productos finitos de esas funciones.

Ejemplos de tipos de funciones $g(x)$:

$$g(x) = 10, \quad g(x) = x^2 - 5x, \quad g(x) = 15x - 6 + 8e^{-x},$$
$$g(x) = \sin(3x) - 5x\cos(2x), \qquad g(x) = xe^x \sin(x) + (3x^2 - 1)e^{-4x}.$$

Observación: El método de coeficientes indeterminados no es aplicable a ecuaciones de la forma (1) donde $g(x)$ es de la forma

$$g(x) = \ln(x), \quad g(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \tan(x), \quad g(x) = \sin^{-1} x.$$

Observación 1 *El conjunto de funciones constantes, polinomios, exponenciales, senos y cosenos, tienen la propiedad que sus derivadas son sumas y productos de funciones constantes, polinomios, exponenciales, senos y cosenos. Además como la combinación lineal de las derivadas*

$$a_n y_p^{(n)} + a_{n-1} y_p^{(n-1)} + \cdots + a_1 y_p' + a_0 y_p$$

debe ser igual a $g(x)$, entonces esto manifiesta que es razonable que y_p tiene la misma forma de $g(x)$.

Ejemplo 1 *Encontrar la solución general de la ecuación*

$$y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$$

Solución: Esto se resuelve en dos pasos, el primer paso es resolver la ecuación diferencial homogénea para determinar la función complementaria. En el segundo paso debemos encontrar una solución particular.

Paso 1. (Determinar la función complementaria) La ecuación diferencial homogénea

$$y'' + 4y' - 2y = 0$$

se resuelve a partir de las soluciones de la ecuación cuadrática

$$m^2 + 4m - 2 = 0$$

que son $m_1 = -2 - \sqrt{6}$ y $m_2 = -2 + \sqrt{6}$. Por lo tanto la función complementaria es

$$y_c = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x}.$$

Paso 2. (Determinar una solución particular) Como la función $g(x)$ es un polinomio cuadrático, asumimos que la solución particular es de la forma de un polinomio cuadrática:

$$y_p = Ax^2 + Bx + C.$$

Ahora debemos determinar los coeficientes A, B y C para el cual y_p sea solución de la ecuación diferencial

$$y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6.$$

Substituyendo y_p y las derivadas

$$y_p' = 2Ax + B \qquad \text{y} \qquad y_p'' = 2A$$

Reemplazando se obtiene

$$-2Ax^2 + (8A - 2B)x + (2A + 4B - 2C) = 2x^2 - 3x + 6,$$

lo cual implica que

$$-2A = 2, \quad 8A - 2B = -3, \quad 2A + 4B - 2C = 6$$

y resolviendo el sistema

$$A = -1, \quad B = -\frac{5}{2} \quad \text{y} \quad C = -9.$$

Entonces una solución particular es

$$y_p = -x^2 - \frac{5}{2}x - 9.$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación dada es

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9.$$

Principio de superposición. Recordemos del comienzo de la unidad el principio de superposición para ecuaciones no-homogéneas:
Suponga que para cada $i = 1, 2, ..., k$, la función y_i es una solución particular de la ecuación diferencial $L(f) = g_i(x)$. Entonces, la suma $y = y_1 + y_2 + ... + y_k$ es una solución particular de

$$L(f) = g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_k(x).$$

Ejemplo 2 *Resolver utilizando el principio de superposición la ecuación diferencial*

$$y'' - 2y' - 3y = 4x - 5 + 6xe^{2x}.$$

Solución:

Paso 1: Resolvemos la ecuación diferencial homogénea asociada

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

lo cual da como resultado

$$y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}.$$

Paso 2. Notemos que como $g(x)$ contiene $4x-5$ entonces se debería tener que la solución particular incluye un polinomio lineal. Además, como la derivada del producto xe^{2x} produce $2xe^{2x}$ y e^{2x}, entonces asumimos que la solución particular incluye incluye xe^{2x} y e^{2x}. En otras palabras, g es la suma de dos tipos básicos de funciones:

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) = \text{ polinomio } + \text{exponencial }.$$

El principio de superposición para ecuaciones diferenciales no-homogéneas dice que la solución particular es dada por

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$$

donde $y_{p_1} = Ax + B$ y $y_{p_2} = Cxe^{2x} + Ee^{2x}$. Reemplazando

$$y_p = Ax + B + Cxe^{2x} + Ee^{2x}$$

en la ecuación diferencial se obtiene

$$y_p'' - 2y_p' - 3y_p = -3Ax - 2A - 3B - 3Cxe^{2x} + (2C - 3E)e^{2x} = 4x - 5 + 6xe^{2x}.$$

Se obtiene el sistema

$$-3A = 4, \quad -2A - 3B = -5, \quad -3C = 6, \quad 2C - 3E = 0.$$

Resolviendo se tiene que

$$A = -\frac{4}{3}, \quad B = \frac{23}{9}, \quad C = -2, \quad E = -\frac{4}{3}.$$

Por lo tanto

$$y_p = -\frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - 2xe^{2x} - \frac{4}{3}e^{2x}.$$

De esta manera la solución general de la ecuación:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} - \frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - 2xe^{2x} - \frac{4}{3}e^{2x}.$$