Clase 4 - Unidad 3

Contenidos

- Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales

Definición 1 *Sea $x_1,\ x_2, ...x_n$ variables dependientes de una variable t, un sistema de ecuaciones diferenciases lineales de primer orden tiene la forma:*

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + ...a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\
\frac{dx_1}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + ...a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\
&\vdots \\
\frac{dx_1}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + ...a_{nn}(t)x_n + f_n(t)
\end{aligned}$$

donde a_{ij} y f_i son continuas en un intervalo común I. Cuando $f_i(t) = 0, i = 1, 2, ..., n$, se dice que el sistema es homogéneo, en caso contrario no homogéneo.

Este sistema se puede escribir de forma matricial considerando

$$X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) & ... & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) & ... & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & a_{n3}(t) & ... & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

quedo de la forma $X' = AX + F$ y si es homogéneo se tiene, $X' = AX$

Definición 2 *Un vector solución en un intervalo I es cualquier matriz columna*

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

cuyas componentes son funciones diferenciables que satisfacen el sistema en I.

Ejercicio 1 *Compruebe que*

$$X_1 = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{bmatrix}$$

son soluciones de $X' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} X$, en todo $\mathbb{R}$.

Teorema 1 *Sean $A(t)$ y $F(t)$ matrices con componentes funciones continuas en un intervalo I, tal que $t_0 \in I$. Entonces existe una única solución al PVI,*

$$\begin{aligned} X'(t) &= A(t)X + F(t) \\ X(t_0) &= X_0 \end{aligned}$$

Teorema 2 *Sean $X_1,\ X_2, ...,\ X_k$ un conjunto de vectores soluciones de un sistema homogéneo, $X' = AX$, en un intervalo I, entonces la combinación lineal*

$$X = c_1X_1 + c_2X_2 + ... + C_kX_k$$

donde $c_i,\ i = 1, 2, ..., k$ son constantes arbitrarias, es también solución en I.

Definición 3 *Sea $X_1,\ X_2, ...,\ X_n$ un conjunto de vectores solución del sistema homogéneo en un intervalo I. Se dice que el conjunto es linealmente dependiente en el intervalo si existen constantes $c_1,\ c_2,\ c_3, ..., c_k$ no todas cero, tal que*

$$c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_kX_k = 0$$

para toda t en el intervalo. Si el conjunto de vectores no es linealmente dependiente en el intervalo, se dice que es linealmente independiente.

Teorema 3 *Sean*

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix}, ..., \quad X_n = \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix}$$

n vectores solución del sistema homogéneo en un intervalo I. Entonces el conjunto de vectores solución es linealmente independiente en I si y sólo sí el wronskiano

$$W(X_1, X_2, ..., X_n) \neq 0$$

para todo t en el intervalo.

Ejercicio 2 *Muestre que las soluciones X_1 y X_2 del ejercicio (1) son soluciones linealmente independiente.*

Definición 4 *Cualquier conjunto $X_1, X_2, ..., X_n$ de n vectores solución linealmente independientes del sistema homogéneo en un intervalo I, se dice que es un conjunto fundamental de soluciones en I.*

Teorema 4 *Existe un conjunto fundamental de soluciones para el sistema homogéneo en un intervalo I.*

Teorema 5 *Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ un conjunto fundamental de soluciones de un sistema homogéneo en un intervalo I. Entonces la solución general del sistema en el intervalo es*

$$X = c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_nX_n$$

donde las $c_i,\ i = 1, 2, ..., n$ constantes arbitrarias.

Teorema 6 *Sea X_p una solución dada del sistema no homogéneo, $X' = AX + F$, en un intervalo I, y sea*

$$X_c = c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_nX_n$$

la solución general en el mismo intervalo. Entonces la solución general del sistema no homogéneo en el intervalo es

$$X = X_c + X_p.$$

Notemos que los teoremas y definiciones que hemos visto hasta esta parte de la clase son equivalentes a lo visto en Unidad II. Continuando con esa construcción podemos destacar que un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma $X' = AX$ el vector solución tenga la forma,

$$X_i = \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} e^{\lambda_i t} = Ke^{\lambda_i t}y, \ i = 1, 2, ..., n$$

donde $k_1, k_2, ...k_n, \lambda_1, \ \lambda_2, ..., \lambda_n$ son valores constantes.
Si consideremos una solución de esta forma tenemos, $X' = K\lambda e^{\lambda t}$, en la ecuación diferencial,

$$\begin{aligned} K\lambda e^{\lambda t} &= AKe^{\lambda t} \\ \lambda K &= KA \\ 0 &= AK - \lambda IK \\ 0 &= (A - \lambda I) K \end{aligned}$$

Esta ecuación matricial, tiene solución al menos la trivial, y para que la solución sea distinta a la trivial, es necesario que tengamos infinitas soluciones, es decir,

$$\det (A - \lambda I) = 0. \tag{1}$$

La ecuación (1) es polinomial, y se llama ecuación carácteristica de la matriz A. Sus soluciones son los valores propios de A y una solución $K \neq 0$ correspondiente a un valor propio λ se llama vector propio de A.

Si los valores propios son distintos se tiene n vectores propios linealmente independientes $K_1, K_2, K_3, ..., K_n$ y

$$X_1 = K_1e^{\lambda_1 t}, X_2 = K_2e^{\lambda_2 t}, ..., X_n = K_ne^{\lambda_n t}$$

es un conjunto fundamental de soluciones.

Ejercicio 3 *Resuelva*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x + y \end{aligned}$$

Clase 4 - Unidad 3

Si λ_1 es un valor propio con multiplicidad m, se tiene:

- Para algunas matrices $A_{n\times n}$ podría ser encontrar m vectores propios linealmente independientes $K_1, K_2, ..., K_m$ que corresponden a un valor propio λ_1 de multiciplidad $m \leq n$ En este caso la solución general del sistema contiene la combinación lineal

$$c_1K_1e^{\lambda_1 t} + c_2K_2e^{\lambda_1 t} + ... + c_mK_me^{\lambda_1 t}$$

- Si solo hay un vector propio K_1 que corresponde al valor λ_1 de multiplicidad m, tenemos $X_1 = K_1e^{\lambda_1 t}$. Iremos construyendo las $m-1$ soluciones, de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
(A-\lambda_1 I)K_2 = K_1 &\Longrightarrow X_2 = c_2\left[K_1te^{\lambda_1 t} + K_2e^{\lambda_1 t}\right]\\
(A-\lambda_1 I)K_3 = K_2 &\Longrightarrow X_3 = c_3\left[K_1\frac{t^2}{2!}e^{\lambda_1 t} + K_2te^{\lambda_1 t} + K_3e^{\lambda_1 t}\right]\\
(A-\lambda_1 I)K_4 = K_3 &\Longrightarrow X_4 = c_4\left[K_1\frac{t^3}{3!}e^{\lambda_1 t} + K_2\frac{t^2}{2!}e^{\lambda_1 t} + K_3te^{\lambda_1 t} + K_4e^{\lambda_1 t}\right]\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Si λ_1 es un valor propio complejo de la forma $\lambda_1\alpha + \beta i$, $\overline{\lambda_1} = \alpha - \beta i$ de donde se tiene como vectores propios K_1 y $\overline{K_1}$ respectivamente.
obteniendo como solución

$$\begin{aligned}
X_1 &= \left[\frac{1}{2}\left(K_1+\overline{K_1}\right)\cos\beta t - \frac{i}{2}\left(-K_1+\overline{K_1}\right)\sin\beta t\right]e^{\alpha t}\\
X_2 &= \left[\frac{i}{2}\left(-K_1+\overline{K_1}\right)\cos\beta t + \frac{1}{2}\left(K_1+\overline{K_1}\right)\sin\beta t\right]e^{\alpha t}
\end{aligned}$$

Ejercicio 4 *Resuelva*

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2\\ -2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}X$$

Ejercicio 5 *Resuelva*

$$X' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6\\ 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}X$$

Ejercicio 6 *Resuelva*

$$X' = \begin{bmatrix} 2 & 8\\ -1 & -2\end{bmatrix}X$$