Diseño y Análisis de Algoritmos ICI-522

Sergio Hernández.
PhD computer science

Departamento de Computación e Informática
Universidad Católica del Maule.
shernandez@ucm.cl

Multiplicación de Matrices Iterativo

Sean A y B dos matrices de tamaño 2×2

Matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}$$

Multiplicación de Matrices Iterativo

Sean A y B dos matrices de tamaño 2×2

Matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}$$

Producto

$$A \times B = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \times b_{k,j}$$

Multiplicación de Matrices Recursivo

Sean A y B dos matrices de tamaño $n \times n$. Ahora dividimos las matrices en submatrices $A_{i,j}$ y $B_{i,j}$ de tamaño $n/2 \times n/2$

Matrices

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix}$$

Multiplicación de Matrices Recursivo

Sean A y B dos matrices de tamaño $n \times n$. Ahora dividimos las matrices en submatrices $A_{i,j}$ y $B_{i,j}$ de tamaño $n/2 \times n/2$

Matrices

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix}$$

Producto

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} \\ C_{2,1} & C_{2,2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix} \\ C_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} \times B_{k,j} \end{aligned}$$

Análisis de Complejidad

- En general, para matrices cuadradas de tamaño $n \times n$ el costo computacional de multiplicar matrices de manera iterativa es $\times(n^3)$

Análisis de Complejidad

- En general, para matrices cuadradas de tamaño $n \times n$ el costo computacional de multiplicar matrices de manera iterativa es $\times(n^3)$
- La relación de recurrencia está dadá por $T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$

Multiplicación de Matrices

- La relación de recurrencia está dada por

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 8T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \\
2 &< \log_2 8 = 3 \\
&\implies T(n) = O(n^{\log_b a}) \\
&= O(n^3)
\end{aligned}
$$

Algoritmo Strassen

En lugar de las 8 multiplicaciones del algoritmo recursivo anteriorm, el algoritmo de Strassen utiliza 7 multiplicaciones. Por lo tanto la relación de recurrencia se convierte en:

$$T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \tag{1}$$

Algoritmo Strassen

En lugar de las 8 multiplicaciones del algoritmo recursivo anteriorm, el algoritmo de Strassen utiliza 7 multiplicaciones. Por lo tanto la relación de recurrencia se convierte en:

$$T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \tag{1}$$

El algoritmo Strassen calcula las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
P &= (A_{1,1} + A_{2,2})(B_{1,1} + B_{2,2}) \\
Q &= (A_{2,1} + A_{2,2})(B_{1,1}) \\
R &= (A_{1,1})(B_{1,2} + B_{2,2}) \\
S &= (A_{2,2})(B_{2,1} + B_{1,1}) \\
T &= (A_{1,1} + A_{2,2})(B_{2,2}) \\
U &= (A_{2,1} + A_{1,1})(B_{1,1} + B_{1,2}) \\
V &= (A_{1,2} + A_{2,2})(B_{2,1} + B_{2,2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{1,1} &= P + S - T + V \\
C_{1,2} &= R + T \\
C_{2,1} &= Q + S \\
C_{2,2} &= P + R - Q + U
\end{aligned}$$