Clase 6

Contenidos

- Ecuaciones Diferenciales como modelos matemáticos.

1 Modelos No Lineales

1.1 Dinámica Poblacional

El modelo poblacional de la clase anterior no es lo suficientemente preciso. En la práctica vemos que poblaciones muy grandes tienden a modificar el comportamiento de su crecimiento producto de efectos propios de la sobrepoblación (contaminación, desabastecimiento, etc). De ahí podemos entender la necesidad de modificar el modelo. Un caso particular es

$$\frac{dP}{dt} = aP - bP^2,$$

que para $a, b > 0$ se conoce con el nombre de **modelo logístico**, y su solución se llama la **curva logística**. Se observa que el modelo logístico no es lineal, pero se puede resolver usando separación de variables:

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dt} &= aP - bP^2 \\
\frac{dP}{aP - bP^2} &= dt, \quad \text{(fracciones parciales)} \\
\left(\frac{A}{P} + \frac{B}{a - bP}\right) dP &= dt
\end{aligned}$$

Resolviendo las fracciones parciales, obtenemos $A = \frac{1}{a}, B = \frac{b}{a}$, por lo que resulta

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{P} + \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{a - bP} dP\right) &= dt \\
\frac{1}{a} \ln|P| - \frac{1}{a} \ln|a - bP| &= t + C_1 \\
\ln|P| - \ln|a - bP| &= at + C_1 \\
\ln\left|\frac{P}{a - bP}\right| &= at + C_1
\end{aligned}$$

de donde obtenemos $\frac{P}{a - bP} = Ce^{at}$, y en consecuencia:

$$P(t) = \frac{aCe^{at}}{1 + bCe^{at}}.$$

Si imponemos la condición inicial $P(0) = P_0$, con $P_0 \neq \frac{a}{b}$, obtenemos $C = \frac{P_0}{a - bP_0}$, obteniendo finalmente:

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-at}}. \tag{1}$$

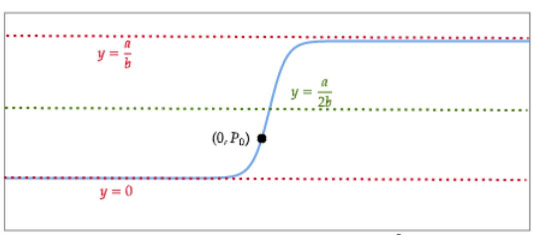
Analizaremos la función logística (1), usando lo aprendido en cálculo. Para ello, vamos a asumir que $a, b, P_0 > 0$. Esta última tiene sentido si pensamos que la P_0 representa la "población inicial" en el modelo.

1. La curva posee dos asíntotas horizontales: $y = \frac{a}{b}$, e $y = 0$, que resultan de estudiar el límite con $t \to \pm\infty$ respectivamente.

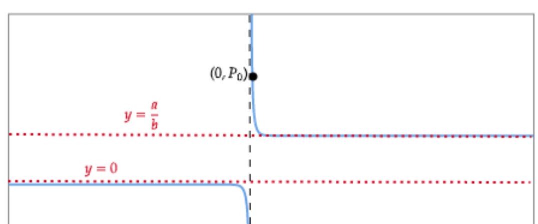
2. Si $0 < P_0 < \frac{a}{b}$, entonces la curva no tiene asíntotas verticales.

3. Como
$$\frac{dP}{dt} = aP - bP^2 = \frac{a^2 P_0 (a - bP_0) e^{-at}}{(bP_0 + (a - bP_0)e^{at})^2},$$
se tiene que $P'(t) > 0 \iff a - bP_0 > 0 \iff P_0 < \frac{a}{b}$.

4. Para los puntos de inflexión, podemos usar la Regla de la Cadena:
$$\begin{aligned}\frac{d^2P}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dP}{dt}\right) = \frac{dP}{dt} \cdot \frac{d}{dP}\left(\frac{dP}{dt}\right) && (2)\\ &= \frac{dP}{dt} \cdot \frac{d}{dP}\left(aP - bP^2\right) && (3)\\ &= \frac{dP}{dt} \cdot (a - 2bP) && (4)\end{aligned}$$
Para $P'(t) > 0$, el único punto que cumple con $\frac{d^2P}{dt^2} = 0$ es aquél que satisface $P = \frac{a}{2b}$, el cual es un punto de inflexión de la curva. Por otra parte, si $P_0 > \frac{a}{b}$, tenemos que $P'(t) < 0$, y el cambio de concavidad se produce en la discontinuidad. De todo lo anterior, el gráfico de la función logística es:



Curva Logística con $0 < P_0 < \frac{a}{b}$



Curva Logística con $P_0 > \frac{a}{b}$

1.2 Otros Modelos No Lineales

Ejercicio 1 *En hidrodinámica, la* **Ley de Torricelli** *establece que la velocidad v de flujo de agua a través de un orificio en el fondo de un tanque lleno hasta una profundidad h es igual a la velocidad que un cuerpo (en este caso, una gota de agua) adquiriría en caer libremente desde una altura h. Si ignoramos los efectos de friccíon y contracción del agua, y asumimos que la gotera tiene forma circular, la altura $h(t)$ de agua que resta en el tanque se describe por*

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_h}{A_w}\sqrt{2gh},$$

donde A_h y A_w corresponden al área de la sección transversal del agujero y del agua, respectivamente.

Resuelva la ecuación anterior, con la condición inicial $h(0) = H$.

Ejercicio 2 *Un modelo simple para la forma de una ola está dada por la ecuación diferencial*

$$\frac{dw}{dt} = w\sqrt{4-2w},$$

donde $w(x) > 0$ es la altura de la ola expresada en términos de la distancia x respecto de un punto fuera de la costa.

Resuelva la ecuación diferencial, con la condición $w(0) = 1$.

Ayuda: $u^2 = 4 - 2w$.

2 Modelación con sistemas de ecuaciones lineales

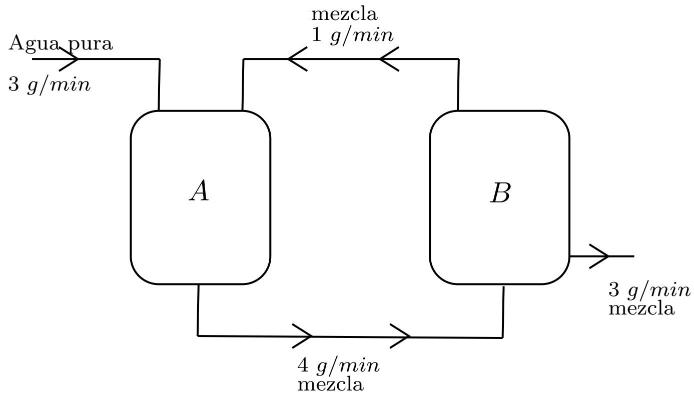
Para cerrar, construiremos algunos modelos que necesitan un sistema de ecuaciones diferenciales. Las técnicas de cómo resolver algunos de estos problemas se verán más adelante en el curso.
El sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= g_1(t,x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= g_2(t,x,y) \end{aligned}\right|$$

se dice **lineal** si $g_i = c_{i1}(t)x + c_{i2}(t)y + c_{i3}(t)$, y **no lineal** en otro caso.

2.1 Mezclas

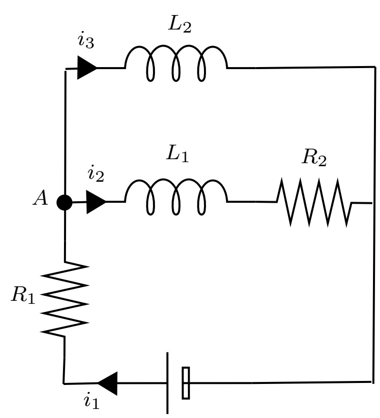
Supongamos dos tanques conectados por mangueras. Para efectos del ejemplo, supongamos que el tanque A tiene 50 galones de agua, en los cuales 25 libras de sal están disueltas. Por su parte, el tanque B tiene 50 galones de agua pura. La forma en la que la mezcla se produce entre los tanques, y la velocidad de salida de la mezcla se muestran en la figura. Construiremos un modelo para describir las libras de sal $s_A(t)$ y $s_B(t)$ presentes en los tanques A y B respectivamente. Tenemos:



$$\begin{aligned}\frac{ds_A}{dt} &= \frac{s_B}{50} - \frac{4s_A}{50}\\ \frac{ds_B}{dt} &= \frac{4s_A}{50} - \frac{3s_B}{50} - \frac{s_B}{50}\\ s_A(0) = 25 \quad &, \quad s_B(0) = 0\end{aligned}$$

2.2 Redes Eléctricas

Consideremos el circuito de la figura siguiente.



En el nodo A tenemos $i_1(t) = i_2(t) + i_3(t)$. Pero además, podemos aplicar la Ley de Kirchhoff en cada ciclo. Tenemos

$$\begin{aligned}E(t) &= i_1R_1 + L_1\frac{di_2}{dt} + i_2R_2\\ E(t) &= i_1R_1 + L_2\frac{di_3}{dt}\end{aligned}$$

Reemplazando $i_1 = i_2 + i_3$ en las Leyes de Kirchhoff, se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}E(t) &= (R_1 + R_2)i_2 + L_1\frac{di_2}{dt} + i_3R_1\\ E(t) &= (i_2 + i_3)R_1 + L_2\frac{di_3}{dt}\end{aligned}$$