

# INTRODUCCION A LAS PROBABILIDADES

# **PROBABILIDADES**

El objetivo de esta unidad es presentar una introducción a la teoría de probabilidades como fundamento para la inferencia estadística, la que finalmente permitirá tomar una decisión sobre el problema de investigación.

# PROBABILIDADES

¿Qué es probabilidad?

Pensemos

Está empezando un partido y queremos decidir quién parte entre los dos capitanes del equipo.

Lanzamos una moneda “balanceada”.

La probabilidad de obtener una “cara” es  $1/2$ .

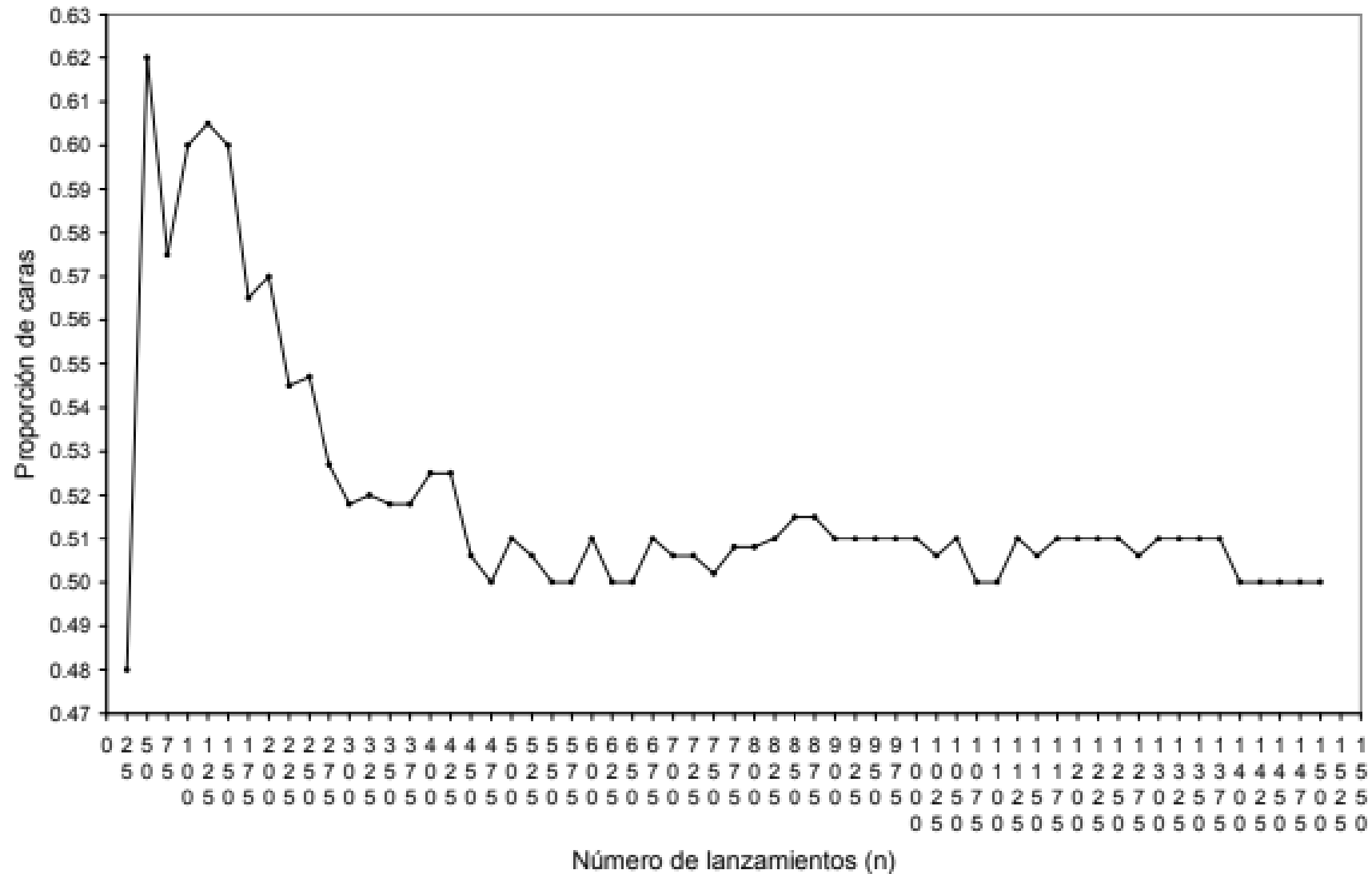
¿Cómo determinamos esa probabilidad de obtener “cara”?

¿Usaría una moneda o monedas diferentes?

¿Cuántas repeticiones haría?

# PROBABILIDADES

Proporción de caras en  $n$  lanzamientos de una moneda



Fuente: Mendenhall, Sincich, 1997

# PROBABILIDADES

Definición frecuencista de probabilidad: La probabilidad de que ocurra un evento es la frecuencia relativa con la que puede esperarse que ocurra ese evento, si fuera repetido muchas veces.

Esta definición frecuencista o empírica es una de las formas como se calculan las probabilidades pero también existen otras aproximaciones como la probabilidad clásica. La probabilidad clásica data del siglo XVII en los trabajos de dos matemáticos, Pascal y Fermat. Gran parte de esta teoría fue creada para intentar resolver problemas relacionados con los juegos de azar y asume que los resultados son equiprobables.

# PROBABILIDADES

## Curiosidades:

- El naturalista francés Count Buffon (1707-1788) lanzó una moneda 4040 veces. Resultado: 2048 caras, proporción  $2048/4040=0,5069$  o 50,69% de caras.
- Alrededor del 1900, el estadístico inglés Karl Pearson lanzó una moneda 24 mil veces! Resultado: 12012 caras, proporción  $12012/24000=0,5005$  o 50,05% de caras.
- Durante la II guerra mundial, el matemático australiano John Kerrich, mientras estaba en prisión lanzó una moneda 10 mil veces. Resultado: 5067 caras, proporción  $5067/10000=0,5067$  o 50,67% de caras.

# PROBABILIDADES

## El lenguaje de Probabilidades.

### Definición:

Un **experimento aleatorio** es un proceso (repetible) cuyo resultado no se conoce de antemano.

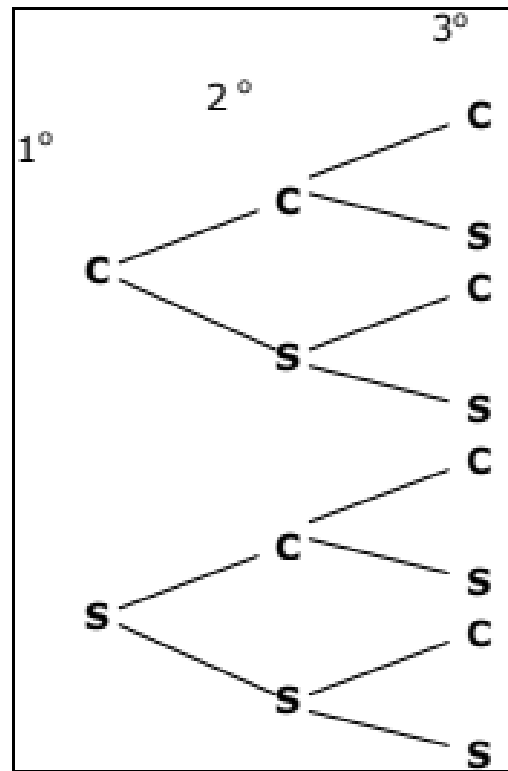
Si se repite un experimento aleatorio bajo las mismas condiciones y anotamos las frecuencias relativas de un suceso, observaremos que estas tienden a estabilizarse alrededor de un número que está entre cero y uno. Este valor recibe el nombre de **probabilidad**.

# PROBABILIDADES

## Espacios Muestrales y Eventos.

Sea el experimento aleatorio = lanzar una moneda tres veces.

Podemos contar el número de resultados posibles de este experimento con un diagrama de árbol:



o escribir los resultados como un conjunto:

$S = \{CCC, CCS, CSC, CSS, SCC, SCS, SSC, SSS\}.$



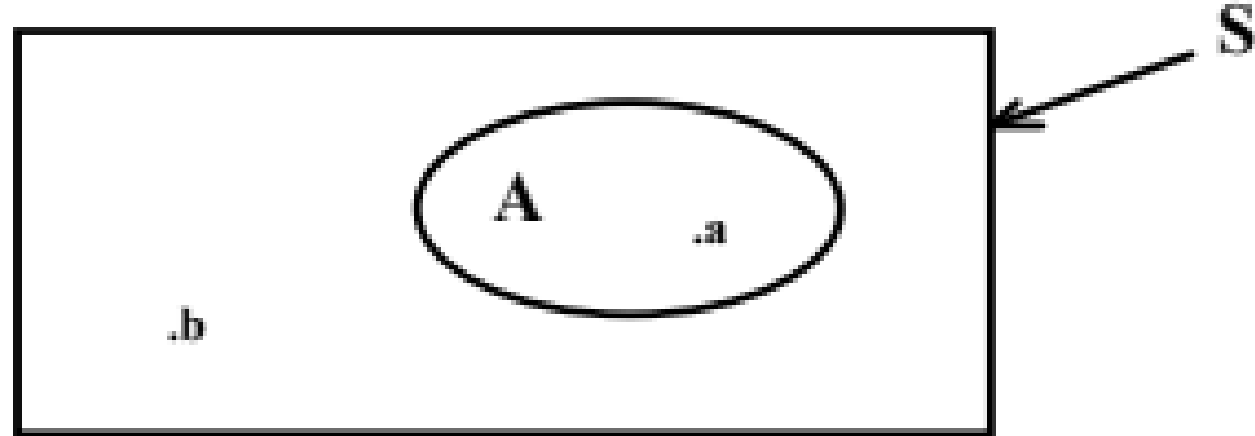
# PROBABILIDADES

## Definiciones:

Un **espacio muestral** es el conjunto de todos los valores posibles de un experimento aleatorio.

Un **evento** es cualquier subconjunto del espacio muestral  $S$ . Se dice que un evento  $A$  *ocurre* si cualquiera de los elementos o resultados en  $A$  ocurren.

Habitualmente se usan los diagramas de Venn, de la teoría de conjuntos, para visualizar el espacio muestral y los eventos.



# PROBABILIDADES

## ☒ Ejemplo

Considere el experimento de lanzar dos dados y se registra los números que aparecen en cada dado.

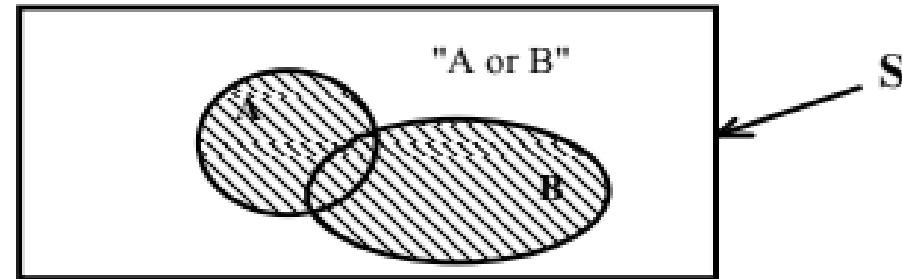
$$S = \{ \begin{array}{cccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{array} \}$$

Marque los resultados que corresponden a los siguientes eventos:

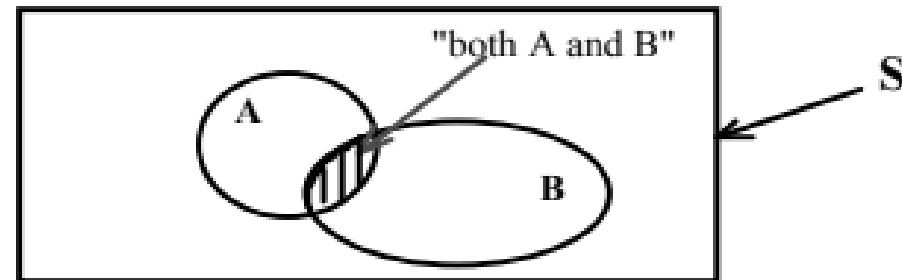
- a) Evento A = "No sale seis".
- b) Evento B = "Sale exactamente un seis".
- c) Evento C = "Salen exactamente dos seis".
- d) Evento D = "Sale al menos un seis".

# PROBABILIDADES

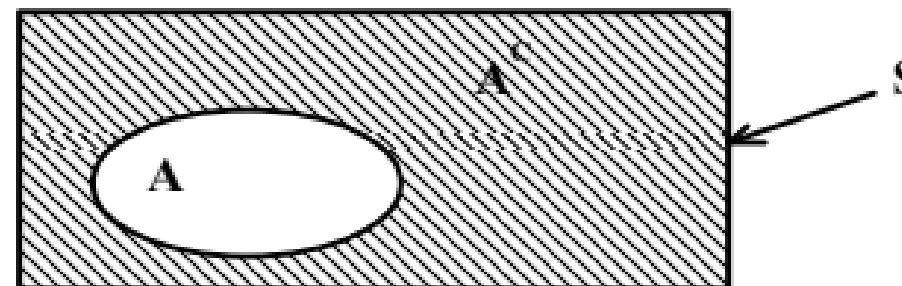
La **unión** de dos eventos, representada por "A o B", se denota por:  $A \cup B$



La **intersección** de dos eventos, representado por "A y B", se denota por:  $A \cap B$



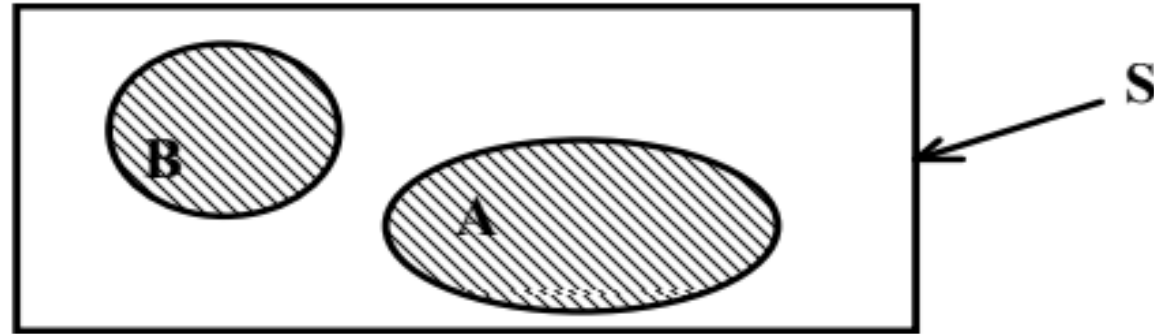
El **complemento** de un evento, representado por "no A", se denota por:  $A^C$



# PROBABILIDADES

## Definición:

Dos eventos A y B son **disjuntos** o **mutuamente excluyentes** si no tienen elementos en común. Así, si un evento ocurre, el otro *no puede* ocurrir.



## ☒ Ejemplo

### ¿Mutuamente excluyentes?

En cada caso, determine si en la siguiente lista de eventos son mutuamente excluyentes:

a) Un vendedor hace una venta:

A = "la venta excede \$5 mil pesos".

B = "la venta excede \$50 mil pesos".

b) Un vendedor hace una venta:

A = "la venta es de menos de \$5 mil pesos".

B = "la venta es de entre \$10 mil y \$50 mil pesos".

C = "la venta es de más de \$100 mil pesos".

# PROBABILIDADES

## Reglas de Probabilidades.

Para cualquier evento A, le asignamos el número  $P(A)$  llamado la **probabilidad del evento A**.

- Le asignamos una probabilidad a cada resultado en el espacio muestral, entre 0 y 1, tal que la suma de estas probabilidades es igual a 1, y
- La probabilidad de cualquier evento es la suma de las probabilidades de los resultados que hacen aquel evento.

Si los resultados del espacio muestral son **equiprobables** (igualmente probables), la probabilidad de un evento A es simplemente la proporción de resultados de A en el espacio muestral.

$$\text{Ley de Laplace : } \frac{\text{número de resultados favorables a A}}{\text{número de resultados posibles}} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

Esta ley es la definición de Probabilidad a priori o clásica

# PROBABILIDADES

## ☒ Asignando Probabilidades a eventos.

Experimento = lanzar dos dados. Asuma que los 36 puntos en el espacio muestral son equiprobables. ¿Cuál es la probabilidad de los siguientes eventos?

$$S = \{ \begin{array}{cccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{array} \}$$

- a) Evento A = " No sale seis"  $P(A) =$
- b) Evento B = "Sale exactamente un seis"  $P(B) =$
- c) Evento C = "Salen exactamente dos seis"  $P(C) =$
- d) Evento D = "Sale al menos un seis"  $P(D) =$
- e) Compare  $1 - P(A)$  con  $P(D)$ .
- f) Considere la suma de los valores de dos dados:

¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma de 3?

¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma de al menos 11?

### Reglas cuando asignamos probabilidades:

1. Cualquier probabilidad es siempre un valor numérico entre 0 y 1. La probabilidad es *cero* si el evento no puede ocurrir. La probabilidad es *uno* si el evento es seguro.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

2. Si sumamos las probabilidades de cada resultado individual en el espacio muestral, la probabilidad total tiene que ser uno.

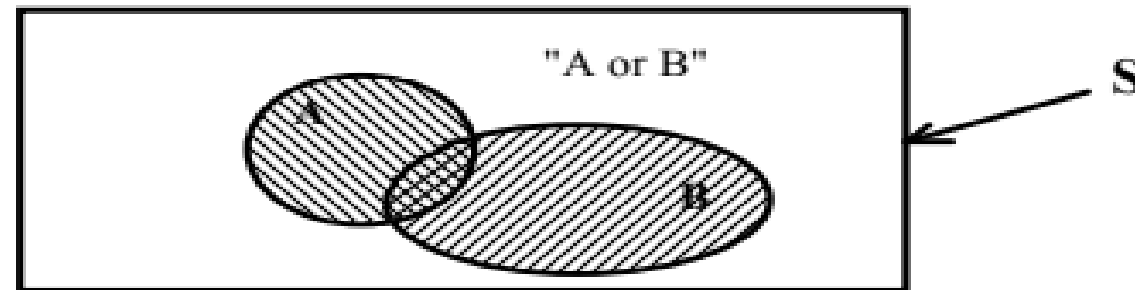
$$P(S) = 1$$

3. La probabilidad de que un evento A ocurra es uno menos la probabilidad de que el evento no ocurra.

$$P(A) = 1 - P(A^C)$$

4. Regla de la suma: La probabilidad de que un evento A o un evento B ocurra es la suma de sus probabilidades individuales menos la probabilidad de la interacción.

$$P(A \text{ o } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Si los dos eventos A y B son **disjuntos**, es decir, no tienen elementos en común, entonces:

$$P(A \text{ o } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

# PROBABILIDADES



## Sexo y educación

Suponga que se registra información sobre sexo y nivel de educación de 200 adultos seleccionados al azar entre los residentes de la comuna de Talca

Sexo	Educación		
	Básica	Media	Universitaria
Hombre	38	28	22
Mujer	45	50	17

Considere los siguientes eventos:

A="adulto seleccionado tiene educación universitaria"

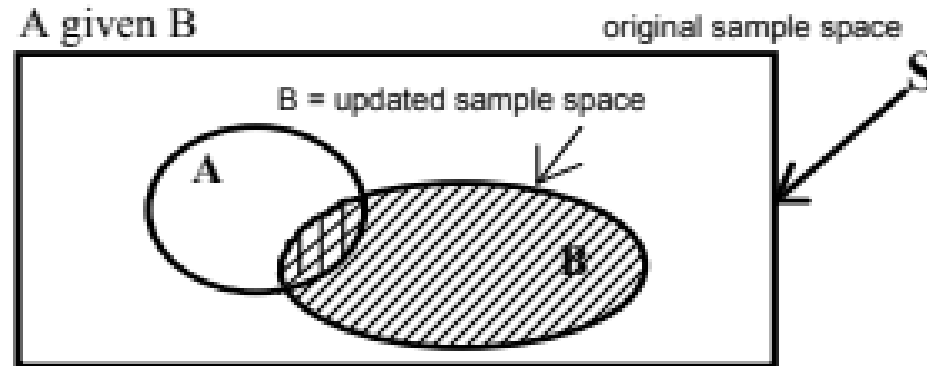
B="adulto seleccionado es mujer"

¿Cuál es la probabilidad de que un adulto seleccionado aleatoriamente tenga educación universitaria o sea mujer?



## Probabilidad Condicional.

En ocasiones, el conjunto de todos los "resultados posibles" puede constituir un subconjunto del espacio muestral original.



### Definición:

La probabilidad condicional de que ocurra el evento  $A$  dado que el evento  $B$  ocurrió está dada por:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ donde } P(B) > 0$$

**Nota:** de esta relación se deduce que podemos escribir la intersección de otra manera usando la **regla de la multiplicación**:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B | A) = P(B)P(A | B)$$

# PROBABILIDADES

Ejemplo:

El año 2016 cierta universidad tenía 5453 estudiantes, en la tabla se muestra el detalle de la composición.

	Mujeres	Hombres	Total
<b>Pregrado</b>	2461	2848	5309
<b>Postgrado</b>	67	77	144
<b>Total</b>	2528	2925	5453

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante elegido al azar sea un estudiante de postgrado?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante sea una mujer y sea estudiante de postgrado?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante sea hombre, dado que es estudiante de postgrado?



## Probabilidades condicionales.

### Escenario I

Sea el experimento de lanzar un dado.

El espacio muestral es  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

- a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un dos?
- b) Suponga que sabemos que el resultado es par, ¿Cuál es ahora la probabilidad de obtener un dos?

### Escenario II

Sea el experimento de lanzar una moneda dos veces.

El espacio muestral es  $S = \{CC, SC, CS, SS\}$ .

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que salga cara en el segundo lanzamiento?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que salga cara en el segundo lanzamiento dado que salió cara en el primer lanzamiento?



Pensemos

Compare los resultados en los dos escenarios

En el segundo caso, la información no cambió la probabilidad buscada, es decir saber que "salió cara en el primer lanzamiento" no cambió la probabilidad de "que salga cara en el segundo lanzamiento".

Esto es así porque los lanzamientos de la moneda son eventos independientes.

# PROBABILIDADES

## Definición:

Dos eventos A y B son **independientes** si:

$$P(A \mid B) = P(A), \text{ o } P(B \mid A) = P(B).$$

Si saber que un evento ocurrió no cambia la probabilidad de ocurrencia del otro evento, entonces los eventos son independientes.

Si dos eventos A y B son **independientes**, entonces la regla de la multiplicación:  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$  .

# PROBABILIDADES



SERNAC realiza una encuesta acerca de la calidad del servicio de reparación de automóviles en 86 talleres:

Taller	Atención	
	Buena	Regular
Autorizado	18	6
No autorizado	34	28

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que un taller elegido al azar dé una buena atención?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que un taller elegido al azar sea no autorizado?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que un taller elegido al azar sea no autorizado y dé una buena atención?
- d) ¿Cuál es la probabilidad de que los talleres no autorizados den una buena atención?
- e) ¿Son los eventos "no autorizado" y "buena atención" **disjuntos**?
- f) ¿Son los eventos "no autorizado" y "buena atención" **independientes**?
- g) Si fueran independientes, ¿Cuántos talleres no autorizados que dan buena atención esperarías encontrar?

**Reglas básicas de Probabilidad:**

1. La probabilidad de que un evento  $A$  ocurra se denota por  $P(A)$ . Para cualquier evento  $A$ ,  $0 \leq P(A) \leq 1$ .
2. La suma de todas las probabilidades de los resultados en el espacio muestral tiene que ser igual a uno:  $P(S) = 1$
3. **Regla del Complemento:** La probabilidad de que un evento ocurra es 1 menos la probabilidad que el evento no ocurra.  $P(A) = 1 - P(A^C)$
4. **Regla de la Suma:** La probabilidad de que el evento  $A$  o el evento  $B$  ocurra es la suma de sus probabilidades individuales menos la probabilidad de la intersección:

$$P(A \cup B) = P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Si  $A$  y  $B$  son eventos mutuamente excluyentes (o disjuntos), entonces:

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B).$$

5. La **probabilidad condicional** de que ocurra un evento  $A$ , dado que ocurrió el evento  $B$  está dada por:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ donde } P(B) > 0.$$

De aquí sale la **regla de la multiplicación**:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B | A) = P(B)P(A | B).$$

Si dos eventos no se influyen entre sí, es decir, saber que uno ocurrió no cambia la probabilidad de que el otro ocurra, los eventos son independientes.

Dos eventos  $A$  y  $B$  son **independientes** si  $P(A | B) = P(A)$ ,  
o equivalentemente  $P(B | A) = P(B)$ , o equivalentemente  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ .

Acti  
Ve a

# PROBABILIDADES

## Ejemplo 1:

La probabilidad de que un hombre vea cierto programa de televisión es 0,4 y la probabilidad de que una mujer vea el programa es 0,5. La probabilidad de que un hombre vea el programa, dado que la mujer lo hace, es 0,7. Encuentre la probabilidad de que:

- a. Juntos vean el programa.
- b. La mujer vea el programa dado que el hombre lo ve.
- c. al menos una persona vea el programa.
- d. ¿Los eventos son disjuntos o mutuamente excluyentes?  
Justifique
- e. ¿Los eventos son independientes? Justifique

# PROBABILIDADES

## Ejemplo 2:

Supongamos que los 200 obreros de una compañía se clasifican desde el punto de vista de su calificación y desde el punto de vista de la antigüedad, según la tabla siguiente:

Antigüedad Calificación	Totales	Menos de 5 años(M)	Más de 5 años(N)
Totales	200	40	160
Experto(E)	140	25	115
Aprendiz(A)	60	15	45

- Si se selecciona uno de estos obreros aleatoriamente, encuentre la probabilidad de que el obrero sea experto, dado que tiene más de 5 años de antigüedad.
- ¿Son los eventos aprendiz y menos de 5 años de antigüedad independientes? Justifique su respuesta.
- ¿Cuántos obreros aprendices y con menos de 5 años de antigüedad esperaríamos encontrar en este grupo si los eventos fueran independientes? Justifique su respuesta.