Clase 8 - Unidad 2

Contenidos

- Movimiento Resorte-Masa, Movimiento Forzado.

Sistema Resorte Masa Movimiento Forzado.
Recordemos que la ecuación diferencial

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt},$$

representa un problema de movimiento de un resorte descrita por la Segunda Ley de Newton, donde consideramos una masa en un resorte, la elongación propia del resorte hasta un punto de equilibrio y el movimiento que se genera al soltar la masa en una posición distinta, considerando una fuerza de roce generada por el medio. Una pregunta natural es ¿Qué ocurre si aplicamos una fuerza externa? El movimiento es forzado por esta fuerza de la que interfiere en nuestro modelo quedando de la forma :

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= -kx - \beta\frac{dx}{dt} + f(t) \\ m\frac{d^2x}{dt^2} + +\beta\frac{dx}{dt} + kx &= f(t) \end{aligned}$$

quedando,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + w^2x = F(t) \tag{1}$$

Observación 1 *En la ecuación (1), podemos encontrar su solución por coeficientes indeterminados o variación de parámetros, del modo que sea tendremos una solución de la forma* $x = x_c + x_p$.

La solución x_c es la solución de la ecuación diferencial homogénea, que es solución a un problemas libre amortiguado (sin fuerza externa). Recordemos que si $\lambda \neq 0$ nuestras soluciones son de la forma:

$$x_c(t) = e^{-\lambda t}g(t),$$

donde g es una suma de funciones exponenciales, un polinomio o bien una suma de funciones trigonométricas.

Si $\lambda > 0$ y la solución particular x_p es una función periódica, se tiene que, si $t \to \infty$, entonces $x_c \to 0$. En este caso se dice que x_c es solución transitoria (termino transitorio) y x_p es solución estable (termino de estado estable).

Ejemplo 1 *Un sistema vibratorio consiste en una masa de* 500 *gramos y con* $k = 2\frac{N}{m}$. *Estando en el punto de equilibrio, al sistema se le imprime una fuerza externa determinada por* $f(t) = 3\cos(t)$ *(en Newtons).*

- *Determine la Ecuación diferencial, encontrando el modelo del problema.*
- *Resuelva la ecuación diferencial.*

Clase 8 - Unidad 2

Efecto de Resonancia Considere el siguiente modelo generalizado del ejemplo anterior

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \sin(\gamma t), \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

Resuelva el modelo en el caso $\omega = \gamma$, que se conoce como **efecto de resonancia pura**.

Circuitos en Serie.

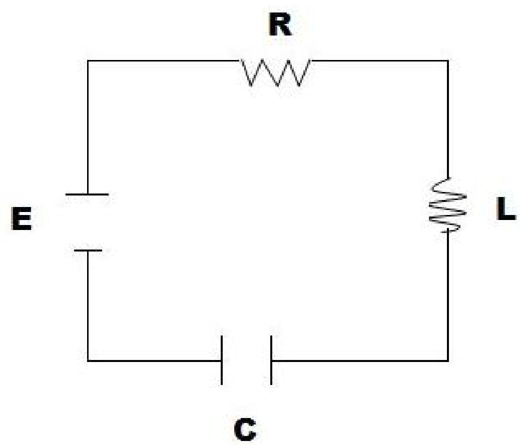
Si $i(t)$ es la corriente, Mediante la Ley de Kirchhoff se tiene que las caídas de voltaje en el inductor, resistor y capacitor, la suma de estos voltajes es igual al voltaje $E(t)$ aplicado al circuito,

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = E(t).$$

Con $q(t)$ la carga del capacitor se relaciona con $i(t) = \frac{dq}{dt}$, se tiene:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t) \tag{2}$$

Note que (2) es una ecuación diferencial lineal de segundo orden.



Ejercicio 1 *Determine en que caso se dice que el circuito es sobreamortiguado, crtícamente amortiguado, subamortiguado.*

Observación 2 *En el caso de la estabilidad del modelo el análisis es equivalente al modelo Resorte-Masa.*

Ejercicio 2 *Encuentre la carga $q(t)$ en el capacitor del circuito en serie LRC cuando $L = 0.25H$, $R = 10\Omega$, $C = 0.001F$, con $E(t) = 0$, $q(0) = q_0$ y $i(0) = 0$.*