Clase 1

Contenidos

- Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior.

1 Ecuaciones Lineales

Por una **ecuación diferencial lineal de orden** n nos referimos a

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \tag{1}$$

Y si queremos resolver un **Problema de Valor Inicial**, entonces existen condiciones de base:

$$\begin{aligned} a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y &= g(x) \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{n-1}(x_0) &= y_{n-1} \end{aligned} \tag{2}$$

Este tipo de problemas también tienen asociado un Teorema de Existencia y Unicidad:

Teorema 1 *Sea I un intervalo que contiene al punto x_0. Si las funciones $a_i(x)$ son continuas sobre un intervalo I, y además $a_i(x) \neq 0$ en I, entonces el problema de valor inicial (2) tiene una única solución en del intervalo I.*

Ejemplo: El PVI

$$\begin{aligned} 3y''' + 5y' + 7y' - 2y &= 0 \\ y(1) = 0, y'(1) = 0, y''(1) &= 0 \end{aligned}$$

tiene solución (y además es única) en cualquier intervalo I que contenga a $x = 1$.

Ejemplo: En el PVI

$$\begin{aligned} x^2y'' - 2xy' + 2y &= 6 \\ y(0) = 3, y'(0) &= 1 \end{aligned}$$

Al considerar un intervalo I que contenga a $x = 0$, las funciones $a_1(x) = x^2, a_2(x) = -2x$ no cumplen la condición $a_i(x) \neq 0,\ \forall x \in I$, por lo que el Teorema no aplica, y podríamos tener problemas de existencia, o bien, de unicidad. De hecho, en este caso podemos comprobar directamente que la familia de funciones $y(x) = cx^2 + x + 3,\ c \in \mathbb{R}$ resuelve la ecuación diferencial, por lo que claramente tenemos problemas de unicidad.

Otro tipo de problemas consiste en resolver la ecuación diferencial lineal de orden n $(n \geq 2)$ en la cual se especifican condiciones para la función y sus derivadas en puntos distintos. Este tipo de problemas se llaman **Problemas con Valor de Frontera**, y a diferencia de los PVI, el Teorema anterior no es aplicable a este tipo de problemas.

Ejemplo: Las existencia y unicidad de los PVF dependen fuertemente de las condiciones iniciales que se le entreguen al sistema. Para la ecuación diferencial $y'' + 16y = 0$, cuya solución general es dada por $y(x) = A\cos(4x) + B\sin(4x)$. Tenemos distintas posibilidades:

1. Si $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0$, el problema tendrá **solución única**.
2. Si $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, el problema **no tiene solución**.
3. Si $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, el problema **tiene infinitas soluciones**.

1.1 Ecuaciones Homogéneas

Una ecuación diferencial lineal de orden n de la forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{3}$$

se dice **homogénea**, mientras que

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \tag{4}$$

se denomina **no homogénea**.
El resultado más importante que vamos a usar en esta sección es que para resolver las no homogéneas, debemos resolver primero las homogéneas. Por este motivo, nos concentraremos primero en estas últimas.

Observación: En lo que sigue, y a menos que se especifique lo contrario, en esta clase trabajaremos con el hecho que las funciones $a_i(x)$ son continuas sobre un intervalo I, y además $a_i(x) \neq 0$ en I.

Una forma distinta de entender la derivación, es verla como un **operador** que transforma una función en otra. En tal caso, usaremos la letra mayúscula D para referirnos al **operador diferencial**, el cual toma una función diferenciable f, y la lleva a la función derivada de f :

$$D(f) \equiv \frac{df}{dx}$$

Observaciones Importantes

1. $D(\alpha f + g) = \alpha D(f) + D(g)$
2. $D^2(f) \equiv D(D(f)) = \dfrac{d^2 f}{dx^2}$, y en general, $D^n(f) \equiv \dfrac{d^n f}{dx^n}$
3. En general, se puede definir un **operador diferencial de orden** n como

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)$$

   de modo tal que la ecuación (4) se escribe ahora de una forma mucho más abreviada: $L(f) = g(x)$

Ejercicio: Muestre que el operador $L = D^2 - 1$ es tal que $L(e^{2x}) = 3e^{2x}$ y $L(x) = -x$.

Ejercicio: Muestre que el operador $L = x^2D^2 + xD$ anula a la función $f(x) = \ln(x)$.

Teorema 2 *Si $y_1, y_2, \ldots, y_k$ son soluciones de la ecuación diferencial homogénea de orden n (3), entonces la combinación lineal*

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$$

también es solución de (3).

Dicho de otro modo, el conjunto $\{f : L(f) = 0\}$ es un subespacio vectorial.

Corolario: Automáticamente, la función nula $y = 0$ es siempre solución de cualquier ecuación homogénea del tipo (3).

Ya que hemos establecido una conexión con el curso de Álgebra Lineal, es el momento de definir terminología afín:

Definiciones:

1. Un conjunto de funciones $f_1, f_2, \dots f_n$ se dice **linealmente dependiente** sobre un intervalo I, si existen constantes $c_1, c_2, \dots c_n$, no todos nulos, tales que
$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots c_n f_n = 0$$
2. Si el conjunto $f_1, f_2, \dots f_n$ no es linealmente dependiente, se dice **linealmente independiente**.
3. n soluciones linealmente independientes de la ecuación $L(f) = 0$ se denominan **conjunto fundamental de soluciones** sobre el intervalo I. (*base del subespacio vectorial* $L(f) = 0$)
4. Si las funciones $f_1, f_2, \dots f_n$ son $n - 1$ veces diferenciables, entonces se define el **Wronskiano** por el determinante:
$$W(f_1, f_2, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Teorema 3 (Existencia el Conjunto Fundamental) *Para cualquier ecuación diferencial lineal y homogénea de orden n, $L(f) = 0$, siempre existe un conjunto fundamental de soluciones sobre un intervalo I.*

Teorema 4 (Criterio para la Independencia Lineal) *Sean $f_1, f_2, \dots, f_n$ soluciones de la ecuación (3) sobre un intervalo I. El conjunto $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ es linealmente independiente sobre I si y solo si el Wronskiano $W(f_1, f_2, \dots, f_n) \neq 0, \ \forall x \in I$.*

Ejercicio: Verifique que las funciones $f(x) = \cos(x), g(x) = \sin(x)$ son linealmente independientes en todo $\mathbb{R}$.

Ejercicio: Verifique que las funciones $f_1(x) = \sqrt{x} + 5, \ f_2(x) = \sqrt{x} + 5x, \ f_3(x) = x - 1$ son linealmente dependientes en el intervalo $]0, +\infty[$.

1.2 Ecuaciones No Homogéneas

Una función y_p, libre de parámetros, que satisface la ecuación no homogénea (4) se llama una **solución particular**. Quizás la observación más importante de esta sección es que la diferencia de dos soluciones particulares de (4), entrega una solución de la ecuación homogénea (3). En efecto, si $L(y_1) = g(x)$ y $L(y_2) = g(x)$, entonces
$$L(y_1 - y_2) = L(y_1) - L(y_2) = g(x) - g(x) = 0$$
Esta observación es clave, porque entrega una estrategia para resolver las ecuaciones no homogéneas:

1. Resuelva la ecuación homogénea asociada.

2. Encuentre una solución particular. (cualquier otra particular se obtiene a partir de esta, sumando una función que resuelva la parte homogénea)

Mejor aún, tenemos un teorema que generaliza lo anterior:

Teorema 5 (Principio de Superposición para Ecuaciones No Homogéneas) *Suponga que para cada $i = 1, 2, ..., k$, la función y_i es una solución particular de la ecuación diferencial $L(f) = g_i(x)$. Entonces, la suma $y = y_1 + y_2 + ... + y_k$ es una solución particular de*

$$L(f) = g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_k(x)$$

Ejercicio: Sea $L = D^2 - 3D + 4$.

1. Verifique que $L(e^{-x}) = 8e^{-x}$
2. Verifique que $L(x) = 4x - 3$
3. Encuentre una solución particular para la ecuación diferencial

$$L(f) = 6e^{-x} - 8x + 6$$