

Clase: Modelos de Flujo en Redes

1

Introducción

- Muchos problemas de administración en áreas tales como diseño de redes de transporte, diseño de sistemas de información y planeación de proyectos han sido resueltos en forma exitosa con la ayuda de modelos de flujo en redes y de métodos de solución para este tipo de modelos.

2

Introducción

- Resulta importante identificar que problemas que pueden ser modelados como redes porque:
 - La representación de redes hace que la optimización de los modelos sea más fácil de visualizar y explicar.
 - Existen algoritmos muy eficientes para resolver problemas de redes.

3

Representación de Redes

- Las redes pueden ser representadas por grafos.
- Un grafo es una estructura abstracta que se representa a través de dos conjuntos de objetos:
 - Un conjunto de **nod**os y un conjunto con sus relaciones de interdependencia, denominadas de **arcos** o **aristas**.

4

Representación de Redes

- Cada nodo generalmente es denotado por su nombre.
- Cada arco conecta dos nodos y, por lo tanto, se representa por un par (nodo1, nodo2).
- Un arco que incide sobre un nodo es un arco que finaliza en él.

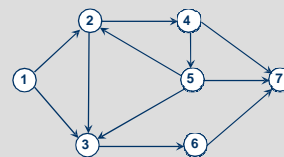
5

Terminología Básica de Grafos

Grafo
 $G = (N, A)$

Conjunto de Nodos:
 $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

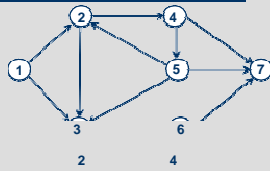
Conjunto de Arcos:
 $A = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 6), (4, 5), (4, 7), (5, 2), (5, 3), (5, 7), (6, 7)\}$



6

Grafos Dirigidos y No Dirigidos

Grafo Dirigido:



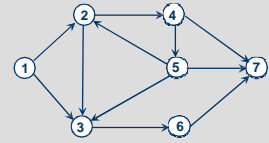
Grafo No Dirigido:



7

Antecesoros y Sucesores de un Nodo

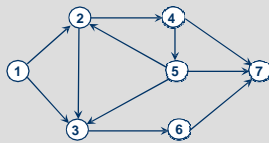
- **Nodo Sucesor:** Si existe un arco (i, j) , el nodo j es el sucesor de i .
- **Nodo Antecesor:** Si existe un arco (i, j) , el nodo i es el antecesor de j .



8

Caminos y Ciclos

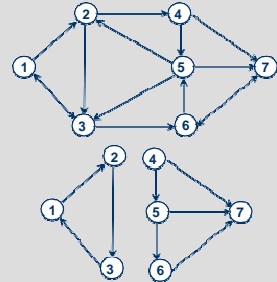
- **Camino:** es una secuencia de arcos en que todos los nodos visitados son distintos.
- **Circuito:** Es un camino que empieza y termina en el mismo nodo.



9

Conectividad de la Red

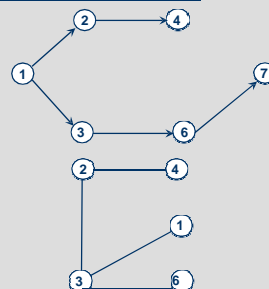
- **Grafo Conexo:** Si para cada par de nodos existe por lo menos un camino.
- **Grafo Fuertemente Conexo:** Si cada par de nodos está conectado por un camino *directo*.
- **Grafo No Conexo:** Si algún par de nodos no está conectado por un camino.



10

Árboles

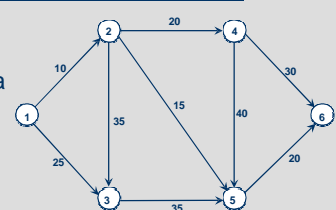
- **Árbol:** es un grafo conexo que no contiene circuitos.
- Un árbol para n nodos contiene exactamente $(n - 1)$ arcos.
- Un árbol tiene por lo menos dos nodos hoja.
- Todos los pares de nodos de un árbol están conectados por un único camino.



11

Grafo Ponderado

- Un grafo ponderado es aquel donde cada arco está asociado a un número real, denominado de peso.



12

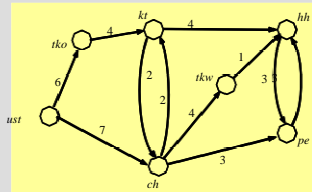
Problema de la Ruta más Corta

- El objetivo de este problema es determinar la ruta más corta entre un punto de origen y un punto de destino en una red.
- Este problema surge en muchas situaciones prácticas.
- Un ejemplo puede ser encontrar en un mapa la ruta más corta desde una determinada ciudad a otra.

13

Ejemplo 1

- Se desea viajar desde UST hacia HH.
- En el mapa simplificado de las rutas, cada peso en los arcos representa la distancia medida en km.
- El objetivo es encontrar la ruta más corta entre UST y HH.



14

Formulación Matemática

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } z = \sum_{(i,j) \in A} d_{ij} x_{ij} \\ \text{s.a. } &\sum_{(j,k) \in A} x_{jk} - \sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = 0, \forall j \neq s, t \\ &\sum_{(x,k) \in A} x_{sk} - \sum_{(i,s) \in A} x_{is} = 1, \text{ para el nodo } s \\ &\sum_{(x,k) \in A} x_{tk} - \sum_{(i,t) \in A} x_{it} = -1, \text{ para el nodo } t \\ &x_{ij} \in \{0,1\}, \forall (i,j) \in A \end{aligned}$$

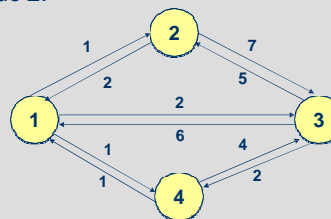
Donde:

- A = conjunto de los arcos de la red,
- d_{ij} = longitud del arco que conecta el nodo i al nodo j ,
- $x_{ij} = 1$ si es realizada la ruta desde el nodo i al nodo j , 0 en el caso contrario.
- s = nodo de origen,
- t = nodo de destino.

15

Ejemplo 2

- Encuentre la ruta más corta entre el nodo 3 y el nodo 2.



16

Problema de Flujo Máximo

- Consiste en determinar la **máxima cantidad de flujo** (fluidos, vehículos, mensajes, materiales, etc.) que puede ser enviada por un sistema de redes, en un determinado período de tiempo.
- Esta cantidad de flujo está limitada por las restricciones de capacidad de cada arco de la red, denominadas **capacidades de flujo**.

17

Aplicaciones del Problema de Flujo Máximo

- Existen muchas aplicaciones de este problema, especialmente en el área de planificación de redes, tales como:
 - Redes de comunicación
 - Redes de transmisión de energía
 - Redes de distribución de agua potable
 - Redes de gaseoductos y de oleoductos,
 - Redes de evacuación (vías de emergencia)
 - Tráfico en las ciudades
 - Distribución de productos hacia los puntos de venta
 - Etc.

18

Aplicaciones del Problema de Flujo Máximo

- Aplicaciones en la transmisión de energía:
- ¿Cuál es el flujo máximo de energía eléctrica (GWh) que se puede garantizar a Santiago?



19

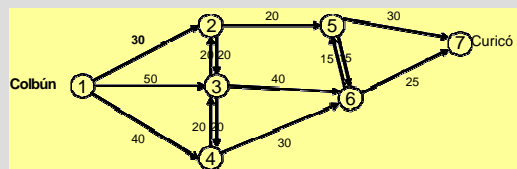
Problema de Flujo Máximo

- En un problema de flujo máximo, todos los flujos de la red se originan en un nodo (origen, fuente) y terminan en otro (destino, sumidero),
- El objetivo es maximizar el flujo total desde el **nodo origen** al **nodo destino**, sujeto a las capacidades máximas de cada arco.

20

Ejemplo

- Red de capacidades máximas de transmisión de energía (MWh) entre las diferentes subestaciones del Sistema Interconectado Central para abastecer a la ciudad de Curicó.



21

Formulación Matemática

Maximizar $z = v$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{(j,k) \in A} x_{jk} - \sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = 0, \forall j \neq s, t$$

$$\sum_{(s,k) \in A} x_{sk} - \sum_{(i,s) \in A} x_{is} = v, \text{ para el nodo } s$$

$$\sum_{(r,k) \in A} x_{rk} - \sum_{(i,t) \in A} x_{it} = -v, \text{ para el nodo } t$$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$$

$$v \geq 0$$

Donde:

- N = conjunto de los nodos de la red,
- A = conjunto de los arcos de la red,
- x_{ij} = cantidad de flujo del nodo i al nodo j ,
- u_{ij} = capacidad máxima del arco (i, j) ,
- s = nodo de origen,
- t = nodo de destino,
- v = flujo máximo desde el nodo s al nodo t .

Problema de Flujo Máximo

- En algunas aplicaciones, los flujos se originan en más de un nodo fuente y terminan en más de un nodo de destino.
- Para estos casos se deben usar nodos artificiales de fuente y destino.

23