Modellbildung und Simulation
PC-Übung

Prof. Dr.-Ing. Th. Köller
Fakultät EIT

Simulation einer RLC- Schaltung

Das Einschwingverhalten einer RLC-Schaltung (Schwingkreis) an einer sinusförmigen Spannungsquelle soll untersucht werden.

Parameter der Schaltung: $\hat{u}=2\,\mathrm{V}$, $f=1\,\mathrm{Hz}$, $R=20\,\Omega$, $L=9\,\mathrm{mH}$, $C=1000\,\mu\mathrm{F}$.

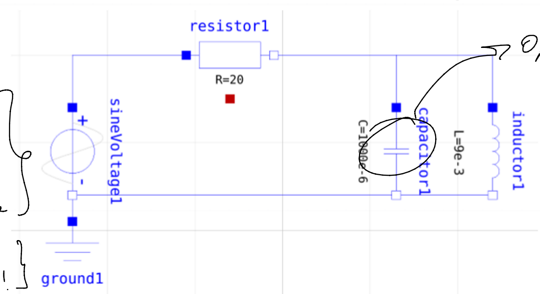
Aufgabe 1: Analysieren Sie die Lösung über die Zustandsraumdarstellung (`A1_vorlage.py`) mit Hilfe der Funktion `solve_ivp`. Ergänzen Sie die beiden Gleichungen der Zustandsdarstellung! ~~Entfernen Sie~~ ~~method='LSODA'~~. ~~Was passiert~~? Begründen Sie ausführlich, warum sich die Schaltung annähernd rein ohmsch verhält. ← Resonanz!

ist Reellwertig →

$\frac{1}{j\omega C} \overset{!}{=} j\omega L$ beweisen!

Aufgabe 2: Lösen Sie die Aufgabe mit der Verknüpfung von Python und Modelica-Code.

Aufgabe 3: Lösen Sie die Aufgabe mit Python/OpenModelica (modularer Ansatz). Setzen Sie die Parameter R, L und C in Ihrem Python-Skript.



Analog ↳ Sources ↳ Sine Voltage

Nicht vgs. Ist owe Bezug!

→ Open Class $\boxed{L * der(i) = v}$

elec Zentral

↳ one Port

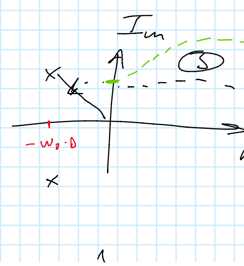
Das ist eine Zweipol Darstellung.

Aufgabe 4: Welche charakteristische Frequenzen können Sie in der Ausgangsspannung erkennen? Wie nennt man diese Frequenzen?

53 Hz ← thomsonsche Freq.

------ Selbständige Weiterarbeit--

Aufgabe 5: Stellen Sie händisch eine Übertragungsfunktion $G=\frac{U_a(s)}{U_e(s)}$ auf und berechnen Sie die Pole von G sowie die Eigenwerte der Systemmatrix. Geben Sie die Übertragungsfunktion in Python ein, berechnen Sie die gedämpfte Eigenfrequenz (vergleichen Sie mit Aufgabenteil 4) und zeichnen Sie das Bode-Diagramm ($100\,\mathrm{s}^{-1}<\omega<1000\,\mathrm{s}^{-1}$)!
Tipp: `signal.TransferFunction`, `signal.bode`, `.poles`, `.imag`



$\sqrt{1-D^2}\,\omega_0$: Eigenfreq. der gedämpfte Schwingung
↖ ist die Dämpfung

den Abst. ist das ω_0
= Eigenkreisfreq. (ω_0)

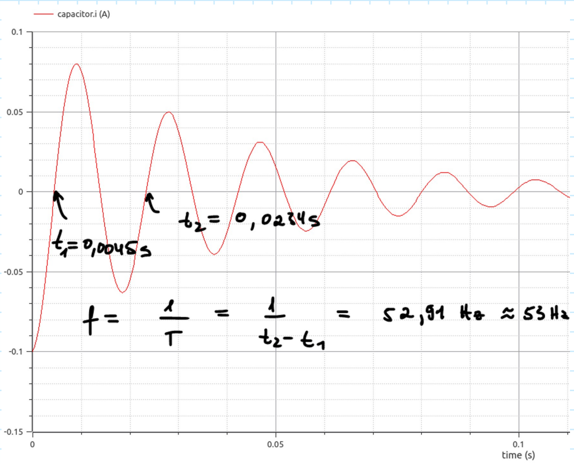
$\omega_r = \sqrt{1-2D^2}\cdot\omega_0$: Resonanzfreq.

$$f(n) = \frac{1}{\frac{1}{\omega_0^2} s^2 + \frac{2D}{\omega_0} s + 1}$$

$\omega_r = \sqrt{1 - 2D^2} \cdot \omega_0$: Resonanzfreq.

Aufgabe 4:

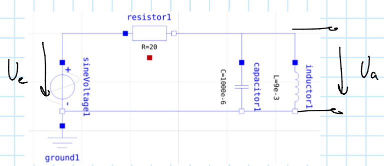
Schwingkreis wird mit einer konstanten Spannung angeregt. Beim Anschalten dieser Spannung ergibt sich folgende Sprungantwort:



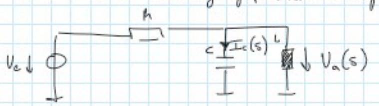
Anhand der Nulldurchgänge kann die Frequenz berechnet werden.

Aufgabe 5:

Aufgabe 5: Stellen Sie händisch eine Übertragungsfunktion $G = \frac{U_a(s)}{U_e(s)}$ auf und berechnen Sie die Pole von G sowie die Eigenwerte der Systemmatrix. Geben Sie die Übertragungsfunktion in Python ein, berechnen Sie die gedämpfte Eigenfrequenz (vergleichen Sie mit Aufgabenteil 4) und zeichnen Sie das Bode-Diagramm ($100\,s^{-1} < \omega < 1000\,s^{-1}$)!
Tipp: `signal.TransferFunction`, `signal.bode`, `.poles`, `.imag`



Für die Übertragungsfunktion $G(s)$ gilt:



	Komplexe Rechnung	Laplace-Bereich
C	$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$	$Z_C(s) = \frac{1}{sC}$
L	$\underline{Z}_L = j\omega L$	$Z_L(s) = sL$

$$U_a = U_e \cdot \frac{Z_C \parallel Z_L}{Z_C \parallel Z_L + R}$$

$$G(s) = \frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{1 + \frac{R}{Z_C \parallel Z_L}}$$

$$// \quad Z_C \parallel Z_L = \frac{\frac{1}{sC} \cdot sL}{\frac{1}{sC} + sL} \quad \Big| \cdot sC$$

$$= \frac{sL}{1 + s^2 LC}$$

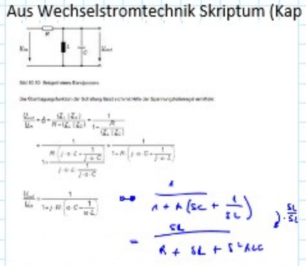
$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{R}{\frac{sL}{1+s^2LC}}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{R + s^2 RLC}{sL}} \quad \Big| \cdot \frac{sL}{sL}$$

$$= \frac{sL}{s^2 RLC + sL + R}$$

$\xrightarrow{\text{Check}}$

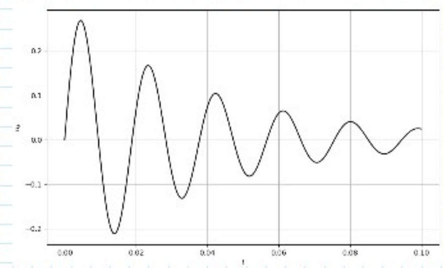
Aus Wechselstromtechnik Skriptum (Kap 10.4 Bandpass):



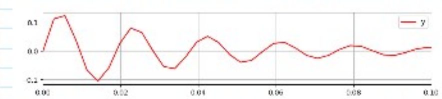
Somit kann man bestätigen, dass die ausgerechnete Übertragungsfunktion stimmt.

Vergleich Sprungantwort:

OME Modell:



Berechnete Übertragungsfuntion in Python:



Berechnung der Polen:

$$s^2 RLC + sL + R = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{RLC}$$

$$s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}$$

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

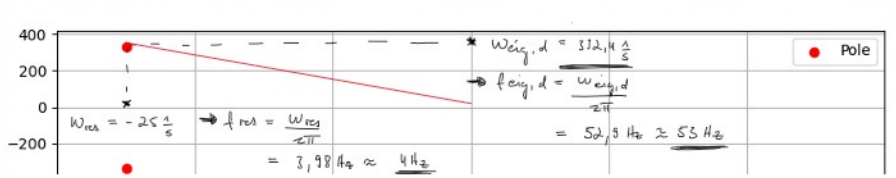
$$\boxed{\begin{aligned} \text{mit } R &= 20\,\Omega \\ L &= 9\,mH \\ C &= 1\,mF \end{aligned}}$$

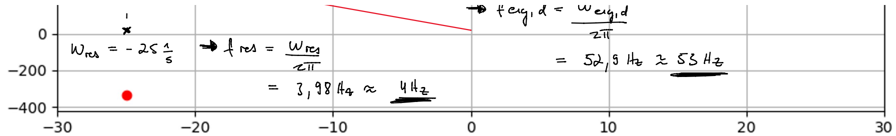
$$= -\frac{1}{40 \cdot 10^{-3}} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{40 \cdot 10^{-3}}\right)^2 - \frac{1}{9 \cdot 10^{-6}}}$$

$$= -25 \pm \sqrt{625 - 111'111,111}$$

$$= -25 \pm j\,332,4$$

Mit Signal.polen berechnete Polenwerte:





$$\omega_{eig} = \sqrt{Im^2 + Re^2} = \sqrt{25^2 + 332{,}8^2} = \underline{333{,}3 \ \tfrac{1}{s}}$$

$$\rightarrow f_{eig} = \frac{\omega_{eig}}{2\pi} = 53{,}05 \text{ Hz} \approx \underline{53 \text{ Hz}}$$

Nützliche Info:

Aus Skript Systemtheorie (9.3.5 PT2-Glied pg. 390)

Übertragungsfunktion im Laplace-Bereich

Durch Transformation von Gleichung (9.131) in den Laplace-Bereich ergibt sich die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{1 + 2 \cdot d \cdot T \cdot s + T^2 \cdot s^2} \tag{9.144}$$

Die Übertragungsfunktion weist keine Nullstellen auf. Die Pole ergeben sich nach Gleichung (9.133) zu

$$\alpha_{1,2} = -\frac{d}{T} \pm \sqrt{\frac{d^2}{T^2} - \frac{1}{T^2}} = -\frac{d}{T} \pm \frac{1}{T} \cdot \sqrt{d^2 - 1} \tag{9.145}$$

Sie können reell oder konjugiert komplex sein. In Bild 9.51 ist das Pol-Nullstellen-Diagramm dargestellt. Die Zeitkonstante T geht in allen Summanden von Gleichung (9.145) als Faktor ein. Deshalb sind die Achsen des Diagramms mit T normiert.

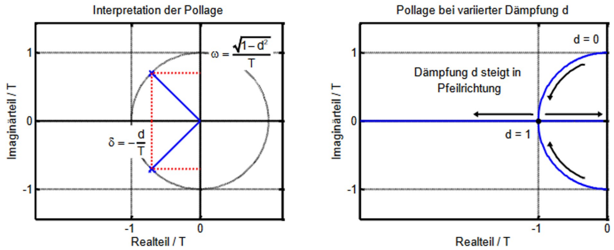


Bild 9.51: Pol-Nullstellen-Diagramm eines PT2-Glieds
a) Interpretation der Pollage für 0 < d < 1 hinsichtlich Abklingverhalten und Eigenfrequenz
b) Pollage bei variierter Dämpfungskonstante 0 ≤ d ≤ 1.5

Der Zusammenhang zwischen Pollage und Dämpfung sowie Pollage und Eigenfrequenz ist im linken Diagramm für eine feste Dämpfungskonstante 0 < d < 1 dargestellt.

$$\alpha_{1,2} = \delta_0 \pm j \cdot \omega_0 = -\frac{d}{T} \pm j \cdot \frac{1}{T} \cdot \sqrt{1-d^2} \qquad (9.146)$$

Der Realteil ist für das Abklingverhalten verantwortlich, der Imaginärteil entspricht der Frequenz, mit der das System schwingt. Beide Größen sind von der Dämpfungskonstanten d abhängig. Bei Variation der Dämpfungskonstante d ergibt sich der rechte Teil von Bild 9.51. Der Radius des Kreises entspricht dem Betrag der Pollage und beträgt immer 1/T. Für d = 0 liegen die beiden konjugiert komplexen Pole auf der imaginären Achse. Diese Pollage entspricht einer ungedämpften periodischen Sprungantwort. Für diesen ungedämpften Fall ist die Eigenfrequenz des PT2-Glieds maximal. Sie wird auch als natürliche Kreisfrequenz oder als Kennkreisfrequenz bezeichnet und beträgt

$$\omega = \frac{1}{T} \qquad (9.147)$$

Mit wachsender Dämpfung bewegen sich die beiden konjugiert komplexen Pole auf einer Kreisbahn zur negativen reellen Achse. Mit steigender Dämpfungskonstante d klingt die Schwingung schneller ab und die Frequenz der Schwingung sinkt. Für d = 1 liegen die beiden Pole an der Stelle α = - 1/T aufeinander. Dieser Fall entspricht dem aperiodischen Grenzfall, die Sprungantwort schwingt nicht mehr. Wird die Dämpfung weiter erhöht, bleiben die beiden Pole reell. Einer der beiden Pole bewegt sich in Richtung des Koordinatenursprungs, ohne ihn zu erreichen. Der zweite Pol bewegt sich in negativer Richtung vom Koordinatenursprung weg.

Aus der Betrachtung des PT2-Glieds im Laplace-Bereich ergibt sich außerdem, dass das PT2-Glied für eine Dämpfungskonstante d ≥ 1 als Reihenschaltung von zwei PT1-Gliedern aufgefasst werden kann. Für den Fall d ≥ 1 kann damit eine Umformung wie in Bild 9.52 vorgenommen werden.

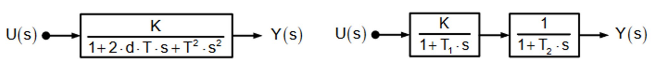


Bild 9.52: Substitution eines PT2-Glieds mit d ≥ 1 durch zwei PT1-Glieder

Für den aperiodischen Fall (d > 1) ergeben sich die Zeitkonstanten T_1 und T_2 zu

$$T_{1,2} = \frac{T}{d \pm \sqrt{d^2 - 1}} \qquad (9.148)$$

Tabelle 9.9: Charakteristische Kenngrößen eines PT2-Glieds im Laplace-Bereich

Größe	Berechnung
Pole des PT2-Glieds liegen für 0 < d < 1 auf einem Kreis mit Radius 1/T	$\alpha_{1,2} = \delta_0 \pm j \cdot \omega_0 = -\frac{d}{T} \pm j \cdot \frac{1}{T} \cdot \sqrt{1-d^2}$
Natürliche Kreisfrequenz, Kreisfrequenz des ungedämpften Systems	$\omega = \frac{1}{T}$

Für den aperiodischen Fall (d > 1) ergeben sich die Zeitkonstanten T_1 und T_2 zu

$$T_{1,2} = \frac{T}{d \pm \sqrt{d^2 - 1}} \tag{9.148}$$

Tabelle 9.9: Charakteristische Kenngrößen eines PT2-Glieds im Laplace-Bereich

Größe	**Berechnung**
Pole des PT2-Glieds liegen für 0 < d < 1 auf einem Kreis mit Radius 1/T	$\alpha_{1,2} = \delta_0 \pm j \cdot \omega_0 = -\frac{d}{T} \pm j \cdot \frac{1}{T} \cdot \sqrt{1-d^2}$
Natürliche Kreisfrequenz, Kreisfrequenz des ungedämpften Systems	$\omega = \frac{1}{T}$
Aufteilung des PT2-Glieds in zwei PT1-Glieder bei Dämpfungskonstanten d ≥ 1	$\frac{K}{1+2 \cdot d \cdot T \cdot s + T^2 \cdot s^2} = \frac{K}{1+T_1 \cdot s} \cdot \frac{1}{1+T_2 \cdot s}$ mit Zeitkonstanten $T_{1,2} = \frac{T}{d \pm \sqrt{d^2 - 1}}$