Cálculo de Programas
Trabalho Prático
MiEI+LCC — 2019/20

Departamento de Informática
Universidade do Minho

Junho de 2020

Grupo nr.	80
a87953	Carlos Ferreira
a87987	André Araújo
a86789	Ricardo Cruz

1 Preâmbulo

A disciplina de Cálculo de Programas tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação (conjunto de leis universais e seus corolários) e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos dois cursos que têm esta disciplina, restringe-se a aplicação deste método à programação funcional em Haskell. Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em Haskell. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas, validá-los, e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

2 Documentação

Para cumprir de forma integrada os objectivos enunciados acima vamos recorrer a uma técnica de programação dita "literária" [**?**], cujo princípio base é o seguinte:

> *Um programa e a sua documentação devem coincidir.*

Por outras palavras, o código fonte e a documentação de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp1920t.pdf` que está a ler é já um exemplo de programação literária: foi gerado a partir do texto fonte `cp1920t.lhs`[1] que encontrará no material pedagógico desta disciplina descompactando o ficheiro `cp1920t.zip` e executando

```
$ lhs2TeX cp1920t.lhs > cp1920t.tex
$ pdflatex cp1920t
```

em que `lhs2tex` é um pre-processador que faz "pretty printing" de código Haskell em LaTeX e que deve desde já instalar executando

```
$ cabal install lhs2tex
```

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp1920t.lhs` é executável e contém o "kit" básico, escrito em Haskell, para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp1920t.lhs
```

[1] O suffixo 'lhs' quer dizer *literate Haskell*.

Abra o ficheiro `cp1920t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

vai ser seleccionado pelo GHCi para ser executado.

3 Como realizar o trabalho

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de três alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na página da disciplina na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo de trabalho por forma a poderem responder às questões que serão colocadas na *defesa oral* do relatório.

Em que consiste, então, o *relatório* a que se refere o parágrafo anterior? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo C com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com BibTEX) e o índice remissivo (com `makeindex`),

```
$ bibtex cp1920t.aux
$ makeindex cp1920t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. Dever-se-á ainda instalar o utilitário QuickCheck, que ajuda a validar programas em Haskell e a biblioteca Gloss para geração de gráficos 2D:

```
$ cabal install QuickCheck gloss
```

Para testar uma propriedade QuickCheck *prop*, basta invocá-la com o comando:

```
> quickCheck prop
+++ OK, passed 100 tests.
```

Pode mesmo controlar o número de casos de teste e sua complexidade utilizando o comando:

```
> quickCheckWith stdArgs { maxSuccess = 200, maxSize = 10 } prop
+++ OK, passed 200 tests.
```

Qualquer programador tem, na vida real, de ler e analisar (muito!) código escrito por outros. No anexo B disponibiliza-se algum código Haskell relativo aos problemas que se seguem. Esse anexo deverá ser consultado e analisado à medida que isso for necessário.

Problema 1

Pretende-se implementar um sistema de manutenção e utilização de um dicionário. Este terá uma estrutura muito peculiar em memória. Será construída uma árvore em que cada nodo terá apenas uma letra da palavra e cada folha da respectiva árvore terá a respectiva tradução (um ou mais sinónimos). Deverá ser possível:

- dic_rd — procurar traduções para uma determinada palavra
- dic_in — inserir palavras novas (palavra e tradução)
- dic_imp — importar dicionários do formato "lista de pares palavra-tradução"
- dic_exp — exportar dicionários para o formato "lista de pares palavra-tradução".

A implementação deve ser baseada no módulo **Exp.hs** que está incluído no material deste trabalho prático, que deve ser estudado com atenção antes de abordar este problema.

No anexo B é dado um dicionário para testes, que corresponde à figura 1. A implementação proposta deverá garantir as seguintes propriedades:

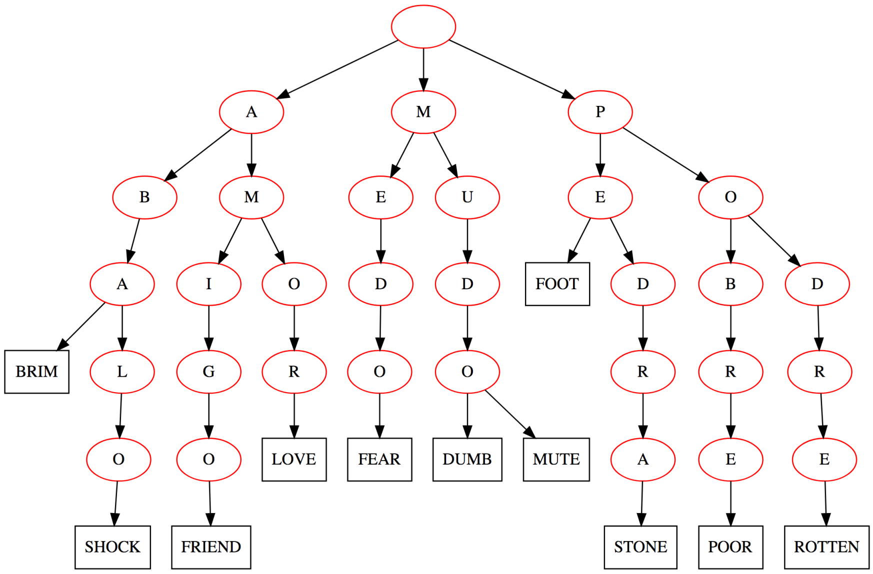


Figura 1: Representação em memória do dicionário dado para testes.

Propriedade [QuickCheck] 1 *Se um dicionário estiver normalizado (ver apêndice B) então não perdemos informação quando o representamos em memória:*

$$prop\_dic\_rep\ x = \mathbf{let}\ d = dic\_norm\ x\ \mathbf{in}\ (dic\_exp \cdot dic\_imp)\ d \equiv d$$

Propriedade [QuickCheck] 2 *Se um significado s de uma palavra p já existe num dicionário então adicioná-lo em memória não altera nada:*

$$\begin{array}{l} prop\_dic\_red\ p\ s\ d \\ \quad \mid dic\_red\ p\ s\ d = dic\_imp\ d \equiv dic\_in\ p\ s\ (dic\_imp\ d) \\ \quad \mid otherwise = True \end{array}$$

Propriedade [QuickCheck] 3 *A operação dic_rd implementa a procura na correspondente exportação do dicionário:*

$$prop\_dic\_rd\ (p, t) = dic\_rd\ p\ t \equiv lookup\ p\ (dic\_exp\ t)$$

Problema 2

Árvores binárias (elementos do tipo BTree) são frequentemente usadas no armazenamento e procura de dados, porque suportam um vasto conjunto de ferramentas para procuras eficientes. Um exemplo de destaque é o caso das árvores binárias de procura, *i.e.* árvores que seguem o princípio de *ordenação*: para todos os nós, o filho à esquerda tem um valor menor ou igual que o valor no próprio nó; e de forma análoga, o filho à direita tem um valor maior ou igual que o valor no próprio nó. A Figura 2 apresenta dois exemplos de árvores binárias de procura.[2]

Note que tais árvores permitem reduzir *significativamente* o espaço de procura, dado que ao procurar um valor podemos sempre *reduzir a procura a um ramo* ao longo de cada nó visitado. Por exemplo, ao procurar o valor 7 na primeira árvore (t_1), sabemos que nos podemos restringir ao ramo da direita do nó com o valor 5 e assim sucessivamente. Como complemento a esta explicação, consulte também os vídeos das aulas teóricas (capítulo 'pesquisa binária').

Para verificar se uma árvore binária está ordenada, é útil ter em conta a seguinte propriedade: considere uma árvore binária cuja raíz tem o valor a, um filho s_1 à esquerda e um filho s_2 à direita. Assuma

[2] As imagens foram geradas com recurso à função *dotBt* (disponível neste documento). Recomenda-se o uso desta função para efeitos de teste e ilustração.

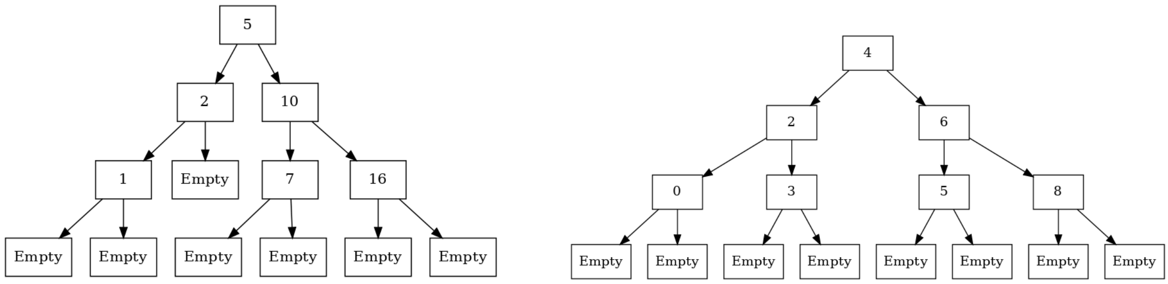


Figura 2: Duas árvores binárias de procura; a da esquerda vai ser designada por t_1 e a da direita por t_2.

que os dois filhos estão ordenados; que o elemento *mais à direita* de t_1 é menor ou igual a a; e que o elemento *mais à esquerda* de t_2 é maior ou igual a a. Então a árvore binária está ordenada. Dada esta informação, implemente as seguintes funções como catamorfismos de árvores binárias.

$$maisEsq :: \mathsf{BTree}\ a \rightarrow Maybe\ a$$
$$maisDir :: \mathsf{BTree}\ a \rightarrow Maybe\ a$$

Seguem alguns exemplos dos resultados que se esperam ao aplicar estas funções à árvore da esquerda ($t1$) e à árvore da direita ($t2$) da Figura 2.

```
*Splay> maisDir t1
 Just 16
*Splay> maisEsq t1
 Just 1
*Splay> maisDir t2
 Just 8
*Splay> maisEsq t2
 Just 0
```

Propriedade [QuickCheck] 4 *As funções $maisEsq$ e $maisDir$ são determinadas unicamente pela propriedade*

$$prop\_inv :: \mathsf{BTree}\ String \rightarrow Bool$$
$$prop\_inv = maisEsq \equiv maisDir \cdot invBTree$$

Propriedade [QuickCheck] 5 *O elemento mais à esquerda de uma árvore está presente no ramo da esquerda, a não ser que esse ramo esteja vazio:*

$$propEsq\ Empty = property\ Discard$$
$$propEsq\ x@(Node\ (a, (t, s))) = (maisEsq\ t) \not\equiv Nothing \Rightarrow (maisEsq\ x) \equiv maisEsq\ t$$

A próxima tarefa deste problema consiste na implementação de uma função que insere um novo elemento numa árvore binária *preservando* o princípio de ordenação,

$$insOrd :: (Ord\ a) \Rightarrow a \rightarrow \mathsf{BTree}\ a \rightarrow \mathsf{BTree}\ a$$

e de uma função que verifica se uma dada árvore binária está ordenada,

$$isOrd :: (Ord\ a) \Rightarrow \mathsf{BTree}\ a \rightarrow Bool$$

Para ambas as funções deve utilizar o que aprendeu sobre *catamorfismos e recursividade mútua*.
Sugestão: Se tiver problemas em implementar com base em catamorfismos estas duas últimas funções, tente implementar (com base em catamorfismos) as funções auxiliares

$$insOrd' :: (Ord\ a) \Rightarrow a \rightarrow \mathsf{BTree}\ a \rightarrow (\mathsf{BTree}\ a, \mathsf{BTree}\ a)$$
$$isOrd' :: (Ord\ a) \Rightarrow \mathsf{BTree}\ a \rightarrow (Bool, \mathsf{BTree}\ a)$$

tais que $insOrd'\ x = \langle insOrd\ x, id \rangle$ para todo o elemento x do tipo a e $isOrd' = \langle isOrd, id \rangle$.

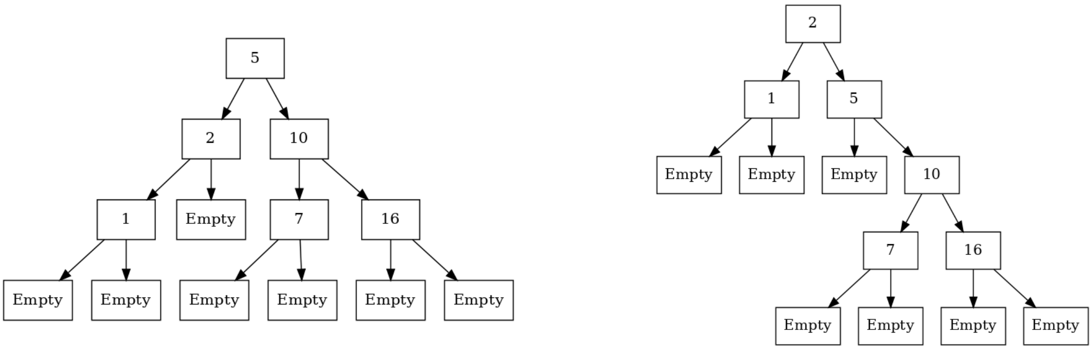


Figura 3: Exemplo de uma rotação à direita. A árvore da esquerda é a árvore original; a árvore da direita representa a rotação à direita correspondente.

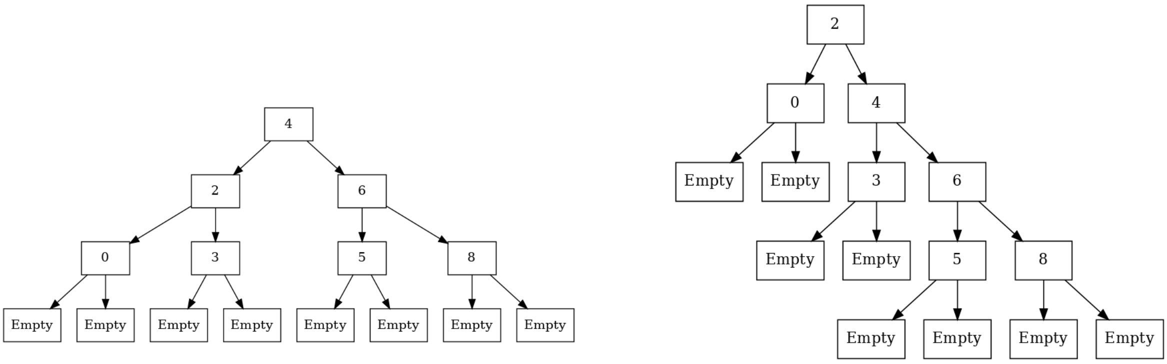


Figura 4: Exemplo de uma rotação à direita. A árvore da esquerda é a árvore original; a árvore da direita representa a rotação à direita correspondente.

Propriedade [QuickCheck] 6 *Inserir uma sucessão de elementos numa árvore vazia gera uma árvore ordenada.*

$$prop\_ord :: [Int] \rightarrow Bool$$
$$prop\_ord = isOrd \cdot (foldr\ insOrd\ Empty)$$

As árvores binárias providenciam uma boa maneira de reduzir o espaço de procura. Mas podemos fazer ainda melhor: podemos aproximar da raíz os elementos da árvore que são mais acedidos, reduzindo assim o espaço de procura na *dimensão vertical*[3]. Esta operação é geralmente referida como *splaying* e é implementada com base naquilo a que chamamos *rotações à esquerda e à direita de uma árvore*.

Intuitivamente, a rotação à direita de uma árvore move todos os nós "*uma casa para a sua direita*". Formalmente, esta operação define-se da seguinte maneira:

1. Considere uma árvore binária e designe a sua raíz pela letra r. Se r não tem filhos à esquerda então simplesmente retornamos a árvore dada à entrada. Caso contrário,

2. designe o filho à esquerda pela letra l. A árvore que vamos retornar tem l na raíz, que mantém o filho à esquerda e adopta r como o filho à direita. O orfão (*i.e.* o anterior filho à direita de l) passa a ser o filho à esquerda de r.

A rotação à esquerda é definida de forma análoga. As Figuras 3 e 4 apresentam dois exemplos de rotações à direita. Note que em ambos os casos o valor 2 subiu um nível na árvore correspodente. De facto, podemos sempre aplicar uma *sequência* de rotações numa árvore de forma a mover um dado nó para a raíz (dando origem portanto à referida operação de splaying).

Começe então por implementar as funções

[3]Note que nas árvores de binária de procura a redução é feita na dimensão horizontal.

$$rrot :: \mathsf{BTree}\ a \rightarrow \mathsf{BTree}\ a$$
$$lrot :: \mathsf{BTree}\ a \rightarrow \mathsf{BTree}\ a$$

de rotação à direita e à esquerda.

Propriedade [QuickCheck] 7 *As rotações à esquerda e à direita preservam a ordenação das árvores.*

$$prop\_ord\_pres\_esq = forAll\ orderedBTree\ (isOrd \cdot lrot)$$
$$prop\_ord\_pres\_dir = forAll\ orderedBTree\ (isOrd \cdot rrot)$$

De seguida implemente a operação de splaying

$$splay :: [Bool] \rightarrow (\mathsf{BTree}\ a \rightarrow \mathsf{BTree}\ a)$$

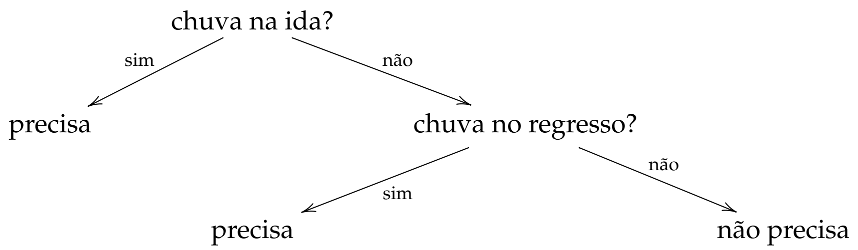
como um catamorfismo de listas. O argumento $[Bool]$ representa um caminho ao longo de uma árvore, em que o valor $True$ representa "seguir pelo ramo da esquerda"e o valor $False$ representa "seguir pelo ramo da direita". O caminho ao longo de uma árvore serve para *identificar* unicamente um nó dessa árvore.

Propriedade [QuickCheck] 8 *A operação de splay preserva a ordenação de uma árvore.*

$$prop\_ord\_pres\_splay :: [Bool] \rightarrow Property$$
$$prop\_ord\_pres\_splay\ path = forAll\ orderedBTree\ (isOrd \cdot (splay\ path))$$

Problema 3

Árvores de decisão binárias são estruturas de dados usadas na área de machine learning para codificar processos de decisão. Geralmente, tais árvores são geradas por computadores com base num vasto conjunto de dados e reflectem o que o computador "aprendeu"ao processar esses mesmos dados. Segue-se um exemplo muito simples de uma árvore de decisão binária:



Esta árvore representa o processo de decisão relativo a ser preciso ou não levar um guarda-chuva para uma viagem, dependendo das condições climatéricas. Essencialmente, o processo de decisão é efectuado ao "percorrer"a árvore, escolhendo o ramo da esquerda ou da direita de acordo com a resposta à pergunta correspondente. Por exemplo, começando da raiz da árvore, responder `["não","não"]` leva-nos à decisão `"não precisa"` e responder `["não","sim"]` leva-nos à decisão `"precisa"`.

Árvores de decisão binárias podem ser codificadas em Haskell usando o seguinte tipo de dados:

$$\mathbf{data}\ Bdt\ a = Dec\ a \mid Query\ (String, (Bdt\ a, Bdt\ a))\ \mathbf{deriving}\ Show$$

Note que o tipo de dados Bdt é parametrizado por um tipo de dados a. Isto é necessário, porque as decisões podem ser de diferentes tipos: por exemplo, respostas do tipo "sim ou não"(como apresentado acima), a escolha de números, ou classificações.

De forma a conseguirmos processar árvores de decisão binárias em Haskell, deve, antes de tudo, resolver as seguintes alíneas:

1. Definir as funções $inBdt$, $outBdt$, $baseBdt$, $cataBdt$, e $anaBdt$.

2. Apresentar no relatório o diagrama de $anaBdt$.

Para tomar uma decisão com base numa árvore de decisão binária t, o computador precisa apenas da estrutura de t (*i.e.* pode esquecer a informação nos nós da árvore) e de uma lista de respostas "sim ou não"(para que possa percorrer a árvore da forma desejada). Implemente então as seguintes funções na forma de *catamorfismos*:

1. $extLTree : Bdt\ a \rightarrow \mathsf{LTree}\ a$ (esquece a informação presente nos nós de uma dada árvore de decisão binária).

   Propriedade [QuickCheck] 9 *A função $extLTree$ preserva as folhas da árvore de origem.*

   $$prop\_pres\_tips :: Bdt\ Int \rightarrow Bool$$
   $$prop\_pres\_tips = tipsBdt \equiv tipsLTree \cdot extLTree$$

2. $navLTree : \mathsf{LTree}\ a \rightarrow ([Bool] \rightarrow \mathsf{LTree}\ a)$ (navega um elemento de LTree de acordo com uma sequência de respostas "sim ou não". Esta função deve ser implementada como um catamorfismo de LTree. Neste contexto, elementos de $[Bool]$ representam sequências de respostas: o valor $True$ corresponde a "sim"e portanto a "segue pelo ramo da esquerda"; o valor $False$ corresponde a "não"e portanto a "segue pelo ramo da direita".

   Seguem alguns exemplos dos resultados que se esperam ao aplicar $navLTree$ a $(extLTree\ bdtGC)$, em que $bdtGC$ é a àrvore de decisão binária acima descrita, e a uma sequência de respostas.

```
*ML> navLTree (extLTree bdtGC) []
Fork (Leaf "Precisa",Fork (Leaf "Precisa",Leaf "N precisa"))
*ML> navLTree (extLTree bdtGC) [False]
Fork (Leaf "Precisa",Leaf "N precisa")
*ML> navLTree (extLTree bdtGC) [False,True]
Leaf "Precisa"
*ML> navLTree (extLTree bdtGC) [False,True,True]
Leaf "Precisa"
*ML> navLTree (extLTree bdtGC) [False,True,True,True]
Leaf "Precisa"
```

Propriedade [QuickCheck] 10 *Percorrer uma árvore ao longo de um caminho é equivalente a percorrer a árvore inversa ao longo do caminho inverso.*

$$prop\_inv\_nav :: Bdt\ Int \rightarrow [Bool] \rightarrow Bool$$
$$prop\_inv\_nav\ t\ l = \mathbf{let}\ t' = extLTree\ t\ \mathbf{in}$$
$$invLTree\ (navLTree\ t'\ l) \equiv navLTree\ (invLTree\ t')\ (\mathsf{fmap}\ \neg\ l)$$

Propriedade [QuickCheck] 11 *Quanto mais longo for o caminho menos alternativas de fim irão existir.*

$$prop\_af :: Bdt\ Int \rightarrow ([Bool],[Bool]) \rightarrow Property$$
$$prop\_af\ t\ (l1, l2) = \mathbf{let}\ t' = extLTree\ t$$
$$f = \mathsf{length}\ \cdot tipsLTree \cdot (navLTree\ t')$$
$$\mathbf{in}\ isPrefixOf\ l1\ l2 \Rightarrow (f\ l1 \geqslant f\ l2)$$

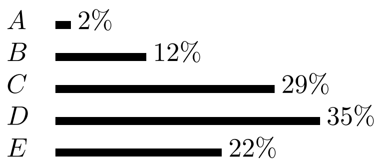
Problema 4

Mónades são functores com propriedades adicionais que nos permitem obter efeitos especiais em programação. Por exemplo, a biblioteca Probability oferece um mónade para abordar problemas de probabilidades. Nesta biblioteca, o conceito de distribuição estatística é captado pelo tipo

$$\mathbf{newtype}\ \mathsf{Dist}\ a = D\ \{unD :: [(a, ProbRep)]\} \tag{1}$$

em que $ProbRep$ é um real de 0 a 1, equivalente a uma escala de 0 a 100%.

Cada par (a, p) numa distribuição d :: Dist a indica que a probabilidade de a é p, devendo ser garantida a propriedade de que todas as probabilidades de d somam 100%. Por exemplo, a seguinte distribuição de classificações por escalões de A a E,



será representada pela distribuição

$$\begin{aligned}&d1 :: \mathsf{Dist}\ Char\\ &d1 = D\ [(\texttt{'A'}, 0.02), (\texttt{'B'}, 0.12), (\texttt{'C'}, 0.29), (\texttt{'D'}, 0.35), (\texttt{'E'}, 0.22)]\end{aligned}$$

que o GHCi mostrará assim:

```
'D'  35.0%
'C'  29.0%
'E'  22.0%
'B'  12.0%
'A'   2.0%
```

É possível definir geradores de distribuições, por exemplo distribuições *uniformes*,

$$d2 = uniform\ (words\ \texttt{"Uma frase de cinco palavras"})$$

isto é

```
     "Uma"  20.0%
   "cinco"  20.0%
      "de"  20.0%
   "frase"  20.0%
"palavras"  20.0%
```

distribuição *normais*, eg.

$$d3 = normal\ [10 \mathinner{\ldotp\ldotp} 20]$$

etc.[4] Dist forma um **mónade** cuja unidade é $return\ a = D\ [(a, 1)]$ e cuja composição de Kleisli é (simplificando a notação)

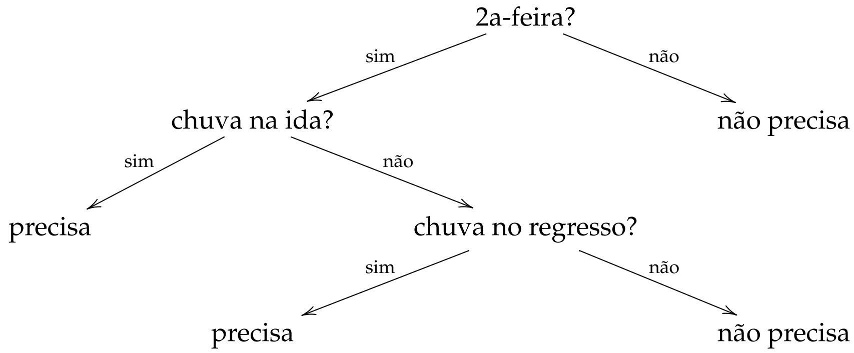
$$(f \bullet g)\ a = [(y, q * p) \mid (x, p) \leftarrow g\ a, (y, q) \leftarrow f\ x]$$

em que $g : A \to \mathsf{Dist}\ B$ e $f : B \to \mathsf{Dist}\ C$ são funções **monádicas** que representam *computações probabilísticas*. Este mónade é adequado à resolução de problemas de *probabilidades e estatística* usando programação funcional, de forma elegante e como caso particular da programação monádica. Vamos estudar a aplicação deste mónade ao exercício anterior, tendo em conta o facto de que nem sempre podemos responder com 100% de certeza a perguntas presentes em árvores de decisão.

Considere a seguinte situação: a Anita vai trabalhar no dia seguinte e quer saber se precisa de levar guarda-chuva. Na verdade, ela tem autocarro de porta de casa até ao trabalho, e portanto as condições meteorológicas não são muito significativas; a não ser que seja segunda-feira...Às segundas é dia de feira e o autocarro vai sempre lotado! Nesses dias, ela prefere fazer a pé o caminho de casa ao trabalho, o que a obriga a levar guarda-chuva (nos dias de chuva). Abaixo está apresentada a árvore de decisão

[4] Para mais detalhes ver o código fonte de Probability, que é uma adaptação da biblioteca PHP ("Probabilistic Functional Programming"). Para quem quiser souber mais recomenda-se a leitura do artigo [?].

respectiva a este problema.



Assuma que a Anita não sabe em que dia está, e que a previsão da chuva para a ida é de 80% enquanto que a previsão de chuva para o regresso é de 60%. *A Anita deve levar guarda-chuva?* Para responder a esta questão, iremos tirar partido do que se aprendeu no exercício anterior. De facto, a maior diferença é que agora as respostas (”sim”ou ”não”) são dadas na forma de uma distribuição sobre o tipo de dados $Bool$. Implemente como um catamorfismo de LTree a função

$$bnavLTree :: \mathsf{LTree}\ a \rightarrow ((\mathsf{BTree}\ Bool) \rightarrow \mathsf{LTree}\ a)$$

que percorre uma árvore dado um caminho, *não* do tipo $[Bool]$, mas do tipo $\mathsf{BTree}\ Bool$. O tipo $\mathsf{BTree}\ Bool$ é necessário na presença de incerteza, porque neste contexto não sabemos sempre qual a próxima pergunta a responder. Teremos portanto que ter resposta para todas as perguntas na árvore de decisão.

Seguem alguns exemplos dos resultados que se esperam ao aplicar $bnavLTree$ a $(extLTree\ anita)$, em que $anita$ é a árvore de decisão acima descrita, e a uma árvore binária de respostas.

```
*ML> bnavLTree (extLTree anita) (Node(True, (Empty,Empty)))
Fork (Leaf "Precisa",Fork (Leaf "Precisa",Leaf "N precisa"))
*ML> bnavLTree (extLTree anita) (Node(True, (Node(True,(Empty,Empty)),Empty)))
Leaf "Precisa"
*ML> bnavLTree (extLTree anita) (Node(False, (Empty,Empty)))
Leaf "N precisa"
```

Por fim, implemente como um catamorfismo de LTree a função

$$pbnavLTree :: \mathsf{LTree}\ a \rightarrow ((\mathsf{BTree}\ (\mathsf{Dist}\ Bool)) \rightarrow \mathsf{Dist}\ (\mathsf{LTree}\ a))$$

que deverá consiste na ”monadificação”da função $bnavLTree$ via a mónade das probabilidades. Use esta última implementação para responder se a Anita deve levar guarda-chuva ou não dada a situação acima descrita.

Problema 5

Os mosaicos de Truchet são padrões que se obtêm gerando aleatoriamente combinações bidimensionais de ladrilhos básicos. Os que se mostram na figura 5 são conhecidos por ladrilhos de Truchet-Smith. A figura 6 mostra um exemplo de mosaico produzido por uma combinação aleatória de 10x10 ladrilhos a e b (cf. figura 5).

Neste problema pretende-se programar a geração aleatória de mosaicos de Truchet-Smith usando o mónade Random e a biblioteca Gloss para produção do resultado. Para uniformização das respostas, deverão ser seguidas as seguintes condições:

- Cada ladrilho deverá ter as dimensões 80x80
- O programa deverá gerar mosaicos de quaisquer dimensões, mas deverá ser apresentado como figura no relatório o mosaico de 10x10 ladrilhos.
- Valorizar-se-ão respostas elegantes e com menos linhas de código Haskell.

No anexo B é dada uma implementação da operação de permuta aleatória de uma lista que pode ser útil para resolver este exercício.

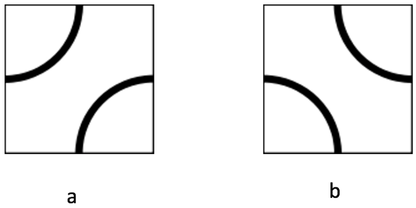


Figura 5: Os dois ladrilhos de Truchet-Smith.

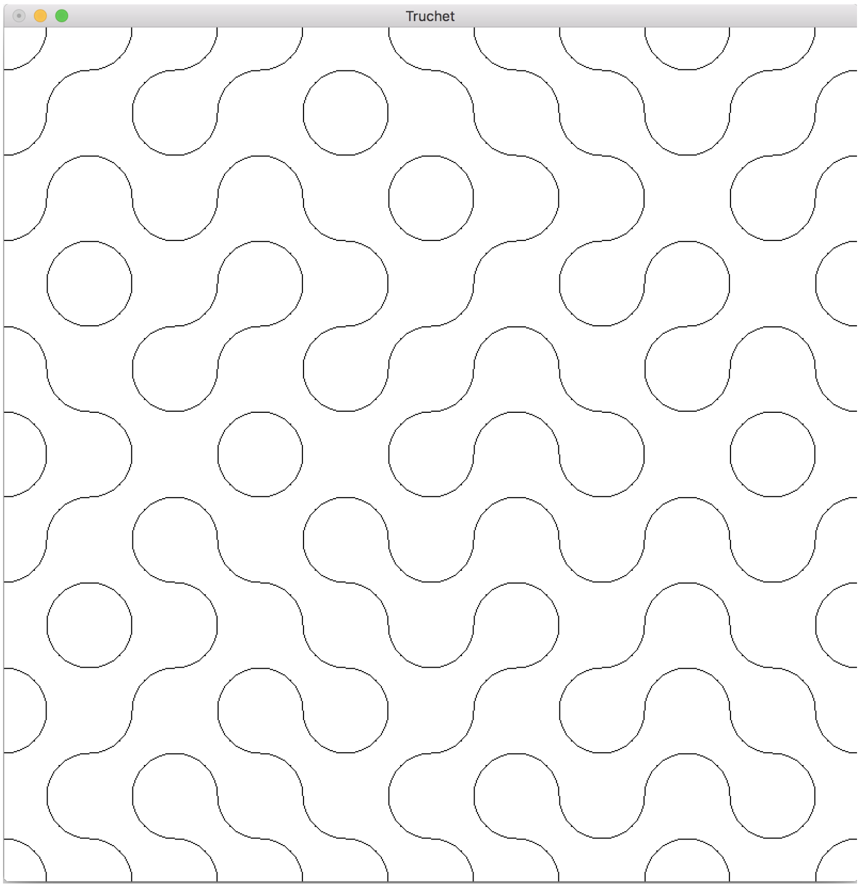


Figura 6: Um mosaico de Truchet-Smith.

Anexos

A Como exprimir cálculos e diagramas em LaTeX/lhs2tex

Estudar o texto fonte deste trabalho para obter o efeito:[5]

$$
\begin{aligned}
& id = \langle f, g \rangle \\
\equiv \quad & \quad \{ \text{ universal property } \} \\
& \begin{cases} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{cases} \\
\equiv \quad & \quad \{ \text{ identity } \} \\
& \begin{cases} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{cases} \\
\Box
\end{aligned}
$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* LaTeX xymatrix, por exemplo:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N}_0 \arrow[d, "(\!|g|\!)"'] & 1 + \mathbb{N}_0 \arrow[l, "\mathsf{in}"'] \arrow[d, "id + (\!|g|\!)"] \\
B & 1 + B \arrow[l, "g"]
\end{tikzcd}
$$

B Código fornecido

Problema 1

Função de representação de um dicionário:

$$
\begin{aligned}
& dic\_imp :: [(String, [String])] \rightarrow Dict \\
& dic\_imp = Term \; \texttt{""} \cdot \mathsf{map} \; (bmap \; id \; singl) \cdot untar \cdot discollect
\end{aligned}
$$

onde

$$\textbf{type} \; Dict = Exp \; String \; String$$

Dicionário para testes:

$$
\begin{aligned}
& d :: [(String, [String])] \\
& d = [(\texttt{"ABA"}, [\texttt{"BRIM"}]), \\
& \qquad (\texttt{"ABALO"}, [\texttt{"SHOCK"}]), \\
& \qquad (\texttt{"AMIGO"}, [\texttt{"FRIEND"}]), \\
& \qquad (\texttt{"AMOR"}, [\texttt{"LOVE"}]), \\
& \qquad (\texttt{"MEDO"}, [\texttt{"FEAR"}]), \\
& \qquad (\texttt{"MUDO"}, [\texttt{"DUMB"}, \texttt{"MUTE"}]), \\
& \qquad (\texttt{"PE"}, [\texttt{"FOOT"}]), \\
& \qquad (\texttt{"PEDRA"}, [\texttt{"STONE"}]), \\
& \qquad (\texttt{"POBRE"}, [\texttt{"POOR"}]), \\
& \qquad (\texttt{"PODRE"}, [\texttt{"ROTTEN"}])]
\end{aligned}
$$

Normalização de um dicionário (remoção de entradas vazias):

$$
\begin{aligned}
& dic\_norm = collect \cdot filter \; p \cdot discollect \; \textbf{where} \\
& \quad p \; (a, b) = a > \texttt{""} \wedge b > \texttt{""}
\end{aligned}
$$

Teste de redundância de um significado s para uma palavra p:

$$dic\_red \; p \; s \; d = (p, s) \in discollect \; d$$

[5] Exemplos tirados de [?].

Problema 2

Árvores usadas no texto:

$$emp\ x = Node\ (x, (Empty, Empty))$$
$$t7 = emp\ 7$$
$$t16 = emp\ 16$$
$$t7\_10\_16 = Node\ (10, (t7, t16))$$
$$t1\_2\_nil = Node\ (2, (emp\ 1, Empty))$$
$$t' = Node\ (5, (t1\_2\_nil, t7\_10\_16))$$
$$t0\_2\_1 = Node\ (2, (emp\ 0, emp\ 3))$$
$$t5\_6\_8 = Node\ (6, (emp\ 5, emp\ 8))$$
$$t2 = Node\ (4, (t0\_2\_1, t5\_6\_8))$$
$$dotBt :: (Show\ a) \Rightarrow \mathsf{BTree}\ a \to \mathsf{IO}\ ExitCode$$
$$dotBt = dotpict \cdot bmap\ Just\ Just \cdot cBTree2Exp \cdot (\mathsf{fmap}\ show)$$

Problema 3

Funções usadas para efeitos de teste:

$$tipsBdt :: Bdt\ a \to [a]$$
$$tipsBdt = cataBdt\ [singl, \widehat{(+\!\!+)} \cdot \pi_2]$$
$$tipsLTree = tips$$

Problema 5

Função de permutação aleatória de uma lista:

$$permuta\ [\,] = return\ [\,]$$
$$permuta\ x = \mathbf{do}\ \{(h, t) \leftarrow getR\ x; t' \leftarrow permuta\ t; return\ (h : t')\}\ \mathbf{where}$$
$$\quad getR\ x = \mathbf{do}\ \{i \leftarrow getStdRandom\ (randomR\ (0, \mathsf{length}\ \ x - 1)); return\ (x\ !!\ i, retira\ i\ x)\}$$
$$\quad retira\ i\ x = take\ i\ x +\!\!+ drop\ (i + 1)\ x$$

QuickCheck

Código para geração de testes:

$$\mathbf{instance}\ Arbitrary\ a \Rightarrow Arbitrary\ (\mathsf{BTree}\ a)\ \mathbf{where}$$
$$\quad arbitrary = sized\ genbt\ \ \mathbf{where}$$
$$\quad\quad genbt\ 0 = return\ (inBTree\ \$\ i_1\ ())$$
$$\quad\quad genbt\ n = oneof\ [(liftM2\ \$\ curry\ (inBTree \cdot i_2))$$
$$\quad\quad\quad QuickCheck.arbitrary\ (liftM2\ (,)\ (genbt\ (n - 1))\ (genbt\ (n - 1))),$$
$$\quad\quad\quad (liftM2\ \$\ curry\ (inBTree \cdot i_2))$$
$$\quad\quad\quad QuickCheck.arbitrary\ (liftM2\ (,)\ (genbt\ (n - 1))\ (genbt\ 0)),$$
$$\quad\quad\quad (liftM2\ \$\ curry\ (inBTree \cdot i_2))$$
$$\quad\quad\quad QuickCheck.arbitrary\ (liftM2\ (,)\ (genbt\ 0)\ (genbt\ (n - 1)))]$$
$$\mathbf{instance}\ (Arbitrary\ v, Arbitrary\ o) \Rightarrow Arbitrary\ (Exp\ v\ o)\ \mathbf{where}$$
$$\quad arbitrary = (genExp\ 10)\ \mathbf{where}$$
$$\quad\quad genExp\ 0 = liftM\ (inExp \cdot i_1)\ QuickCheck.arbitrary$$
$$\quad\quad genExp\ n = oneof\ [liftM\ (inExp \cdot i_2 \cdot (\lambda a \to (a, [\,])))\ QuickCheck.arbitrary,$$
$$\quad\quad\quad liftM\ (inExp \cdot i_1)\ QuickCheck.arbitrary,$$
$$\quad\quad\quad liftM\ (inExp \cdot i_2 \cdot (\lambda(a, (b, c)) \to (a, [b, c])))$$
$$\quad\quad\quad \$\ (liftM2\ (,)\ QuickCheck.arbitrary\ (liftM2\ (,)$$
$$\quad\quad\quad\quad (genExp\ (n - 1))\ (genExp\ (n - 1)))),$$
$$\quad\quad\quad liftM\ (inExp \cdot i_2 \cdot (\lambda(a, (b, c, d)) \to (a, [b, c, d])))$$
$$\quad\quad\quad \$\ (liftM2\ (,)\ QuickCheck.arbitrary\ (liftM3\ (,,)$$

$$(genExp\ (n-1))\ (genExp\ (n-1))\ (genExp\ (n-1))))$$
$$]$$

$$orderedBTree :: Gen\ (\mathsf{BTree}\ Int)$$
$$orderedBTree = liftM\ (foldr\ insOrd\ Empty)\ (QuickCheck.arbitrary :: Gen\ [Int])$$

$$\mathbf{instance}\ (Arbitrary\ a) \Rightarrow Arbitrary\ (Bdt\ a)\ \mathbf{where}$$
$$\quad arbitrary = sized\ genbt\quad \mathbf{where}$$
$$\quad\quad genbt\ 0 = liftM\ Dec\ QuickCheck.arbitrary$$
$$\quad\quad genbt\ n = oneof\ [(liftM2\ \$\ curry\ Query)$$
$$\quad\quad\quad QuickCheck.arbitrary\ (liftM2\ (,)\ (genbt\ (n-1))\ (genbt\ (n-1))),$$
$$\quad\quad\quad (liftM2\ \$\ curry\ (Query))$$
$$\quad\quad\quad QuickCheck.arbitrary\ (liftM2\ (,)\ (genbt\ (n-1))\ (genbt\ 0)),$$
$$\quad\quad\quad (liftM2\ \$\ curry\ (Query))$$
$$\quad\quad\quad QuickCheck.arbitrary\ (liftM2\ (,)\ (genbt\ 0)\ (genbt\ (n-1)))]$$

Outras funções auxiliares

Lógicas:

$$\mathbf{infixr}\ 0 \Rightarrow$$
$$(\Rightarrow) :: (Testable\ prop) \Rightarrow (a \rightarrow Bool) \rightarrow (a \rightarrow prop) \rightarrow a \rightarrow Property$$
$$p \Rightarrow f = \lambda a \rightarrow p\ a \Rightarrow f\ a$$
$$\mathbf{infixr}\ 0 \Leftrightarrow$$
$$(\Leftrightarrow) :: (a \rightarrow Bool) \rightarrow (a \rightarrow Bool) \rightarrow a \rightarrow Property$$
$$p \Leftrightarrow f = \lambda a \rightarrow (p\ a \Rightarrow property\ (f\ a))\ .\&\&.\ (f\ a \Rightarrow property\ (p\ a))$$
$$\mathbf{infixr}\ 4 \equiv$$
$$(\equiv) :: Eq\ b \Rightarrow (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow Bool)$$
$$f \equiv g = \lambda a \rightarrow f\ a \equiv g\ a$$
$$\mathbf{infixr}\ 4 \leqslant$$
$$(\leqslant) :: Ord\ b \Rightarrow (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow Bool)$$
$$f \leqslant g = \lambda a \rightarrow f\ a \leqslant g\ a$$
$$\mathbf{infixr}\ 4 \wedge$$
$$(\wedge) :: (a \rightarrow Bool) \rightarrow (a \rightarrow Bool) \rightarrow (a \rightarrow Bool)$$
$$f \wedge g = \lambda a \rightarrow ((f\ a) \wedge (g\ a))$$

Compilação e execução dentro do interpretador:[6]

$$run = \mathbf{do}\ \{system\ \texttt{"ghc cp1920t"}; system\ \texttt{"./cp1920t"}\}$$

C Soluções dos alunos

Os alunos devem colocar neste anexo as suas soluções aos exercícios propostos, de acordo com o "layout"que se fornece. Não podem ser alterados os nomes ou tipos das funções dadas, mas pode ser adicionado texto e/ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

Problema 1

$$discollect :: (Ord\ b, Ord\ a) \Rightarrow [(b, [a])] \rightarrow [(b, a)]$$
$$discollect = cataList\ [nil, \widehat{(+\!\!+)} \cdot (dic \times id)]$$
$$dic :: (Ord\ b, Ord\ a) \Rightarrow (b, [a]) \rightarrow [(b, a)]$$
$$dic\ (h, l) = set\ [h \mapsto x \mid x \leftarrow l]$$
$$dic\_exp :: Dict \rightarrow [(String, [String])]$$
$$dic\_exp = collect \cdot tar$$

[6]Pode ser útil em testes envolvendo Gloss. Nesse caso, o teste em causa deve fazer parte de uma função *main*.

$$
\begin{array}{l}
tar = cataExp\ g\ \mathbf{where} \\
\quad g = [g1, g2]\ \mathbf{where} \\
\qquad g1 = singl \cdot \langle nil, id \rangle \\
\qquad g2\ (o, l) = (\mathsf{map}\ \ ((o+\!\!+) \times id) \cdot concat)\ l
\end{array}
$$

$$
\begin{tikzcd}
Exp\ c\ [a] \arrow[d, "tar"'] & C + A^* \times (Exp\ c\ [a])^* \arrow[l, "inLTree"'] \arrow[d, "id + id \times (cataExp\ tar)"] \\
(A^* \times c) & C + A^* \times ((A^* \times c)^*)^* \arrow[l, "g"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{array}{l}
dic\_rd\ s = lookup\ s \cdot dic\_exp \\
dic\_in\ a\ b\ c = dic\_imp\ (collect\ ((+\!\!+)\ (singl\ \langle \pi_1, \pi_2 \rangle\ ((\mapsto)\ a\ b))\ (discollect\ (dic\_exp\ (c)))))
\end{array}
$$

Como não conseguimos usar hilomorfismos para definir estas funções ,dic rd e dic in, optamos por exportar o dicionário para listas e trabalhar sobre listas.

Problema 2

$$
\left\{
\begin{array}{l}
maisEsq\ Empty = Nothing \\
maisEsq\ (Node\ (r, (e, d)) = \mathbf{if}\ (isNothing\ e)\ \mathbf{then}\ (Just\ r)\ \mathbf{else}\ (maisEsq\ e))
\end{array}
\right.
$$

$$\equiv \qquad \{ \text{ Def-compara , Def-const , Fusão-const } \}$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
maisEsq \cdot \underline{Empty} = \underline{Nothing} \\
maisEsq\ (Node\ (r, (e, d))) = compara\ (r, (maisEsq\ e, maisEsq\ d))
\end{array}
\right.
$$

$$\equiv \qquad \{ \text{ Def-x , Natural-id } \}$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
maisEsq \cdot \underline{Empty} = \underline{Nothing} \\
maisEsq\ (Node\ (r, (e, d))) = compara \cdot (id \times (maisEsq \times maisEsq))\ (r, (e, d))
\end{array}
\right.
$$

$$\equiv \qquad \{ \text{ Igualdade extensional , Def-comp } \}$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
maisEsq \cdot \underline{Empty} = \underline{Nothing} \\
maisEsq \cdot Node = compara \cdot (id \times (maisEsq \times maisEsq))
\end{array}
\right.
$$

$$\equiv \qquad \{ \text{ Eq-+ , Fusão-+ } \}$$

$$maisEsq \cdot [\underline{Empty}, Node] = [\underline{Nothing}, compara \cdot (id \times (maisEsq \times maisEsq))]$$

$$\equiv \qquad \{ \text{ Absorção-+ } \}$$

$$maisEsq \cdot [\underline{Empty}, Node] = [\underline{Nothing}, compara] \cdot (id + (id \times (maisEsq \times maisEsq)))$$

$$\equiv \qquad \{ \text{ Def. inBTree } \}$$

$$maisEsq \cdot \mathbf{in} = [\underline{Nothing}, compara] \cdot (id + (id \times (maisEsq \times maisEsq)))$$

$$\equiv \qquad \{ \text{ Universal-cata } \}$$

$$maisEsq = cataBTree\ [\underline{Nothing}, compara]$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{BTree}\ A \arrow[r, "outBTree"'] \arrow[d, "maisEsq"'] & 1 + A \times (\mathsf{BTree}\ A \times \mathsf{BTree}\ A) \arrow[d, "id + id \times (extLTree \times extLTree)"] \\
Maybe & 1 + A \times (Maybe \times Maybe) \arrow[l, "{[\underline{Nothing}, compara]}"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{array}{l}
compara :: (a, (Maybe\ a, Maybe\ a)) \rightarrow Maybe\ a \\
compara\ (r, (e, d))
\end{array}
$$

$\quad\mid (isNothing\ e) = Just\ r$
$\quad\mid otherwise = e$

$maisEsq = cataBTree\ g$
$\quad \textbf{where}\ g = [\underline{Nothing}, compara]$

É fácil de perceber que o elemento mais à esquerda de uma árvore será o elemento mais à direita na árvore inversa.

$$
\begin{array}{ll}
& maisDir = maisEsq \cdot invBTree \\
\equiv & \quad \{ \text{ Def-invBtree } \} \\
& maisDir = maisEsq \cdot (cataBTree\ [\underline{Empty}, Node \cdot (id \times swap)]) \\
\equiv & \quad \{ \text{ Fusão-cata , devia ser simbolo de implica mas não sabemos faze-lo } \} \\
& maisDir \cdot (id + id \times (maisEsq \times maisEsq)) = maisEsq \cdot [\underline{Empty}, Node \cdot (id \times swap)] \\
\equiv & \quad \{ \text{ Absorção-+ } \} \\
& maisDir \cdot (id + id \times (maisEsq \times maisEsq)) = maisEsq \cdot [\underline{Empty}, Node] \cdot (id + (id \times swap)) \\
\equiv & \quad \{ \text{ Cancelamento-cata , pois (either (const Empty) (Node)) = in e maisEsq e um cataBTree } \} \\
& maisDir \cdot (id + id \times (maisEsq \times maisEsq)) = [\underline{Nothing}, compara] \cdot (F\ maisEsq) \cdot (id + (id \times swap)) \\
\equiv & \quad \{ \text{ Propriedade gratis (swap) , Leibniz , Absorção-+ } \} \\
& maisDir = [\underline{Nothing}, compara \cdot (id \times swap)]
\end{array}
$$

$maisDir = cataBTree\ g$
$\quad \textbf{where}\ g = [\underline{Nothing}, compara \cdot (id \times swap)]$

$insOrd'\ x = cataBTree\ g$
$\quad \textbf{where}\ g = \langle [h1, h2], idd \rangle$
$\qquad h1\ () = emp\ x$
$\qquad h2\ (a, ((insE, idE), (insD, idD))) \mid x > a = Node\ (a, (idE, insD))$
$\qquad\quad \mid otherwise = Node\ (a, (insE, idD))$

$insOrd\ x = \pi_1 \cdot (insOrd'\ x)$

$isOrd' = cataBTree\ g$
$\quad \textbf{where}\ g = \langle ord, idd \rangle$

$isOrd = \pi_1 \cdot isOrd'$

$testa :: (Ord\ a) \Rightarrow (a, ((Bool, \mathsf{BTree}\ a), (Bool, \mathsf{BTree}\ a))) \rightarrow Bool$
$testa\ (c, ((bE, e), (bD, d)))$
$\quad \mid (isEmpty\ e) \wedge (isEmpty\ d) = True$
$\quad \mid (isEmpty\ e) = (c < mD) \wedge bD$
$\quad \mid (isEmpty\ d) = (c \geqslant mE) \wedge bE$
$\quad \mid otherwise = (c \geqslant mE) \wedge (c < mD) \wedge bE \wedge bD$
$\quad \textbf{where}\ mE = getC\ e$
$\qquad mD = \quad getC\ d$

$getC :: \mathsf{BTree}\ a \rightarrow a$ -- get raiz da arvore
$getC\ (Node\ (a, (e, d))) = a$

$isEmpty :: \mathsf{BTree}\ a \rightarrow Bool$
$isEmpty\ Empty = True$
$isEmpty\ \_ = False$

$ord :: Ord\ a \Rightarrow () + (a, ((Bool, \mathsf{BTree}\ a), (Bool, \mathsf{BTree}\ a))) \rightarrow Bool$
$ord = [\underline{True}, testa]$

$idd = [\underline{Empty}, Node \cdot (id \times (\pi_2 \times \pi_2))]$

$rrot\ Empty = Empty$

$$
\begin{aligned}
&rrot\ (Node\ (r,(Empty,d))) = Node\ (r,(Empty,d))\\
&rrot\ (Node\ (c,(Node\ (e,(ee,ed)),r))) = Node\ (e,(ee,Node\ (c,(ed,r))))\\
&lrot = invBTree \cdot rrot \cdot invBTree\\
&splay\ l\ t = \bot
\end{aligned}
$$

splay a l = cataBTree (either (const Empty) (aux a l))
where aux a [] (r,(e,d)) = Node (r,(e,d))
aux a (h:t) (r,(e,d)) = if h then rrot (aux a t (r,(e,d))) else lrot (aux a t (r,(e,d)))

Problema 3

$$
\begin{aligned}
&extLTree :: Bdt\ a \rightarrow \mathsf{LTree}\ a\\
&extLTree = cataBdt\ g\ \mathbf{where}\\
&\quad g = [Leaf, Fork \cdot \pi_2]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{l} extLTree\ (Dec\ a) = Leaf\ a \\ extLTree\ (Query\ (s,(e,d)) = Fork\ (extLTree\ e, extLTree\ d) \end{array}\right.\\
\equiv\quad &\{\ \text{Def-proj}\ \}\\
&\left\{\begin{array}{l} extLTree\ (Dec\ a) = Leaf\ a \\ extLTree\ (Query\ (s,(e,d)) = Fork \cdot \pi_2\ (s,(extLTree\ e, extLTree\ d)) \end{array}\right.\\
\equiv\quad &\{\ \text{Def-x , Natural-id}\ \}\\
&\left\{\begin{array}{l} extLTree\ (Dec\ a) = Leaf\ a \\ extLTree\ (Query\ (s,(e,d))) = Fork \cdot \pi_2 \cdot (id \times (extLTree \times extLTree))\ (s,(e,d)) \end{array}\right.\\
\equiv\quad &\{\ \text{Igualdade extensional , Def-comp}\ \}\\
&\left\{\begin{array}{l} extLTree \cdot Dec = Leaf \\ extLTree \cdot Query = Fork \cdot \pi_2 \cdot (id \times (extLTree \times extLTree)) \end{array}\right.\\
\equiv\quad &\{\ \text{Eq-+ , Fusão-+}\ \}\\
&extLTree \cdot [Dec, Query] = [Leaf, Fork \cdot \pi_2 \cdot (id \times (extLTree \times extLTree))]\\
\equiv\quad &\{\ \text{Absorção-+}\ \}\\
&extLTree \cdot [Dec, Query] = [Leaf, Fork \cdot \pi_2] \cdot (id + (id \times (extLTree \times extLTree)))\\
\equiv\quad &\{\ \text{Def. inBdt}\ \}\\
&extLTree \cdot \mathbf{in} = [Leaf, Fork \cdot \pi_2] \cdot (id + (id \times (extLTree \times extLTree)))\\
\equiv\quad &\{\ \text{Universal-cata}\ \}\\
&extLTree = cataBdt\ [Leaf, Fork \cdot \pi_2]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
Bdt\ A \arrow[r, "outBdt"'] \arrow[d, "extLTree"'] & A + S \times (Bdt \times Bdt) \arrow[d, "id + id \times (extLTree \times extLTree)"] \\
\mathsf{LTree}\ A & A + S \times (\mathsf{LTree}\ A \times \mathsf{LTree}\ A) \arrow[l, "{[Leaf, Fork \cdot \pi_2]}"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
&inBdt = [Dec, Query]\\
&outBdt\ (Dec\ a) = i_1\ (a)\\
&outBdt\ (Query\ (s,(e,d))) = i_2\ (s,(e,d))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& outBdt \cdot inBdt = id \\
\equiv \quad & \{ \text{ Def.inBdt , Reflexão-+ } \} \\
& outBdt \cdot [Dec, Query] = [i_1, i_2] \\
\equiv \quad & \{ \text{ Fusão-+ } \} \\
& [outBdt \cdot Dec, outBdt \cdot Query] = [i_1, i_2] \\
\equiv \quad & \{ \text{ Eq-+ } \} \\
& \begin{cases} outBdt \cdot Dec = i_1 \\ outBdt \cdot Query = i_2 \end{cases} \\
\equiv \quad & \{ \text{ Igualidade extensional , Def-comp } \} \\
& \begin{cases} outBdt\ (Dec\ a) = i_1\ (a) \\ outBdt\ (Query\ (s, (e, d)) = i_2\ (s, (e, d))) \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& baseBdt\ f\ g\ h = f + g \times (h \times h) \\
& recBdt\ f = baseBdt\ id\ id\ f \\
& cataBdt\ g = g \cdot (recBdt\ (cataBdt\ g)) \cdot outBdt \\
& anaBdt\ g = inBdt \cdot (recBdt\ (anaBdt\ g)) \cdot g
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
Bdt\ A & A + S \times (Bdt\ A \times Bdt\ A) \arrow[l, "inBdt"'] \\
B \arrow[u, "anaBdt\ g"] \arrow[r, "g"'] & A + S \times (B \times B) \arrow[u, "id + id \times (anaBdt\ g \times anaBdt\ g)"']
\end{tikzcd}
$$

Começamos por definir a função depth.

$$
\begin{aligned}
& \begin{cases} depth\ (Leaf\ a) = 1 \\ depth\ Fork\ (e, d) = 1 + max\ (depth\ e)\ (depth\ d) \end{cases} \\
\equiv \quad & \{ \text{ Def-x , Def-const , Uncurry } \} \\
& \begin{cases} depth\ (Leaf\ a) = (\underline{1} \cdot a) \\ depth\ Fork\ (e, d) = 1 + \widehat{max} \cdot ((depth \times depth)\ (e, d)) \end{cases} \\
\equiv \quad & \{ \text{ Def-comp , Igualdade extensional , Def-succ } \} \\
& \begin{cases} depth \cdot Leaf = \underline{1} \\ depth \cdot Fork = \mathsf{succ} \cdot \widehat{max} \cdot (depth \times depth) \end{cases} \\
\equiv \quad & \{ \text{ Eq-+ , Fusão-+ } \} \\
& depth \cdot [Leaf, Fork] = [\underline{1}, \mathsf{succ} \cdot \widehat{max} \cdot (depth \times depth)] \\
\equiv \quad & \{ \text{ Absorção-+ } \} \\
& depth \cdot [Leaf, Fork] = [\underline{1}, \mathsf{succ} \cdot \widehat{max}] \cdot (id + (depth \times depth)) \\
\equiv \quad & \{ \text{ Def. inLTree } \} \\
& depth \cdot \mathbf{in} = [\underline{1}, \mathsf{succ} \cdot \widehat{max}] \cdot (id + (depth \times depth)) \\
\equiv \quad & \{ \text{ Universal-cata } \} \\
& depth = cataLTree\ [\underline{1}, \mathsf{succ} \cdot \widehat{max}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{LTree}\ A \arrow[r, "outLTree"'] \arrow[d, "depth"'] & A + (\mathsf{LTree}\ A \times \mathsf{LTree}\ A) \arrow[d, "id+(depth \times depth)"] \\
Int & A + (Int \times Int) \arrow[l, "{[\underline{1}, succ \cdot \widehat{max}]}"]
\end{tikzcd}
$$

Decidimos definir as funções auxiliares depthE e depthD que calculam a profundidade da arvore desde o topo até à Leaf mais profunda do lado esquerdo / direito

$umin = \widehat{min}$
$umax = \widehat{max}$

$depthE :: \mathsf{LTree}\ a \rightarrow Int$
$depthE\ (Leaf\ \ a) = 0$
$depthE\ (Fork\ (e, d)) = 1 + depth\ \ e$

$depthD :: \mathsf{LTree}\ a \rightarrow Int$
$depthD\ (Leaf\ \ a) = 0$
$depthD\ (Fork\ (e, d)) = 1 + depth\ \ d$

$depth = cataLTree\ [\underline{1}, \mathsf{succ}\ \cdot umax]$

Definimos agora estas duas funções que calculam a que profundidade uma subarvore se encontra , facilitando assim a procura na lista

$posArvE :: \mathsf{LTree}\ a \rightarrow \mathsf{LTree}\ a \rightarrow Int$ -- posicao da subarvore d na arvore t
$posArvE\ \ t\ \ e = (depthE\ \ t) - (depth\ \ e)$

$posArvD :: \mathsf{LTree}\ a \rightarrow \mathsf{LTree}\ a \rightarrow Int$ -- posicao da subarvore d na arvore t
$posArvD\ \ t\ \ d = (depthD\ \ t) - (depth\ \ d)$

Ao saber a que profundidade se encontram as subarvores a serem iteradas , para saber se temos de "escolher"a subarvore esquerda ou direita basta verificar essa posição na lista. Caso nessa posição da lista esteja True returna-mos 1 , caso seja Falso returna-mos 2 e caso a lista tenha menos elementos do que a arvore tem de profundidade , devolve-mos 0 que representa que não se vai escolher nenhum dos lados.

$buscaLista :: [Bool] \rightarrow Int \rightarrow Int$
$buscaLista\ [\,]\ n = 0$
$buscaLista\ (h : t)\ 1 = \mathbf{if}\ h\ \mathbf{then}\ 1\ \mathbf{else}\ 2$
$buscaLista\ (h : t)\ n = buscaLista\ \ t\ \ (n - 1)$

Finalmente na função navLTree , caso a árvore recebida seja apenas uma Leaf não interessa a lista recebida pois o resultado será sempre essa mesma Leaf. Caso seja um Fork , ao adimitir-mos que ja foi executado navLTree tanto na subarvore esquerda tanto como na direita , temos então de escolher entre o resultado da esquerda e da direita, processo que é efetuado na função g. Função que começa por guadar em "v"o valor da buscaLista , como explicado anteriormente , caso v seja 0 , não vamos escolher nenhum lado , por isso fazemos Fork dos resultados das duas subarvores , caso v seja 1 escolhemos o resultado da subarvore esquerda e caso v sej a 2 escolhemos a direita.

$navLTree :: \mathsf{LTree}\ a \rightarrow ([Bool] \rightarrow \mathsf{LTree}\ a)$
$navLTree\ \ a\ \ l = cataLTree\ [Leaf, g\ \ a\ \ l]\ \ a$
$\quad \mathbf{where}\ g\ \ a\ \ l\ (e, d) = \mathbf{let}\ v = (buscaLista\ \ l\ (umin\ (posArvE\ \ a\ \ e, posArvD\ \ a\ \ d)))$
$\qquad \mathbf{in}\ \mathbf{if}\ (v \equiv 0)\ \mathbf{then}\ (Fork\ (e, d))\ \mathbf{else}\ \mathbf{if}\ (v \equiv 1)\ \mathbf{then}\ e\ \mathbf{else}\ d$

Problema 4

$bnavLTree = cataLTree\ g$
$\quad \mathbf{where}\ g = [g1, g2]\ \mathbf{where}$
$\qquad g1\ \ p\ \ \_ = Leaf\ \ p$

$g2\ (a,b)\ Empty = Fork\ (a\ Empty, b\ Empty)$
$g2\ (a,b)\ (Node\ (c,(l,r))) = \mathbf{if}\ c \equiv True\ \mathbf{then}\ a\ l\ \mathbf{else}\ b\ r$

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{LTree}\ A \arrow[d, "bnavLTree"'] & & A + (\mathsf{LTree}\ A \times \mathsf{LTree}\ A) \arrow[ll, "inLTree"'] \arrow[d, "id+(cataLTree\ bnavLTree)"] \\
\mathsf{BTree}\ B \to \mathsf{LTree}\ A & & A + (\mathsf{BTree}\ B \to \mathsf{LTree}\ A) \times (\mathsf{BTree}\ B \to \mathsf{LTree}\ A) \arrow[ll, "g"]
\end{tikzcd}$$

A função bnavLTree foi obtida com base no diagrama, supra citado, em que o Ltree é desconstruído usando o out, ficando um either em que o A é do tipo LTree e (LTree A ¿¡ LTree A) é a parte recursiva da função bnavLTree. Como o funtor de Ltree é *id + (cataLTree bnavLTree)*, obtemos A + (BTree B -¿ LTree A) ¿¡ (BTree B -¿ LTree A), em que a primeira componente é do mesmo tipo de que a de cima e a segunda componente, a parte recursiva, é do tipo exponencial, em que se aplica o tipo BTree B ao tipo Ltree A (BTree B -¿ LTree A) ¿¡ (BTree B -¿ LTree A). Concluímos assim que bnavLTree é uma exponenciação, com um cataLTree definido em cima.

$pbnavLTree = cataLTree\ g$
  $\mathbf{where}\ g = [g1, g2]\ \mathbf{where}$
    $g1\ a\ \_ = D\ [(Leaf\ a, 1)]$
    $g2\ (a,b)\ Empty = \mathbf{do}\ \{final \leftarrow prod\ (a\ Empty)\ (b\ Empty); (return \cdot Fork)\ final\}$
    $g2\ (a,b)\ (Node\ (c,(l,r))) = \mathbf{do}\ \{final \leftarrow c; \mathbf{if}\ final\ \mathbf{then}\ a\ l\ \mathbf{else}\ b\ r\}$

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{LTree}\ A \arrow[d, "pbnavLTree"'] & & A + (\mathsf{LTree}\ A \times \mathsf{LTree}\ A) \arrow[ll, "inLTree"'] \arrow[d, "id+(cataLTree\ pbnavLTree)"] \\
\mathsf{BTree}\ (D\ B) \to \mathsf{Dist}\ (\mathsf{LTree}\ A) & & A + (\mathsf{BTree}\ (\mathsf{Dist}\ B) \to \mathsf{Dist}\ (\mathsf{LTree}\ A)) \times (\mathsf{BTree}\ (\mathsf{Dist}\ B) \to \mathsf{Dist}\ (\mathsf{LTree}\ A) \arrow[ll, "g"]
\end{tikzcd}$$

Nesta função, adotamos parte da função bnavLTree e, usamos a maquinaria da monadificação, para fazermos as devidas alterações para que a função funcionasse.

Na primeira parte do either (g1), o passo base na forma de Dist (LTree A), conjungamos a definição de LTree com a definição do Dist.

Na segunda parte do either (g2), tivemos que monadificar tanto o passo base de g2 como o passo recursivo. Sendo que no passo base vimos que tanto o *(a Empty)* como o *(b Empty)* eram ambas probabilidades e chegamos à conclusão que deveríamos juntar estas probabilidades com a função *prod*, monadificar, isto é, retirar o valor (a,b) da caixa monádica do resultado do *prod* e, posteriormente, fazer o *Fork* ao passo monadificado, de maneira a obter um Dist(LTree a). Se não monadificassemos depois de fazer a função *prod*, iriamos obter Dist (a,b) mas, não era o que queríamos pois, queriamos que de acorde com o tipo da função pbnavLTree, isto é, Dist (LTree A).

Já no passo recursivo, tivemos que retirar, recursivamente, o valor booleano da caixa monádica "c".

Problema 5

$truchet1 = Pictures\ [put\ (0,80)\ (Arc\ (-90)\ 0\ 40), put\ (80,0)\ (Arc\ 90\ 180\ 40)]$
$truchet2 = Pictures\ [put\ (0,0)\ (Arc\ 0\ 90\ 40), put\ (80,80)\ (Arc\ 180\ (-90)\ 40)]$
  -- janela para visualizar:
$janela = InWindow$
  `"Truchet"` -- window title
  $(800,800)$ -- window size
  $(100,100)$ -- window position
  -- defs auxiliares ————-
$put = \widehat{Translate}$
$main :: \mathsf{IO}\ ()$

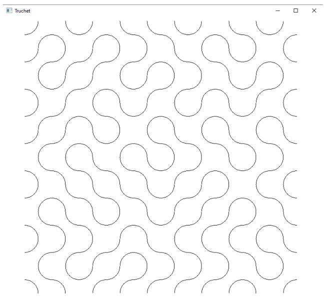


Figura 7: Mosaico obtido com a resulução deste problema.

$$
\begin{aligned}
&main = \mathbf{do}\\
&\quad mosaico \leftarrow randomMosaico\ 10\ 10\ 10 \div 2\\
&\quad display\ janela\ white\ mosaico
\end{aligned}
$$

Função randomMosaico gera um mosaico com l linhas, c colunas. Caso o numero de linhas seja 0 retorna uma imagem sem nada, caso contrario gera uma imagem de uma linha e de um ramdomMosaico com com l-1 e e retorna a sua união.

$$
\begin{aligned}
&randomMosaico :: Int \rightarrow Int \rightarrow Int \rightarrow \mathsf{IO}\ Picture\\
&randomMosaico\ 0\ \_\ \_ = return\ (Pictures\ [\,])\\
&randomMosaico\ l\ c\ al = \mathbf{do}\\
&\quad m \leftarrow randomMosaico\ (l-1)\ c\ al\\
&\quad a \leftarrow randomLMosaico\ c\ c \div 2\\
&\quad \mathbf{let}\ p = Pictures\ ((put\ (0, fromIntegral\ (80 * (l - al - 1)))\ a) : [m])\\
&\quad return\ p
\end{aligned}
$$

Função randomLMosaico gera uma imagem com c colunas. Caso n numero de colunas a gerar seja 0 retorna uma imagem sem nada, caso contrario gera uma imagem um ladrinho com RandomTruchet e uma imagem com as outras colunas e retorna a imagem com a sua união.

$$
\begin{aligned}
&randomLMosaico :: Int \rightarrow Int \rightarrow \mathsf{IO}\ Picture\\
&randomLMosaico\ 0\ \_ = return\ (Pictures\ [\,])\\
&randomLMosaico\ c\ ac = \mathbf{do}\\
&\quad m \leftarrow randomLMosaico\ (c-1)\ ac\\
&\quad a \leftarrow randomTrunchet\\
&\quad \mathbf{let}\ p = Pictures\ ((put\ (fromIntegral\ (80 * (c - ac - 1)), 0)\ a) : [m])\\
&\quad return\ p
\end{aligned}
$$

Função randomTrunchet que retorna uma imagem de um ladrinho.

$$
\begin{aligned}
&randomTrunchet :: \mathsf{IO}\ Picture\\
&randomTrunchet = \mathbf{do}\\
&\quad rl \leftarrow permuta\ [truchet1, truchet2]\\
&\quad \mathbf{let}\ p = rl\ !!\ 0\\
&\quad return\ p\\
&\quad \text{--}
\end{aligned}
$$