

A.A. 2023-2024

# **Appunti di Meccanica Analitica**

**Riccardo Franchi**

Collegio Superiore - Università di Bologna

# Indice

1. Richiami e notazioni di meccanica .....	3
1.1. Lavoro ed energia .....	4
1.2. Momenti della quantità di moto e della forza .....	7
1.3. Meccanica newtoniana di sistemi di particelle .....	8
2. Sistemi ad un grado di libertà .....	13
2.1. Studio qualitativo delle equazioni del moto .....	14
2.2. Casi riconducibili ad un grado di libertà .....	21
2.3. Studio qualitativo di un campo centrale .....	22
2.4. Problema di Keplero .....	25
3. Meccanica Lagrangiana .....	28
3.1. Applicazione alla meccanica .....	32
4. Cenni di geometria differenziale .....	38
4.1. Vettori e spazi tangenti .....	39
4.2. Differenziale di una funzione fra varietà .....	41
5. Meccanica lagrangiana per sistemi vincolati .....	42
5.1. Principio di D'Alembert .....	44
5.2. Il principio di minima azione vincolata .....	50
5.3. Il teorema di Noether .....	53
6. Cenni di meccanica hamiltoniana .....	57
6.1. La trasformata di Legendre .....	57
6.2. Principi di meccanica hamiltoniana .....	60
6.3. Alcuni risultati di base sulle equazioni differenziali .....	62

# 1. Richiami e notazioni di meccanica

Si indica la legge oraria come:

$$\mathbf{r}(t)$$

che è una funzione da un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  a un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$ . Essa non deve essere confusa con la *traiettoria* di un punto, che è l'immagine di  $\mathbf{r}(t)$ . Si definisce poi  $\mathbf{v}(t) := \dot{\mathbf{r}}(t)$  la velocità della legge oraria  $\mathbf{r}(t)$ , e  $\mathbf{a}(t) := \ddot{\mathbf{r}}(t)$ .

Si ha come equazione della *meccanica newtoniana* di una particella

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_{tot}}{m}$$

che dà un'equazione differenziale (ordinaria):

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \frac{\mathbf{F}_{tot}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t)}{m}.$$

Si assumerà sempre che esiste unica una soluzione di quest'ultima equazione differenziale, con condizioni iniziali "sensate"

$$\begin{cases} \mathbf{r}(t_0) =: \mathbf{r}_0 \\ \dot{\mathbf{r}}(t_0) =: \mathbf{v}_0 \end{cases}.$$

Spesso la soluzione  $\mathbf{r}(t)$  dell'equazione differenziale sarà *globale*, ovvero definita  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

Si può trasformare un'equazione differenziale lineare di secondo ordine vettoriale, come quella appena vista, in due equazioni differenziali lineari del primo ordine. Si pone  $\mathbf{v}(t) := \dot{\mathbf{r}}(t)$ . Allora l'equazione è equivalente a

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}(t) \\ \dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{\mathbf{F}_{tot}(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t)}{m} \end{cases}$$

Si definisce  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) := \left( \mathbf{v}, \frac{\mathbf{F}_{tot}(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t)}{m} \right)$$

e  $\mathbf{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{y}(t) := (\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)).$$

Il sistema diventa quindi

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), t).$$

Utilizzando la notazione vettoriale,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{r}(t) \\ \mathbf{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \frac{\mathbf{F}_{tot}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t)}{m} \end{pmatrix}.$$

Si è quindi passati da un'equazione di secondo grado con tre gradi di libertà ad una equazione di primo grado con sei gradi di libertà.

### 1.1. Lavoro ed energia

Data una forza  $\mathbf{F}$  (che non è necessariamente la forza totale che agisce su una particella) e uno spostamento infinitesimo  $d\mathbf{r}$ , il lavoro infinitesimo di  $\mathbf{F}$  lungo  $d\mathbf{r}$  è

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Data una forza  $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t)$  è una legge oraria  $\mathbf{r}(t), t \in [t_1, t_2]$  il lavoro della forza lungo la  $\mathbf{r}(t)$  è definito come

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t) \cdot \mathbf{v}(t) dt.$$

Se  $\mathbf{F}$  dipende solo dalla traiettoria allora si può risolvere anche il primo integrale, svolgendo il prodotto scalare, ma se  $\mathbf{F}$  dipende anche dal tempo  $t$  questo procedimento non si può utilizzare. Il passaggio dal primo integrale al secondo equivale, a livello matematico, ad un cambio di variabile. Il secondo integrale è utile per notare esplicitamente che il lavoro non è la somma di tanti piccoli spostamenti, ma può dipendere anche dalla velocità e dall'intervallo di tempo.

Come accennato prima, se la forza è di tipo  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ , cioè dipende solo dalla posizione della particella (campo posizionale), allora il lavoro  $W$  dipende solo da  $\mathbf{F}$  e dalla traiettoria  $\gamma = \text{Im}(\mathbf{r})$  e si può scrivere

$$W = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

*Dimostrazione:* si considera un'altra parametrizzazione di  $\gamma$ :

$$\mathbf{q} : [s_1, s_2] \rightarrow \gamma.$$

Sotto certe ipotesi, illustrate sotto, si può scrivere

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{q}(\phi(t))$$

con  $\phi$  biettiva e derivabile.

Si è cioè definita una funzione  $\mathbf{q}(s)$  che al tempo  $s$  corrisponde al valore della funzione  $\mathbf{r}(t)$  al tempo  $t$ , e si è definita un'altra funzione  $\phi(t)$  tale che  $\phi(t) = s$ .

Le ipotesi sono

- $\mathbf{r} : [t_1, t_2] \rightarrow \gamma$  biettiva
- $\mathbf{q} : [s_1, s_2] \rightarrow \gamma$  biettiva

Si noti che:

$$\mathbf{r} = \mathbf{q} \circ \phi \Leftrightarrow \phi = \mathbf{q}^{-1} \circ \mathbf{r}.$$

Si deve quindi compiere un moto in cui la particella non è mai ferma e non torna mai indietro lungo la sua traiettoria.

Si hanno due casi,  $\phi$  crescente o decrescente. Si dimostra il caso in cui è crescente, mentre l'altro, analogo, è lasciato come esercizio.

Si ha l'integrale

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{q}(\phi(t))) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{q}(\phi(t)) dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{q}(\phi(t))) \cdot \dot{\mathbf{q}}(\phi(t)) \dot{\phi}(t) dt$$

Facendo il cambio di variabile

$$s := \phi(t)$$

$$\Rightarrow ds = \dot{\phi}(t) dt,$$

$$s_1 := \phi(t_1), s_2 := \phi(t_2)$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{q}(\phi(t))) \cdot \dot{\mathbf{q}}(\phi(t)) \dot{\phi}(t) dt = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{F}(\mathbf{q}(s)) \cdot \dot{\mathbf{q}}(s) ds.$$

■

L'energia cinetica  $T$  vale

$$T(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} m v^2$$

espressa come funzione generica di  $v$ , mentre lungo una legge oraria  $\mathbf{r}(t)$ :

$$T(t) = T(\dot{\mathbf{r}}(t)).$$

Si noti che, per semplicità, si è indicato ugualmente con  $T$  una funzione che ha come parametro un vettore e una funzione che prende uno scalare.

**Proposizione 1.1:** il lavoro  $W$  della *forza totale* agente su una particella lungo una legge oraria  $\mathbf{r}(t), t \in [t_1, t_2]$  è pari alla variazione dell'energia cinetica in  $[t_1, t_2]$ , indicata con  $\Delta T = T(t_2) - T(t_1)$ .

*Dimostrazione:*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} T(t) &= \frac{d}{dt} \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = m \dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}_{tot}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) \\ \Rightarrow W_{tot} &= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{tot} \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dT(t)}{dt} dt = T(t_2) - T(t_1). \end{aligned}$$

■

**Definizione 1.1:** un campo di forza *posizionale*  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$  si dice *conservativo* se esiste una funzione a valori scalari  $U(\mathbf{r})$  tale che

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}(\mathbf{r}), \frac{\partial U}{\partial y}(\mathbf{r}), \frac{\partial U}{\partial z}(\mathbf{r})\right)$$

dove  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . La funzione  $U(\mathbf{r})$  è detta *energia potenziale*.

Si noti la differenza tra  $U(\mathbf{r})$  e  $U(\mathbf{r}(t))$ , come per l'energia cinetica. Si noti anche che  $U$  è definita a meno di una costante: con

$$U_c(\mathbf{r}) := U(\mathbf{r}) + c,$$

$U_c(\mathbf{r})$  ha le stesse proprietà fisiche di  $U(\mathbf{r})$ .

**Proposizione 1.2:** il lavoro compiuto da un campo conservativo lungo una legge oraria  $\mathbf{r}(t), t \in [t_1, t_2]$  (ma si potrebbe anche dire lungo la traiettoria data da  $\mathbf{r}$ ) è pari all'opposto della variazione dell'energia potenziale

$$W = -\Delta U = U(t_1) - U(t_2).$$

*Dimostrazione:* per  $U(\mathbf{r}), \mathbf{r}(t)$  funzioni differenziabili

$$\frac{d}{dt}U(\mathbf{r}(t)) = \nabla U(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t).$$

Allora si può scrivere

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \nabla U(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}U(t) dt = -\Delta U.$$

■

**Definizione 1.2:** per una particella sottoposta (soltanto) ad un campo conservativo ( $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{tot}$ ) l'*energia totale* è definita come

$$E(\mathbf{r}, \mathbf{v}) := T(\mathbf{v}) + U(\mathbf{r}).$$

Una notazione utilizzata è

$$E(t) = E(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)).$$

**Teorema 1.1** (conservazione dell'energia totale): l'energia totale  $E(t)$  di una particella sottoposta (soltanto) ad un campo conservativo è costante.

*Dimostrazione:* nell'intervallo di tempo  $[t_0, t]$  vale

$$T(t) - T(t_0) = W_{\text{tot}} = W_F = U(t_0) - U(t)$$

$$\implies T(t) + U(t) = T(t_0) + U(t_0).$$

■

## 1.2. Momenti della quantità di moto e della forza

Si indica con  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  la quantità di moto. Dato un punto (o un vettore)  $\mathbf{r}_0$  fissato, si definisce

$$\mathbf{L} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{p}$$

momento della quantità di moto  $\mathbf{p}$  e

$$\mathbf{N} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}$$

momento della forza  $\mathbf{F}$ .

Con  $\mathbf{L}(t) = \mathbf{r}(t) \times (m\dot{\mathbf{r}}(t))$ , ponendo  $\mathbf{r}_0 = 0$ ,

$$\dot{\mathbf{L}}(t) = m\dot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t) + m\mathbf{r}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{N}_{\text{tot}}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{\text{tot}}$$

Si lascia come esercizio rifare il conto per  $\mathbf{r}_0 \neq 0$ .

**Definizione 1.3:** un campo di forze *centrale* è un campo posizionale  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  tale che

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r) \frac{\mathbf{r}}{r} = f(r) \hat{\mathbf{r}}$$

per una funzione  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Proposizione 1.3:** un campo centrale è conservativo con energia potenziale  $U(\mathbf{r}) = -g(r)$ , dove  $g$  è una primitiva di  $f$  (definita sopra):

$$g(r) = \int_{r_0}^r f(\rho) d\rho.$$

*Dimostrazione:* si mostra che  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})$ :

$$-\nabla U(\mathbf{r}) = \nabla g(r) = g'(r) \nabla r = g'(r) \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$$

(si è fatto uso di un lemma dell'analisi matematica che vale per funzioni differenziabili). Si mostra che  $\nabla r = \hat{\mathbf{r}}$ :

$$\mathbf{r} = (x, y, z)$$

$$\implies r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\implies \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

$$\implies \nabla r = \left( \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

■

**Proposizione 1.4:** se una particella è sottoposta ad un campo centrale  $\mathbf{F}$  essa conserva il momento della quantità di moto rispetto all'origine.

*Dimostrazione:*

$$\dot{\mathbf{L}}(t) = \mathbf{N}_{tot} = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = 0$$

dato che  $\mathbf{F} \parallel \mathbf{r}$  dato che la forza è centrale. ■

### 1.3. Meccanica newtoniana di sistemi di particelle

Dato un sistema con  $N$  particelle, con posizioni e velocità  $\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i$ , ponendo

$$\underline{\mathbf{r}} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$$

$$\underline{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$$

$$\underline{\mathbf{p}} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) \in \mathbb{R}^{3N},$$

e chiamandoli *vettori globali*, allora

$$\underline{\mathbf{F}} = \dot{\underline{\mathbf{p}}}$$

con

$$\underline{\mathbf{F}} = (\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_N)$$

e  $\mathbf{F}_i$  è la forza totale agente sulla particella  $i$ -esima. Si può quindi riscrivere il secondo principio della dinamica per tutto il sistema come

$$\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{a}}$$

dove  $\underline{\mathbf{a}}$  è il vettore globale delle accelerazioni e  $\underline{\mathbf{M}}$  è la matrice diagonale  $3N \times 3N$  delle masse:

$$\begin{bmatrix} m_1 \mathbb{I}_3 & & \\ & \ddots & \\ & & m_n \mathbb{I}_3 \end{bmatrix}$$

dove con  $m_i \mathbb{I}_3$  si indica la massa  $i$ -esima moltiplicata per la matrice identità  $3 \times 3$ :

$$m_i \mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} m_i & & \\ & m_i & \\ & & m_i \end{bmatrix}$$

**Definizione 1.4:** si definisce energia cinetica totale

$$T(\underline{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2} \langle \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{v}} \rangle.$$

Si mostra facilmente che, con questa definizione,



$$T(\underline{v}) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} v_i^2 = \sum_{i=1}^N T(\underline{v}_i).$$

L'energia cinetica totale è quindi la somma delle energie cinetiche individuali.

Se il sistema totale di forze è posizionale, ossia

$$\underline{F} = (F_1(\underline{r}), \dots, F_N(\underline{r}))$$

dove la forza che agisce su ogni particella dipende solo dalle posizioni di tutte le particelle, ed esiste una funzione  $U(\underline{r}), U : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}$ , tale che

$$\underline{F}(\underline{r}) = -\nabla_{\underline{r}} U(\underline{r}) = -(\nabla_{\underline{r}_1} U(\underline{r}), \dots, \nabla_{\underline{r}_N} U(\underline{r})) = -\left(\frac{\partial U(\underline{r})}{\partial x_1}, \frac{\partial U(\underline{r})}{\partial y_1}, \frac{\partial U(\underline{r})}{\partial z_1}, \dots\right)$$

allora il sistema di particelle si dice *conservativo* e  $U$  è detta *energia potenziale totale*.

*Esempio 1.1:* Considerate le forze

$$F_i = -\nabla_{\underline{r}_i} U(\underline{r}_i)$$

Si dimostra che il sistema è conservativo per

$$U(\underline{r}) = \sum U_i(\underline{r}_i),$$

infatti,

$$\nabla_{\underline{r}} U(\underline{r}) = (\nabla_{\underline{r}_1} U(\underline{r}), \dots, \nabla_{\underline{r}_N} U(\underline{r}))$$

con

$$\begin{aligned} \nabla_{\underline{r}_i} U(\underline{r}) &= \nabla_{\underline{r}_i} \left( \sum_{k=1}^N U_k(\underline{r}_k) \right) = \nabla_{\underline{r}_i} U_i(\underline{r}_i) = -F_i(\underline{r}_i) \\ \implies -\nabla_{\underline{r}} U(\underline{r}) &= (F_1(\underline{r}_1), \dots, F_N(\underline{r}_N)) = \underline{F}(\underline{r}). \end{aligned}$$

**Definizione 1.5:** l'energia totale del sistema è data da

$$E(\underline{r}, \underline{v}) = T(\underline{v}) + U(\underline{r})$$

Per una legge oraria  $\underline{r}(t)$ ,

$$E(t) = E(\underline{r}(t), \dot{\underline{r}}(t)).$$

**Teorema 1.2** (conservazione dell'energia totale): in un sistema conservativo, l'energia totale si conserva:  $E(t) = \text{costante}$ .

La dimostrazione è lasciata per esercizio.

### 1.3.1. Forze esterne e interne

Generalmente, la forza totale agente su una particella, può essere scomposta in una componente esterna e una interna:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{ij}$$

dove con  $\mathbf{F}_{ij}$  si indica la forza che la particella  $j$ -esima esercita sulla  $i$ -esima, e

$$\mathbf{F}_i^{\text{ext}} = \mathbf{F}_i^{\text{ext}}(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t),$$

$$\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{r}_j, \mathbf{v}_j).$$

Inoltre, in molti casi,

$$\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_{ij}(\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|)$$

e, in particolare,

$$\mathbf{F}_{ij} = f_{ij}(\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|) \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|}$$

con  $f_{ij} = f_{ji}$ ,  $f_{ij} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ . Come conseguenza di quest'assunzione, si ha  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ , ed entrambe sono parallele a  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ . Si tratta di un'espressione della *forma forte* della terza legge di Newton. Sotto queste ultime ipotesi, il campo di forze interne è conservativo.

**Definizione 1.6** (centro di massa):

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \in \mathbb{R}^3.$$

Spesso si indica  $M = \sum_{i=1}^N m_i$ . Vale che, sotto l'ipotesi che  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ ,

$$M \ddot{\mathbf{R}} = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij} = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}}.$$

Quindi è come se la forza esterna totale agente sul sistema agisse sul centro di massa.

**Definizione 1.7** (quantità di moto totale):

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i.$$

Si ha che  $\mathbf{P}$  si conserva nel caso in cui  $\sum_i \mathbf{F}_i^{\text{tot}} = 0$ .

**Definizione 1.8** (momento angolare totale e momento della forza totale): si definisce, per un punto di riferimento  $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{p}_i$$

e

$$\mathbf{N} = \sum_i \mathbf{N}_i = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}_i.$$

Vale che

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_i \dot{\mathbf{L}}_i = \sum_i \mathbf{N}_i$$

se  $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{\text{tot}}$ , nell'ipotesi che  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ ,

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i \neq j} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}_{ij}.$$

Ora, si mostra che il secondo termine della somma è nullo:

$$\sum_{i \neq j} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}_{ij} = \sum_{i < j} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_j + \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}_{ij} = \sum_{i < j} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} = 0$$

dato che  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$  è parallelo a  $\mathbf{F}_{ij}$ .

Si mostra che un sistema con forze interne del tipo

$$\mathbf{F}_{ij} = f_{ij}(\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|) \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|}$$

è conservativo con energia potenziale

$$U^{\text{int}}(\underline{\mathbf{r}}) - U(\underline{\mathbf{r}}) = - \sum_{i < j} g_{ij}(\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|)$$

con

$$g_{ij}(r) = \int_{r_0}^r f_{ij}(\rho) d\rho.$$

Si ha che

$$-\nabla_{\underline{\mathbf{r}}} U(\underline{\mathbf{r}}) = -(\nabla_{\mathbf{r}_1} U(\underline{\mathbf{r}}), \dots, \nabla_{\mathbf{r}_N} U(\underline{\mathbf{r}})),$$

dove ogni gradiente vale

$$-\nabla_{\mathbf{r}_k} U(\underline{\mathbf{r}}) = \sum_{\substack{i < j \\ i=k \vee j=k}}^N \nabla_{\mathbf{r}_k} g_{ij}(\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N g'_{kj}(\|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j\|) \frac{\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j}{\|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j\|} = \sum_{j \neq k} \mathbf{F}_{kj} = \mathbf{F}_k^{\text{int}}.$$

*Esempio 1.2:* con  $N = 4$ , il potenziale è, omettendo gli argomenti delle funzioni,

$$U(\underline{\mathbf{r}}) = g_{12} + g_{13} + g_{14} + g_{23} + g_{24} + g_{34}.$$

Ponendo  $k = 3$ ,

$$\nabla_{\mathbf{r}_3} U(\underline{\mathbf{r}}) = \nabla_{\mathbf{r}_3} g_{31} + \nabla_{\mathbf{r}_3} g_{32} + \nabla_{\mathbf{r}_3} g_{34}.$$

## 2. Sistemi ad un grado di libertà

Intendiamo sistemi di una particella soggetta ad una forza posizionale, descritti quindi da equazioni della forma:

$$\ddot{x}(t) = f(x(t)),$$

ricordando che una forza posizionale in  $\mathbb{R}$  è sempre conservativa (se la funzione forza è integrabile). Infatti,

$$U(x) = - \int_{x_0}^x f(s) \, ds$$

è un potenziale per  $f$ . Come visto, vale anche che

$$\frac{(\dot{x}(t))^2}{2} + U(x(t)) = E(t) = \text{costante}.$$

*Esempio 2.1 (oscillatore armonico):* posto

$$\ddot{x} = -x.$$

La soluzione generale è della forma

$$x(t) = b \sin t + a \cos t,$$

per condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}.$$

Si trova quindi la soluzione particolare, date le condizioni iniziali:

$$\dot{x}(t) = b \cos t - a \sin t$$

$$\implies \begin{cases} x(0) = a = 0 \\ \dot{x}(0) = b = 1 \end{cases}$$

$$\implies x(t) = \sin t$$

$$\implies v(t) = \dot{x}(t) = \cos t.$$

Allora, l'energia totale è

$$E(t) = \frac{(v(t))^2}{2} + \frac{(x(t))^2}{2} = E(0) = \frac{1}{2}$$

scegliendo come potenziale per  $f(x) = -x$ ,  $U(x) = \frac{1}{2}x^2$ .

## 2.1. Studio qualitativo delle equazioni del moto

Si può trasformare l'equazione differenziale del secondo ordine

$$\ddot{x}(t) = f(x(t))$$

in due equazioni differenziali del primo ordine accoppiate tra loro, introducendo una nuova variabile:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x) \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{G}(x, v) = \begin{pmatrix} v \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

Si utilizza inoltre un piano  $x, v$  detto *piano di fase* o *piano delle fasi*. In generale, l'equazione differenziale vettoriale  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}(\mathbf{x}(t))$ ,  $\mathbf{G} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  si può visualizzare sullo spazio di fase  $\mathbb{R}^d$ , graficando su di esso il campo vettoriale  $\mathbf{G}$ .

Risolvere un'equazione differenziale è equivalente a trovare una  $\mathbf{x}(t)$  a valori nello spazio di fase tale che per ogni  $t$  la derivata di  $\mathbf{x}(t)$  è uguale al campo vettoriale  $\mathbf{G}$  in  $\mathbf{x}(t)$ .

*Esempio 2.2:* nell'esempio dell'oscillatore armonico,

$$\mathbf{F}(x, v) = (v, -x).$$

La traiettoria delle soluzioni è allora costituita da cerchi concentrici percorsi in senso orario.

Con le condizioni iniziali dette,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per un generale sistema meccanico posizionale in una dimensione, le traiettorie delle leggi orarie (note anche come *curve di fase*) sono determinabili a partire dalla conservazione dell'energia

$$E(v, x) = \frac{v^2}{2} + U(x).$$

In particolare, per potenziali *non patologici*, gli insiemi di livello dell'energia

$$\Sigma_E = \left\{ (x, v) \in \mathbb{R}^2 : \frac{v^2}{2} + U(x) = E \right\}$$

sono generalmente curve, e le curve di fase sono loro sottoinsiemi.

I punti  $\bar{x}$  tali che  $f(\bar{x}) = 0$ , (corrispondenti a punti critici dell'energia potenziale), sono detti *posizioni di equilibrio*.

**Definizione 2.1:** le posizioni di equilibrio sono dette stabili se dopo una piccola perturbazione delle condizioni iniziali di equilibrio ( $x(t) = \bar{x}, v(t) = 0$ ) si ha che  $x(t)$  rimane vicino a  $\bar{x}$ ,  $\forall t$ .

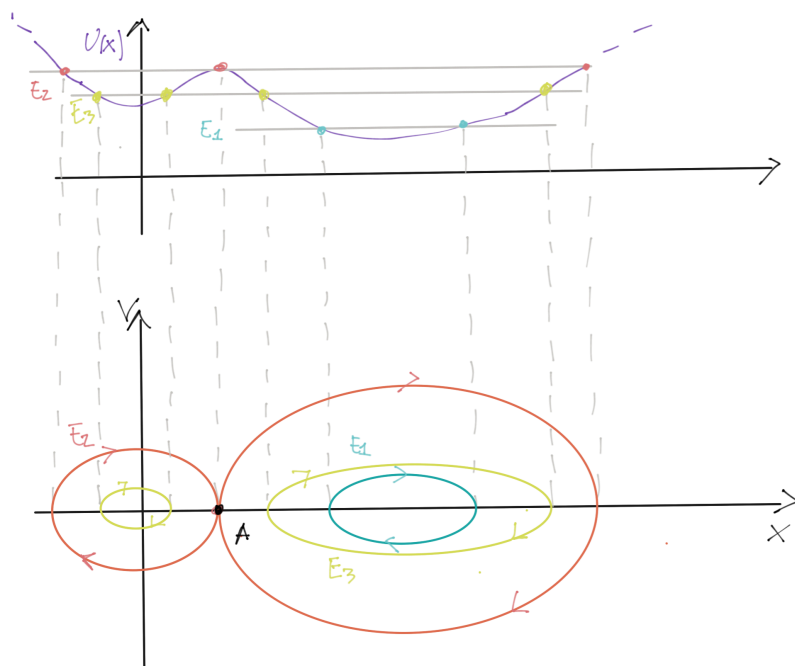


Figura 1: Curve di livello relative a differenti energie meccaniche  $E_i$ . Quella<sup>1</sup> corrispondente ad  $E_2$  è detta *curva separatrice*.

Si fanno ora alcune osservazioni.

1. Le curve di livello dell'energia sono simmetriche rispetto all'asse  $x$ , infatti  $E(x, v) = E(x, -v)$ .
2. Nel semipiano superiore del piano di fase le traiettorie vanno verso destra (nel verso positivo delle  $x$ ), mentre nel semipiano inferiore vanno verso sinistra:

$$|v(t)| = \sqrt{2(E - U(x(t)))} \quad (1)$$

e il segno dipende dal semipiano in cui si trova il punto considerato.

3. Gli unici punti del piano di fase per cui la traiettoria (di fase) rimane nel punto sono quelli del tipo  $(\bar{x}, 0)$ , con  $f(\bar{x}) = 0$ .
4. Al di fuori dei punti  $(\bar{x}, 0)$ , con  $f(\bar{x}) = 0$  (posizioni di equilibrio), le curve di livello dell'energia sono curve lisce, assumendo  $U$  due volte differenziabile, con  $U''$  continua. Dire  $\Sigma_{E_0}$  è liscia significa che per ogni punto  $(\hat{x}, \hat{y}) \in \Sigma_{E_0}$  esiste un intorno rettangolare  $\Upsilon$  tale che  $\Sigma_{E_0} \cap \Upsilon$  è il grafico di una funzione  $v = g(x)$  o  $x = g(v)$  con  $g$  differenziabile con derivata continua. Infatti,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} &= U'(x) = -f(x) \\ \frac{\partial E}{\partial v} &= v \end{aligned}$$

e, al di fuori delle posizioni di equilibrio, almeno una di queste due derivate parziali è non nulla. Si può allora applicare il teorema di Dini alla funzione

$$F(x, v) = E(x, v) - E_0.$$

Possono esistere soluzioni non globali anche per le equazioni differenziali della meccanica. Infatti

<sup>1</sup>L'Arnold osserva che ad una separatrice corrispondono 3 curve di livello. Vedi il problema a pag. 25.

$$\ddot{x} = 2x^3 \iff \begin{pmatrix} \dot{x} \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 2x^3 \end{pmatrix}$$

ha come soluzione non globale

$$x(t) = \frac{1}{t-1}$$

che tende a  $+\infty$  per  $t \rightarrow 1$ .

Per i sistemi unidimensionali, non solo sono note le traiettorie (utilizzando il fatto che sono contenute negli insiemi di livello dell'energia), ma, almeno indirettamente, è possibile conoscere l'intera legge oraria. Vale infatti il seguente

**Teorema 2.1:** sia  $x(t), t \in [t_1, t_2]$  una parte di legge oraria, con condizioni iniziali  $x(t_0) = x_0$ ,  $v(t_0) = v_0$ ,  $t_0 \in [t_1, t_2]$  tale che, o

$$\dot{x}(t) \geq 0, \forall t \in [t_1, t_2]$$

oppure

$$\dot{x}(t) \leq 0, \forall t \in [t_1, t_2]$$

(rispettivamente si ha un moto verso destra o sinistra), allora vale che,  $\forall t \in [t_1, t_2]$ ,

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\pm \sqrt{2(E - U(\xi))}}$$

con il segno  $+$  nel caso  $\dot{x} \geq 0$  e  $-$  nel caso  $\dot{x} \leq 0$ ; con  $x = x(t)$  e  $E = E(x_0, v_0)$  (che corrisponde all'energia della legge oraria considerata).

Questo metodo è detto *per quadratura* e permette di ricavare  $t(x)$ , cioè  $t$  come funzione di  $x$ , ovvero l'inversa di  $x(t)$ , per tratti di tempo in cui la velocità non cambia segno.

Sperabilmente poi è possibile invertire la  $t(x)$  e ottenere la  $x(t)$  su un intervallo in cui il segno di  $\dot{x}(t)$  è costante fino al prossimo tempo (diciamo  $t_2$ ) in cui la velocità si annulla, detto *tempo di inversione*. A quel punto, conoscendo  $t_2$  e  $x_2 = x(t_2)$ , si può studiare il problema con lo stesso metodo su  $[t_2, t_3]$ , dove  $t_3$  è il successivo tempo di inversione, sperando di riuscire a invertire  $t(x)$  tra  $x_2$  e  $x_3 = x(t_3)$ , e così via (quando si dice sperabilmente, si intende che si possa fare un conto esplicito per ricavare  $x(t)$  su un certo intervallo di tempo, ma gli argomenti di cui sopra in ogni caso identificano univocamente la legge oraria, anche nel caso non si riuscisse a scriverne una forma esplicita).

*Esempio 2.3:* si ricava nuovamente la legge oraria dell'oscillatore armonico, con condizioni iniziali  $t_0 = 0, x(t_0) = 0, \dot{x}(t_0) = 1$

$$\implies E := E(t) = E(0) = \frac{1}{2}.$$

Dato che nel primo tratto (per  $t$  vicini a  $t_0$ ) la particella va a destra, si usa la formula

$$t = t - t_0 = \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{2(E - U(\xi))}} = \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = [\arcsin \xi]_0^x = \arcsin x$$

da cui  $t = t(x) = \arcsin x$



$$\Rightarrow x(t) = \sin t.$$

Tuttavia, per quanto se ne sa, questa formula vale soltanto su  $[t_1, t_2]$  dove  $t_1$  è il primo tempo di inversione per tempi  $t < t_0$ , e  $t_2$  è il primo tempo di inversione per  $t > t_0$ . Svolgendo il calcolo solo su  $t_2$  (il caso con  $t_1$  è analogo), il punto di inversione è chiaramente  $x_1 = 1$ , e quindi  $t_1$  è il primo tempo maggiore di  $t_0$  in cui la particella raggiunge  $x_1 = 1$ , e cioè  $t_1 = \frac{\pi}{2}$ .

Ora, si ripete il calcolo per tempi  $t \geq t_1 = \frac{\pi}{2}$ , sotto l'ipotesi che  $\dot{x}(t) \leq 0$ :

$$t - \frac{\pi}{2} = t - t_1 = \int_1^x \frac{dx}{-\sqrt{1-\xi^2}} = [\arccos \xi]_1^x = [-\arcsin \xi]_1^x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

$$\Rightarrow t - \pi = -\arcsin x \Leftrightarrow x = \sin(\pi - t) = \sin t$$

e quindi anche nell'intervallo  $[t_1, t_2]$  vale  $x(t) = \sin t$ .

Ma quanto vale  $t_2$ , corrispondente al prossimo tempo di inversione? Si può vedere che  $t_2$  è il primo tempo  $t > t_1$  per cui  $x(t_2) = -1$  (corrispondente al punto di inversione). Oppure si considera  $\dot{x}(t) = \text{costante}$  e si cerca il primo  $t_2 > \frac{\pi}{2}$  per cui  $\dot{x}(t_2) = 0$ . In entrambe le maniere si ottiene  $t_2 = \frac{3}{2}\pi$ . E così via per i successivi tempi di inversione.

Prima di darne una dimostrazione, si presenta una giustificazione del precedente teorema.

Si può riscrivere la (1) come

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{2(E - U(x))}.$$

Quindi

$$dt = \frac{dx}{\pm \sqrt{2(E - U(x))}}.$$

Integrando e sapendo che  $x_0 = x(t_0)$ ,  $x = x(t)$ , si ottiene

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\pm \sqrt{2(E - U(\xi))}}$$

.

Si dimostra ora rigorosamente il teorema:

*Dimostrazione:* per evitare confusione fra  $x$  come funzione di  $t$  e  $x$  come numero, si indica con  $x$  la funzione e  $\xi$  il numero. Quindi,  $\xi = x(t)$  e  $t = x^{-1}(\xi)$ ; e la (1) si riscrive come

$$\dot{x}(t) = \pm \sqrt{2(E - U(x(t)))}$$

$$\Rightarrow \dot{x}(x^{-1}(\xi)) = \pm \sqrt{2(E - U(\xi))}$$

$$\Rightarrow \frac{dx^{-1}(\xi)}{d\xi} = (x^{-1})'(\xi) = \frac{1}{x'(x^{-1}(\xi))} = \frac{1}{\pm \sqrt{2(E - U(\xi))}}.$$

Chiamando  $\xi_0 = x(t_0)$ ,  $\xi_1 = x(t_1)$ , si ha

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} \pm \frac{1}{\sqrt{2(E - U(\xi))}} d\xi = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{dx^{-1}(\xi)}{d\xi} d\xi = x^{-1}(\xi_1) - x^{-1}(\xi_0) = t_1 - t_0$$

che è essenzialmente quanto asserito dal teorema, riscritto con una notazione più precisa. ■

**Definizione 2.2:** una *separatrice* è una traiettoria di fase (altrimenti detta curva di fase), non riducibile ad un punto, la cui energia corrisponde ad un massimo locale del potenziale.

Si chiama così perché separa due tipi di moti sostanzialmente diversi, cioè non vicini fra loro (almeno come leggi orarie).

**Proposizione 2.1:** se  $\bar{x}$  è un punto di massimo locale tale che  $U''(\bar{x}) < 0$ , allora per ogni separatrice corrispondente a  $(\bar{x}, 0)$  nel piano di fase, vale

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = \bar{x}$$

con  $x(t) \neq \bar{x}, \forall t$ . Cioè, la traiettoria (fisica) converge a  $\bar{x}$  o nel futuro o nel passato (o in entrambi i casi), senza mai raggiungerlo.

Imprecisamente, questa situazione è talvolta descritta come “ $x(t)$  raggiunge  $\bar{x}$  in un tempo infinito”.

*Dimostrazione:* per definizione, l’energia corrispondente alla separatrice è  $E = U(\bar{x})$ . Siccome  $U''(\bar{x}) < 0$ , per ogni punto  $(x, v)$  sulla separatrice, molto vicino a, ma non coincidente con,  $(\bar{x}, 0)$ , vale

$$\begin{aligned} T(v) &= E - U(x) > 0 \\ \implies v &\neq 0 \end{aligned}$$

e quindi (o andando avanti o indietro nel tempo, a seconda dei casi) il punto materiale non si può fermare in un punto  $\hat{x}$  vicino ma diverso da  $\bar{x}$ . Quindi è immediato che

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = \bar{x}.$$

La parte non banale della proposizione è dimostrare che  $\bar{x}$  non è mai raggiunto. A riguardo si possono avere due argomenti, il primo è elegante ma poco intuitivo, mentre il secondo è più quantitativo.

Assumendo che l’equazione differenziale che regola il moto

$$\frac{d}{dt}(x, v) = G(x, v) = (v, f(x))$$

abbia la proprietà di esistenza e unicità delle soluzioni (per cui basta assumere che  $G$  sia Lipschitziana in un intorno di  $(\bar{x}, 0)$ ), allora non può esistere una soluzione  $x(t)$  non costante con  $x(\bar{t}) = \bar{x}$  per qualche  $\bar{t}$ , perché altrimenti il problema di Cauchy considerato

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x) \end{cases} \quad \begin{cases} x(\bar{t}) = \bar{x} \\ v(\bar{t}) = 0 \end{cases}$$

avrebbe sia la soluzione  $t \mapsto (x(t), \dot{x}(t))$ , che la soluzione  $t \mapsto (\bar{x}, 0)$ , e queste sono diverse tra loro.

Il secondo argomento è invece il seguente. Sia  $-a = U''(\bar{x})$  ( $a > 0$ ). Essendo  $\bar{x}$  un punto di massimo locale, in un intorno di  $\bar{x}$ ,

$$U(x) \sim U(\bar{x}) + U'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}U''(\bar{x})(x - \bar{x})^2 = E - \frac{a}{2}(x - \bar{x})^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{2(E - U(x))} \sim \sqrt{a}|x - \bar{x}|.$$

Quindi per un tempo  $t_1$  tale che  $x_1 = x(t)$  sia nell'intorno in cui vale l'approssimazione citata,

$$t - t_1 = \int_{x_1}^x \pm \frac{1}{\sqrt{2(E - U(\xi))}} d\xi \sim \pm \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{x_1}^x \frac{1}{|\xi - \bar{x}|} d\xi.$$

La funzione  $|\xi - \bar{x}|^{-1}$  non è integrabile in  $\xi$  attorno a  $\bar{x}$  e quindi, per  $x \rightarrow \bar{x}$ , l'integrale va a  $\pm\infty$ , a seconda dei casi, ovvero  $t - t_1 \rightarrow \pm\infty$ , e quindi anche  $t \rightarrow \pm\infty$ . ■

*Esempio 2.4:* risolvere il problema unidimensionale  $\ddot{x} = -2x + 2x^3$ , con condizioni iniziali  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1$ , con il metodo delle quadrature.

Si prende

$$U(x) = - \int_0^x (-2\xi + 2\xi^3) d\xi = x^2 - \frac{x^4}{2}.$$

Inoltre,

$$E - E(0) = \frac{(\dot{x}(0))^2}{2} + (x(0))^2 - \frac{(x(0))^4}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2(E - U(x)) = 2\left(\frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{2}\right) = 1 - 2x^2 + x^4 = (1 - x^2)^2$$

da cui, usando che  $x = 0$  per  $t = 0$ , si ricava  $t(x)$  da  $t = 0$  fino al primo tempo di inversione (se finito):

$$t = \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{2(E - U(\xi))}} = \int_0^x \frac{d\xi}{1 - \xi^2} = \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \xi}{1 - \xi} \right]_0^x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}$$

La funzione  $\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$  si chiama anche  $\operatorname{arctanh}(x)$ , ed è la funzione inversa di

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

Quindi si ha che  $t = \operatorname{arctanh}(x) \Rightarrow x(t) = \tanh(t)$ .

Si vede che il primo tempo di inversione è  $+\infty$ , come in effetti ci si poteva aspettare dalla forma del potenziale che mostra che la curva studiata è in effetti una separatrice.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 1, x(t) < 1, \forall t.$$

*Esempio 2.5:* data una traiettoria chiusa, simmetrica rispetto all'asse  $x$ , sul piano di fase con energia  $E$ , e sia  $S(E)$  l'area racchiusa dalla curva di fase. Dimostrare che il periodo  $T = \frac{dS}{dE}$ , se tale derivata esiste finita.

Si ha, per simmetria, che

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2(E - U(\xi))}} d\xi.$$

Per quanto riguarda  $S$ , sempre per simmetria,

$$S = 2 \int_{x_1}^{x_2} v(\xi) d\xi = 2 \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2(E - U(\xi))} d\xi.$$

Avendo una funzione del tipo  $F(x_1(E), x_2(E), E)$ ,

$$\frac{dF}{dE} = \partial_1 F \frac{dx_1}{dE} + \partial_2 F \frac{dx_2}{dE} + \partial_3 F$$

E dunque

$$\frac{1}{2} \frac{dS}{dE} = -\sqrt{2(E - U(x_1(E)))} \frac{dx_1}{dE} + \sqrt{2(E - U(x_2(E)))} \frac{dx_2}{dE} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2(E - U(\xi))}} d\xi$$

L'ultimo termine è  $\frac{T(E)}{2}$ , e quindi in un intorno di  $E$  si ha che tale espressione è limitata uniformemente in  $E$ , e dunque è giustificato il fatto di portare la derivata all'interno dell'integrale, applicando il corollario del teorema della convergenza dominata. I primi due termini della somma sono invece nulli, in quanto  $E = U(x_1) = U(x_2)$ .

*Esempio 2.6 (limite di piccole oscillazioni):* sia  $E \gtrsim U(\bar{x})$ , con  $\bar{x}$  un punto di equilibrio stabile, tale che la traiettoria di fase corrispondente a  $E$  è chiusa, di periodo  $T(E)$ . Dimostrare che

$$\lim_{E \rightarrow U(\bar{x})} T(E) = \frac{2\pi}{\sqrt{U''(\bar{x})}}.$$

Si approssima

$$U(x) \simeq U(\bar{x}) + \frac{1}{2} U''(\bar{x})(x - \bar{x})^2.$$

Tale approssimazione migliora con  $E \rightarrow U(\bar{x})^+$ . Detta  $E_0 = U(\bar{x})$ , la conservazione dell'energia implica che

$$E = \frac{v^2}{2} + E_0 + \frac{a}{2}(x - \bar{x})^2 \implies \varepsilon = \frac{v^2}{2} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\frac{2}{a}}$$

dove  $\varepsilon = E - E_0$  e  $a = U''(\bar{x})$

$$\implies \frac{(x - \bar{x})^2}{\frac{2\varepsilon}{a}} + \frac{v^2}{2\varepsilon} = 1$$

che corrisponde all'equazione di un'ellisse del piano di fase. Allora

$$\begin{aligned} S(E) &= 2\pi \frac{\varepsilon}{\sqrt{a}} = 2\pi \frac{E - E_0}{\sqrt{a}} \\ \implies T &= \frac{dS}{dE} = \frac{2\pi}{\sqrt{U''(\bar{x})}}. \end{aligned}$$

Questa proprietà vale per qualsiasi potenziale quadratico (*isocronia dell'oscillatore armonico*).

## 2.2. Casi riconducibili ad un grado di libertà

Tutti quei sistemi che sono completamente separabili sono riconducibili a sistemi a un grado di libertà. Un esempio notevole è l'oscillatore armonico in  $d$  dimensioni:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -k\mathbf{x}, \quad k > 0$$

$$\implies m\ddot{\mathbf{x}} = -k\mathbf{x}$$

che si può separare, componente per componente, in  $d$  equazioni differenziali indipendenti tra loro  $\ddot{x}_i = -\frac{k}{m}x_i$ .

*Esercizio 2.1:* mostrare che se si sa risolvere (trovare la legge oraria per ogni condizione iniziale)  $\ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{r}$ , allora si sa risolvere  $\ddot{\mathbf{x}} = -\omega^2\mathbf{x}$ .

Un altro caso riconducibile a sistemi a un grado sono i *campi centrali*,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(\|\mathbf{r}\|) \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}$$

ricordando che essi sono conservativi con potenziali  $U(\mathbf{r}) = u(\|\mathbf{r}\|)$ , con  $-u'(\|\mathbf{r}\|) = f(\|\mathbf{r}\|)$ .

In tre dimensioni, il moto in un campo centrale (in cui il centro del campo è l'origine) avviene tutto nel piano passante per l'origine e perpendicolare a  $\mathbf{L}$ , che si conserva. Utilizzando le coordinate polari nel piano del moto  $(x, y)$

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

con versori ortonormali  $\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\varphi$ , che definiscono un sistema di riferimento mobile:

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \hat{\mathbf{e}}_r(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\varphi = \hat{\mathbf{e}}_\varphi(\varphi) = (-\sin \varphi, \cos \varphi).$$

**Lemma 2.1:** se  $\mathbf{r}(t)$  è la legge oraria del sistema espressa come  $(r(t), \varphi(t))$ , allora

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{r}(t)\hat{\mathbf{e}}_r(\varphi(t)) + r(t)\dot{\varphi}(t)\hat{\mathbf{e}}_\varphi(\varphi(t)).$$

*Dimostrazione:* Per come si sono definiti i versori polari,

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_r(\varphi(t)) = \dot{\varphi}(t)(-\sin \varphi(t), \cos \varphi(t)) = \dot{\varphi}(t)\hat{\mathbf{e}}_\varphi(\varphi(t))$$

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_\varphi(\varphi(t)) = \dot{\varphi}(t)(-\cos \varphi(t), -\sin \varphi(t)) = -\dot{\varphi}(t)\hat{\mathbf{e}}_r(\varphi(t))$$

Vale che

$$\mathbf{r}(t) = r(t)\hat{\mathbf{e}}_r(\varphi(t))$$

$$\implies \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{r}(t)\hat{\mathbf{e}}_r(\varphi(t)) + r(t)\dot{\varphi}(t)\hat{\mathbf{e}}_\varphi(\varphi(t)).$$

■

Come già fatto, si pone la massa  $m = 1$  e si trascurano le unità di misura. Dunque

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times (\dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi) = r^2\dot{\varphi}\hat{\mathbf{e}}_r \times \hat{\mathbf{e}}_\varphi = r^2\dot{\varphi}\hat{\mathbf{e}}_z.$$

La conservazione del momento angolare in tre dimensioni corrisponde quindi, in realtà, a tre equazioni di conservazione, trattandosi di un'equazione vettoriale.

Si giustifica geometricamente l'espressione di  $\dot{\mathbf{r}}(t)$ . Considerato un punto in un piano con coordinate polari, in un piccolo intervallo di tempo  $\Delta t$  il punto si sposta dalla posizione  $\mathbf{r}(t)$  a  $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ . Quindi  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$  e  $\Delta \varphi = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)$ .

Tramite osservazioni geometriche si può approssimare

$$\Delta \mathbf{r} \simeq \Delta r \hat{\mathbf{e}}_r + r \Delta \varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

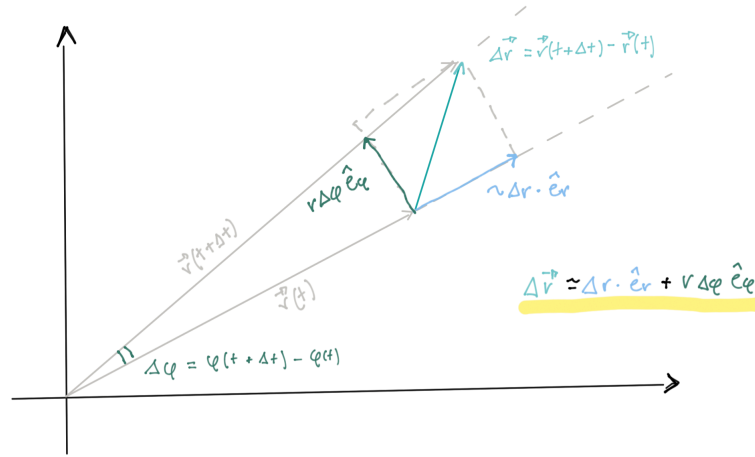


Figura 2: Argomento geometrico del Lemma 2.1

da cui

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta r}{\Delta t} \hat{\mathbf{e}}_r + r \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \hat{\mathbf{e}}_\varphi \rightarrow \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r \dot{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

D'ora in avanti si assumerà che il modulo del momento angolare sia non nullo ( $L \neq 0$ ), altrimenti non si avrebbe un moto bidimensionale.

Nota: assumendo  $L \neq 0$ ,  $\varphi$  è monotona (altrimenti si avrebbe  $L = 0$  per un certo  $t$ ), crescente se  $L > 0$  e decrescente se  $L < 0$ .

Si osserva che vale la *seconda legge di Keplero*: in un campo centrale la *velocità areolare*  $s(t)$  è costante. La velocità areolare è la derivata rispetto al tempo dell'area spazzata dal raggio vettore. Infatti, l'area spazzata in un tempo infinitesimo è

$$\frac{1}{2} r^2(t) d\varphi$$

e dunque

$$s(t) = \frac{1}{2} r^2(t) \dot{\varphi}(t) = \frac{1}{2} L.$$

### 2.3. Studio qualitativo di un campo centrale

Dato un campo centrale  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\hat{\mathbf{e}}_r$ , che è conservativo con potenziale  $U(\mathbf{r}) = u(r)$ , con  $u'(r) = -f(r)$ . Si vuole trovare  $\mathbf{r}(t) = (r(t), \varphi(t))$ .

**Teorema 2.2:** la “legge oraria”  $r(t)$  è la stessa che si otterrebbe studiando il problema unidimensionale dato dal *potenziale efficace*

$$V(r) = u(r) + \frac{L}{2r^2}, \quad r > 0$$

dove  $L$  è il modulo (conservato) di  $\mathbf{L}$ .

*Dimostrazione:* si deriva in  $t$  la formula

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi.$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi + r\ddot{\varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\hat{\mathbf{e}}_r$$

$$\Rightarrow \ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\hat{\mathbf{e}}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

Ma  $\ddot{\mathbf{r}} = -u'(r)\hat{\mathbf{e}}_r$ , e dunque vale che

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -u'(r) \quad (2)$$

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0 \quad (3)$$

Allora, da (2),

$$\ddot{r} = -u'(r) + r\frac{L^2}{r^4} = -\frac{d}{dr}\left(u(r) + \frac{L^2}{2r^2}\right)$$

Ma  $u(r) + \frac{L^2}{2r^2}$  è proprio  $V(r)$ . ■

Questo problema può essere affrontato per quadrature:

$$dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{2(E - V(r))}}.$$

Avendo  $r(t)$ ,  $\varphi(t)$  si trova facilmente, da

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{r^2}$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^t \frac{L}{r^2} dt.$$

Spesso, però,  $r(t)$  è difficile da trovare. In alcuni casi si è però interessati soltanto, ad esempio, a trovare l'immagine di  $r(t)$  (cioè l'orbita), cercando allora  $r(\varphi)$ . Sotto le ipotesi in cui ci si trova, con  $L \neq 0$ , ciò è possibile, perché  $\varphi(t)$  è monotona (e quindi invertibile). Allora, chiamando  $r(\varphi)$  la funzione inversa di  $\varphi(t)$ ,  $r(\varphi) = r(t(\varphi))$ .

Dall'equazione (3) si risale nuovamente al principio di conservazione del momento angolare:

$$L = r^2\dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow 0 = \dot{L} = r(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}).$$

Si osserva anche che l'energia totale  $E_V$  del nuovo problema unidimensionale in  $r$ , che vale

$$E_V = \frac{\dot{r}^2}{2} + V(r)$$

è uguale all'energia totale del problema originario in due dimensioni  $E_U$ :

$$E_U = \frac{\|\mathbf{r}\|^2}{2} + U(\mathbf{r}).$$

Infatti,

$$\frac{\|\mathbf{r}\|^2}{2} = \frac{1}{2} \|\dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi\|^2 = \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2r^2}.$$

E, per definizione,  $u(r) = u(\|\mathbf{r}\|) = U(\mathbf{r})$ .

Si può studiare, come visto, solo la traiettoria  $r(\varphi) = r(t(\varphi))$ , dove  $t(\varphi)$  esiste perché  $\varphi(t)$  è invertibile, e non la legge oraria. Dato che

$$\dot{r} = \pm \sqrt{2(E - V(r))}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{dr} = \pm \frac{L}{r^2 \sqrt{2(E - V(r))}}.$$

Si può fare uno studio qualitativo considerando il grafico di  $V(r)$ , spesso si ha che la funzione tende a  $+\infty$  per  $r \rightarrow 0$ , dovuto al termine  $\frac{L^2}{2r^2}$ . Detti  $r_{\min}$  e  $r_{\max}$  i due punti in cui una particella oscilla per un certo valore di energia totale (vedi Figura 3), a meno di non trovarsi su una separatrice, si ha allora, nel problema originario bidimensionale, che l'orbita è compresa tra le due circonferenze di raggio  $r_{\min}$  e  $r_{\max}$  (i cui punti sono rispettivamente *pericentri* e *apocentri*). In altre parole,  $r(\varphi)$  è una funzione periodica, di periodo non necessariamente  $2\pi$ , e dunque l'orbita non forma necessariamente ellissi chiuse.

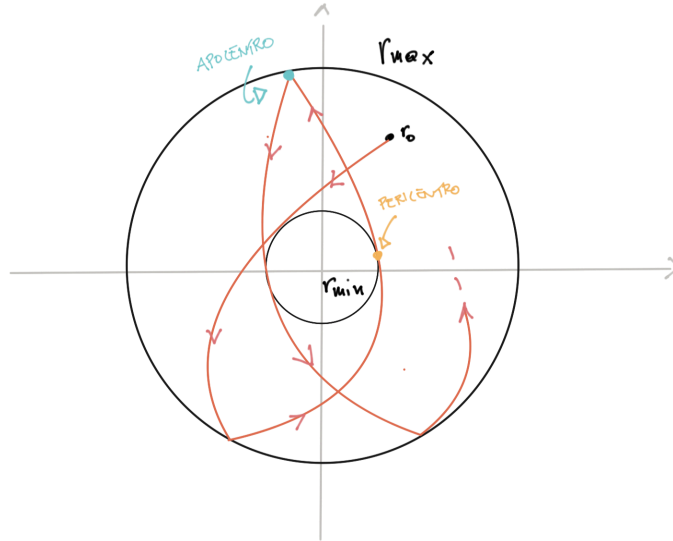


Figura 3: Particella sul piano delle configurazioni che oscilla tra  $r_{\min}$  e  $r_{\max}$

In un intervallo di monotonia di  $r(\varphi)$  vale



$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_{r_0}^r \frac{L}{\rho^2 \sqrt{2(E - V(\rho))}} d\rho$$

e dunque il semiperiodo (differenza angolare tra pericentro e apocentro)  $\Phi$  di  $r(\varphi)$  vale

$$\Phi = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{L}{\rho^2 \sqrt{2(E - V(\rho))}} d\rho.$$

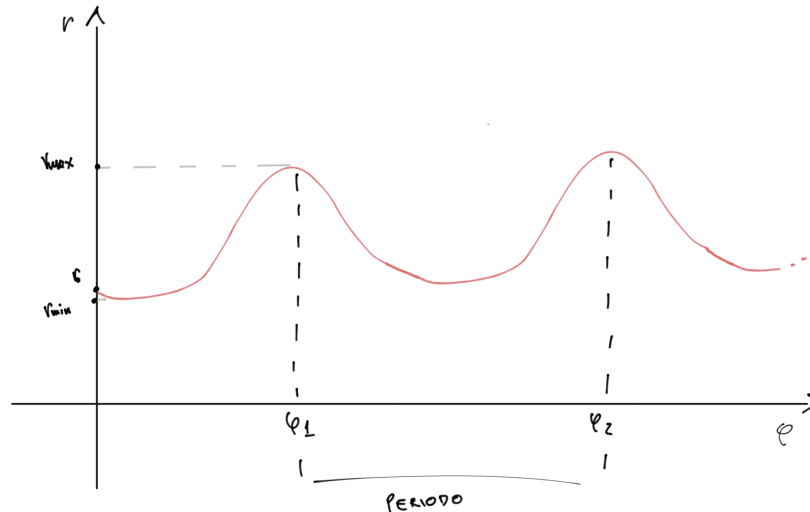


Figura 4: Grafico di  $r$  in funzione di  $\varphi$

Quindi il periodo dell'orbita è  $2\Phi$ . Ora, l'orbita nel piano delle configurazioni è chiusa (e periodica) se e solo se  $2\Phi$  è un multiplo razionale di  $2\pi$ .

Vale il seguente teorema, la cui dimostrazione si trova nell'*Arnold*.

**Teorema 2.3:** Solo in due casi tutte le orbite nel piano delle configurazioni sono chiuse:

1.  $u(r) = ar^2$ ,  $a > 0$
2.  $u(r) = -\frac{k}{r}$ ,  $k > 0$ .

Si osserva che, se la traiettoria è aperta, allora è densa nella corona circolare.

## 2.4. Problema di Keplero

Quando  $u(r) = -\frac{k}{r}$ , con  $k > 0$ ,

$$V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2r^2}$$

e si trova che il punto di minimo è

$$\left( \frac{L^2}{k}, -\frac{k^2}{2L^2} \right)$$

(la cui derivazione è lasciata come esercizio), quindi

$$\varphi(r) = \pm \int_{r_0}^r \frac{\frac{L}{\rho^2} d\rho}{\sqrt{2(E - V(\rho))}} = \pm \int_{r_0}^r \frac{\frac{L}{\rho^2} d\rho}{\sqrt{2E + 2\frac{k}{\rho} - \frac{L^2}{\rho^2}}}.$$

Completando il quadrato,

$$2E + 2\frac{k}{\rho} - \frac{L^2}{\rho^2} = 2E + \frac{k^2}{L^2} - \left(\frac{L}{\rho} - \frac{k}{L}\right)^2,$$

e chiamando

$$a := \sqrt{2E + \frac{k^2}{L^2}}$$

$$\Rightarrow \varphi(r) = \pm \int_{r_0}^r \frac{\frac{L}{\rho^2} d\rho}{\sqrt{a^2 - \left(\frac{L}{\rho} - \frac{k}{L}\right)^2}}.$$

Si prende un'energia compresa in  $-\frac{k^2}{2L^2} \leq E \leq 0$ , e facendo il cambio di variabile con  $x := \frac{L}{\rho} - \frac{k}{L}$ , per cui  $dx = -\frac{L}{\rho^2} d\rho$  (che, a meno del segno, corrisponde con il numeratore della funzione integranda), si ottiene

$$\varphi(r) = \mp \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Assumendo di avere il segno positivo,

$$\varphi(r) = \arcsin\left(\frac{\frac{L}{r} - \frac{k}{L}}{\sqrt{2E + \frac{k^2}{L^2}}}\right) + \varphi_0.$$

Chiamando, per convenienza,  $p := \frac{L^2}{k}$ ,  $e := \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{k^2}}$ , e dunque si ottiene, moltiplicando a numeratore e denominatore per  $\frac{r}{k}$ ,

$$\varphi(r) = \arcsin\left(\frac{\frac{L^2}{kr} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{k^2}}}\right) + \varphi_0 = \arcsin\left(\frac{\frac{p}{r} - 1}{e}\right) + \varphi_0$$

$$\Rightarrow \sin(\varphi - \varphi_0) = \frac{\frac{p}{r} - 1}{e}$$

$$\Rightarrow r = \frac{p}{1 + e \sin(\varphi - \varphi_0)}.$$

A meno di effettuare una ritraslazione degli angoli, si sceglie  $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$ , ottenendo

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}.$$

Assumendo invece di avere il segno negativo,

$$\varphi(r) = \arccos\left(\frac{\frac{L}{r} - \frac{k}{L}}{\sqrt{2E + \frac{k^2}{L^2}}}\right) + \varphi_0.$$

E si procede analogamente al caso precedente, scegliendo infine  $\varphi_0 = 0$ , e trovando la medesima formula.

$p$  è detto *parametro dell'ellisse*, ed  $e$  è detta *eccentricità*, compresa in  $[0, 1)$ . Infatti  $E$  è negativa, e vale, al minimo,  $-\frac{k}{2L^2}$ .

Si può mostrare che la formula ottenuta è quella di un'ellisse, passando alle coordinate cartesiane:

$$\begin{aligned} r + re \cos \varphi &= p \\ \Rightarrow (re \cos \varphi - p)^2 &= r^2 \\ \Rightarrow (ex - p)^2 &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Si ha che  $r = r_{\min}$  per  $\varphi = 0$  e che  $r = r_{\max}$  per  $\varphi = \pi$ , e si ha quindi fissato l'origine degli angoli nel pericentro. In particolare,

$$\begin{aligned} r_{\min} &= \frac{p}{1 + e} \\ r_{\max} &= \frac{p}{1 - e} \end{aligned}$$

E infatti, per  $E \rightarrow E_{\min}$ ,  $e \rightarrow 0$  e dunque  $r_{\min}$  e  $r_{\max}$  tendono a coincidere, avendo un'orbita circolare; mentre per  $E \rightarrow 0^-$ , l'orbita si allunga, con  $r_{\max} \rightarrow +\infty$ .

*Esercizio 2.2:* dimostrare, a partire dalle ultime considerazioni fatte, la terza legge di Keplero.

### 3. Meccanica Lagrangiana

Un *funzionale* è un'applicazione da uno spazio di funzioni ad uno scalare (tipicamente  $\mathbb{R}$ ) ( $\Phi : S \rightarrow \mathbb{R}$ , dove  $S$  è un insieme di funzioni; ad esempio  $C^1[t_0, t_1]$ , cioè l'insieme di tutte le funzioni  $f : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ , derivabili e con derivate prime continue).

*Esempio 3.1:*

$$\Phi(f) = f(\bar{t})$$

con  $\bar{t} \in [t_0, t_1]$  fissato.

*Esempio 3.2:*

$$\Phi(f) = \int_{t_0}^{t_1} f(t) \, dt$$

*Esempio 3.3:*

$$\Phi(f) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + (f'(t))^2} \, dt$$

che rappresenta la lunghezza della curva data dal grafico di  $f$  nel dominio  $[t_0, t_1]$ .

*Esempio 3.4:* Considerata  $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile,

$$\Phi(f) = \int_{t_0}^{t_1} L(f(t), f'(t), t) \, dt$$

Si noti che i primi due esempi sono applicazioni lineari, mentre gli altri funzionali non sono lineari (il terzo è in realtà un caso particolare del quarto).

**Definizione 3.1:** il funzionale  $\Phi : S \rightarrow \mathbb{R}$  si dice *differenziabile* nel punto  $f \in S$  se  $\forall h \in S$ ,

$$\Phi(f + h) - \Phi(f) = (D\Phi_f)(h) + o(h),$$

per  $h \rightarrow 0$ , dove  $D\Phi_f$  è un'applicazione lineare da  $S$  in  $\mathbb{R}$ , detta *differenziale* di  $\Phi$  nel punto  $f$ .

Con  $h \rightarrow 0$ , si intende  $\|h\|_{C^1} \rightarrow 0$ , ove

$$\|h\|_{C^1} = \max_{t \in [t_0, t_1]} \{|h(t)|, |h'(t)|\}.$$

E infine, dire che  $R(h) = o(h)$  equivale a dire che

$$\lim_{\|h\|_{C^1} \rightarrow 0} \frac{|R(h)|}{\|h\|_{C^1}} = 0.$$

Si dice quindi che  $h \rightarrow 0$  quando è uniformemente piccola la funzione nel suo dominio, ed è anche uniformemente piccola la sua derivata.

*Esercizio 3.1:* quale che sia la definizione esatta di “ $h$  piccolo”, mostrare che, se  $\Phi$  è un funzionale lineare, allora  $D\Phi_f = \Phi, \forall f \in S$ .

Il quarto esempio fatto in precedenza, è il più generale che servirà in questo corso, generalizzandolo a più dimensioni.

Considerando una funzione  $L : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Si assume  $L$  differenziabile e  $C^1$  (tutte le derivate parziali prime sono continue). Gli argomenti di  $L$  si indicano come  $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ , con  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_d)$ . Si definisce, con  $\mathbf{x} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_{x_0}^{x_1} L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) dt,$$

definito su  $S = \{\mathbf{x} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^d, \mathbf{x} \in C^1\}$  (ci si potrebbe dover restringere a funzioni  $\mathbf{x}$  tali che  $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$  appartengano al dominio di  $L$ ). Questo funzionale è detto *funzionale d'azione*.

**Teorema 3.1:** il funzionale  $\Phi$ , definito come sopra, è differenziabile  $\forall \mathbf{x} \in S$ , e il suo differenziale è

$$D\Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^d \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial x_i}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) \right) h_i(t) dt + \left[ \frac{\partial L}{\partial v_i}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) h_i(t) \right]_{t_0}^{t_1} \right\}$$

con  $\mathbf{h}(t) = (h_1(t), \dots, h_d(t)) \in C^1([t_0, t_1])$ , dove la norma  $C^1$ , che era stata definita per funzioni a valori scalari, è definita in maniera simile:

$$\|\mathbf{h}\|_{C^1} = \max_{\substack{t \in [t_0, t_1] \\ i \in \{1, \dots, d\}}} \{ \|\mathbf{h}_i\|(t), \|\dot{\mathbf{h}}_i(t)\| \}.$$

In forma abbreviata, si può scrivere

$$D\Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^d \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i} \right) h_i dt + \left[ \frac{\partial L}{\partial v_i} h_i \right]_{t_0}^{t_1} \right\}$$

oppure

$$D\Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{h}) = \int_{t_0}^{t_1} \left( \nabla_{\mathbf{x}} L - \frac{d}{dt} \nabla_{\mathbf{v}} L \right) \cdot \mathbf{h} dt + [\nabla_{\mathbf{v}} L \cdot \mathbf{h}]_{t_0}^{t_1}.$$

*Dimostrazione:* dalla definizione di differenziale di  $L$ , si ha

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} + \Delta \mathbf{v}, t + \Delta t) - L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) &= \sum_{i=1}^d \left\{ \frac{\partial L}{\partial x_i}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \Delta x_i + \frac{\partial L}{\partial v_i}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \Delta v_i \right\} \\ &\quad + \frac{\partial L}{\partial t}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \Delta t + o(|\Delta x_i| |\Delta v_i| |\Delta t|) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Phi(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \Phi(\mathbf{x}) = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{x} + \mathbf{h}, \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{h}}, t) - L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^d \left\{ \frac{\partial L}{\partial x_i}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) h_i(t) + \frac{\partial L}{\partial v_i}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \dot{h}_i(t) + o(|h_i(t)|, |\dot{h}_i(t)|) \right\} dt, \forall i \in \{1, \dots, d\}.$$

Si osserva che, tramite integrazione per parti,

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial v_i} \dot{h}_i dt = \left[ \frac{\partial L}{\partial v_i} h_i \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i} h_i dt.$$

Si considera  $R(\mathbf{h}) = o(\|\mathbf{h}\|_{C^1})$ , che implica che  $R(\mathbf{h})(t) \leq \varepsilon \|\mathbf{h}\|_{C^1}$

$$\Rightarrow \left| \int_{t_0}^{t_1} R(\mathbf{h})(t) dt \right| \leq \int_{t_0}^{t_1} R(\mathbf{h})(t) dt \leq \int_{t_0}^{t_1} \varepsilon \|\mathbf{h}\|_{C^1} dt = \varepsilon (t_1 - t_0) \|\mathbf{h}\|_{C^1}.$$

Infine, sostituendo,

$$\Phi(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \Phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^d \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i} \right) h_i dt + \left[ \frac{\partial L}{\partial v_i} h_i \right]_{t_0}^{t_1} \right\} + o(\|\mathbf{h}\|_{C^1})$$

che è quanto si voleva dimostrare, per definizione di differenziale. ■

Si considera l'insieme di funzioni

$$S_{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1} = \{\mathbf{x} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^d, \mathbf{x} \in C^1, \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1\}$$

Che non è un insieme lineare (se  $\mathbf{x} \in S_{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1}$ , generalmente non vale che  $2\mathbf{x} \in S_{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1}$ ).

**Definizione 3.2:** una funzione  $x \in S_{x_0, x_1}$  è detta *estremale* del funzionale  $\Phi$  ristretto a  $S_{x_0, x_1}$ , se vale

$$\Phi(x + h) - \Phi(x) = o(h)$$

ogni volta che  $x + h$  appartiene a  $S_{x_0, x_1}$ , cioè  $h(t_0) = h(t_1) = 0$ .

**Teorema 3.2** (equazioni di Eulero-Lagrange): una funzione  $x \in S_{x_0, x_1}$  è estremale di  $\Phi$  ristretto a  $S_{x_0, x_1}$  se e solo se,  $\forall i \in \{1, \dots, d\}$ ,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i}(x(t), \dot{x}(t), t) - \frac{\partial L}{\partial x_i}(x(t), \dot{x}(t), t) = 0.$$

In forma vettoriale, le equazioni di Eulero-Lagrange si possono scrivere come

$$\frac{d}{dt} \nabla_v L - \nabla_x L = 0.$$

Con una notazione impropria, si usa anche scrivere

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0;$$

è una notazione impropria perché, con  $\frac{\partial}{\partial v_i}$  si intende la derivata parziale rispetto al secondo parametro di  $L$ , mentre  $\dot{x}_i$  porta a pensare alla derivata di qualcosa.

**Lemma 3.1:** sia  $f : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^d$  continua. Se vale che,  $\forall h : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^d$  continua,

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t) \cdot h(t) dt = 0$$

Allora  $f = 0$ .

*Dimostrazione:* Si procede per assurdo, supponendo  $f \neq 0$ . Allora,  $\exists \bar{t} : f_{\bar{t}} \neq 0$ ,

$$\exists \bar{t} \in [t_0, t_1] : f_{\bar{t}}(\bar{t}) \neq 0.$$

Si può allora assumere che  $\bar{t} \in (t_0, t_1)$  (per continuità di  $f$ ). Si suppone che  $f_{\bar{t}}(\bar{t}) > 0$ , e quindi

$$\exists \delta, c > 0 : (\bar{t} - \delta, \bar{t} + \delta) \subset [t_0, t_1] : \forall t \in (\bar{t} - \delta, \bar{t} + \delta), f_{\bar{t}}(t) \geq c.$$

Si sceglie  $h_{\bar{t}} > 0$  continua, nulla al di fuori dell'insieme  $(\bar{t} - \delta, \bar{t} + \delta)$ , con  $\int_{t_0}^{t_1} h_{\bar{t}}(t) dt > 0$ , quindi

$$\int_{t_0}^{t_1} h_{\bar{t}}(t) dt = \int_{\bar{t}-\delta}^{\bar{t}+\delta} h_{\bar{t}}(t) dt.$$

Si prende poi  $h_i = 0, \forall i \neq \bar{t}$ . Infine,

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^d f_i(t) h_i(t) dt = \int_{\bar{t}-\delta}^{\bar{t}+\delta} f_{\bar{i}}(t) h_{\bar{i}}(t) dt \geq c \int_{\bar{t}-\delta}^{\bar{t}+\delta} h_{\bar{i}}(t) dt > 0.$$

■

*Dimostrazione del teorema precedente:* vale,  $\forall \mathbf{h} \in S$  (quindi anche  $S_{x_0, x_1}$ ),

$$\Phi(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \Phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^d \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i} \right) h_i dt + \left[ \frac{\partial L}{\partial v_i} h_i \right]_{t_0}^{t_1} \right\} + o(\mathbf{h}).$$

Ma, dato che  $\mathbf{h} \in S_{x_0, x_1}$ , si ha soltanto

$$\Phi(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \Phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^d \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i} \right) h_i dt + o(\mathbf{h}).$$

Per ipotesi, nel caso ( $\Leftarrow$ ) anche la funzione integranda è nulla, e quindi

$$\Phi(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \Phi(\mathbf{x}) = o(\mathbf{h}).$$

Per quanto riguarda il caso ( $\Rightarrow$ ), si ha che,  $\forall \mathbf{h} \in C^1$ , con  $\mathbf{h}(t_0) = \mathbf{0} = \mathbf{h}(t_1)$ , per il lemma precedente,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^d \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i} \right) h_i dt &= 0. \\ \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i} &= 0. \end{aligned}$$

■

*Esempio 3.5:* ci si chiede quali siano le funzioni estremali di  $\Phi$  definito da  $L(x, v, t) = \sqrt{1 + v^2}$  (in una dimensione). Utilizzando il teorema precedente, si risolve l'equazione di Eulero-Lagrange. Si ha

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial v} &= \frac{v}{\sqrt{1 + v^2}} \\ \Rightarrow 0 &= \frac{d}{dt} \frac{v(t)}{\sqrt{1 + v(t)^2}} = \frac{\dot{v}(t)}{(1 + v(t)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \dot{v}(t) = 0 \Leftrightarrow v(t) = a \Leftrightarrow f(t) = at + t_0$$

e si è ottenuta la funzione estrema che minimizza la lunghezza della funzione  $x$ , ossia una funzione lineare.

### 3.1. Applicazione alla meccanica

Si hanno problemi del tipo



$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = -\frac{d}{dr}U(\mathbf{r}(t))$$

**Teorema 3.3** (principio di minima azione di Hamilton): le leggi orarie dell'equazione sopracitata coincidono con gli estremali di

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t) dt$$

su  $S_{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^d \in C^1$ , con  $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_1$ , ove

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = T(\dot{\mathbf{r}}) - U(\mathbf{r}).$$

La funzione  $L$  è detta *lagrangiana*, e non dipende esplicitamente da  $t$ .

*Dimostrazione:* si scrive l'equazione (in forma vettoriale) di Eulero-Lagrange, per tale  $L = L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ :

$$\nabla_{\dot{\mathbf{r}}} L = \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} T = m\dot{\mathbf{r}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} L = m\ddot{\mathbf{r}}.$$

$$\nabla_{\mathbf{r}} L = -\nabla_{\mathbf{r}} U$$

$$\Rightarrow m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla_{\mathbf{r}} U.$$

■

Si osserva che la lagrangiana non è unica, ossia, la forma data non è l'unica per cui gli estremali di  $\Phi$  coincidono con le leggi della meccanica. Infatti, vanno bene tutte quelle funzioni che soddisfano le equazioni di Eulero-Lagrange.

*Esempio 3.6:* Un esempio banale è il moto libero, per cui ( $U = 0$ ). La lagrangiana vale allora (con massa unitaria)

$$L(\dot{\mathbf{r}}) = T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{\|\dot{\mathbf{r}}\|^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} L = \nabla_{\mathbf{r}} L = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\mathbf{r}} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0.$$

Le variabili da cui non dipende la lagrangiana sono dette *cicliche*, e ad ognuna di esse è associato un principio di conservazione (in questo caso la velocità/quantità di moto).

*Esempio 3.7:* Si considera la lagrangiana

$$L(\mathbf{r}) = \|\dot{\mathbf{r}}\|,$$

essa non è differenziabile in tutto  $\mathbb{R}^3$ , dato che ha dei punti angolosi.

$$\Phi(\dot{\mathbf{r}}) = \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt.$$

Essa fornisce l'espressione della lunghezza del cammino parametrizzato  $\mathbf{r}(t)$ . Vale

$$\nabla_{\mathbf{r}} L = 0,$$

$$\nabla_{\dot{\mathbf{r}}} L = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|} = \frac{\|\dot{\mathbf{r}}\|^2 \ddot{\mathbf{r}} - (\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}) \dot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|^3}$$

$$\Leftrightarrow \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 \ddot{\mathbf{r}} - (\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}) \dot{\mathbf{r}} = 0$$

applicando a tutti i termini il prodotto scalare per  $\ddot{\mathbf{r}}$ ,

$$\|\dot{\mathbf{r}}\|^2 \|\ddot{\mathbf{r}}\|^2 = (\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}})^2$$

$$\Rightarrow \|\dot{\mathbf{r}}\| \|\ddot{\mathbf{r}}\| = \|\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}\|$$

e dunque  $\dot{\mathbf{r}}$  e  $\ddot{\mathbf{r}}$  sono collineari. Si ha quindi un cammino lineare. Nota: attenzione ai punti di non differenziabilità di  $L$ !

### 3.1.1. Cambio di coordinate

Si suppone di voler descrivere  $\mathbb{R}^d$  (o un suo sottoinsieme) tramite un sistema di coordinate diverso da quelle “natural”  $\mathbf{r}$ , denotato con  $\mathbf{q}$ , le cui coordinate sono date dalla funzione biettiva

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{r}) = (q_1(r_1, \dots, r_d), \dots, q_d(r_1, \dots, r_d))$$

relativamente alle  $\mathbf{r}$ . L'inversa, naturalmente, è indicata con  $\mathbf{r}(\mathbf{q})$ .

Si suppone di conoscere una legge oraria  $\mathbf{r}(t)$  nelle coordinate  $\mathbf{r}$ . Essa può essere espressa nelle coordinate  $\mathbf{q}$ :  $\mathbf{q}(\mathbf{r}(t))$ . La velocità è espressa nelle  $\mathbf{q}$  come

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = (\dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_d(t))$$

con

$$\dot{q}_i(t) = \frac{d}{dt} q_i(r_1(t), \dots, r_d(t)) = \sum_{j=1}^d \frac{\partial q_i}{\partial r_j}(\mathbf{r}(t)) \dot{r}_j(t) = \sum_{j=1}^d \left[ \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}(t)) \right]_{ij} \dot{r}_j(t)$$

dove  $\left[ \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}(t)) \right]$  è la matrice Jacobiana  $d \times d$ , dove l'elemento  $(i, j)$ -esimo è  $\frac{\partial q_i}{\partial r_j}$ . Quindi

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \left[ \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}(t)) \right] \dot{\mathbf{r}}(t).$$

*Esercizio 3.2:* dimostrare che  $\forall \mathbf{r}$ ,

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}(\mathbf{r})) \right] \left[ \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}(\mathbf{q})) \right] = \mathbb{I}_d.$$

Vale il seguente principio:

**Principio 3.1:** la lagrangiana va vista come una quantità fisica dello spazio delle fasi, dipende cioè dalle posizioni e dalle velocità fisiche delle particelle e non dalle loro rappresentazioni numeriche.

**Definizione 3.3:** in seguito ad un cambio di coordinate  $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{q}$  nello spazio delle configurazioni, la funzione lagrangiana nelle  $\mathbf{q}$  diventa

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L\left(\mathbf{r}(\mathbf{q}), \left[\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r})\right] \dot{\mathbf{r}}, t\right).$$

Un corollario al principio di minima azione di Hamilton è il seguente:

**Corollario 3.1:** sia  $\mathbf{q}$  un (altro) sistema di coordinate sullo spazio delle configurazioni  $\mathbb{R}^d$ , rispetto al quale la funzione lagrangiana sia  $\mathcal{L}$  come sopra definito. In queste coordinate le leggi del moto soddisfano

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

*Dimostrazione:* Si nota che, per costruzione,

$$\int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) dt$$

si conclude con il fatto che, per il principio di minima azione di Hamilton, se l'integrale è un estrema, allora valgono le equazioni di Eulero-Lagrange per  $\mathcal{L}$ . Per definizione di estrema,

$$\Phi(\mathbf{r} + \mathbf{h}) - \Phi(\mathbf{r}) = o(\|\mathbf{h}\|_{C^1})$$

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{q} + \mathbf{l}) - \tilde{\Phi}(\mathbf{q}) = o(\|\mathbf{l}\|_{C^1})$$

ma

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(\mathbf{r}(t))$$

$$\mathbf{l}(t) = \mathbf{q}(\mathbf{r} + \mathbf{h}(t)) - \mathbf{q}(\mathbf{r})$$

e dunque  $o_{\mathbf{r}}(\|\mathbf{h}\|_{C^1}) = o_{\mathbf{q}}(\|\mathbf{l}\|_{C^1})$ . ■

*Esempio 3.8 (applicazione del corollario):* si considera un moto in un campo centrale planare. Si descrive il problema tramite il formalismo lagrangiano nelle coordinate polari  $\mathbf{q} = (r, \varphi)$ . Si esprime  $L = T - U$  nelle coordinate  $(r, \varphi)$ . In coordinate polari, l'energia potenziale vale  $u(r)$ , mentre l'energia cinetica vale

$$\mathcal{T}(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) = \mathcal{T}(r, \dot{r}, \dot{\varphi})$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - u(r) = \mathcal{L}(r, \dot{r}, \dot{\varphi})$$

e quindi la funzione lagrangiana non dipende esplicitamente da  $\varphi$ .

Per trovare le leggi del moto, si impostano le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d(m\dot{r})}{dt} - mr\dot{\varphi}^2 + \frac{du(r)}{dr} &= 0 \\ \Leftrightarrow m\ddot{r} &= mr\dot{\varphi}^2 - \frac{du(r)}{dr}. \end{aligned}$$

La seconda equazione invece esprime il principio di conservazione del momento angolare:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) &= 0. \end{aligned}$$

Si illustra ora la terminologia generale per alcune grandezze studiate in questo capitolo:

- un oggetto del tipo  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$  è detto *impulso* (o *momento*) *generalizzato*;
- una variabile  $q_i$  da cui  $L$  non dipende è detta *variabile ciclica*. In questo caso, l'impulso generalizzato  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$  si conserva, perché  $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$ .

### 3.1.2. Lagrangiana per un potenziale generalizzato

Si è “tradotto” in termini lagrangiani il problema

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla_{\mathbf{r}} U(\mathbf{r})$$

usando le seguenti

1.  $\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} T = m\ddot{\mathbf{r}}$
2.  $\nabla_{\mathbf{r}} T = \mathbf{0}$
3.  $\nabla_{\dot{\mathbf{r}}} U = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} U = \mathbf{0}$
4.  $\nabla_{\mathbf{r}} U = \mathbf{F}(\mathbf{r})$

Da cui

$$\left( \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} - \nabla_{\mathbf{r}} \right) T = m\ddot{\mathbf{r}}$$

e

$$\left( \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} - \nabla_{\mathbf{r}} \right) U = \mathbf{F}$$

se  $L = T - U$ ,

$$\Rightarrow \left( \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} - \nabla_{\mathbf{r}} \right) L = 0$$

Ma se ora si avesse un caso di forza dipendente anche da velocità e tempo  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$  tale per cui esiste una funzione  $U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$  con

$$\nabla_{\dot{\mathbf{r}}} U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) - \nabla_{\mathbf{r}} U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t),$$

allora, ugualmente a come appena mostrato, si risale alle equazioni di Eulero-Lagrange, per  $L = T - U$ . In questi casi,  $U(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  è detto *potenziale generalizzato*.

Un esempio notevole di integrale generalizzato è dato dal campo elettromagnetico.

*Esempio 3.9:* la forza di Lorentz generalizzata è infatti, con  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ ,

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Si sa che esistono due funzioni  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  e  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  dette, rispettivamente, potenziale elettrico e potenziale magnetico, tali per cui

$$\mathbf{E} = -\nabla_{\mathbf{r}} \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}.$$

In questo caso, si può trovare un potenziale generalizzato, mostrando che

$$U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = q(\Phi(\mathbf{r}, t) - \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \dot{\mathbf{r}})$$

è un potenziale generalizzato, cioè vale la relazione presentata in precedenza:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial v_x} - \frac{\partial U}{\partial x} = F_x$$

con

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial v_x} = -q \frac{dA_x}{dt} = -q \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \right)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= q \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial x} v_x - \frac{\partial A_y}{\partial x} v_y - \frac{\partial A_z}{\partial x} v_z \right) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial v_x} - \frac{\partial U}{\partial x} &= q \left( v_y \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) + v_z \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) = \\ &= q \left( (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_x + E_x \right) = F_x \end{aligned}$$

Con un procedimento analogo per le altre componenti, si trova proprio l'espressione vettoriale della forza di Lorentz generalizzata.

## 4. Cenni di geometria differenziale

Si considera  $M \subseteq \mathbb{R}^N$  (che può essere ad esempio di dimensione inferiore).

**Definizione 4.1:** dato  $A \subseteq M$  si dice aperto/chiuso in  $M$  (tecnicamente si dice “nella topologia di  $M$ ”) se si può scrivere come

$$A = B \cap M$$

con  $B$  aperto/chiuso di  $\mathbb{R}^N$ .

Si immagina ora che  $M$  abbia dimensione  $d \leq N$  (si noti che non si è ancora data una definizione formale di dimensione).

**Definizione 4.2:** una *carta* per  $M$  è un omeomorfismo (funzione continua invertibile con inversa continua)  $\varphi : U \rightarrow V$  fra un aperto di  $\mathbb{R}^d$  e un aperto nella topologia di  $M$ .

L'argomento di  $\varphi$  è detto *coordinata locale* per  $M$ .

Una carta spesso si indica  $(U, \varphi)$ , mettendo in evidenza anche il suo dominio.

**Definizione 4.3:** due carte  $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ , con  $U_i$  e  $V_i$  rispettivamente aperti di  $\mathbb{R}^d$  e  $M$ , sono dette *compatibili* se

1.  $V = V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$
2.  $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1|_{\varphi_1^{-1}(V)} : \varphi_1^{-1}(V) \rightarrow \varphi_2^{-1}(V)$

è un diffeomorfismo (funzione differenziabile invertibile con inversa differenziabile).

Una funzione del tipo  $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1|_{\varphi_1^{-1}(V)}$  è un cambio di coordinate. Se due carte sono compatibili, si deve necessariamente avere che  $U_1$  e  $U_2$  sono sottoinsiemi dello stesso spazio  $\mathbb{R}^d$ , dato che il cambio di coordinate è una funzione invertibile.

**Definizione 4.4:** un *atlante* per  $M$  è una collezione di carte  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ , che devono essere a due a due compatibili se  $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$ , tali che

$$\bigcup_{\alpha} \varphi(U_\alpha) = \bigcup_{\alpha} V_\alpha = M.$$

Similmente a un atlante geografico, un atlante in geometria è un insieme di carte che mappa completamente  $M$ .

**Definizione 4.5:** una *varietà differenziabile* (immersa in  $\mathbb{R}^n$ ) è un  $M \subseteq \mathbb{R}^N$  che possiede un atlante.

Data una circonferenza, non è possibile trovare un'unica carta (un insieme aperto e un omeomorfismo) che mappino l'intera sfera: si potrebbe parametrizzare una circonferenza unitaria  $S'$  con

$$\mathbf{r} : [0, 2\pi) \rightarrow S'$$

$$\varphi \mapsto (\cos \varphi, \sin \varphi)$$

Questa  $\mathbf{r}$  non è però un omeomorfismo, in quanto l'inversa non è continua in  $(1, 0)$ , oltre al fatto che il dominio non è un aperto di  $\mathbb{R}$ .

Analogamente, anche una sfera non può essere mappata con un'unica carta, nonostante potrebbe sembrare che lo si possa fare mediante i due angoli delle coordinate sferiche. Prendendo

$$\mathbf{r}(\varphi, \theta) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

con  $(\varphi, \theta) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ , si riesce a mappare quasi tutta la sfera, escludendo il meridiano corrispondente a  $\varphi = 0$ . Tuttavia, è possibile utilizzare due carte per mappare interamente una sfera, come si può vedere tramite due proiezioni stereografiche: un piano  $\pi_1$  è tangente al polo nord della sfera. Si può far vedere che esso può mappare tutti i punti eccetto il polo sud. Considerando allora un piano  $\pi_2$ , esso mappa ogni punto eccetto il polo nord.

Si noti che non si è mai usato, nelle precedenti definizioni, che  $M$  è sottoinsieme di  $\mathbb{R}^N$ . La geometria differenziale infatti ha valenza molto astratta, purché le definizioni valgano su un sottoinsieme dotato di una topologia (abbia definizioni di aperti e chiusi).

Si considera un rettangolo in  $\mathbb{R}^2$  in cui si impone che i punti sul lato superiore coincidono con quelli sul lato inferiore, e analogamente i punti sul lato sinistro coincidono con i punti sul lato destro. Questo insieme può essere visualizzato in  $\mathbb{R}^3$  come un toro. Si vuole sapere se si tratta di una varietà differenziale. Si deve quindi trovare un atlante, ossia una collezione di carte che mappano tutta la superficie del rettangolo.

#### 4.1. Vettori e spazi tangenti

Senza definire formalmente il significato di vettore tangente ad una varietà differenziale  $M$ , si utilizzerà l'idea di vettore tangente, che è intuitiva per varietà immerse in  $\mathbb{R}^N$ .

**Definizione 4.6:** lo spazio tangente a  $M \subseteq \mathbb{R}^N$  in  $\mathbf{r}$  è definito come

$$T_{\mathbf{r}}M = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N : \mathbf{v} \text{ è tangente a } M \text{ in } \mathbf{r}\}$$

Nelle applicazioni pratiche, è importante saper indicizzare i vettori di uno spazio tangente, al variare del punto di tangenza  $\mathbf{r} \in M$ , cioè trovare una funzione biunivoca fra  $\mathbb{R}^d$  e un determinato spazio tangente, o fra un sottinsieme di  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  e una porzione dell'insieme di tutti i vettori tangenti in tutti i punti di  $M$ . Si può effettuare tale indicizzazione mediante le carte di  $M$ .

Si suppone, per adesso, che ogni carta  $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow V \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^N$  sia differenziabile. Inoltre, si suppone che il differenziale  $D\varphi_{\mathbf{q}}$ , che è un'applicazione lineare da  $\mathbb{R}^d$  a  $\mathbb{R}^N$ , abbia rango massimo, uguale a  $d$  (perché  $d \leq N$ ). Quindi  $D\varphi_{\mathbf{q}}$  è biettiva. Intuitivamente, si può dire che l'immagine del differenziale della carta è lo spazio tangente. Allora i vettori dello spazio tangente  $T_{\varphi(\mathbf{q})}M$  sono tutti e soli i vettori del tipo  $D\varphi_{\mathbf{q}}(\mathbf{u})$ , con  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ , dato che il differenziale è un'applicazione lineare biettiva. Quindi il differenziale indicizza tutti gli elementi di  $T_{\mathbf{r}}M$ . Questa relazione, in fisica si scrive spesso come

$$d\mathbf{r} = \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}) \right] d\mathbf{q}.$$

Se si usa un'altra carta  $\varphi' : U' \rightarrow V'$ , con  $\mathbf{r} \in V'$ , la mappatura data sopra cambia e diventa

$$D\varphi'_{\mathbf{q}'}(\mathbf{u}') = \mathbf{v}$$

con  $\mathbf{q}' = (\varphi')^{-1}(\mathbf{r})$ .

Nota: se  $\mathbf{u}, \mathbf{u}'$  sono due maniere diverse di indicizzare lo stesso vettore  $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{r}}M$  (date rispettivamente dalle carte  $\varphi$  e  $\varphi'$ ) allora valgono

$$\mathbf{q}' = (\varphi')^{-1}(\mathbf{r}) = ((\varphi')^{-1} \circ \varphi)(\mathbf{q})$$

$$\mathbf{u}' = D((\varphi')^{-1} \circ \varphi)_{\mathbf{q}}(\mathbf{u}).$$

In meccanica lagrangiana è utile lavorare con l'insieme di tutti i vettori tangenti a  $M$ , in un qualunque suo punto. Questo si chiama fibrato tangente di  $M$ .

**Definizione 4.7:** si definisce *fibrato tangente*

$$TM = \{(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N : \mathbf{r} \in M, \mathbf{v} \in T_{\mathbf{r}}M\}$$

**Proposizione 4.1:** il fibrato tangente di una varietà differenziale  $M$  con atlante  $\{(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha})\}$  di dimensione  $d$  è una varietà differenziale con atlante  $\{(\tilde{U}_{\alpha}, \tilde{\varphi}_{\alpha})\}$ , dove

- $\tilde{U}_{\alpha} = U_{\alpha} \times \mathbb{R}^d$
- $\tilde{\varphi}_{\alpha} : \tilde{U}_{\alpha} \rightarrow \tilde{V}_{\alpha} = \{(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N : \mathbf{r} \in U_{\alpha}, \mathbf{v} \in T_{\mathbf{r}}M\}$   
 $(\mathbf{q}, \mathbf{u}) \mapsto (\varphi_{\alpha}(\mathbf{q}), (D\varphi_{\alpha})(\mathbf{u}))$



Evidentemente, al variare di  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{u}$ ,  $\tilde{\varphi}_\alpha(\mathbf{q}, \mathbf{u}) = \left( \varphi_\alpha(\mathbf{q}), (D\varphi_\alpha)_\mathbf{q}(\mathbf{u}) \right)$  indicizza tutte le coppie date da un punto  $\mathbf{r}$  su  $M$  e il vettore tangente a  $M$  in  $\mathbf{r}$ , per  $\mathbf{r} \in V_\alpha$ .

## 4.2. Differenziale di una funzione fra varietà

Si considerano due varietà differenziabili  $M \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  di dimensioni rispettivamente  $d$  ed  $e$ . Si definisce una mappa  $f : M \rightarrow N$ . Come si può definire la differenziabilità di  $f$ ? Si vuole cioè definire un'applicazione lineare

$$Df_\mathbf{r} : T_\mathbf{r}M \rightarrow T_{f(\mathbf{r})}N.$$

Più generalmente,  $Df : TM \rightarrow TN$ .

**Definizione 4.8:**  $f$  come sopra, si dice differenziabile se, per ogni carta  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  di  $M$ ,  $f \circ \varphi_\alpha$  è una funzione differenziabile da  $U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^d$  a  $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione 4.9:** il differenziale di  $f$  come sopra è la funzione

$$Df : TM \rightarrow TN$$

$$(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \mapsto \left( f(\mathbf{r}), D(f \circ \varphi_\alpha)_{\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{r})}(\mathbf{u}) \right)$$

dove  $\mathbf{u}$  è l'unico vettore ( $\varphi_\alpha$  è biettiva) di  $\mathbb{R}^d$  tale che  $D(f \circ \varphi_\alpha)_{\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{r})}(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$ .

## 5. Meccanica lagrangiana per sistemi vincolati

Si presentano alcuni esempi di sistemi meccanici vincolati.

*Esempio 5.1:* un anello vincolato ad un filo di ferro fisso in  $\mathbb{R}^3$ : si tratta di un sistema a un grado di libertà.

*Esempio 5.2:* due particelle in  $\mathbb{R}^3$  collegate da una sbarra inestensibile (considerata priva di massa).

*Esempio 5.3:* un corpo rigido, vale a dire un sistema di particelle in cui la distanza tra ogni particella è fissata.

*Esempio 5.4:* un disco verticale che rotola senza strisciare lungo una traiettoria rettilinea.

*Esempio 5.5:* una sfera che rotola senza strisciare su un piano.

*Esempio 5.6:* una o più particelle vincolate a muoversi dentro un contenitore.

Si dà una classificazione dei vincoli. Essi possono essere dati da equazioni o disequazioni nello *spazio di fase esteso*, ossia lo spazio delle  $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, t)$ . Considerando l'Esempio 5.1, il filo di ferro può cambiare posizione nel tempo, e dunque si ha anche una dipendenza diretta dal tempo.

I vincoli dati da equazioni sono detti *bilateri*, mentre quelli dati da disequazioni sono detti *unilateri*. Nell'Esempio 5.6, se  $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$ ,  $x_i \in [0, a]$  e  $y_i \in [0, b]$ , con due particelle si hanno otto vincoli unilateri. Gli altri esempi invece hanno soltanto vincoli bilateri.

Nell'Esempio 5.4 e nell'Esempio 5.5 si usa il principio generale che la velocità di una particella nel momento in cui si trova nel punto di contatto con il corpo esterno contro cui avviene il rotolamento è nulla.

I vincoli sono detti *olonomi* se sono bilateri e dipendono solo da posizione e tempo, *anonomi* negli altri casi. Tra gli olonomi, si dicono *reonomi* quelli esplicitamente dipendenti dal tempo, e *scleronomi* gli altri.

unilateri			disequazioni
bilateri	anonomi		equazioni che non dipendono solo da posizione e tempo
	olonomi	reonomi	equazioni che dipendono da posizione e tempo
		scleronomi	equazioni che dipendono solo dalla posizione

Tabella 1: Schema riassuntivo della classificazione dei vincoli meccanici.

L'Esempio 5.1 nel caso in cui il filo è fisso è un vincolo scleronomo, mentre se si muovesse sarebbe reonomo. I primi tre esempi presentati hanno vincoli olonomi; l'Esempio 5.4 che può sembrare avere un vincolo anolonomo, ha in realtà anch'esso un vincolo olonomo. Infine, l'Esempio 5.5, ha un vincolo anolonomo.

Naturalmente, possono coesistere vincoli olonomi e anolonomi, così come unilateri e bilateri.

Si assumerà sempre che la totalità dei vincoli olonomi si possa riassumere dicendo che il vettore globale delle configurazioni  $\underline{r}$  appartenga a una varietà differenziabile dello spazio delle configurazioni, che può dipendere dal tempo. Si assumerà inoltre che le carte di questa varietà, che possono anch'esse dipendere dal tempo, siano "sufficientemente lisce", ossia che siano differenziabili  $n$  volte. Nel linguaggio fisico si dirà che, almeno localmente, tutte le possibili configurazioni sono espresse da

$$\underline{r} = \underline{r}(q_1, \dots, q_d, t) = \underline{r}_t(\mathbf{q})$$

dove  $\mathbf{q}$  è un vettore libero in  $\mathbb{R}^d$ , può variare in un aperto  $U \subseteq \mathbb{R}^d$ , e le  $\underline{r}_t : U \rightarrow V \subseteq M_t$  sono funzioni biettive e sufficientemente lisce. Per  $\mathbf{r}$  fuori da  $V$  si applicheranno altre funzioni  $\underline{r}_t$ :

$$\mathbf{r} = \underline{r}_t(\mathbf{q}'), \mathbf{q}' \in \mathcal{U}, \mathbf{r} \in V'.$$

Le  $\mathbf{q}$  sono spesso dette *coordinate generalizzate*.

*Esempio 5.7:* si considera un punto vincolato a muoversi su un filo di ferro sul piano  $(x, z)$ , riprendendo l'Esempio 5.1, descritto dall'equazione

$$z = 10 + \sin x, x \in [0, 6\pi].$$

Si può usare la mappatura  $\mathbf{r}(q) = (q, 0, 10 + \sin q)$ , con  $q \in (0, 6\pi)$ . Si vede che allora il vincolo è scleronomo.

*Esempio 5.8:* considerando sempre la configurazione dell'Esempio 5.1, si considera un filo di ferro che si muove verso l'alto di moto uniformemente accelerato:

$$z = ax + \frac{b}{2}t^2,$$

allora in questo caso si pone

$$\mathbf{r}(q) = \left( q, 0, aq + \frac{b}{2}t^2 \right), q \in \mathbb{R}.$$

Un punto su questa retta allora risente di una forza tangente al filo di modulo  $b \sin \theta$ , dove  $\theta$  è l'angolo che il filo forma con l'asse  $x$ .

*Esempio 5.9:* riprendendo l'Esempio 5.4, fissando gli assi cartesiani  $(x, y)$ , se il disco ha raggio  $a$ , il centro si trova in ogni istante alla posizione  $(x, a)$ . Per determinare anche la rotazione del disco in ogni istante, si può misurare l'angolo  $\varphi$  formato da un certo raggio con la verticale. La velocità radiale (diretta lungo l'asse  $x$ ) della particella del disco a contatto con la superficie di strisciamento è  $-a\dot{\varphi}$ . Il vincolo è pertanto dato dall'equazione, indicando con  $\dot{x}$  la velocità del centro del disco,

$$\dot{x} = -a\dot{\varphi}.$$

Integrando, con  $x(0) = x_0$  e  $\varphi(0) = \varphi_0$ ,

$$x - x_0 = a(\varphi - \varphi_0).$$

Ecco che il vincolo è allora olonomo, con un grado di libertà. In particolare, questo tipo di vincolo è detto *vincolo olonomo integrabile*.

### 5.1. Principio di D'Alembert

D'ora in avanti, non si utilizzerà più la notazione  $\underline{r}$  e  $\underline{M}$  per indicare le posizioni e le masse dei sistemi di particelle, ma si utilizzerà  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$  e  $m \in \mathbb{R}$ , supponendo di lavorare con una sola particella. Si tratta in realtà di un cambio di notazione, perché i calcoli sono analoghi.

I vincoli sono sempre dovuti a forze. Si può esprimere il secondo principio della meccanica distinguendo tra *forze attive*  $\mathbf{F}$  e *reazioni vincolari*  $\mathbf{R}$ :

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{R}.$$

L'obiettivo è trovare  $\mathbf{F}$  senza conoscere necessariamente  $\mathbf{R}$ . Questo è possibile a partire dal *principio di D'Alembert*.

**Definizione 5.1:** uno *spostamento virtuale*  $\delta\mathbf{r} = (\delta r_1, \dots, \delta r_n)$  è un “cambiamento infinitesimo” della configurazione  $\mathbf{r}$  del sistema, compatibile con i vincoli del sistema ad un dato tempo  $t$ .

Questi spostamenti infinitesimi vanno pensati in una situazione idealizzata di tempo “congelato”, e con esso lo sono tutte le quantità dipendenti dal tempo.

**Principio 5.1** (di D'Alembert): la reazione vincolare  $\mathbf{R}$  compie lavoro nullo sugli spostamenti virtuali:

$$\mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{r} = 0.$$

Si può riflettere sulla ragionevolezza di questo principio: la reazione vincolare può fare lavoro, ma non lungo gli spostamenti virtuali, che sono quelli che coinvolgono il moto “all'interno del vincolo”. La reazione vincolare ha l'unico effetto di tenere la particella vincolata, non di fornirle o toglierle energia per il moto entro il vincolo.

Come conseguenza del principio di D'Alembert,  $\forall \delta\mathbf{r}$ ,

$$m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{r}. \quad (4)$$

Si utilizzano le carte e i concetti definiti nel capitolo precedente, che consentono di descrivere il moto (e quindi gli spostamenti infinitesimi) vincolato nelle  $\mathbf{r}$  tramite il moto nelle  $\mathbf{q}$ , perché in molti casi gli spostamenti infinitesimi nelle  $\mathbf{q}$  saranno *liberi*.

Vale che, indicando tra parentesi quadre la matrice Jacobiana,

$$\delta\mathbf{r} = \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}) \right] \delta\mathbf{q}. \quad (5)$$

Allora

$$m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{r} = m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \delta\mathbf{q} \right] = m \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \right]^\top \ddot{\mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{q}. \quad (6)$$

Ma, si ha che

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \right]^\top \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \left( \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \right]^\top \dot{\mathbf{r}} \right) - \left( \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \right]^\top \right) \dot{\mathbf{r}}. \quad (7)$$

Se le  $\mathbf{r}(\mathbf{q}, t)$  sono funzioni lisce (regolari), allora

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \right] = \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{d\mathbf{q}}, \quad (8)$$

infatti,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^d \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 r_i}{\partial t \partial q_j} = \sum_{k=1}^d \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{d}{dt} r_i \right). \quad (9)$$

Per definizione, vale anche che

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \right] = \left[ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right]. \quad (10)$$

Infatti la trasformazione  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \mapsto \dot{\mathbf{r}}$  è definita in maniera che valga

$$\dot{\mathbf{r}} = \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \right] \dot{\mathbf{q}} + \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (11)$$

Utilizzando le (7), (10) in (6),

$$m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} = m \left( \frac{d}{dt} \left( \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \right]^\top \dot{\mathbf{r}} \right) - \left( \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \right]^\top \right) \dot{\mathbf{r}} \right) \cdot \delta \mathbf{q}. \quad (12)$$

Si esprime ora l'energia cinetica nelle coordinate  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ , ossia  $\mathcal{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t))$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{T}}{d\dot{q}_j} &= \sum_{i=1}^n \frac{d\mathcal{T}}{dr_i} \frac{dr_i}{d\dot{q}_j} = m \sum_{i=1}^n \dot{r}_i \frac{dr_i}{d\dot{q}_j} = m \left( \left[ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right]^\top \dot{\mathbf{r}} \right)_j \\ &\Rightarrow \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{T} = m \left[ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right]^\top \dot{\mathbf{r}}. \end{aligned}$$

Analogamente, sostituendo  $\dot{q}_j$  con  $q_j$ , si ottiene

$$\nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{T} = m \left[ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{q}} \right]^\top \dot{\mathbf{r}}.$$

La (12) diventa quindi

$$m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} = \left( \frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{T}) - \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{T} \right) \cdot \delta \mathbf{q}.$$

Si introduce la *forza generalizzata*  $\mathbf{G}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \right]^\top \mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t).$$

Dall'ultima espressione trovata, si ha che

$$\left( \frac{d}{dt}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{T}) - \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{T} \right) \cdot \delta \mathbf{q} = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \right]^\top \delta \mathbf{q} = \mathbf{G} \cdot \delta \mathbf{q}.$$

Se si hanno soltanto vincoli olonomi, allora i  $\delta \mathbf{q}$  sono vettori liberi, e dunque in quest'ultima equazione si può usare qualsiasi  $\delta \mathbf{q} \in \mathbb{R}^d$ :

$$\frac{d}{dt}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{T}) - \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{T} = \mathbf{G}.$$

L'ipotesi di avere vincoli olonomi equivale a dire che l'unico vincolo è appartenere alla varietà  $M_t$  nello spazio delle configurazioni  $\mathbb{R}^n$ , data dalle carte  $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{r}(\mathbf{q}, t)$ .

Nel caso olonomo, quindi, gli spostamenti virtuali  $\delta \mathbf{r}$  sono i vettori tangenti a  $M_t$  in  $\mathbf{r}$ , ovvero la posizione del sistema al tempo  $t$  "di congelamento". Questa è una definizione ben posta, differentemente dalla precedente, in cui si parlava di spostamenti infinitesimi. Inoltre, gli spostamenti virtuali sono mappati da vettori liberi  $\delta \mathbf{q}$  di  $\mathbb{R}^d$  (non ci sono cioè restrizioni per  $\delta \mathbf{q}$ ) secondo l'equazione già vista  $\delta \mathbf{r} = \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \right] \delta \mathbf{q}$ .

Se, inoltre,  $\mathbf{F}$  è un campo di forze conservativo,  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla_{\mathbf{r}} U(\mathbf{r}, t)$ , allora si può esprimere l'energia come  $\mathcal{U}(\mathbf{q}, t) = U(\mathbf{r}(\mathbf{q}, t), t)$  e osservare che

$$\nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{U} = \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \right]^\top \nabla_{\mathbf{r}} U = - \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \right]^\top \mathbf{F} = -\mathbf{G}.$$

Si ha allora che, per  $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$ ,

$$\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L} - \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{L} = 0.$$

Si noti che le equazioni del moto in un sistema con soli vincoli olonomi e con forze date da un potenziale generalizzato sono le equazioni di Eulero-Lagrange per  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L(\mathbf{r}(\mathbf{q}, t), \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, t) \right] \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(\mathbf{q}, t))$ , data dal potenziale generalizzato.

Infatti, si dimostra che

$$\mathbf{G} = \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \right]^\top \mathbf{F} = \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{U} - \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{U}$$

con  $\mathcal{U}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = U(\mathbf{r}(\mathbf{q}, t), \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, t) \right] \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(\mathbf{q}, t), t)$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbf{G}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) &= \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \right]^\top \mathbf{F} = \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \right]^\top \left( \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} U - \nabla_{\mathbf{r}} U \right) = \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \right]^\top \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} U - \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \right]^\top \nabla_{\mathbf{r}} U \\ &= \frac{d}{dt} \left( \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \right]^\top \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} U \right) - \left( \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \right]^\top \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} U \right) - \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \right]^\top \nabla_{\mathbf{r}} U \\ &= \frac{d}{dt} \left( \left[ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right]^\top \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} U \right) - \left[ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right]^\top \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} U - \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \right]^\top \nabla_{\mathbf{r}} U = \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{U} - \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{U} \end{aligned}$$

dove, nell'ultimo passaggio, si è applicato il seguente lemma.

**Lemma 5.1:** data una funzione  $f : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ , e una funzione  $\varphi : \mathbb{R}^{2d+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ ,  $\varphi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ , si pone

$$\tilde{f} = f \circ \varphi : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Vale che

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{q}} \tilde{f} &= \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \right]^\top \nabla_{\mathbf{r}} \tilde{f} + \left[ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{q}} \right]^\top \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} \tilde{f} \\ \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \tilde{f} &= \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right]^\top \nabla_{\mathbf{r}} \tilde{f} + \left[ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right]^\top \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} \tilde{f}\end{aligned}$$

La dimostrazione è lasciata come esercizio. Utilizzando questo lemma, osservando che  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{q}, t)$  (che implica che  $\left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] = 0$ ),

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{d}{dt} \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{U}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{U}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

che era quanto si voleva mostrare.

Si presenta una serie di esempi di sistemi vincolati, in cui si vogliono trovare le espressioni delle equazioni di Eulero-Lagrange.

*Esempio 5.10:* si considera l'esempio della particella vincolata da un filo metallico (Esempio 5.1), di forma data da  $G(\psi)$  (il grafico della funzione  $\psi$ ), nel piano  $(x, z)$ , soggetta alla forza di gravità ( $U = mgz$ ,  $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)$ ).

Si vuole mappare la varietà data dal grafico di  $\psi$  (il vincolo è scleronomo), in modo da poter esprimere la lagrangiana nella coordinata generalizzata  $q$ :

$$\begin{aligned}\begin{cases} x = q \\ z = \psi(q) \end{cases} &\implies \mathbf{r}(q) = (q, \psi(q)). \\ \implies T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) &= \frac{m}{2}(\dot{q}^2 + (\psi'(q)\dot{q})^2) = \mathcal{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ U(z) = mgz &= mg\psi(q) = \mathcal{U}(q) \\ \implies \mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{q}^2(1 + (\psi'(q))^2) &- mg\psi(q) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} &= m\dot{q}(1 + (\psi'(q))^2) \\ \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} &= m\ddot{q}(1 + (\psi'(q))^2) + 2m\dot{q}\psi'(q)\psi''(q) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} &= m\dot{q}\psi'(q)\psi''(q) - mg\psi'(q).\end{aligned}$$

Si può scrivere quindi l'equazione di Eulero-Lagrange (la massa si semplifica):

$$(1 + (\psi'(q))^2)\ddot{q} + \psi'(q)\psi''(q)\dot{q}^2 + g\psi'(q) = 0.$$

Si considera, per esempio, il caso di un piano inclinato, per cui  $\psi(q) = aq$ . In tal caso, l'equazione di Eulero-Lagrange si riscrive

$$(1 + a^2)\ddot{q} + ga = 0 \iff \ddot{q} = -\frac{a}{1 + a^2}g.$$

siccome  $a = \tan \theta$ , con  $\theta$  angolo del piano inclinato, allora, riscrivendo l'equazione rispetto alla costante  $\theta$ ,

$$\ddot{q} = -g \sin \theta \cos \theta.$$

Scegliendo, al posto di  $q$  una variabile  $\rho$  lungo il piano inclinato:  $\rho = \frac{q}{\cos \theta}$ , si ottiene

$$\ddot{\rho} = -g \sin \theta$$

che è esattamente la consueta equazione del piano inclinato.

*Esempio 5.11:* si considera una particella vincolata ad un filo inclinato di equazione (al tempo  $t = 0$ )  $z = ax + c$  che si muove verso l'alto con accelerazione costante  $b$  (vincolo reonomo), non soggetta a forze esterne ( $U = 0$ ).

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(q(t), t) &= \left( q, aq + c + \frac{b}{2}t^2 \right) \\ \implies \dot{\mathbf{r}}(q(t), t) &= (\dot{q}, a\dot{q} + bt) = \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q} \right] \dot{q} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \\ \implies \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 &= \dot{q}^2(1 + a^2) + 2abt\dot{q} + b^2t^2. \end{aligned}$$

Allora, dato che  $\mathcal{L} = \mathcal{T}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} &= m(1 + a^2)\dot{q} + mabt \\ \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} &= m((1 + a^2)\ddot{q} + ab) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} &= 0. \end{aligned}$$

L'equazione di Eulero-Lagrange è allora

$$(1 + a^2)\ddot{q} + ab = 0 \iff \ddot{q} = -\frac{a}{1 + a^2}b.$$

Facendo riferimento a quanto detto alla fine dell'esempio precedente, si può riscrivere l'espressione in funzione dell'angolo  $\theta$ :

$$\ddot{q} = -b \sin \theta \cos \theta.$$

Quindi il caso in cui il vincolo accelera verso l'alto è equivalente al caso in cui la particella è accelerata verso il basso.

*Esempio 5.12:* si considera una particella vincolata ad una superficie di rotazione attorno all'asse  $z$  (data dalla rotazione completa di una curva rispetto all'asse  $z$ ), non soggetta a forze esterne.

Si introducono le coordinate cilindriche, che hanno simmetria rotazionale attorno all'asse  $z$ :



$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

Si assume che la superficie sia data dall'equazione  $r = r(z)$  (non viene trattato il caso in cui la superficie di rotazione è data dalla rotazione di una curva del tipo  $z = z(x)$ ).

Si prendono come variabili generalizzate  $z$  e  $\varphi$ . La carta è allora

$$(z, \varphi) \mapsto (r(z) \cos \varphi, r(z) \sin \varphi, z) \\ \Rightarrow \dot{\mathbf{r}} = (r'(z)\dot{z} \cos \varphi - r(z) \sin \varphi \dot{\varphi}, r'(z)\dot{z} \sin \varphi + r(z) \cos \varphi \dot{\varphi}, \dot{z}).$$

Il resto dei calcoli è lasciato come esercizio. Si ha infine

$$T = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}((r'(z)\dot{z})^2 + (r(z)\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2) = T(z, \dot{z}, \dot{\varphi}) = L(z, \dot{z}, \dot{\varphi}).$$

L'energia cinetica non dipende da  $\varphi$ , per la simmetria del sistema, e dunque  $\varphi$  è una coordinata ciclica, e quindi ci si aspetta che

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{costante}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = (1 + (r'(z))^2)\dot{z}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = (1 + (r'(z))^2)\ddot{z} + 2r'(z)r''(z)\dot{z}^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = r'(z)r''(z)\dot{z}^2 + r(z)r'(z)\dot{\varphi}^2.$$

L'equazione di Eulero-Lagrange nella prima coordinata (in  $(z, \dot{z})$ ) è

$$(1 + (r'(z))^2)\ddot{z} + r'(z)r''(z)\dot{z}^2 - r(z)r'(z)\dot{\varphi}^2 = 0.$$

Per quanto riguarda l'equazione di Eulero-Lagrange nella seconda coordinata, invece,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = (r(z))^2\dot{\varphi} = L_0$$

che è quindi una costante, come ci si aspettava.

**Definizione 5.2:** una *geodetica* è una soluzione fisica (una legge oraria) di equazioni vincolate in assenza di forze esterne.

*Esercizio 5.1:* mostrare che, in relazione all'esempio precedente, tutti i meridiani (curve a  $\varphi$  costante) sono geodetiche, i paralleli (curve a  $z$  costante) sono geodetiche se corrispondono a una  $z$  per cui  $r'(z) = 0$ .

Rifare poi tutti i conti dell'esempio precedente nel caso non trattato in cui si fa ruotare una curva del tipo  $z = z(x)$ .

Si noti che in quest'ultimo esempio  $\|\dot{\mathbf{r}}\|$  è una costante del moto. Infatti,

1. La reazione vincolare non compie lavoro, quindi la conservazione dell'energia vale anche se si esclude la parte di sistema che genera la reazione vincolare. Dunque, per la particella considerata, si conserva  $T + U = T$ . Ma allora si conserva  $\|\dot{\mathbf{r}}\|^2$  e dunque  $\|\dot{\mathbf{r}}\|$ .
2. Per il principio di D'Alembert, la reazione vincolare è perpendicolare a  $T_{\mathbf{r}(t)}M$ . Quindi

$$\frac{d}{dt}\|\dot{\mathbf{r}}\|^2 = 2\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = 2\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{F}_{tot} = 2\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{R} = 0.$$

Per una traiettoria qualsiasi, detto  $\alpha$  l'angolo che la traiettoria ( $\dot{\mathbf{r}}$ ) forma con il meridiano passante per il punto  $\mathbf{r}(t)$ , dato che  $\|\dot{\mathbf{r}}\| = \text{costante}$ ,

$$\begin{aligned} |r^2 \dot{\varphi}| &= r|r\dot{\varphi}| = r\|\dot{\mathbf{r}}\|\sin \alpha = \text{costante} \\ \Rightarrow r|\sin \alpha| &= \text{costante}. \end{aligned}$$

Questa relazione è detta *teorema di Clairaut*, e mostra che, quando  $r$  cresce o decresce, il vettore velocità diventa rispettivamente meno o più orizzontale.

Si fanno alcune osservazioni:

1.  $r$  e  $|\sin \alpha|$  hanno correlazione negativa (sono inversamente proporzionali).
2. Se  $r_0$  e  $\alpha_0$  sono le condizioni iniziali di  $r(t)$  e  $\alpha(t)$ , allora

$$r(t) = \frac{r_0 |\sin \alpha_0|}{|\sin \alpha(t)|} \geq r_0 |\sin \alpha_0|.$$

Quindi  $r_0 |\sin \alpha_0|$  è il raggio minimo.

*Esempio 5.13:* un esempio di applicazione del teorema di Clairaut è dato dalla superficie laterale di un cono. Naturalmente, essa è una superficie di rotazione. Considerata una particella su un parallelo generico, con velocità iniziale  $\mathbf{v}_0$ . Poiché si ha

$$\begin{aligned} r|\sin \alpha| &= \text{costante} = r_0 |\sin \alpha_0| = r_0 \\ \Rightarrow r &\geq r_0 |\sin \alpha_0| = r_0, \end{aligned}$$

la particella tende allora ad andare verso la base del cono.

## 5.2. Il principio di minima azione vincolata

Si assume di avere solo vincoli scleronomi, dati dalla condizione che  $\mathbf{r} \in M$  (il vincolo è dato da un sottoinsieme  $\mathbb{R}^n$  che è anche una varietà differenziabile). Si considera il funzionale d'azione

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t) dt$$

ma con  $\mathbf{r} : [t_0, t_1] \rightarrow M$  e non in  $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione 5.3:** si dice che  $\mathbf{r}$  è un *estremale vincolato* ad  $M$  del funzionale  $\Phi$  come sopra, se

$$\Phi(\mathbf{r} + \mathbf{h}) - \Phi(\mathbf{r}) = o(\|\mathbf{h}\|_{C^1})$$

$$\forall \mathbf{h} : \mathbf{r}(t) + \mathbf{h}(t) \in M, \forall t \in [t_0, t_1], \mathbf{h}(t_0) = \mathbf{h}(t_1).$$

Per le lagrangiane viste finora (date dalla differenza tra energia cinetica ed energia potenziale generalizzata) vale che una legge oraria è un estremale vincolato a  $M$  se e solo se vale per essa il principio di

D'Alembert. Questo corrobora sia quest'ultimo sia il fatto che la legge oraria fisica, in presenza di un vincolo scleronomo sia proprio un estremaie vincolato.

**Teorema 5.1:** dato un vincolo scleronomo rappresentato dalla varietà  $M$ , una legge oraria  $\mathbf{r} : [t_0, t_1] \rightarrow M$  è un estremaie vincolato ad  $M$  se e solo se, per essa vale il principio di D'Alembert:

$$(m\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t)) \cdot \delta \mathbf{r}_t = 0$$

$$\forall t \in [t_0, t_1], \forall \delta \mathbf{r}_t \in T_{\mathbf{r}(t)}M.$$

Si danno due dimostrazioni del teorema, di cui una è più generale.

*Dimostrazione meno generale:* Si assume, oltre alle ipotesi del teorema, che  $\mathbf{r}([t_0, t_1])$  sia contenuta nell'immagine di una sola carta.

Per il principio di D'Alembert, le leggi orarie fisiche sono tutte e sole quelle che in coordinate locali  $\mathbf{q}$  soddisfano le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L} - \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{L} = 0,$$

che corrisponde a un problema libero in  $\mathbb{R}^d$  per  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ , cioè è equivalente ad essere un estremaie libero di

$$\Phi_0(\mathbf{q}) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) dt = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t) dt$$

che è quindi equivalente al fatto che la  $\mathbf{r}(t)$  corrisponde a  $\mathbf{q}(t)$  è estremaie vincolato di  $\Phi(\mathbf{r})$ , dato che i due funzionali descrivono la stessa quantità fisica (l'azione, cioè l'integrale della lagrangiana).

Si noti che, chiamando  $\mathbf{q}(t) + \mathbf{g}(t)$  la funzione in coordinate locali corrispondente a  $\mathbf{r}(t) + \mathbf{h}(t)$ , allora  $o(\mathbf{g}) = o(\mathbf{h})$ . È "ovvio" se la carta è differenziabile.

Viceversa, se vale il principio di minima azione vincolata in  $M$  (per la legge oraria  $\mathbf{r}$ ), allora vale il principio di minima azione libera in  $\mathbb{R}^d$  per  $\mathcal{L}$  e per la legge oraria  $\mathbf{q}$ . Questo vale se e solo se valgono le equazioni di Eulero-Lagrange per  $\mathbf{q}$

$$\left( \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L} - \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{L} \right) \cdot \delta \mathbf{q} = 0$$

$$\forall \delta \mathbf{q} \in \mathbb{R}^d. \quad \blacksquare$$

Per la seconda dimostrazione del teorema, è utile il seguente lemma.

**Lemma 5.2:** sia  $\mathbf{r} : [t_0, t_1] \rightarrow M$  una legge oraria e  $\mathbf{f} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione continua. Se, per ogni funzione continua  $\boldsymbol{\xi} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tale che  $\boldsymbol{\xi}(t) \in T_{\mathbf{r}(t)}M$ , vale

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{f}(t) \cdot \boldsymbol{\xi}(t) dt = 0,$$

allora  $\mathbf{f}(t)$  è perpendicolare a  $T_{\mathbf{r}(t)}M$ ,  $\forall t \in [t_0, t_1]$ .

La dimostrazione del lemma, equivalente al lemma già fatto nel caso libero, è lasciata come esercizio.

*Dimostrazione:* dato  $\mathbf{h}(t)$  come in figura, esiste un vettore in  $T_{\mathbf{r}}(t)M$  detto  $\delta\mathbf{r}(t)$ , tale che sostituendo  $\delta\mathbf{r}(t)$  a  $\mathbf{h}(t)$  nelle formule a venire si commette un errore  $o(\|\mathbf{h}(t)\|) = o(\|\delta\mathbf{r}(t)\|)$ .

Quindi, ricordando la sezione sul funzionale d'azione libero,

$$\Phi(\mathbf{r} + \mathbf{h}) - \Phi(\mathbf{r}) = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} L - \nabla_{\mathbf{r}} L \right) \cdot \mathbf{h} dt + o(\|\mathbf{h}\|).$$

Il principio di D'Alembert implica che l'integrale è nullo e quindi  $\mathbf{r}$  è un estremo condizionato (vincolato).

Viceversa, se  $\mathbf{r}$  è un estremo condizionato,

$$\int_{t_0}^{t_1} (m\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t)) \cdot \delta\mathbf{r}(t) dt = 0$$

per ogni variazione  $\mathbf{h}(t)$ . Ciò implica il principio di D'Alembert per il lemma precedente. ■

*Esempio 5.14:* si mostra che le leggi orarie soluzioni di un sistema lagrangiano vincolato non dipendono dalla carta (dalle coordinate locali).

Considerata una legge oraria con le caratteristiche appena elencate, su una certa varietà differenziabile, si considerano due carte distinte  $\varphi_\alpha$  e  $\varphi_\beta$ . Dalla parte della carta  $\varphi_\alpha$  (a cui corrisponde la coordinata locale  $\mathbf{q}$ ), si scrive la lagrangiana  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ . Dalla parte della carta  $\varphi_\beta$  (a cui corrisponde la coordinata locale  $\mathbf{Q}$ , invece, si scrive la lagrangiana  $\mathcal{L}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t)$ . Il cambio di coordinate è dato da

$$\mathbf{Q} = (\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)(\mathbf{q}) = \psi(\mathbf{q}).$$

Si dimostra che chiamando  $\mathbf{Q}(t) = \psi(\mathbf{q}(t))$ , vale

$$\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{Q}}} \mathcal{L} - \nabla_{\mathbf{Q}} \mathcal{L} = 0 \iff \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} L - \nabla_{\mathbf{q}} L = 0.$$

Si ha che, nel caso considerato, sostituendo  $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$  al posto delle variabili libere  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$

$$\nabla_{\mathbf{q}} L = \left[ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} \right]^\top \nabla_{\mathbf{Q}} \mathcal{L} + \left[ \frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right]^\top \nabla_{\dot{\mathbf{Q}}} \mathcal{L} = \left[ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} \right]^\top \nabla_{\mathbf{Q}} \mathcal{L} + \left( \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right]^\top \nabla_{\dot{\mathbf{Q}}} \mathcal{L} \right)$$

$$\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} L = \left[ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right]^\top \nabla_{\dot{\mathbf{Q}}} \mathcal{L} + \left[ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} \right]^\top \nabla_{\mathbf{Q}} \mathcal{L} = \left[ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right]^\top \nabla_{\dot{\mathbf{Q}}} \mathcal{L}.$$

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathcal{L}(\mathbf{Q}(\mathbf{q}), \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), t)$$

$$\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} L = \left( \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right]^\top \right) \nabla_{\dot{\mathbf{Q}}} \mathcal{L} + \left[ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right]^\top \frac{d}{dt} \nabla_{\mathbf{Q}} \mathcal{L}$$

$$\implies \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} L - \nabla_{\mathbf{q}} L = \left[ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right]^\top \left( \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{Q}}} \mathcal{L} - \nabla_{\mathbf{Q}} \mathcal{L} \right)$$

dunque il membro di sinistra è nullo se e solo se è nullo quello di destra, essendo  $\left[ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right]^\top$  non degenero.

### 5.3. Il teorema di Noether

Si assume anche in questo paragrafo di avere soltanto vincoli scleronomi. Si può generalizzare il fatto che se la lagrangiana non dipende da una coordinata puntata (coordinata ciclica), allora si ha una quantità che si conserva, avendo una derivata nulla.

**Definizione 5.4:** si dice che la funzione differenziabile  $h : M \rightarrow M$  conserva la lagrangiana  $L$  se  $\forall(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ , vale che

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L(h(\mathbf{q}), Dh_{\mathbf{q}}(\dot{\mathbf{q}}), t)$$

dove  $h(\mathbf{q})$  è la notazione contratta per indicare  $(\varphi_{\beta}^{-1} \circ h \circ \varphi_{\alpha})(\mathbf{q})$  con  $\alpha, \beta$  variabili.

Sarebbe più proprio dire che il differenziale di  $h$ , visto come funzione sul fibrato tangente conserva la lagrangiana, perché essa è funzione non solo dei punti, ma dei punti e delle tangenti ai punti.

**Teorema 5.2** (di Noether): nel caso di un vincolo scleronomo dato da  $M$ , se esiste una famiglia di trasformazioni  $h^s : M \rightarrow M$ ,  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ,  $h^0 = \text{id}$ , sufficientemente regolari, che conservano  $L$ , allora il corrispondente sistema lagrangiano ammette una costante del moto che in coordinate locali è data da

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \frac{\partial h^s(\mathbf{q})}{\partial s} \Big|_{s=0}.$$

*Esempio 5.15:* si considera una coordinata ciclica  $q_i$ , cioè  $q_i \mapsto L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  è costante. Si considera  $h^s(\mathbf{q}) = (q_1, \dots, q_i + s, \dots, q_d)$  (detta anche traslazione sulla  $i$ -esima coordinata). Si tratta di trasformazioni da  $M$  in  $M$ . Il differenziale, visto nel fibrato tangente, è dato da

$$Dh^s(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (h^s(\mathbf{q}), Dh_{\mathbf{q}}^s(\dot{\mathbf{q}})) = (q_1, \dots, q_i + s, \dots, q_d, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_d)$$

$$\implies L(h(\mathbf{q}), Dh_{\mathbf{q}}(\dot{\mathbf{q}}), t) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t).$$

$$\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \frac{\partial h^s(\mathbf{q})}{\partial s} \Big|_{s=0} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

*Esempio 5.16:* si considera un sistema di  $N$  particelle di massa  $m_i$  e posizione  $\mathbf{r}_i = (r_{ix}, r_{iy}, r_{iz})$ , con forze conservative date dall'energia potenziale  $U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ . Si suppone che  $U$  non dipenda da nessuna delle variabili  $r_{ix}$ , con  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Si ritornerà a utilizzare la notazione dei vettori globali:  $\underline{\mathbf{r}} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ . Si scrive allora la lagrangiana come

$$L(\underline{\mathbf{r}}, \dot{\underline{\mathbf{r}}}, t) = \frac{1}{2} \langle \dot{\underline{\mathbf{r}}}, \underline{\mathbf{M}} \dot{\underline{\mathbf{r}}} \rangle - U(\underline{\mathbf{r}}).$$

Una possibilità per definire  $h^s$  è questa, facendo variare soltanto la prima coordinata:

$$h^s(\underline{\mathbf{r}}) = (r_{1x} + s, r_{1y}, r_{1z}, \dots, r_{Nx}, r_{Ny}, r_{Nz}) = \underline{\mathbf{r}} + (s, 0, \dots, 0)$$

$$\implies U \circ h^s(\underline{\mathbf{r}}) = U(\underline{\mathbf{r}})$$

$$(Dh^s)_{\underline{r}} = \text{id}$$

Bisogna allora mostrare l'uguaglianza

$$L(h^s(\underline{r}), (Dh^s)_{\underline{r}}(\dot{\underline{r}}), t) = L(\underline{r}, \dot{\underline{r}})$$

che è vera in quanto il differenziale di  $h^s$  è l'identità. Sono allora soddisfatte le ipotesi del teorema di Noether, e

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial h^s(\underline{r})}{\partial s} \right|_{s=0} &= (1, 0, \dots, 0), \\ \nabla_{\dot{\underline{r}}} L &= \underline{M\dot{r}} \\ \Rightarrow I(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) &= \nabla_{\dot{\underline{r}}} L \cdot \left. \frac{\partial h^s(\underline{r})}{\partial s} \right|_{s=0} = m_1 \dot{r}_{1x} \end{aligned}$$

e dunque è conservata la componente  $x$  della quantità di moto della prima particella. Si può procedere in modo analogo per le componenti  $x$  di tutte le altre particelle, ottenendo che ciascuna delle componenti  $x$  delle quantità di moto si conservano.

*Esempio 5.17:* si è nella stessa situazione dell'esempio precedente, ma ora l'ipotesi (molto più debole) su  $U$  è che sia invariabile per traslazione dello spazio fisico  $\mathbb{R}^3$  nella coordinata  $x$ , ossia

$$U(\dots, r_{ix} + s, r_{iy}, r_{iz}, \dots) = U(\underline{r}).$$

Si definisce allora  $h^s$  come

$$\begin{aligned} h^s(\underline{r}) &= (\dots, r_{ix} + s, r_{iy}, r_{iz}, \dots) = \underline{r} + (s, 0, 0, s, 0, 0, \dots) \\ \Rightarrow (Dh^s)_{\underline{r}} &= \text{id} \end{aligned}$$

E allora, analogamente all'esempio precedente,

$$\begin{aligned} L(h^s(\underline{r}), (Dh^s)_{\underline{r}}(\dot{\underline{r}}), t) &= L(\underline{r}, \dot{\underline{r}}) \\ \nabla_{\dot{\underline{r}}} L \cdot \left. \frac{\partial h^s(\underline{r})}{\partial s} \right|_{s=0} &= \sum_{i=1}^N m_i r_{ix} = P_x \end{aligned}$$

e dunque si conserva la somma delle componenti  $x$  delle quantità di moto delle particelle, ossia la componente  $x$  della quantità di moto totale  $\underline{P}$ .

*Esempio 5.18:* si considera la lagrangiana di un sistema di particelle invariante per la rotazione di ogni vettore  $\underline{r}_i$  di un medesimo angolo  $\alpha$  attorno all'asse  $z$ .

La famiglia di trasformazioni  $h^s$  è data da

$$h^s(\underline{r}) = (\underline{R}_s \underline{r}_1, \dots, \underline{R}_s \underline{r}_N)$$

dove  $\underline{R}_s$  è una matrice di rotazione di un angolo  $s$  rispetto all'asse  $z$ . Vale che

$$L(h^s(\underline{r}), (Dh^s)_{\underline{r}}(\dot{\underline{r}}), t) = L(\underline{r}, \dot{\underline{r}}).$$

Si deve quindi trovare il generatore  $\left. \frac{\partial h^s(\underline{r})}{\partial s} \right|_{s=0}$ . Tramite considerazioni geometriche, si trova

$$\left. \frac{\partial h^s(\underline{r})}{\partial s} \right|_{s=0} = (\hat{e}_z \times \mathbf{r}_1, \dots, \hat{e}_z \times \mathbf{r}_N)$$

Quindi

$$\begin{aligned} I &= \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} L \cdot \left. \frac{\partial h^s(\underline{r})}{\partial s} \right|_{s=0} = (m_1 \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, m_N \dot{\mathbf{r}}_N) \cdot (\hat{e}_z \times \mathbf{r}_1, \dots, \hat{e}_z \times \mathbf{r}_N) \\ \Rightarrow I &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i) \cdot \hat{e}_z = L_z \end{aligned}$$

e dunque si conserva la componente  $z$  del momento angolare totale  $\mathbf{L}$ .

*Dimostrazione del teorema di Noether:*

- Asserto 1:  $\forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ,  $\mathbf{Q}(t) = h^s(\mathbf{q}(t))$  soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange.

Infatti, se  $\dot{\mathbf{Q}}(t) = Dh_{\mathbf{q}(t)}^s(\dot{\mathbf{q}}(t))$ , è immediato verificare che il principio di minima azione per la legge oraria  $\mathbf{q}(t)$  si traduce nel principio di minima azione per  $\mathbf{Q}(t)$ .

Data una soluzione  $\mathbf{q}(t)$  delle equazioni di Eulero-Lagrange, si definisce

$$\Gamma(s, t) = h^s(\mathbf{q}(t)).$$

Si utilizza come notazione:

$$\dot{\Gamma} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \quad \Gamma' = \frac{\partial \Gamma}{\partial s}.$$

Per ipotesi su  $h^s$ , vale

$$\begin{aligned} L(h^s(\mathbf{q}(t)), Dh_{\mathbf{q}(t)}^s(\dot{\mathbf{q}}(t)), t) &= L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t), \forall s, t \\ \Rightarrow L(\Gamma(s, t), \dot{\Gamma}(s, t), t) & \end{aligned}$$

è costante in  $s$ . La sua derivata in  $s$  (a  $t$  fissato) è

$$0 = \nabla_{\mathbf{q}} L \cdot \Gamma' + \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} L \cdot (\dot{\Gamma})' \quad (13)$$

- Asserto 2:  $(\dot{\Gamma})' = \dot{\Gamma}'$ , cioè,  $\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial s \partial t} = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t \partial s}$ .

Dall'asserto 1,  $\Gamma(s, \cdot)$  soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange. Utilizzando quindi l'asserto 2 in (13),

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} L \cdot \Gamma' + \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} L \cdot \dot{\Gamma}' = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} L \cdot \Gamma').$$

Svolgendo il calcolo in  $s = 0$ ,

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} L \cdot \left. \frac{\partial h^s}{\partial s} \right|_{s=0} = \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) \cdot \left. \frac{\partial h^s}{\partial s} \right|_{s=0} = \frac{d}{dt} I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t).$$

■

*Esempio 5.19:* dimostrare che la lagrangiana

$$L'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \sum_{i=1}^n F_i(\mathbf{q}, t) \dot{q}_i + F_t(\mathbf{q}, t)$$

dove  $F_i(\mathbf{q}, t) = \frac{\partial F}{\partial q_i}(\mathbf{q}, t)$  e  $F_t(\mathbf{q}, t) = \frac{\partial F}{\partial t}(\mathbf{q}, t)$ , per una qualche funzione  $F(\mathbf{q}, t)$ , dà luogo alle stesse equazioni del moto.

$$\frac{\partial L'}{\partial q_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial q_k} \dot{q}_i + \frac{\partial F_t}{\partial q_k}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + F_k \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_k}{\partial t}.$$

Allora basta mostrare che

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial q_k} \dot{q}_i + \frac{\partial F_t}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_k}{\partial t}.$$

Ma

$$\frac{\partial F_i}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial q_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_k} = \frac{\partial F_k}{\partial q_i},$$

$$\frac{\partial F_t}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_k} = \frac{\partial F_k}{\partial t}$$

e dunque è immediato verificare l'uguaglianza. Queste trasformazioni sono dette *di gauge*.



## 6. Cenni di meccanica hamiltoniana

Si tratta di un altro formalismo della meccanica, che ha un campo di applicazione leggermente più ristretto rispetto al formalismo lagrangiano, ma beneficia di una serie di teoremi più forti rispetto a quello lagrangiano.

### 6.1. La trasformata di Legendre

Una trasformata è in generale un'operazione tra funzioni (si è già vista in altri corsi la *trasformata di Fourier*). Considerando funzioni del tipo  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^2(A)$ , tali per cui la matrice hessiana di  $f$ , indicata come

$$(Hf)_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

è semidefinita positiva, ossia  $v \cdot Hf v \geq 0$ ,  $\forall v \in \mathbb{R}^n$ .

**Definizione 6.1:** La *trasformata di Legendre* di una funzione  $f$  definita come sopra, è la funzione  $g = (\mathcal{L}f) : B \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$g(\mathbf{p}) = \sup_{x \in A} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - f(\mathbf{x}))$$

dove si considera nel dominio  $B$  solo quelle  $\mathbf{p}$  tali che l'estremo superiore sia reale.

In molti casi, tale estremo superiore è un punto di massimo, e il punto di massimo è al più uno, dato da

$$\nabla_x (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - f(\mathbf{x})) = 0 \iff \mathbf{p} = \nabla_x f(\mathbf{x}).$$

Si indica con  $\mathbf{x}(\mathbf{p})$  l'unico punto che soddisfa questa equazione, se esiste. Fra i casi considerati, c'è anche il caso in cui  $f$  è strettamente convessa su tutto  $\mathbb{R}^n$ . Si assume d'ora in poi che  $Hf(\mathbf{x}) > 0$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  (che implica che  $f$  è strettamente convessa su tutto  $\mathbb{R}^n$ ). In questo caso, si darà una versione restrittiva della trasformata di Legendre, corrispondente a

$$g(\mathbf{p}) = \max_{x \in A} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - f(\mathbf{x})) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{p}) - f(\mathbf{x}(\mathbf{p})).$$

Si osserva che, secondo questa definizione particolare,  $g$  è definita su  $B' = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n : \exists \max\}$ . Chiamamente  $B' \subseteq B$ . Quindi si escludono tutte le  $\mathbf{p} \in B \setminus B'$ .

*Esempio 6.1:* data  $f(x) = x^2$ , considerando la funzione  $x \mapsto px - f(x) = px - x^2$ , per cui il massimo esiste  $\forall p \in \mathbb{R}$ , si trova  $x(p)$ :

$$p = 2x \implies x = \frac{p}{2}$$

$$\Rightarrow (\mathcal{L}f)(p) = p \frac{p}{2} - f\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{p^2}{4}.$$

*Esempio 6.2:* data  $f(x) = \frac{m}{2}\|x\|^2$ , che è strettamente convessa, la funzione  $x \mapsto px - f(x)$  ha sempre un unico massimo dato da

$$\begin{aligned} p = \nabla_x f(x) = mx &\Rightarrow x(p) = \frac{p}{m} \\ \Rightarrow g(p) = p \cdot \frac{p}{m} - \frac{m}{2} \frac{\|p\|^2}{m^2} &= \frac{\|p\|^2}{2m}. \end{aligned}$$

Si dà un'interpretazione geometrica della trasformata di Legendre nel caso in cui  $n = 1$ .

$$g(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (px - f(x))$$

$g(p)$  è allora la massima distanza verticale fra il grafo dell'iperpiano (passante per l'origine)  $x \mapsto p \cdot x$  e il grafico di  $f$ . Nel caso in cui  $f$  è strettamente convessa,  $x(p)$  è il punto di tangenza dell'iperpiano parallelo all'iperpiano  $p \cdot x$  e tangente al grafico di  $f$ . Se, invece,  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ossia non è regolare e ha un dominio più ristretto di  $\mathbb{R}$ , occorre utilizzare la definizione generale di trasformata di Legendre.

**Lemma 6.1:** con le ipotesi restrittive su  $f$  dette sopra, vale

$$\nabla_p g(p) = x(p).$$

*Dimostrazione:* si deriva la  $g(p) = p \cdot x(p) - f(x(p))$ :

$$\frac{\partial g}{\partial p_i}(p) = x_{i(p)} + \sum_{l=1}^n p_l \frac{\partial x_l}{\partial p_i}(p) - \sum_{l=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_l}(x(p)) \cdot \frac{\partial x_l}{\partial p_i}(p)$$

Inoltre, poiché

$$p = \nabla_x f(x(p)),$$

allora

$$\frac{\partial L}{\partial x_l}(x(p)) = p_l$$

e la differenza si semplifica, ottenendo l'equazione cercata. ■

Si hanno due proposizione sulla relazione tra convessità e hessiana di una funzione.

**Proposizione 6.1:** una  $f$  come sopra è convessa se e solo se  $Hf(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

**Proposizione 6.2:** per una  $f$  come sopra,

$$Hf(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow f \text{ è strettamente convessa.}$$

**Proposizione 6.3:** la  $g = \mathcal{L}f$  è convessa.

*Dimostrazione:* si verifica che  $(Hg)(\mathbf{p}) \geq 0$ . Per il lemma precedente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g(\mathbf{p})}{\partial p_i \partial p_j} &= \frac{\partial x_j}{\partial p_i}(\mathbf{p}) = \frac{\partial x_j}{\partial p_i}(\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}(\mathbf{p}))) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial p_k}(\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}(\mathbf{p}))) \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}(\mathbf{p})) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial p_k}(\mathbf{p}) \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}(\mathbf{x}(\mathbf{p})) \frac{\partial x_l}{\partial p_i}(\mathbf{p}). \end{aligned}$$

Ma

$$\frac{\partial x_j}{\partial p_k}(\mathbf{p}) = \frac{\partial x_k}{\partial p_j}(\mathbf{p}),$$

dato che

$$\frac{\partial x_j}{\partial p_k} = \frac{\partial^2 g}{\partial p_k \partial p_j} = \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_k} = \frac{\partial x_k}{\partial p_j}.$$

Si deve dimostrare che,  $\forall \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  vale che

$$\mathbf{v} \cdot Hg(\mathbf{p})\mathbf{v} = \sum_{ij} \frac{\partial^2 g(\mathbf{p})}{\partial p_i \partial p_j} v_i v_j \geq 0.$$

Ma,

$$\frac{\partial^2 g(\mathbf{p})}{\partial p_i \partial p_j} = \sum_{ijkl} \frac{\partial x_k}{\partial p_j} v_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k} \frac{\partial x_l}{\partial p_i} v_i.$$

Si definisce

$$\mathbf{w} = \left[ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}} \right] \mathbf{v}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 g(\mathbf{p})}{\partial p_i \partial p_j} = \sum_{kl} w_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k} w_l \geq 0$$

dato che l'hessiana di  $f$  è semidefinita positiva. ■

**Teorema 6.1:** la trasformata di Legendre è un' involuzione:

$$\mathcal{L}^2 f = \mathcal{L}(\mathcal{L}f) = f.$$

*Dimostrazione:* si definisce

$$h(\mathbf{y}) = (\mathcal{L}g)(\mathbf{p}) = \mathbf{y} \cdot \mathbf{p}(\mathbf{y}) - g(\mathbf{p}(\mathbf{y})),$$

con  $\mathbf{p}(\mathbf{y})$  unica soluzione di  $\mathbf{y} = \nabla_{\mathbf{p}} g(\mathbf{p})$ , e vale che  $\mathbf{y} = \nabla_{\mathbf{p}} g(\mathbf{p}(\mathbf{y}))$ . Il lemma precedente afferma che  $\nabla_{\mathbf{p}} g(\mathbf{p}) = \mathbf{x}(\mathbf{p})$ . Allora

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} &= \mathbf{x}(\mathbf{p}(\mathbf{y})) \\
\Rightarrow h(\mathbf{y}) &= \mathbf{y} \cdot \mathbf{p}(\mathbf{y}) - g(\mathbf{p}(\mathbf{y})) = \mathbf{x}(\mathbf{p}(\mathbf{y})) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{y}) - [\mathbf{p}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{x}(\mathbf{p}(\mathbf{y})) - f(\mathbf{x}(\mathbf{p}(\mathbf{y})))] \\
\Rightarrow h(\mathbf{y}) &= f(\mathbf{y}).
\end{aligned}$$

■

*Esercizio 6.1:* mostrare che, se una forma quadratica  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x}$  è definita positiva, allora anche la sua trasformata di Legendre  $g(\mathbf{p})$  è definita positiva, e vale che

$$g(\mathbf{p}) = f(\mathbf{x}(\mathbf{p})).$$

## 6.2. Principi di meccanica hamiltoniana

**Definizione 6.2:** data la lagrangiana  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ , convessa nelle  $\dot{\mathbf{q}}, \forall \mathbf{q}, t$ , si definisce *funzione hamiltoniana* relativa a  $L$  la funzione  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  data da

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = (\mathcal{L}_{\dot{\mathbf{q}}} L(\mathbf{q}, \cdot, t))(\mathbf{p}).$$

Si assume che la funzione lagrangiana rispetto a  $\dot{\mathbf{q}}$  sia regolare e strettamente convessa  $\forall \mathbf{q}, t$ , e quindi,

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t)$$

ove  $\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{q}, t}(\mathbf{p})$  è l'unica soluzione di  $\mathbf{p} = \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  per  $\mathbf{q}$  e  $t$  fissati.

*Esempio 6.3:*

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T - U = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - U(\mathbf{q}, t)$$

In questo caso, l'energia cinetica potrebbe essere data da una forma quadratica, a seconda della carta scelta. Allora, si ha, facendo il gradiente della lagrangiana,

$$\mathbf{p} = m \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = \frac{A^{-1}(\mathbf{q}, t)}{m} \mathbf{p}.$$

L'inversa della matrice  $A$  esiste perché è definita positiva.

$$\Rightarrow H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \frac{\mathbf{p} \cdot A^{-1} \mathbf{p}}{m} - \frac{m}{2} \frac{1}{m^2} A^{-1} \mathbf{p} A A^{-1} \mathbf{p} + U = \frac{\mathbf{p} \cdot A^{-1} \mathbf{p}}{2m} + U = T_{\mathbf{p}} + U.$$

*Esempio 6.4:* utilizzando  $\mathbf{r}$  come variabile lagrangiana pensando ad un problema meccanico non vincolato, si ottiene un caso analogo al precedente, ma semplificato:

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{m}{2} \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 - U(\mathbf{r})$$

La matrice  $A(\mathbf{q})$  è la matrice identità, per ogni  $\mathbf{q}$ , e

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2m} + U(\mathbf{r}).$$

In questo caso particolare, la hamiltoniana equivale all'energia meccanica.

**Teorema 6.2:** se  $H$  è la funzione hamiltoniana corrispondente alla lagrangiana  $L$  come sopra (con tutte le ipotesi fatte), allora le  $n$  equazioni (del secondo ordine) di Eulero-Lagrange sono equivalenti alle  $2n$  equazioni (del primo ordine) seguenti, dette *equazioni di Hamilton*:

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = \nabla_p H(q(t), p(t), t) \\ \dot{p}(t) = -\nabla_q H(q(t), p(t), t) \end{cases}$$

*Dimostrazione:* si considera una qualsiasi funzione  $t \mapsto (q(t), p(t))$  (anche priva di significato fisico). Si calcola  $\frac{d}{dt}H(q(t), p(t), t)$ .

$$\nabla_q H \cdot \dot{q} + \nabla_p H \cdot \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial t} = -\nabla_q L \cdot \dot{q} + (p - \nabla_q L) \cdot \ddot{q} + \dot{q} \cdot \dot{p} - \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Tuttavia,  $(p - \nabla_q L) \cdot \ddot{q} = 0$ , per definizione di  $p$ .

I coefficienti di  $\dot{q}$  e  $\dot{p}$ , più il termine noto, devono coincidere tra loro. Infatti, scegliendo  $(q(t), p(t)) = (q_0, p_0)$ , identicamente costante, allora  $(\dot{q}(t), \dot{p}(t)) = (0, 0)$ . Ma se l'uguaglianza vale per ogni  $q$  e  $p$ , allora deve valere quanto affermato. Quindi

$$\nabla_q H = -\nabla_q L,$$

$$\dot{q} = \nabla_p H$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Ora, le equazioni di Eulero-Lagrange, nella notazione che si sta utilizzando, si scrivono come

$$\dot{p} = \nabla_q L = -\nabla_q H$$

e dunque le equazioni di Hamilton valgono se e solo se valgono le equazioni di Eulero-Lagrange nelle rispettive notazioni. ■

Si osservi che la prima equazione di Hamilton vale sempre, e non solo per soluzioni alle equazioni di Eulero-Lagrange.

**Corollario 6.1:** sulle soluzioni delle equazioni di Hamilton vale

$$\frac{dH}{dt}(q(t), p(t), t) = \frac{\partial H}{\partial t}(q(t), p(t), t).$$

*Dimostrazione:*

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \nabla_q H \cdot \dot{q} + \nabla_p H \cdot \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \nabla_q H \cdot \nabla_p H - \nabla_p H \cdot \nabla_q H + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \end{aligned}$$

■

**Corollario 6.2:** se  $H$  non dipende esplicitamente dal tempo, essa una costante del moto.

Si osserva che, se si ha una coordinata ciclica  $q_{\bar{i}}$  per la  $L$ , allora anche  $H$  non dipende da  $q_{\bar{i}}$ . Inoltre, in questo caso  $p_{\bar{i}}$  è conservato. Questo non solo riduce da  $2n$  a  $2n - 1$  i gradi di libertà dello spazio delle fasi, ma anche da  $n$  a  $n - 1$  i gradi di libertà nello spazio delle configurazioni nella seguente maniera: per semplicità, si suppone  $\bar{i} = n$ , allora

$$H(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_n, t).$$

Si riscrivono le equazioni di Hamilton come, per  $i \in \{1, \dots, n - 1\}$ ,

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}, \begin{cases} \dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} \\ \dot{p}_n = 0 \end{cases}$$

Se, per  $p_n = \overline{p_n}$  si chiama

$$\begin{aligned} H' &= H(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, \overline{p_n}, t) \\ \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}, \begin{cases} \dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} \\ \dot{p}_n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Se si sa risolvere il sistema di sinistra, si ottiene la soluzione  $(q_1(t), \dots, p_{n-1}(t))$ . Ora, si chiama

$$f(t) = \frac{\partial H}{\partial p_n}(q_1(t), \dots, \overline{p_n}(t), t).$$

Il sistema di destra si riscrive come

$$\dot{q}_n = f(t) \Rightarrow q_n(t) = q_n(t_0) + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau.$$

### 6.3. Alcuni risultati di base sulle equazioni differenziali

Si considera un'equazione differenziale *autonoma* (che non ha una dipendenza diretta dalla variabile libera, in questo caso  $t$ )  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ , dove  $f$  è un campo vettoriale. Si può dimostrare che, se valgono alcune proprietà in un intorno di  $x$ , allora si può trovare un'unica soluzione globale, come già visto. Si considera il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Assumendo che esistano delle soluzioni globali, le si denotano con  $x_{x_0}(t)$ , tali soluzioni appartengono a  $C^1$ , se anche  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^1(\Omega)$ .

**Definizione 6.3:** il *flusso*  $\Phi^t : \Omega \rightarrow \Omega$  dell'equazione differenziale  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  è la funzione  $\Phi^t(x_0) = x_{x_0}(t)$ .

Si osserva che  $\Phi^0 = \text{id}$ . Il flusso è una delle forme più semplici di *propagatori* ossia funzioni che mostrano l'andamento di un'equazione differenziale.

**Proposizione 6.4:** il flusso ha la proprietà di gruppo, cioè  $\forall t, s \in \mathbb{R}$ ,

$$\Phi^{t+s} = \Phi^t \circ \Phi^s.$$

*Dimostrazione:* per l'esistenza e l'unicità delle soluzioni dell'equazione differenziale, basta mostrare che:

1.  $s \mapsto \Phi^s(\Phi^t(x))$
2.  $s \mapsto \Phi^{s+t}(x)$

sono entrambe soluzioni del problema di Cauchy,  $\forall x \in \Omega, \forall t \in \mathbb{R}$ . Si verificano facilmente le condizioni iniziali. Inoltre, soddisfano l'equazione differenziale. Considerando la prima funzione:

$$\frac{d}{ds} \Phi^s(\Phi^t(x)) = f(\Phi^s(\Phi^t(x))).$$

Per la seconda funzione,

$$\frac{d}{ds} \Phi^{t+s}(x) = \frac{d(t+s)}{ds} \frac{d}{d(t+s)} \Phi^{t+s} = f(\Phi^{t+s}(x)).$$

■

Come funzione  $\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega, ((x, t) \mapsto \Phi^t(x))$  si assumerò sempre che  $\Phi$  sia sufficientemente regolare, tale almeno da far valere il teorema di Schwarz sullo scambio delle derivate parziali seconde.

**Teorema 6.3** (della divergenza): sotto le ipotesi date,  $\forall A$  misurabile in  $\Omega$  vale

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(\Phi^t(A)) = \int_{\Phi^t(A)} \nabla \cdot f(x) \, d^n x.$$

**Corollario 6.3:** il flusso di un'equazione differenziale con campo vettoriale a divergenza nulla conserva i volumi.

*Esempio 6.5:* un esempio è un sistema hamiltoniano con  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ :

$$\begin{cases} \dot{q} = \nabla_p H \\ \dot{p} = -\nabla_q H \end{cases}$$

Se si pone  $x = (q, p)$ , allora si possono scrivere le equazioni di Hamilton nella forma

$$\dot{x} = f(x) = \mathbb{J} \nabla_x H(x)$$

dove  $\mathbb{J}$  è una matrice  $2n \times 2n$ , divisa in quattro blocchi quadrati, dati da

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_n \\ -\mathbb{I}_n & 0 \end{pmatrix},$$

visto che

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\nabla_{\mathbf{p}} H(\mathbf{x}), \nabla_{\mathbf{q}} H(\mathbf{x})).$$

Si mostra che si tratta di un sistema di equazioni differenziali a divergenza nulla:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{f} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_{i+n}}{\partial x_{i+n}} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0. \end{aligned}$$

*Dimostrazione del teorema della divergenza:*

$$\begin{aligned} \Phi^{t+s} &= \Phi^s \circ \Phi^t \\ \implies D\Phi_x^{t+s} &= D\Phi_{\Phi^t(x)}^s D\Phi_x^t, \\ J\Phi^{t+s}(\mathbf{x}) &= J\Phi^s((\Phi^t)(\mathbf{x})) J\Phi^t(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

con  $J = \left[ \frac{\partial \Phi^t}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \right]$  (matrice jacobiana).

$$\implies \det J\Phi^{t+s}(\mathbf{x}) = \det J\Phi^s((\Phi^t)(\mathbf{x})) \det J\Phi^t(\mathbf{x}).$$

Il determinante della matrice jacobiana serve perché:

$$\text{Vol}(\Phi^t(\mathbf{x})) = \int_{\Phi^t(\mathbf{x})} d^n y.$$

Facendo un cambio di variabile,

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = \Phi^t(\mathbf{x}) &\iff \mathbf{x} = \Phi^{-t}(\mathbf{y}) \\ \implies d^n y &= \left| \det \left[ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \right] \right| d^n x = |\det J\Phi^t(\mathbf{x})| \\ y \in \Phi^t(A) &\iff \mathbf{x} \in A. \end{aligned}$$

Allora

$$\text{Vol}(\Phi^t(\mathbf{x})) = \int_A |\det J\Phi^t(\mathbf{x})| d^n x.$$

Si asserisce che

$$\det J\Phi^t(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x}, \forall t$$

ed è continua in  $t$ . Infatti,  $J\Phi^0(\mathbf{x}) = 1$ . Affinché il determinante diventi negativo, deve esistere un tempo  $\bar{t}$  in cui il determinante è nullo. Siccome ogni  $\Phi^t$  (e la sua inversa  $\Phi^{-t}$ ) è differenziabile, e dato che sono biettive,  $J\Phi^t$  è una matrice non singolare (a determinante non nullo).

Quindi,



$$\text{Vol}(\Phi^t(x)) = \int_A \det J\Phi^t(x) \, d^n x.$$

Senza perdita di generalità, si assume che  $A$  sia un insieme di volume finito (nel caso in cui non lo fosse si potrebbe suddividerlo in una quantità numerabile di insiemi di volume finito). Allora,

$$\frac{\partial J\Phi^t}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \det J\Phi^s(\Phi^t(x)) \Big|_{s=0} \det J\Phi^t(x),$$

per un corollario del teorema della convergenza dominata di Lebesgue, che vale se  $\left| \frac{\partial}{\partial t} J\Phi^t(x) \right| \leq g(x)$ , con  $g$  sommabile in un intorno di  $t$  (nel caso che si sta considerando vale in quanto  $\Phi \in C^2$ ),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{Vol}(\Phi^t(A)) &= \int_A \frac{\partial}{\partial t} J\Phi^t(x) \, d^n x \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \text{Vol}(\Phi^t(A)) &= \int_A \frac{\partial}{\partial s} \det J\Phi^s(\Phi^t(x)) \Big|_{s=0} \det J\Phi^t(x) \, d^n x. \end{aligned}$$

Si verifica che

$$\frac{\partial}{\partial s} \det J\Phi^s(\Phi^t(x)) \Big|_{s=0} = \nabla \cdot f.$$

Una dimostrazione sbagliata ma data da molti libri usa il fatto che

$$\Phi^s(x) = \Phi^0(x) + s \frac{\partial \Phi^s(x)}{\partial s} \Big|_{s=0} + o(s) = x + s f(x) + o(s).$$

Infatti, la derivata di un flusso rispetto al parametro  $s$  è, per definizione di flusso,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \Phi^s(x) &= f(\Phi^s(x)) \\ \Rightarrow \frac{\partial \Phi^s(x)}{\partial s} \Big|_{s=0} &= f(x) = \dot{x} \\ \Rightarrow [J\Phi^s(x)]_{ij} &= (\Phi_i^s(x), x_j) = \delta_{ij} + s \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + o(s). \end{aligned}$$

Quest'ultima equazione è vera, ma c'è un errore: infatti, in generale,

$$\frac{\partial o(s)}{\partial x_i} \neq o(s).$$

Per una dimostrazione corretta, si usano comunque le proprietà del flusso, ma direttamente sulla jacobiana:

$$J\Phi^s(x) = J\Phi^0(x) + s \frac{\partial}{\partial s} J\Phi^s(x) \Big|_{s=0} + o(s).$$

Ora,  $J\Phi^0(x) = \mathbb{I}$  è la matrice identità, e

$$\left. \frac{\partial}{\partial s} J\Phi^s(\mathbf{x}) \right|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \Phi_i^s(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi_i^s(\mathbf{x})}{\partial s} \Big|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial x_i} (f_i(\mathbf{x})).$$

E dunque

$$[J\Phi^s(\mathbf{x})]_{ij} = \delta_{ij} + s \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) + o(s).$$

Si calcola il determinante utilizzando il teorema di Binet:

- Moltiplicando gli elementi diagonali, si ha

$$\prod_{i=1}^n \left( 1 + s \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + o(s) \right) = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + o(s).$$

- Per le altre permutazioni, si devono sempre prendere almeno due termini fuori dalla diagonale (altrimenti si ripeterebbe almeno una riga o una colonna). Quindi tutti gli altri termini sono  $o(s)$ , dato che gli elementi fuori diagonale non hanno gli 1. Allora,

$$\det J\Phi^s(\mathbf{x}) = 1 + s \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + o(s)$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial}{\partial s} J\Phi^s(\mathbf{x}) \right|_{s=0} = \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Allora, si ha che, invertendo il cambio di variabile fatto a inizio dimostrazione,

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(\Phi^t(A)) = \int_A \nabla \cdot \mathbf{f}(\Phi^t(\mathbf{x})) \det J\Phi^t(\mathbf{x}) d^n x = \int_{\Phi^t(A)} \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}) d^n y.$$

■

Per i campi vettoriali che conservano i volumi vale un importante teorema, il *teorema di ricorrenza di Poincaré*, che fa utilizzo del concetto di *misura*, ossia una funzione  $A \mapsto \mu(A)$ , con  $A \in \mathcal{M}_n$  (misurabile secondo Lebesgue), con

$$\mu(A) = \int_A f(\mathbf{x}) d^n x$$

per una certa funzione  $f \geq 0$ . Ad esempio, nella misura di Lebesgue, si prende  $f(\mathbf{x}) = 1$ .

**Definizione 6.4:** un flusso  $\Phi^t : \Omega \rightarrow \Omega$  preserva la misura  $\mu$  se,  $\forall t, \forall A \in \mathcal{M}_n$ ,

$$\mu(\Phi^t(A)) = \mu(A).$$

**Teorema 6.4** (di ricorrenza di Poincaré): sia dato un flusso  $\Phi^t : \Omega \rightarrow \Omega$  che preserva una misura  $\mu$  su  $\Omega$ , con  $\mu(\Omega) < +\infty$ . Allora, preso  $A$  misurabile e  $T > 0$ , per quasi ogni  $\mathbf{x} \in A$ ,

$$\exists t(\mathbf{x}) \geq T : \Phi^t(\mathbf{x}) \in A.$$

In altre parole, quasi ogni  $\mathbf{x} \in A$  “tornerà” in  $A$  dopo un intervallo di tempo  $[0, t)$  abbastanza lungo.