

An algorithmic approach to the random spanning forests

Riccardo Michielan
15 ottobre 2020



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

1 Algoritmo di Wilson

2 Radici della RSF

3 Partizioni loop-erased

$\mathcal{G} = (\mathcal{X}, \mathcal{E}, w)$, grafo pesato



$\mathcal{G} = (\mathcal{X}, \mathcal{E}, w)$, grafo pesato

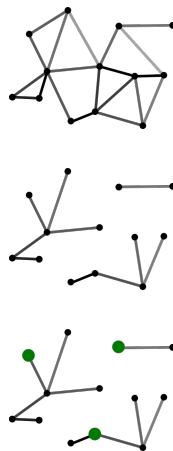
Foresta ricoprente, sottografo di \mathcal{G} con insieme dei nodi uguale ad \mathcal{X} e senza cicli.



$\mathcal{G} = (\mathcal{X}, \mathcal{E}, w)$, grafo pesato

Foresta ricoprente, sottografo di \mathcal{G} con insieme dei nodi uguale ad \mathcal{X} e senza cicli.

Con **radici** se per ogni albero di ϕ viene scelto un nodo. $\rho(\phi)$ insieme delle radici

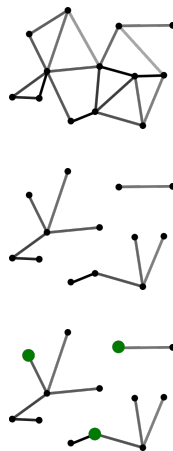


$\mathcal{G} = (\mathcal{X}, \mathcal{E}, w)$, grafo pesato

Foresta ricoprente, sottografo di \mathcal{G} con insieme dei nodi uguale ad \mathcal{X} e senza cicli.

Con **radici** se per ogni albero di ϕ viene scelto un nodo. $\rho(\phi)$ insieme delle radici

\mathcal{F} insieme di tutte le foreste ricoprenti con radici.



Su \mathcal{F} introduciamo una misura di probabilità. Sia $\phi \in \mathcal{F}$

Su \mathcal{F} introduciamo una misura di probabilità. Sia $\phi \in \mathcal{F}$

Misura standard di ϕ

Sia $q > 0$.

La **misura standard** di ϕ è

$$w_q(\phi) := q^{|\rho(\phi)|} \prod_{e \in \phi} w(e).$$

Su \mathcal{F} introduciamo una misura di probabilità. Sia $\phi \in \mathcal{F}$

Misura standard di ϕ

Sia $q > 0$.

La **misura standard** di ϕ è

$$w_q(\phi) := q^{|\rho(\phi)|} \prod_{e \in \phi} w(e).$$

Sia $Z(q) := \sum_{\phi \in \mathcal{F}} w_q(\phi)$. La **probabilità standard** di ϕ è

$$\nu_q(\phi) := \frac{w_q(\phi)}{Z(q)}.$$

Su \mathcal{F} introduciamo una misura di probabilità. Sia $\phi \in \mathcal{F}$

Misura generalizzata di ϕ

Siano $Q = \{q(x)\}_{x \in \mathcal{X}}$, $S := \{x : q(x) = \infty\}$.

La **misura generalizzata** di ϕ è

$$w_Q(\phi) := \prod_{x \in \rho(\phi) \setminus S} q(x) \prod_{e \in \phi} w(e) 1_{\{S \subset \rho(\phi)\}}$$

Sia $Z(Q) := \sum_{\phi \in \mathcal{F}} w_Q(\phi)$. La **probabilità generalizzata** di ϕ è

$$\nu_Q(\phi) := \frac{w_Q(\phi)}{Z(Q)}.$$

Su \mathcal{F} introduciamo una misura di probabilità. Sia $\phi \in \mathcal{F}$

Misura generalizzata di ϕ

Siano $Q = \{q(x)\}_{x \in \mathcal{X}}$, $S := \{x : q(x) = \infty\}$.

La **misura generalizzata** di ϕ è

$$w_Q(\phi) := \prod_{x \in \rho(\phi) \setminus S} q(x) \prod_{e \in \phi} w(e) 1_{\{S \subset \rho(\phi)\}}$$

Sia $Z(Q) := \sum_{\phi \in \mathcal{F}} w_Q(\phi)$. La **probabilità generalizzata** di ϕ è

$$\nu_Q(\phi) := \frac{w_Q(\phi)}{Z(Q)}.$$

Una **foresta aleatoria ricoprente (RSF)** è una v.a. Φ_q (o Φ_Q) associata alla probabilità ν_q (o ν_Q).

Obiettivo: campionare una RSF \longrightarrow **Algoritmo di Wilson**

Obiettivo: campionare una RSF \longrightarrow **Algoritmo di Wilson**

$\mathcal{G} = (\mathcal{X}, \mathcal{E}, w)$ finito. Associamo processo X Markov, generatore

$$Lf(x) = \sum_{y \in \mathcal{X}} w(x, y)[f(y) - f(x)]$$

Obiettivo: campionare una RSF \longrightarrow **Algoritmo di Wilson**

$\mathcal{G} = (\mathcal{X}, \mathcal{E}, w)$ finito. Associamo processo X Markov, generatore

$$Lf(x) = \sum_{y \in \mathcal{X}} w(x, y)[f(y) - f(x)]$$

$\overline{\mathcal{X}} := \mathcal{X} \cup \{\Delta\}$ (assorbente). \overline{X} processo Markov su $\overline{\mathcal{X}}$, generatore

$$\mathcal{L}f(x) = \begin{cases} Lf(x) + q(x)[f(\Delta) - f(x)], & x \neq \Delta \\ 0, & x = \Delta \end{cases}$$

Obiettivo: campionare una RSF \longrightarrow **Algoritmo di Wilson**

$\mathcal{G} = (\mathcal{X}, \mathcal{E}, w)$ finito. Associamo processo X Markov, generatore

$$Lf(x) = \sum_{y \in \mathcal{X}} w(x, y)[f(y) - f(x)]$$

$\overline{\mathcal{X}} := \mathcal{X} \cup \{\Delta\}$ (assorbente). \overline{X} processo Markov su $\overline{\mathcal{X}}$, generatore

$$\mathcal{L}f(x) = \begin{cases} Lf(x) + q(x)[f(\Delta) - f(x)], & x \neq \Delta \\ 0, & x = \Delta \end{cases}$$

Fissati $x_0 \in \overline{\mathcal{X}}$, $B \subset \overline{\mathcal{X}}$.

Una **traiettoria loop-erased** Γ_B , da x_0 a B , si ottiene

- 1 facendo partire \overline{X} in x_0 , fino a raggiungere B ,
- 2 cancellando i loop che appaiono.

Definiamo l'**algoritmo di Wilson** \mathcal{W} :

Definiamo l'**algoritmo di Wilson** \mathcal{W} :

- 1 eseguiamo un traiettoria loop-erased Γ_Δ , partendo da un punto $x_1 \in \mathcal{X}$ qualsiasi;

Definiamo l'**algoritmo di Wilson** \mathcal{W} :

- 1 eseguiamo un traiettoria loop-erased Γ_Δ , partendo da un punto $x_1 \in \mathcal{X}$ qualsiasi;
- 2 eseguiamo ricorsivamente traiettorie loop-erased Γ_{V_n} , con V_n insieme dei punti percorsi dalle traiettorie precedenti, partendo da punti $x_n \in \mathcal{X} \setminus V_n$ qualsiasi;

Definiamo l'**algoritmo di Wilson** \mathcal{W} :

- 1 eseguiamo un traiettoria loop-erased Γ_{Δ} , partendo da un punto $x_1 \in \mathcal{X}$ qualsiasi;
- 2 eseguiamo ricorsivamente traiettorie loop-erased Γ_{V_n} , con V_n insieme dei punti percorsi dalle traiettorie precedenti, partendo da punti $x_n \in \mathcal{X} \setminus V_n$ qualsiasi;
- 3 iteriamo il procedimento finché $\overline{\mathcal{X}}$ non è interamente ricoperto.

Definiamo l'**algoritmo di Wilson** \mathcal{W} :

- 1 eseguiamo un traiettoria loop-erased Γ_{Δ} , partendo da un punto $x_1 \in \mathcal{X}$ qualsiasi;
- 2 eseguiamo ricorsivamente traiettorie loop-erased Γ_{V_n} , con V_n insieme dei punti percorsi dalle traiettorie precedenti, partendo da punti $x_n \in \mathcal{X} \setminus V_n$ qualsiasi;
- 3 iteriamo il procedimento finché $\overline{\mathcal{X}}$ non è interamente ricoperto.

Output dell'algoritmo = albero ricoprente (con radice Δ) su $\overline{\mathcal{X}}$.

Proposizione

Fissato τ albero ricoprente con radice Δ ,

$$\mathbb{P}(\mathcal{W} = \tau) = \frac{\prod_{x \sim \Delta: x \notin S} q(x) \prod_{(x,y) \in \tau: y \neq \Delta} w(x,y)}{\det_{\mathcal{X} \setminus S}(-\mathcal{L})} 1_{\{s \sim \Delta, \forall s \in S\}}.$$

Proposizione

Fissato τ albero ricoprente con radice Δ ,

$$\mathbb{P}(\mathcal{W} = \tau) = \frac{\prod_{x \sim \Delta: x \notin S} q(x) \prod_{(x,y) \in \tau: y \neq \Delta} w(x,y)}{\det_{\mathcal{X} \setminus S}(-\mathcal{L})} 1_{\{s \sim \Delta, \forall s \in S\}}.$$

Foresta $\phi \in \mathcal{F} \longrightarrow$ albero $\tau(\phi)$ in $\overline{\mathcal{G}}$
aggiungendo il nodo Δ e i lati da $\rho(\phi)$ a Δ .

Proposizione

Fissato τ albero ricoprente con radice Δ ,

$$\mathbb{P}(\mathcal{W} = \tau) = \frac{\prod_{x \sim \Delta: x \notin S} q(x) \prod_{(x,y) \in \tau: y \neq \Delta} w(x,y)}{\det_{\mathcal{X} \setminus S}(-\mathcal{L})} 1_{\{s \sim \Delta, \forall s \in S\}}.$$

Foresta $\phi \in \mathcal{F} \longrightarrow$ albero $\tau(\phi)$ in $\overline{\mathcal{G}}$
aggiungendo il nodo Δ e i lati da $\rho(\phi)$ a Δ .

Teorema (Sampling)

$$Z(Q) = \det_{\mathcal{X} \setminus S}(Q - L), \quad \nu_Q(\phi) = \mathbb{P}(\mathcal{W} = \tau(\phi)).$$

Per dimostrare la proposizione serve calcolare

$$P_{x_0}(\Gamma_B = \gamma_B), \quad \text{dove} \quad \gamma_B = (x_0, \dots, x_{l-1}, \Delta)$$

è un percorso senza loop da x_0 a Δ .

Per dimostrare la proposizione serve calcolare

$$P_{x_0}(\Gamma_B = \gamma_B), \quad \text{dove} \quad \gamma_B = (x_0, \dots, x_{l-1}, \Delta)$$

è un percorso senza loop da x_0 a Δ .

Teorema (Marchal, 2000)

Fissato un percorso senza loop γ_B , allora

$$P_{x_0}(\Gamma_B = \gamma_B) = \prod_{i=1}^{l-1} w(x_{i-1}, x_i) q(x_{l-1}) \frac{\det_{\mathcal{X} \setminus \{x_0, \dots, x_{l-1}\}}(-\mathcal{L})}{\det_{\mathcal{X}}(-\mathcal{L})}$$

Per dimostrare la proposizione serve calcolare

$$P_{x_0}(\Gamma_B = \gamma_B), \quad \text{dove} \quad \gamma_B = (x_0, \dots, x_{l-1}, \Delta)$$

è un percorso senza loop da x_0 a Δ .

Teorema (Marchal, 2000)

Fissato un percorso senza loop γ_B , allora

$$P_{x_0}(\Gamma_B = \gamma_B) = \prod_{i=1}^{l-1} w(x_{i-1}, x_i) q(x_{l-1}) \frac{\det_{\mathcal{X} \setminus \{x_0, \dots, x_{l-1}\}}(-\mathcal{L})}{\det_{\mathcal{X}}(-\mathcal{L})}$$

Nota: $[-\mathcal{L}]_{\mathcal{X}} = Q - L$.

Conseguenze del teorema Sampling.

Conseguenze del teorema Sampling.

Corollario 1

$$Z(q) = q \prod_{i=1}^{n-1} (q + \lambda_i)$$

con $\{\lambda_i\}$ autovalori della matrice $-L$.

Conseguenze del teorema Sampling.

Corollario 1

$$Z(q) = q \prod_{i=1}^{n-1} (q + \lambda_i)$$

con $\{\lambda_i\}$ autovalori della matrice $-L$.

Corollario 2

Se $-L$ ha spettro reale, allora

$$|\rho(\Phi_q)| \sim \sum_{i=0}^{n-1} \mathfrak{B} \left(\frac{q}{q + \lambda_i} \right)$$

somma di n v.a. Bernoulliane indipendenti con parametri $\frac{q}{q + \lambda_i}$.

Teorema

Il processo delle radici $\rho(\Phi_Q)$ è determinantale

Teorema

Il processo delle radici $\rho(\Phi_Q)$ è determinantale: per ogni $A \subset \mathcal{X}$

$$\mathbb{P}(A \subset \rho(\Phi_Q)) = \det_A(K_Q), \quad \text{con nucleo}$$

$$K_Q(x, y) = P_x(\bar{X}_{T_Q^-} = y), \quad x, y \in \mathcal{X}$$

dove T_Q è il tempo di assorbimento in Δ per il processo \bar{X} .

Teorema

Il processo delle radici $\rho(\Phi_Q)$ è determinantale: per ogni $A \subset \mathcal{X}$

$$\mathbb{P}(A \subset \rho(\Phi_Q)) = \det_A(K_Q), \quad \text{con nucleo}$$

$$K_Q(x, y) = P_x(\bar{X}_{T_Q^-} = y), \quad x, y \in \mathcal{X}$$

dove T_Q è il tempo di assorbimento in Δ per il processo \bar{X} .

Idea della dimostrazione:

Teorema

Il processo delle radici $\rho(\Phi_Q)$ è determinantale: per ogni $A \subset \mathcal{X}$

$$\mathbb{P}(A \subset \rho(\Phi_Q)) = \det_A(K_Q), \quad \text{con nucleo}$$

$$K_Q(x, y) = P_x(\bar{X}_{T_Q^-} = y), \quad x, y \in \mathcal{X}$$

dove T_Q è il tempo di assorbimento in Δ per il processo \bar{X} .

Idea della dimostrazione:

■ f. di Green $G_Q(x, y) = E_x[\ell_y(T_Q)] = (Q - L)^{-1}(x, y)$

Teorema

Il processo delle radici $\rho(\Phi_Q)$ è determinantale: per ogni $A \subset \mathcal{X}$

$$\mathbb{P}(A \subset \rho(\Phi_Q)) = \det_A(K_Q), \quad \text{con nucleo}$$

$$K_Q(x, y) = P_x(\bar{X}_{T_Q^-} = y), \quad x, y \in \mathcal{X}$$

dove T_Q è il tempo di assorbimento in Δ per il processo \bar{X} .

Idea della dimostrazione:

- f. di Green $G_Q(x, y) = E_x[\ell_y(T_Q)] = (Q - L)^{-1}(x, y)$
- Riscriviamo il nucleo $K_Q = G_Q Q$

Teorema

Il processo delle radici $\rho(\Phi_Q)$ è determinantale: per ogni $A \subset \mathcal{X}$

$$\mathbb{P}(A \subset \rho(\Phi_Q)) = \det_A(K_Q), \quad \text{con nucleo}$$

$$K_Q(x, y) = P_x(\bar{X}_{T_Q^-} = y), \quad x, y \in \mathcal{X}$$

dove T_Q è il tempo di assorbimento in Δ per il processo \bar{X} .

Idea della dimostrazione:

- f. di Green $G_Q(x, y) = E_x[\ell_y(T_Q)] = (Q - L)^{-1}(x, y)$
- Riscriviamo il nucleo $K_Q = G_Q Q$
- $A \subset \rho(\Phi_Q) = \tau(\Phi_Q)$ contiene tutti i lati da A a Δ

Teorema

Il processo delle radici $\rho(\Phi_Q)$ è determinantale: per ogni $A \subset \mathcal{X}$

$$\mathbb{P}(A \subset \rho(\Phi_Q)) = \det_A(K_Q), \quad \text{con nucleo}$$

$$K_Q(x, y) = P_x(\bar{X}_{T_Q^-} = y), \quad x, y \in \mathcal{X}$$

dove T_Q è il tempo di assorbimento in Δ per il processo \bar{X} .

Idea della dimostrazione:

- f. di Green $G_Q(x, y) = E_x[\ell_y(T_Q)] = (Q - L)^{-1}(x, y)$
- Riscriviamo il nucleo $K_Q = G_Q Q$
- $A \subset \rho(\Phi_Q) = \tau(\Phi_Q)$ contiene tutti i lati da A a Δ
- Marchal \longrightarrow rapporto tra determinanti $\frac{\det_A(Q)}{\det_A(Q-L)}$

π_m partizione di \mathcal{G} in alberi, con $m \geq 1$ blocchi.

π_m partizione di \mathcal{G} in alberi, con $m \geq 1$ blocchi.

Una **partizione loop-erased** è v.a. Π_q con distribuzione

$$\mathbb{P}(\Pi_q = \pi_m) = \mu_q(\pi_m) = \frac{q^m \sum_{\phi: \Pi(\phi) = \pi_m} w(\phi)}{Z(q)}$$

π_m partizione di \mathcal{G} in alberi, con $m \geq 1$ blocchi.

Una **partizione loop-erased** è v.a. Π_q con distribuzione

$$\mathbb{P}(\Pi_q = \pi_m) = \mu_q(\pi_m) = \frac{q^m \sum_{\phi: \Pi(\phi) = \pi_m} w(\phi)}{Z(q)}$$

Obiettivo: studiare correlazione tra 2 punti associata a μ_q

π_m partizione di \mathcal{G} in alberi, con $m \geq 1$ blocchi.

Una **partizione loop-erased** è v.a. Π_q con distribuzione

$$\mathbb{P}(\Pi_q = \pi_m) = \mu_q(\pi_m) = \frac{q^m \sum_{\phi: \Pi(\phi) = \pi_m} w(\phi)}{Z(q)}$$

Obiettivo: studiare correlazione tra 2 punti associata a μ_q

Definizione

Presi $x, y \in \mathcal{X}$, definiamo il **potenziale di interazione**

$$U_q(x, y) := \mathbb{P}(x \text{ e } y \text{ appartengono a blocchi diversi di } \Pi_q)$$

Confronto caso mean-field (MF) e mean-field-community (MFC)

Confronto caso mean-field (MF) e mean-field-community (MFC)

MF

- \mathcal{K}_N , grafo completo
- w , edge weight costante

Confronto caso mean-field (MF) e mean-field-community (MFC)

MF

- \mathcal{K}_N , grafo completo
- w , edge weight costante

MFC

- \mathcal{K}_{2N} , grafo bipartito
- w_1 , nella stessa comunità
- w_2 , tra diverse comunità

Confronto caso mean-field (MF) e mean-field-community (MFC)

MF

- \mathcal{K}_N , grafo completo
- w , edge weight costante

$U_q^{(N)}$, indipendente da x, y

MFC

- \mathcal{K}_{2N} , grafo bipartito
- w_1 , nella stessa comunità
- w_2 , tra diverse comunità

Confronto caso mean-field (MF) e mean-field-community (MFC)

MF

- \mathcal{K}_N , grafo completo
- w , edge weight costante

$U_q^{(N)}$, indipendente da x, y

MFC

- \mathcal{K}_{2N} , grafo bipartito
- w_1 , nella stessa comunità
- w_2 , tra diverse comunità

$U_q^{(N)}(in)$, x, y stessa comunità

$U_q^{(N)}(out)$, x, y diverse comunità

Confronto caso mean-field (MF) e mean-field-community (MFC)

MF

- \mathcal{K}_N , grafo completo
- w , edge weight costante

$U_q^{(N)}$, indipendente da x, y

MFC

- \mathcal{K}_{2N} , grafo bipartito
- w_1 , nella stessa comunità
- w_2 , tra diverse comunità

$U_q^{(N)}(in)$, x, y stessa comunità

$U_q^{(N)}(out)$, x, y diverse comunità

Caratteristiche comuni

1. Termine geometrico

2. Termine entropico

Idea delle dimostrazioni:

Idea delle dimostrazioni:

$$U_q(x, y) = \sum_{\gamma} P_x(\Gamma_{\Delta} = \gamma) P_y(\tau_{\gamma \setminus \Delta} > \tau_{\Delta})$$

Idea delle dimostrazioni:

$$U_q(x, y) = \sum_{\gamma} P_x(\Gamma_{\Delta} = \gamma) P_y(\tau_{\gamma \setminus \Delta} > \tau_{\Delta})$$

- 1 Percorso loop-erased, che parte da x .

Idea delle dimostrazioni:

$$U_q(x, y) = \sum_{\gamma} P_x(\Gamma_{\Delta} = \gamma) P_y(\tau_{\gamma \setminus \Delta} > \tau_{\Delta})$$

- 1 Percorso loop-erased, che parte da x .
- 2 Random walk fino ad assorbimento, che parte da y .

Idea delle dimostrazioni:

$$U_q(x, y) = \sum_{\gamma} P_x(\Gamma_{\Delta} = \gamma) P_y(\tau_{\gamma \setminus \Delta} > \tau_{\Delta})$$

- 1 Percorso loop-erased, che parte da x .
- 2 Random walk fino ad assorbimento, che parte da y .
- 3 Numero di percorsi γ loop-erased di uguale lunghezza.