Parte propedeutica

Principio di induzione

Quinto assioma di Peano (principio di induzione: prima forma)

Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ un insieme che verifica le seguenti proprietà:

1. $0 \in S$ (**base dell'induzione**)
2. $\forall n,\ n \in S \Rightarrow n + 1 \in S$ (**passo induttivo**)

Allora $S = \mathbb{N}$.

Principio di induzione (seconda forma)

Sia $P(n)$ una proprietà vera per $n = 0$.
Supponiamo che se $P(n)$ è vera, allora è vera anche $P(n + 1)$.
Allora $P(n)$ è vera per ogni *n*.

Principio di induzione ("da un certo punto in poi")

Sia $S \subseteq \mathbb{N}$. Supponiamo che:

1. $k \in S$
2. $\forall n \geq k$, se $n \in S$ allora $n + 1 \in S$

Allora $S \supseteq \{n \in \mathbb{N}: n \geq k\}$

Fattoriale di un numero (per induzione)

Il fattoriale di un numero *n* rappresenta il prodotto dei primi *n* numeri naturali ed è definito come:

$$n! = \begin{cases} 0! = 1 \\ (n + 1)! = n!\,(n - 1)! \end{cases}$$

Campi ordinati

Proprietà dell'insieme $\mathbb{Q}$

R1: addizione o somma

È definita in $\mathbb{Q}$ un'operazione detta **addizione** (o **somma**) con le seguenti proprietà:

1. **commutativa**: $\forall a, b, a + b = b + a$;
2. **associativa**: $\forall a, b, c, (a + b) + c = a + (b + c)$
3. esistenza dell'**elemento neutro** della somma (0) tale che $\forall a, a + 0 = a$
4. esistenza dell'**opposto** di ogni elemento: $\forall a,\ a + (-a) = 0$

R2: moltiplicazione o prodotto

È definita in $\mathbb{Q}$ un'operazione detta **moltiplicazione** (o **prodotto**) con le seguenti proprietà:

1. **commutativa**: $\forall a, b, a \cdot b = b \cdot a$
2. **associativa**: $\forall a, b, c, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
3. esistenza dell'**elemento neutro** del prodotto (indicato con 1) tale che $\forall a, a \cdot 1 = a$
4. $\forall a \neq 0$ esiste un elemento detto l'**inverso** di *a* indicato con $\frac{1}{a}$ o a^{-1} tale che $a \cdot a^{-1} = 1$
5. **proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto**: $\forall a, b, c, (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

R3: relazione d'ordine totale

Su $\mathbb{Q}$ è definita una **relazione d'ordine totale** tale che:

1. $\forall a, b, c$, se $a \leq b$ allora $a + c \leq b + c$;
2. $\forall a, b, c$ con $c > 0$, se $a \leq b$ allora $ac \leq bc$

Insieme ordinato e totalmente ordinato

Un insieme X si dice **ordinato** se su X è definita una relazione $\leq$ detta **relazione d'ordine** con le seguenti proprietà:

1. **riflessiva**: $\forall a, a \leq a$;
2. **antisimmetrica**: $\forall a, b$, se $a \leq b$ e $b \leq a$ allora $a = b$;
3. **transitiva**= $\forall a, b, c$, se $a \leq b$ e $b \leq c$ allora $a \leq c$

Un insieme ordinato *X* si dice **totalmente ordinato** se presi comunque due elementi $a, b \in X$ è sempre possibile confrontarli secondo la relazione d'ordine $\leq$ definita su *X*.

Non tutti gli insiemi ordinati sono anche totalmente ordinati.

Campo e campo ordinato

Un insieme su cui sono definite due operazioni che soddisfano le proprietà **R1** ed **R2** si dice **campo**.

Un insieme su cui sono definite due operazioni ed una relazione d'ordine che soddisfano le proprietà **R1**, **R2** ed **R3** si dice **campo ordinato**.

Maggiorante e minorante

Sia $(A, \leq)$ un insieme ordinato e sia *B* un suo sottoinsieme. Si dice che un elemento $a \in A$ è un **maggiorante** di *B* se

$$\forall x \in B, \ \ x \leq a$$

L'insieme dei maggioranti di *B* si indica con M_B.
Dire che un elemento $a \in A$ **non è un maggiorante** di *B* significa che

$$\exists \bar{x} \in B : \bar{x} > a$$

Un maggiorante di *B* non deve necessariamente appartenere all'insieme *B*.

Si dice invece che un elemento $b \in A$ è un **minorante** di *B* se

$$\forall x \in B, \ \ b \leq x$$

Dire che un elemento $b \in A$ **non è un minorante** di *B* significa che

$$\exists \bar{x} \in B : b > \bar{x}$$

Un minorante di *B* non deve necessariamente appartenere all'insieme *B*.

Limite inferiore e superiore

Si dice che un sottoinsieme *B* di un insieme ordinato è **limitato superiormente** se ha dei maggioranti, cioè se $M_B \neq \emptyset$.

Analogamente, si dice che un sottoinsieme *B* di un insieme ordinato è **limitato inferiormente** se ha dei minoranti.

Si dice infine che un insieme è **limitato** se è limitato superiormente e inferiormente.

Massimo e minimo di un insieme

Sia $(A, \leq)$ un insieme ordinato e sia *B* un suo sottoinsieme. Si dice che un elemento $a \in A$ è il **massimo** di *B* se:

$$\begin{cases} a \in B \\ \forall x \in B, \quad x \leq a \end{cases}$$

In tal caso si scrive $a = max\, B$.
Il massimo di un insieme è un maggiorante che appartiene all'insieme stesso.

Si dice invece che un elemento $a \in A$ è il **minimo** di *B* se:

$$\begin{cases} a \in B \\ \forall x \in B, \quad a \leq x \end{cases}$$

Il minimo di un insieme è un minorante che appartiene all'insieme stesso.

Estremo superiore ed estremo inferiore

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non vuoto e limitato superiormente. Si dice che ξ è l'**estremo superiore** di *A* se ξ è il **minimo dei maggioranti** di *A* e si indica come $\xi = sup\, A$.

Analogamente si dice che η è l'**estremo inferiore** di *A* se η è il **massimo dei minoranti** di *A* e si indica come $\eta = inf\, A$.

Caratterizzazione dell'estremo superiore

$$\xi = sup\, A \Leftrightarrow \begin{cases} \xi \in M_A \\ \forall \lambda < \xi, \lambda \notin M_A \end{cases}$$

$$\xi = sup\, A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, \quad a \leq \xi \\ \forall \lambda < \xi, \exists \bar{a} \in A: \lambda < \bar{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, \quad a \leq \xi \\ \forall \epsilon > 0, \exists \bar{a} \in A: \xi - \epsilon \leq \bar{a} \end{cases}$$

Caratterizzazione dell'estremo inferiore

$$\eta = inf\, A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, \quad \eta \leq a \\ \forall \lambda > \eta, \exists \bar{a} \in A: \lambda > \bar{a} \end{cases}$$

R4: assioma di Dedekind (o assioma di continuità)

Siano *A, B* due sottoinsiemi non vuoti di ℝ tali che:

$$\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$$

Allora esiste un elemento $c \in \mathbb{R}$, detto **elemento separatore** di *A* e *B*, tale che

$$\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq c \leq b$$

Un insieme che soddisfa questa proprietà possiede la **proprietà dell'estremo superiore**.

Definizione assiomatica di ℝ

Chiamiamo ℝ un insieme che soddisfa le proprietà **R1**, **R2**, **R3**, ed **R4** e diremo che è un **campo ordinato che ha la proprietà dell'estremo superiore**.

Funzioni reali di una variabile reale

Definizione di funzione

Dati due insiemi *A* e *B* qualsiasi, una **funzione di dominio** *A* **a valori in** *B* è una qualsiasi legge che ad ogni elemento di *A* associa **uno ed un solo** elemento di *B*.

L'insieme *B* viene anche detto **codominio** della funzione.
L'uscita corrispondente ad un valore in ingresso si chiama **immagine** di quel valore.
L'insieme delle possibili uscite si chiama **immagine del dominio tramite *f***.

Grafico di una funzione

Il grafico di una funzione $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è l'insieme

$$\{(x, f(x)): x \in D\}$$

Funzioni limitate

Sia $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si dice che *f* è **limitata superiormente** se esiste un elemento $M \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq M, \forall x \in D$, cioè se l'immagine di *D* tramite *f* è un insieme limitato superiormente.
Dal punto di vista grafico significa che il grafico di $f(x)$ è contenuto nel **semipiano inferiore** delimitato dalla retta $y = M$.

Si dice che *f* è **limitata inferiormente** se esiste un elemento $m \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \geq m, \forall x \in D$, cioè se l'immagine di *D* tramite *f* è un insieme limitato inferiormente.
Dal punto di vista grafico significa che il grafico di $f(x)$ è contenuto nel **semipiano superiore** delimitato dalla retta $y = m$.

Infine si dice che *f* è **limitata** se è limitata inferiormente e superiormente. Dal punto di vista grafico significa che il grafico di $f(x)$ è contenuto in una "striscia" delimitata da due rette $y = M$ ed $y = m$.

Funzioni simmetriche

Sia $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Allora *f* si dice **pari** se il suo grafico è simmetrico rispetto all'**asse delle ordinate** (cioè se $f(x) = f(-x)$ per ogni $x \in D$).
Un esempio di funzione pari è $f(x) = x^2$.

f si dice invece **dispari** se il suo grafico è simmetrico rispetto all'**origine degli assi** (cioè se $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in D$).
Un esempio di funzione dispari è $f(x) = x^3$.

Una funzione può non essere né pari né dispari.
Non esistono funzioni con grafico simmetrico rispetto all'asse *x* perché questo farebbe perdere l'unicità della corrispondenza tra gli elementi del dominio e del codominio.

Funzioni monotone

Sia $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
f si dice **monotona crescente** se

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Si dice invece che f è **monotona decrescente** se

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Se le disuguaglianze sono strette si dice che f è monotona **strettamente** crescente (o monotona **strettamente** decrescente, a seconda dei casi).

Funzioni periodiche

Sia $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si dice che f è **periodica** di periodo T (con $T > 0$) se T è il più piccolo numero reale positivo tale che $f(x+T) = f(x), \forall x \in D$.
Ogni intervallo di lunghezza T si dice **intervallo di periodicità**.

Funzioni composte

Siano date due funzioni $f: E \to \mathbb{R}$ e $g: F \to \mathbb{R}$ con $f(E) \subseteq F$ cioè $\forall x \in E, f(x) \in F$.
Si definisce la **funzione composta** di f e g come

$$g \circ f =: h: E \to \mathbb{R}$$

tale che

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

agisca come segue:

$$x \mapsto f(x) \mapsto g\big(f(x)\big)$$

Il dominio di una funzione composta è dato dall'**intersezione** dei domini delle funzioni che la compongono.

Funzioni invertibili

Se accade che

$$\forall y \in f(D), \exists!\, x \in D: f(x) = y$$

allora f si dice **invertibile** e si realizza una **corrispondenza biunivoca** tra D e $f(D)$.

Funzioni iniettive, suriettive e biiettive

Una funzione è **iniettiva** se accade che

$$\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

o equivalentemente

$$\forall x_1, x_2 \in D, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Una funzione si dice **suriettiva** se accade che

$$\forall y \in f(D), \exists x \in D: f(x) = y$$

Una funzione si dice **biiettiva** se accade che

$$\forall y \in f(D), \exists!\, x \in D: f(x) = y$$

Funzione inversa

La funzione che per ogni $y \in f(D)$ associa l'unico elemento $x \in D$ tale che si abbia $f(x) = y$ si chiama **funzione inversa** e si indica con il simbolo f^{-1}.

Condizione necessaria e condizione sufficiente

Date due proposizioni *P* e *Q* si dice che:

- *P* è **condizione necessaria** per *Q* se $Q \Rightarrow P$;
- *P* è **condizione sufficiente** per *Q* se $P \Rightarrow Q$

Successioni

Semiretta di numeri naturali

Si dice **semiretta di numeri naturali** un insieme del tipo $\{n \in \mathbb{N} : n \geq \bar{n}\}$.

Definizione di successione

Si dice **successione** una qualunque applicazione definita su una semiretta di $\mathbb{N}$. Se il **codominio** dell'applicazione è un insieme *A*, si parla di successione di elementi di *A* (o anche successioni a valori in *A*).

Successioni limitate inferiormente e superiormente

Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice **limitata inferiormente** se l'immagine $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un insieme limitato inferiormente, cioè se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $a_n \geq m$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice **limitata superiormente** se l'immagine $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un insieme limitato superiormente, cioè se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $a_n \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice **limitata** se è limitata superiormente e inferiormente.
In particolare non è restrittivo dire che $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata se esiste una costante $M > 0$ tale che $|a_n| \leq M$.

Definizione di "definitivamente" per successioni

Si dice che una successione $\{a_n\}_n$ possiede **definitivamente** una certa proprietà se $\exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}\ a_n$ soddisfa quella proprietà, cioè se la possiede "da un certo punto in poi".

Successioni convergenti

Una successione $\{a_n\}_n$ si dice **convergente** se esiste $\ell \in \mathbb{R}$ con queste proprietà:

$$\forall \epsilon \text{ definitivamente } |a_n - \ell| < \epsilon$$

oppure, equivalentemente:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \ :\ \forall n \geq \bar{n} \qquad |a_n - \ell| < \epsilon$$

Il numero ℓ si chiama **limite della successione** e si indica come

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \text{ oppure } a_n \to \ell \text{ per } n \to \infty$$

Successioni divergenti

Una successione di dice **divergente** a $+\infty$ se

$$\forall M > 0, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \bar{n} \quad a_n > M$$

Una successione si dice **divergente** a $-\infty$ se

$$\forall \bar{M} < 0, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \bar{n} \quad a_n < \bar{M}$$

In tal caso $+\infty$ o $-\infty$ sono i limiti delle successioni divergenti e scriveremo

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$$

Successioni irregolari

Una successione che non ammette limite (cioè non è né convergente né divergente) si dice **irregolare** o **indeterminata**.

Esempio: la successione $n \mapsto (-1)^n$ è una successione irregolare.

Successioni infinite e infinitesime

Una successione che tende a 0 si dice **infinitesima** (esempio: $n \mapsto \frac{1}{n}$), mentre una successione divergente si dice **infinita** (esempio: $n \mapsto n^2$).

Successioni monotone

Una funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ è **crescente** se e solo se

$$\forall n, m,\ n < m \Rightarrow f(n) \leq f(m)$$

Analogamente è **decrescente** se e solo se

$$\forall n, m,\ n < m \Rightarrow f(n) \geq f(m)$$

Sottosuccessioni

Si dice **sottosuccessione** di una successione $\{a_n\}_n$ la composizione $a \circ k$ della successione data con una qualunque applicazione **strettamente crescente** $k: \mathbb{m} \to \mathbb{N}$.

Una successione può essere vista come sottosuccessione di sé stessa.

Il fatto che *k* sia un'applicazione strettamente crescente significa che la sottosuccessione può "iniziare" più indietro o più avanti rispetto alla successione di partenza, ma da quel punto in poi la sottosuccessione **deve** prendere **tutti** gli elementi che compaiono nella successione di partenza, **mantenendoli nello stesso ordine**.

Definizione del numero di Nepero tramite limite

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Continuità (per successioni)

Una funzione $f: A \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ si dice **continua** in x_0 se si verifica la seguente proprietà:

$$\forall \{x_n\}_n \subseteq A \qquad x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$$

Se *f* è continua in ogni punto del dominio *A* si dice che *f* è continua.

Successioni asintotiche

Due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ si dicono **asintotiche**, e si indicano con $a_n \sim b_n$, se:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

Punto limite

Si dice che $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ è un **punto limite** di una successione se questa ha almeno una sottosuccessione che ha limite ℓ.

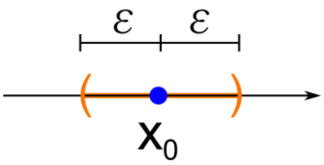
Ogni successione limitata ha almeno un punto limite in $\mathbb{R}$.

Limiti di funzioni reali di variabile reale

Intorno di un punto

Si dice **intorno di un punto** $x_0 \in \mathbb{R}$ un intervallo del tipo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ per un qualche $\delta > 0$.

Un intorno di $+\infty$ è un intervallo del tipo $(a, +\infty)$ mentre un intorno di $-\infty$ è un intervallo del tipo $(-\infty, b)$.



intorno di x_0

Punto isolato

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice che è un **punto isolato** di A se:

$$\exists U_{x_0} \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che } U_{x_0} \cap A = \{x_0\}$$

Un punto isolato di A appartiene ad A.

Un punto x_0 si dice **punto isolato** di A se **esiste almeno un intorno** di x_0 che in comune con l'insieme A ha soltanto il punto x_0 stesso.

Punto di accumulazione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice **punto di accumulazione** per A se

$$\forall U_{x_0} \text{ intorno di } x_0 \text{ si ha } \left(U_{x_0} \cap A\right) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$$

Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è un **punto di accumulazione** di A se **tutti** gli intorni di x_0 hanno in comune con l'insieme A altri punti diversi da x_0 stesso.

Definizione topologica di limite

Sia $f: dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per $dom(f)$. Si dice che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \qquad \ell \in \overline{\mathbb{R}}$$

se

$$\forall U_\ell \text{ intorno di } \ell \ \exists V_{x_0} \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che } \forall x \in V_{x_0},\ x \neq x_0,\ f(x) \in U_\ell$$

Limite finito all'infinito

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\, \exists K > 0 : \forall x,\, x > K \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\, \exists K > 0 : \forall x,\, x < -K \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$

Asintoto orizzontale

Un **asintoto orizzontale** è una retta di equazione $y = \ell$ con $\ell \in \mathbb{R}$ tale che per $x \to +\infty$ oppure per $x \to -\infty$ si abbia

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$$

Ogni situazione di limite finito all'infinito corrisponde graficamente ad un asintoto orizzontale.

Limite infinito all'infinito

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall H > 0\, \exists K > 0 : \forall x,\, x > K \Rightarrow f(x) > H$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall H > 0\, \exists K > 0 : \forall x,\, x > K \Rightarrow f(x) < -H$
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall H > 0\, \exists K > 0 : \forall x,\, x < -K \Rightarrow f(x) > H$
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall H > 0\, \exists K > 0 : \forall x,\, x < -K \Rightarrow f(x) < -H$

Asintoto obliquo

Si dice che una funzione $f(x)$ ha **asintoto obliquo** di equazione $y = mx + q$ (con $m \neq 0$ e $q \in \mathbb{R}$ per $x \to +\infty$ oppure per $x \to -\infty$ se accade che:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx - q] = 0$$

oppure rispettivamente

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx - q] = 0$$

La funzione $f(x)$ ammette asintoto obliquo per $x \to +\infty$ se e solo se **entrambi** questi limiti esistono e **sono finiti**:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$$
$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = q$$

ed in tale caso l'asintoto è la retta $y = mx + q$.

Lo stesso criterio può essere utilizzato per $x \to -\infty$.

Limite infinito al finito

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K > 0\, \exists \delta > 0 : \forall x \neq x_0,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > K$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall K > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \neq x_0,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -K$$

Asintoto verticale

Si dice che f ha un **asintoto verticale** di equazione $x = x_0$ (con $x_0 \in \mathbb{R}$ per $x \to x_0$ (oppure per $x \to x_0^+$ o $x \to x_0^-$) accade che:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \text{ oppure } \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

oppure, a seconda dei casi:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \text{ oppure } \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty \text{ oppure } \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$$

Limite finito al finito

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall x \neq x_0,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

Continuità (per funzioni)

Sia $f : dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione appartenente a $dom(f)$. Allora si dice che f è **continua** in x_0 se esiste

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Si dice che f è continua se risulta continua in ogni punto del suo dominio.
Una funzione non continua in un punto $x_0 \in dom(f)$ si dice **discontinua**.

Parlare di continuità (e di discontinuità) in un punto x_0 ha senso solo se $x_0 \in dom(f)$.
Non ha senso quindi dire che $f(x) = \frac{1}{x}$ non è continua in $x = 0$, perché quel punto non appartiene al dominio della funzione.

Discontinuità a salto

Si dice che x_0 è un **punto di discontinuità a salto** per $f(x)$ quando i limiti destro e sinistro esistono finiti ma diversi tra loro. L'ampiezza del salto in x_0 in questo caso è data da

$$\text{salto} = \lim_{x\to x_0^+} f(x) - \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

Se uno dei due limiti coincide per $x \to x_0$ con $f(x_0)$ si dice che f è **continua da destra** o **continua da sinistra** rispettivamente.

Definizione successionale di limite

Si dice che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \qquad x_0, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$$

se accade che

$$\forall \{x_n\}_n,\ x_n \neq x_0,\ x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to \ell \text{ per } n \to +\infty$$

Relazione di "asintotico" (per funzioni)

Si dice che due funzioni sono **asintotiche** per $x \to x_0$ e si indicano come $f \sim g$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Calcolo differenziale per funzioni reali di variabile reale

Definizione di derivata

Sia $f: (a, b) \to \mathbb{R}$. f si dice **derivabile** in $x_0 \in (a, b)$ se **esiste finito** il limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

e tale limite prende il nome di **derivata prima** di f in x_0 e si indica come $f'(x_0)$.

Si ha dunque

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

o equivalentemente

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Punto angoloso

Sia $f: (a, b) \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in (a, b)$. Allora se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \text{ o equivalentemente } \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

oppure

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \text{ o equivalentemente } \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

allora f si dice **derivabile da destra** (o rispettivamente **derivabile da sinistra**) e il precedente limite finito si indica con $f'_+(x_0)$ (o rispettivamente $f'_-(x_0)$) e si chiama **derivata destra** (o rispettivamente **derivata sinistra**).

Nel caso in cui f sia continua e derivabile sia da destra che da sinistra in un punto x_0 allora si dice che f ha un **punto angoloso** in $x = x_0$.

Cuspide

Se f è continua in x_0 e $f'_+(x_0) = \pm$ e contemporaneamente $f'_-(x_0) = \mp$ allora si dice che f in x_0 ha una **cuspide**.

Notazioni asintotiche

Definizione di "o piccolo"

Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ definite in un intorno di x_0 si dice che

$$f(x) = o\big(g(x)\big) \text{ per } x \to x_0$$

se accade che

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 0 \text{ per } x \to x_0$$

Per definizione si ha che $o(1) = 0$.

Notazione "O-grande"

Date due funzioni $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ e $g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ si dice che $f(n) = O\big(g(n)\big)$ se e solo se esistono due costanti $c > 0$ e $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tali che

$$f(n) \leq cg(n) \qquad \forall n \geq \bar{n}$$

Notazione Ω

Date due funzioni $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ e $g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ si dice che $f(n) = \Omega\big(g(n)\big)$ se e solo se esistono due costanti $c > 0$ e $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tali che

$$f(n) \geq cg(n) \qquad \forall n \geq \bar{n}$$

Notazione Θ

Date due funzioni $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ e $g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ si dice che $f(n) = \Theta\big(g(n)\big)$ se $f(n) = O\big(g(n)\big)$ e contemporaneamente $f(n) = \Omega\big(g(n)\big)$.
Questo equivale a dire che esistono 3 costanti $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ ed $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tali che

$$c_2 g(n) \leq f(n) \leq c_1 g(n) \qquad \forall n \geq \bar{n}$$

Serie

Definizione di serie

Data una successione $\{a_n\}_n$ di numeri reali, si chiama **serie associata** ad $\{a_n\}_n$ (o anche **serie di termine generale** a_n) la quantità

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Gli elementi di a_n si chiamano **termini della serie**.

La successione

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

si chiama **successione delle somme parziali**.

Serie assolutamente convergente

Si dice che una serie $\sum_n a_n$ è **assolutamente convergente** se la serie $\sum_n |a_n|$ è convergente.

Parte resto

Approssimazione e formule di Taylor

Definizione di polinomio di Taylor

Si dice **polinomio di Taylor** di ordine *n* associato alla funzione *f* e centrato in x_0 un polinomio P_{n,x_0} di ordine *n* tale che

$$f(x) - P_{n,x_0}(x) = o((x - x_0)^n)$$

Si tratta di un polinomio che **approssima** la funzione. Quest'approssimazione, in quanto tale, ha un certo **errore**, espresso dal termine $o((x - x_0)^n)$. Questo errore diventa sempre più trascurabile al crescere di *n*.

Applicazioni del calcolo differenziale: problemi di ottimizzazione

Massimo e minimo di una funzione

Si dice che *M* è un **massimo** di *f* nell'intervallo $[a, b]$ e che $x_M \in [a, b]$ è **punto di massimo** per *f* nell'intervallo $[a, b]$ se accade che

$$f(x_M) = M \geq f(x) \qquad \forall x \in [a, b]$$

Analogamente si dice che *m* è il **minimo** di *f* in un intervallo $[a, b]$ e che $x_m \in [a, b]$ è **punto di minimo** per *f* in $[a, b]$ se accade che

$$f(x_m) = m \leq f(x) \qquad \forall x \in [a. b]$$

Si dice che *M* è **massimo locale** per *f* e che $x_M \in [a, b]$ è **punto di massimo locale** per *f* se esiste un intervallo $(x_M - \delta, x_M + \delta)$ tale che

$$f(x_M) = M \geq f(x) \quad \forall x \in (x_M - \delta, x_M + \delta) \cap [a, b]$$

Analogamente si dice che *m* è **minimo locale** per *f* e che $x_m \in [a. b]$ è **punto di minimo locale** per *f* se esiste un intervallo $(x_m - \delta, x_m + \delta)$ tale che

$$f(x_m) = m \leq f(x) \quad \forall x \in (x_m - \delta, x_m + \delta) \cap [a, b]$$

Se le precedenti disuguaglianze sono strette, si dice che *M* ed *m* sono rispettivamente **massimo locale stretto** e **minimo locale stretto** e che $x_M \in \big((x_M - \delta, x_M + \delta) \cap [a, b]\big) \setminus \{x_M\}$ e $x_m \in \big((x_m - \delta, x_m + \delta) \cap [a, b]\big) \setminus \{x_m\}$ sono rispettivamente **punto di massimo locale stretto** e **punto di minimo locale stretto**.

I punti di massimo e di minimo (locale, stretto o globale) si chiamano **punti di estremo**.

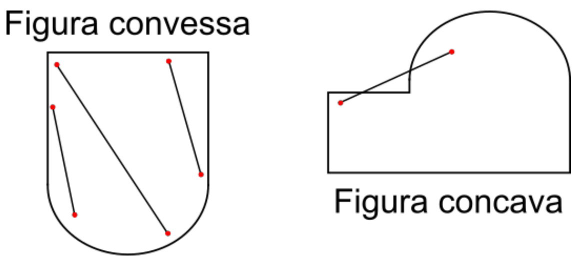
Il massimo ed il minimo di una funzione, se esistono, sono unici (questo viene dal teorema di unicità del massimo per i campi ordinati, in questo caso l'insieme è l'immagine del dominio tramite la *f*). I punti di massimo/minimo globali/locali, invece, possono essere più di uno.

Punto stazionario

Un **punto stazionario** di *f* è un punto in cui la **derivata prima** di *f* si annulla.

Figure concave e convesse

Una figura *F* si dice **convessa** se per ogni coppia di punti $P_1, P_2 \in F$ tutto il segmento $\overline{P_1P_2}$ è contenuto in *F*.
Se ciò non accade, cioè se esiste almeno una coppia di punti tale che il segmento che li unisce non è del tutto contenuto in *F*, la figura si dice **concava**.



Epigrafico di una funzione

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ con *I* intervallo. Si chiama **epigrafico** di *f* l'insieme:

$$epi(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I \text{ e } y \geq f(x)\}$$

In altre parole, con epigrafico s'intende l'insieme dei punti che sta **al di sopra** della funzione.

Si dice che *f* è **convessa** se il suo epigrafico è un insieme convesso. Si dice invece **concava** se $-f$ è convessa.

Funzioni concave e convesse

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ con *I* intervallo. Allora si dice che *f* è **convessa** in *I* se per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in I$ il segmento di estremi $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ **non ha punti sotto** al grafico di *f*.
Viceversa, *f* si dice **concava** se per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in I$ il segmento di estremi $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ **non ha punti sopra** al grafico di *f*.

Punto di flesso

Sia $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in (a, b)$ un punto di derivabilità o un punto per cui $f'(x_0) = \pm\infty$. Allora x_0 si dice **punto di flesso** per *f* se esiste un intorno destro di x_0 (del tipo $(x_0, x_0 + h)$ con $h > 0$) in cui *f* è convessa e un intorno sinistro di x_0 (del tipo $(x_0 - h, x_0)$ con $h > 0$) in cui *f* è concava, o viceversa.

Dal punto di vista geometrico, un punto di flesso attraversa la propria retta tangente.

In altre parole, un punto di flesso è un punto in cui la funzione cambia la propria concavità (cioè da concava diventa convessa o viceversa) e in quel punto la derivata prima non esiste oppure è infinita (in quest'ultimo caso si ha un **flesso a tangente verticale**).

Calcolo integrale

Partizione di un intervallo

Si chiama **suddivisione** o **partizione** di $[a, b]$ ogni insieme **finito** del tipo

$$A = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

con $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

Definizione di integrale tramite somme di Cauchy-Riemann

Diciamo che la funzione limitata $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ è **integrabile** se detta S_n una qualsiasi successione di somme di Cauchy-Riemann, al variare di $n \in \mathbb{N}$ **esiste finito**:

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

e tale limite **non dipende** dalla scelta dei punti ξ_j. In tal caso si pone:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$$

Somme superiori e somme inferiori

Per ogni suddivisione A di $[a, b]$, le quantità

$$s(f, A) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{[x_{i-1}, x_i]} \big(f(x)\big)$$

$$S(f, A) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{[x_{i-1}, x_i]} \big(f(x)\big)$$

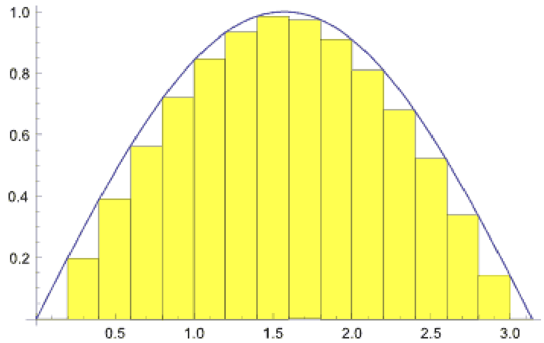
verranno chiamate rispettivamente **somma inferiore** e **somma superiore** di f rispetto alla suddivisione A.

Infine, le quantità

$$s(f) = \sup\{\, s(f, A) \colon A \text{ suddivisione di } [a, b]\}$$
$$S(f) = \inf\{\, S(f, A) \colon A \text{ suddivisione di } [a, b]\}$$

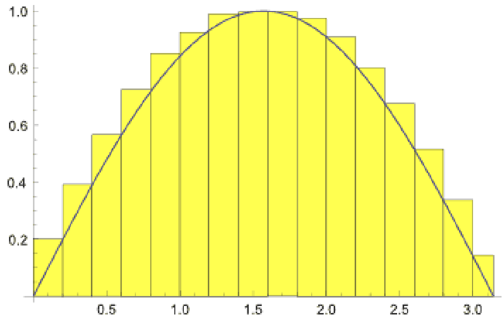
verranno chiamate **integrale inferiore** e **integrale superiore** (secondo Riemann) di f su $[a, b]$.

Dal punto di vista geometrico, se f è una funzione positiva integrabile su $[a, b]$, allora $s(f, A)$ rappresenta l'area del **plurirettangolo inscritto** nel sottografico di f:



Somma inferiore come area per difetto

mentre $S(f, A)$ rappresenta l'area del **plurirettangolo circoscritto** al sottografico di f:



Somma superiore come area per eccesso

Definizione di funzione integrabile (tramite somme superiori e inferiori)

Una funzione **limitata** f si dice **integrabile** (secondo Riemann) su $[a, b]$ se si ha:

$$s(f) = S(f)$$

ed in tal caso il comune valore di $s(f)$ ed $S(f)$ viene detto **integrale di f su $[a, b]$** e viene indicato come:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Funzione di Dirichlet

La **funzione di Dirichlet** è una funzione definita come:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Si può dimostrare che questa funzione è discontinua in ogni punto dell'intervallo $[0,1]$ e che non è integrabile secondo Riemann.

Esempio di applicazione lineare con l'integrale

Fissato l'intervallo [a, b], l'applicazione:

$$f \mapsto \mathcal{S}(f) = \int_a^b f(x)dx$$

che ad ogni funzione integrabile f associa il suo integrale, è un'**applicazione lineare non decrescente**, cioè verifica due ipotesi:

1. $\mathcal{S}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{S}(f) + \beta\mathcal{S}(g)$, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ed ogni f, g;
2. $\mathcal{S}(f) \leq \mathcal{S}(g)$ per ogni $f \leq g$

Media integrale

Data una funzione integrabile $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ si dice **media di f su $[a, b]$** la quantità

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Definizione di primitiva

Se f è una funzione definita su un intervallo $[a, b]$, si dice che $G: [a, b] \to \mathbb{R}$ è **una primitiva di f** se G è **derivabile** su $[a, b]$ e se si ha che

$$G'(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a, b]$$

Esempio di funzione che non ha primitiva

Esistono funzioni che non hanno primitive. Un esempio è la funzione definita su tutto $\mathbb{R}$ come:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Se per assurdo *F* fosse una primitiva di *f* su tutto $\mathbb{R}$ si avrebbe che

$$F'(x) = 0 \quad \forall x < 0 \qquad F'(x) = 0 \quad \forall x > 0$$

per cui esisterebbero due costanti c_1 e c_2 tali che

$$F(x) = c_1 \quad \forall x < 0 \qquad F(x) = c_2 \quad \forall x > 0$$

Ma poiché *f* deve essere derivabile (e quindi **continua**) su tutto $\mathbb{R}$, deve essere che $c_1 = c_2 = F(0)$, ma ciò contraddice il fatto che per definizione di primitiva dovrebbe essere $F'(0) = f(0) = 1$.

Definizione di integrale indefinito

Si dice **integrale indefinito di *f*** e si indica con il simbolo

$$\int f(x)dx$$

l'**insieme di tutte le primitive** di una funzione *f* rispetto alla variabile *x*, cioè tutte le funzioni $F(x)$ tali che:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

L'espressione $\frac{d}{dx}$ è equivalente a dire "derivata di…" (in questo caso "derivata di $F(x)$").

Definizione di integrale definito

La quantità

$$\int_a^b f(x)dx$$

è detta **integrale definito di *f* da *a* a *b***.

Integrali generalizzati

Integrali di funzioni non limitate

Integrale generalizzato per funzioni definite in un intervallo $(a, b]$ o $[a, b)$

Si consideri una funzione $f: [a, b) \to \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$.
Se **esiste finito** il limite

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$$

diremo che f è **integrabile in senso generalizzato** (o improprio) su $[a, b)$ e tale limite verrà indicato con la scrittura

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$$

Questo integrale

- è **convergente** se il limite **esiste ed è finito**
- è **divergente** (positivamente/negativamente) se il limite **esiste** e vale $\pm\infty$
- **non esiste** (o non ha senso) se il limite **non esiste**

Le stesse considerazioni si possono fare per funzioni $f: (a, b] \to \mathbb{R}$ **continue** (quindi integrabili su intervalli del tipo $[\alpha, b]$, con $\alpha > a$) tali per cui si ha che $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$, ponendo

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)dx$$

Integrale generalizzato per funzioni definite su un intervallo illimitato (a, b)

Se f è definita su (a, b) ed è integrabile su $[\alpha, \beta]$ per ogni $a < \alpha < \beta < b$, scelto un punto $c \in (a, b)$ diremo che f è **integrabile in senso generalizzato** su (a, b) se essa è integrabile su $(a, c]$ e su $[c, b)$ ed in tal caso porremo

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

L'integrale di partenza:

- è **convergente**, se entrambi gli integrali sono convergenti;
- è **divergente** (positivamente o negativamente) se uno dei due integrali è divergente a $\pm\infty$ e l'altro <u>diverge allo stesso modo</u> oppure converge;
- **non esiste** se uno dei due integrali non esiste oppure se si viene a creare una forma di indecisione del tipo $\infty - \infty$

Integrale generalizzato di $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ nell'intervallo $(0,1]$

Si consideri la funzione $f: (0,1] \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

Essendo sempre positiva, l'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$$

ha sempre senso. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ si verificano i seguenti casi:

- se $\alpha \leq 0$, allora f è integrabile secondo Riemann perché si tratta della **funzione potenza** $f(x) = x^\alpha$;
- se $\alpha > 0$ si hanno i seguenti casi:

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} -log\epsilon & \text{se } \alpha = 1 \\ \dfrac{1 - \epsilon^{1-\alpha}}{1 - \alpha} & \text{se } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

  per cui passando al limite per $\epsilon \to 0^+$ si ottiene che

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx < +\infty \Leftrightarrow \alpha < 1$$

  e che se $\alpha < 1$ l'integrale (generalizzato se $\alpha > 0$) vale $\frac{1}{1-\alpha}$.

In altre parole, l'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \text{converge a } \dfrac{1}{1 - \alpha} \text{ per } \alpha < 1 \\ \text{diverge per } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Integrazione su intervalli illimitati

Definizione di integrale su un intervallo illimitato $[a,+\infty)$ o $(-\infty,b]$

Sia $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ continua. Poniamo

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\omega\to+\infty}\int_a^{\omega} f(x)dx$$

Se il limite **esiste finito**, allora f si dice **integrabile** in $[a,+\infty)$ oppure si dice che l'integrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ è **convergente**.
Se il limite **esiste** e vale $\pm\infty$ diremo che l'integrale improprio è **divergente** (positivamente o negativamente).
In tutti gli altri casi diremo che l'**integrale generalizzato non esiste**.

Analogamente se $f:(-\infty,b]\to\mathbb{R}$ è continua si pone

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{\omega\to-\infty}\int_{\omega}^{b} f(x)dx$$

ed infine se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ si pone

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

Integrale di $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ nell'intervallo $[1,\infty)$

La funzione $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ definita in $[1,+\infty)$ ha integrale **divergente positivamente** se $\alpha\le 0$, mentre se $\alpha>0$ si ha, per ogni $y>1$:

$$\int_1^y \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases}\log y & \text{se } \alpha=1\\ \dfrac{y^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha\neq 1\end{cases}$$

per cui, passando al limite per $y\to+\infty$, si ottiene che

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx < +\infty \Leftrightarrow \alpha>1$$

e che se $\alpha>1$ l'integrale generalizzato vale

$$\frac{1}{\alpha-1}$$