UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNOLOGIE

Esercizi di equazioni differenziali

Autore

Riccardo Loddo

Anno accademico 2022/23

Indice

0.1 Esercizio 1: Equazione del calore

1) Risolvere l'equazione del calore con sorgente,

$$\partial_t T(\vec{x},t) = \kappa \Delta T(\vec{x},t) + S(\vec{x},t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

nel quadrato $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, con le condizioni iniziali $T(\vec{x},t) = T_0(\vec{x})$ e con le condizioni al contorno $T(\vec{x},t) = 0$ sul bordo $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$. Si usino le (83) e (84) ricavate a lezione per il nucleo di calore e per la temperatura $T(\vec{x},t)$.
Dimostrare che il nucleo di calore è scrivibile nella forma

$$G(\tau,\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{8}\left[\theta\left(\frac{x+x'}{2};i\pi\kappa\tau\right) - \theta\left(\frac{x-x'}{2};i\pi\kappa\tau\right)\right]\left[\theta\left(\frac{y+y'}{2};i\pi\kappa\tau\right) - \theta\left(\frac{y-y'}{2};i\pi\kappa\tau\right)\right], \tag{2}$$

dove

$$\theta(z;\sigma) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2\sigma + 2\pi i n z}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad Im\sigma > 0, \tag{3}$$

rappresenta la funzione theta di Jacobi.
2) Stessa cosa, ma senza sorgente ($S(\vec{x},t) = 0$) e con pareti del quadrato isolati, cioè le condizioni al contorno diventano di Neumann,

$$\partial_x T(\vec{x},t) = 0 \;\; \text{per } x = 0, x = 1, \quad \partial_y T(\vec{x},t) = 0 \;\; \text{per } y = 0, y = 1. \tag{4}$$

(Nessun flusso termico attraverso le pareti). Usare le (22) e (23) date a lezione, dove $\phi(\vec{x})$ rappresenta ora una soluzione del problema di Neumann.
Soluzione:
Anzitutto riporto la forma (83) ed (84) viste a lezione:

$$G(\tau,\vec{x},\vec{x}') = \sum_n e^{-\kappa\lambda_n\tau}\varphi_n(\vec{x})\varphi_n(\vec{x}') \tag{5}$$

$$T(\vec{x},t) = \int_0^t dt' \int_U d^d\vec{x}' G(\tau,\vec{x},\vec{x}')S(\vec{x}',t) \tag{6}$$

che valgono in d dimensioni.
Come prima cosa conviene ricavare le autofunzioni del laplaciano, in una dimensione e dare una forma al nucleo $G(\tau,\vec{x},\vec{x}')$. I vettori $\vec{x},\vec{x}'$ hanno componenti:

$$\vec{x} = (x;y), \vec{x}' = (x';y').$$

L'equazione di Helmholtz in una dimensione è:

$$\partial_x^2\varphi(x) = -\lambda\varphi(x), \tag{7}$$

dove λ rappresenta l'autovalore mentre $\varphi(x)$ l'autofunzione del laplaciano. Impostando il polinomio caratteristico si ricava che il discriminante $\Delta = -4\lambda < 0$ da cui la soluzione è:

$$\varphi(x) = c_1\cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2\sin(\sqrt{\lambda}x). \tag{8}$$

Siccome la $T(\vec{x},t)$ ha delle determinate condizioni al contorno, esse ricadono sulla $G(\tau,\vec{x},\vec{x}')$ a causa della ((6)) e quindi sulle autofunzioni. In particolare il problema di Dirichlet per l'equazione di Helmholtz, nel nostro caso è:

$$\begin{cases} \partial_x^2\varphi(x) = -\lambda\varphi(x), \\ \varphi(x)\Big|_{x=0} = \varphi(x)\Big|_{x=1} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Da cui si ricava che:

$$\lambda = n^2\pi^2 \quad \varphi(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x), \tag{10}$$

con n un intero positivo ed $\sqrt{2}$ il fattore di normalizzazione. Questa è l'autofunzione del laplaciano in una dimensione.
Essendo il problema in due dimensioni, dovremmo distinguere l'intero n in n_1 ed n_2, ottenendo che l'autofunzione del laplaciano in due dimensioni è:

$$\varphi_n(\vec{x}) = 2\sin(n_1\pi x)\sin(n_2\pi y). \tag{11}$$

Quindi il nucleo $G(\tau,\vec{x},\vec{x}')$ risulta:

$$G(\tau,\vec{x},\vec{x}') = 4\sum_{n_1=1}^{\infty} e^{-\kappa\tau\pi^2 n_1^2}\sin(n_1\pi x)\sin(n_1\pi x')\sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\kappa\tau\pi^2 n_2^2}\sin(n_2\pi y)\sin(n_2\pi y'). \tag{12}$$

La soluzione particolare dell'equazione del calore è quindi:

$$T(\vec{x},t) = \int_0^t dt'\int_0^1\int_0^1 d^2\vec{x}' 4\sum_{n_1=1}^{\infty} e^{-\kappa\tau\pi^2 n_1^2}\sin(n_1\pi x)\sin(n_1\pi x')\sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\kappa\tau\pi^2 n_2^2}\sin(n_2\pi y)\sin(n_2\pi y')S(\vec{x}',t) \tag{13}$$

La soluzione generale è la somma di quella particoalre più quella omogenea associata:

$$T(\vec{x},t) = \int_0^t dt'\int_0^1\int_0^1 d^2\vec{x}' G(\tau,\vec{x},\vec{x}')S(\vec{x}',t) + \int_0^1\int_0^1 d^2\vec{x}' G(t,\vec{x},\vec{x}')T_0(\vec{x}'). \tag{14}$$

Dimostro ora che $G(\tau,\vec{x},\vec{x}')$ è possibile scriverla nella forma (2). Per farlo bisogna esplicitare i seni in esponenziali complessi, ottenendo:

$$\begin{aligned} G(\tau,\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{4}\sum_{n_1=1}^{\infty} e^{-\kappa\tau\pi^2 n_1^2}\left(e^{in_1\pi x} - e^{-in_1\pi x}\right)\left(e^{in_1\pi x'} - e^{-in_1\pi x'}\right)\cdot \\ \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\kappa\tau\pi^2 n_2^2}\left(e^{in_2\pi y} - e^{-in_2\pi y}\right)\left(e^{in_2\pi y'} - e^{-in_2\pi y'}\right). \end{aligned} \tag{15}$$

Moltiplicando i vari termini si ottiene:

$$\begin{aligned} G(\tau,\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{4}\sum_{n_1=1}^{\infty} e^{-\kappa\tau\pi^2 n_1^2}\left(e^{in_1\pi(x+x')} - e^{in_1\pi(x-x')} - e^{-in_1\pi(x-x')} + e^{-in_1\pi(x+x')}\right)\cdot \\ \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\kappa\tau\pi^2 n_2^2}\left(e^{in_2\pi(y+y')} - e^{in_2\pi(y-y')} - e^{-in_2\pi(y-y')} + e^{-in_2\pi(y+y')}\right) \end{aligned} \tag{16}$$

Osservo che il termine $e^{in_1\pi(x+x')}$ è uguale al termine $e^{-in_1\pi(x+x')}$ tranne per un segno di differenza. Tuttavia è possibile "inglobare" i due termini in un unico termine, con la condizione che n_1 parta da $-\infty$. Ciò è analogo anche per $e^{in_1\pi(x-x')}$ con $e^{-in_1\pi(x-x')}$.
Alla fine si ottiene:

$$\begin{aligned} G(\tau,\vec{x},\vec{x}') &= \frac{1}{4}\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} e^{-\kappa\tau\pi^2 n_1^2}\left(e^{in_1\pi(x+x')} - e^{in_1\pi(x-x')}\right)\cdot \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} e^{-\kappa\tau\pi^2 n_2^2}\left(e^{in_2\pi(y+y')} - e^{in_2\pi(y-y')}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} e^{-\kappa\tau\pi^2 n_1^2 + in_1\pi(x+x')} - \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} e^{-\kappa\tau\pi^2 n_1^2 + in_1\pi(x-x')}\right)\cdot \\ &\left(\sum_{n_2=-\infty}^{\infty} e^{-\kappa\tau\pi^2 n_2^2 + in_2\pi(y+y')} - \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} e^{-\kappa\tau\pi^2 n_2^2 + in_1\pi(y-y')}\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Vediamo ora la seconda parte dell'esercizio. Abbiamo le condizioni sulla derivata prima di $T(\vec{x},t)$ e quindi anche sulle autofunzioni del laplaciano. Dunque, il problema di Dirichlet per l'equazione di Helmholtz, in questo caso è:

$$\begin{cases} \partial_x^2\varphi(x) = -\lambda\varphi(x), \\ \partial_x\varphi(x)\Big|_{x=0} = \partial_x\varphi(x)\Big|_{x=1} = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Da cui si ricava che:

$$\lambda = n^2\pi^2 \quad \varphi(x) = \sqrt{2}\cos(n\pi x), \tag{19}$$

con n un intero positivo ed $\sqrt{2}$ il fattore di normalizzazione. Analogamente a quanto prima, si ottiene che il nucleo $G(\tau,\vec{x},\vec{x}')$ risulta:

$$G(\tau,\vec{x},\vec{x}') = 4\sum_{n_1=1}^{\infty} e^{-\kappa\tau\pi^2 n_1^2}\cos(n_1\pi x)\cos(n_1\pi x')\sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\kappa\tau\pi^2 n_2^2}\cos(n_2\pi y)\cos(n_2\pi y'). \tag{20}$$

0.2 Esercizio 2: Problemi ai valori iniziali e ai valori al contorno

1) Risolvere il seguente problema ai valori iniziali:

$$u'' + u' - 2u = e^x \quad \text{per} \quad x > 0, \quad u(0) = 1, u'(0) = 0, \tag{21}$$

costruendo la funzione di Green one-sided $R(x,\xi)$ e integrando successivamente.
2) Risolvere il problema ai valori al contorno

$$u'' - u = e^x \quad \text{per} \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 1, u'(1) = 0, \tag{22}$$

costruendo la funzione di Green $G(x,\xi)$.
Soluzione:
Anzitutto porto la (21) in forma autoaggiunta, sapendo che:

$$p(x) \equiv \exp\left(\int_0^x d\xi\right) = e^x \implies \boxed{(e^x u')' - 2e^x u = e^{2x}} \tag{23}$$

Ora risolvo la parte omogenea della (21), ovvero:

$$\frac{\partial^2 R(x,\xi)}{\partial x^2} + \frac{\partial R(x,\xi)}{\partial x} - 2R(x,\xi) = 0 \tag{24}$$

dove $R(x,\xi)$ è la funzione di Green one-size. Il polinoami caratteristico associato è:

$$\omega^2 + \omega - 2 = 0 \implies \omega_1 = -2, \quad \omega_2 = 1. \tag{25}$$

Si ottiene quindi che:

$$R(x,\xi) = c_1(\xi)e^{-2x} + c_2(\xi)e^{x} \tag{26}$$

Sapendo che la funzione di Green one-side soddisfa le seguenti condizioni:

$$R(\xi,\xi) = 0, \quad \frac{\partial R(x,\xi)}{\partial x}\bigg|_{x=\xi} = \frac{1}{p(\xi)} = e^{-\xi} \tag{27}$$

si ottiene un sistema di due equazioni per i due coefficienti $c_1(\xi)$ ed $c_2(\xi)$:

$$\begin{cases} c_1(\xi) = -c_2(\xi)e^{3\xi} \\ -2c_1(\xi) + c_2(\xi)e^{3\xi} = e^{\xi}. \end{cases} \tag{28}$$

Da cui si ottiene che:

$$\begin{cases} c_1(\xi) = -\frac{e^{\xi}}{3} \\ c_2(\xi) = \frac{e^{-2\xi}}{3} \end{cases} \tag{29}$$

Quindi la funzione di Green one-side è:

$$R(x,\xi) = -\frac{e^{\xi}}{3}e^{-2x} + \frac{e^{-2\xi}}{3}e^{x}. \tag{30}$$

La soluzione particolare è data dalla convoluzione del termine non omogeneo (e^{2x}) valutato in $x = \xi$, con la funzione di Green one-side:

$$\begin{gathered} u_p(x) = \int_0^x e^{2\xi}\left(-\frac{e^{\xi}}{3}e^{-2x} + \frac{e^{-2\xi}}{3}e^{x}\right)d\xi \\ = -\frac{e^{-2x}}{3}\int_0^x e^{3\xi}d\xi + \frac{e^{x}}{3}\int_0^x d\xi = -\frac{e^{-2x}}{3}\left(\frac{e^{3\xi}}{3}\right)\bigg|_0^x + \frac{e^{x}}{3}x \\ \boxed{u_p(x) = -\frac{e^{x}}{9} + \frac{e^{-2x}}{9} + \frac{e^{x}}{3}x} \end{gathered} \tag{31}$$

Si può osservare come tale funzione rispetti le condizioni al contorno $u(0) = 0$ ed $u'(0) = 0$. Tuttavia le condizioni di partenza non sono queste, ed è per questo motivo che aggiungo la soluzione dell'equazione omogenea in modo tale da far rispettare le condizioni al contorno richieste. La soluzione generale sarà quindi:

$$u(x) = u_p(x) + u_o(x) = -\frac{e^{x}}{9} + \frac{e^{-2x}}{9} + \frac{e^{x}}{3}x + s_1e^{-2x} + s_2e^{x}. \tag{32}$$

Impongo le condizioni al contorno richieste, ovvero $u(0) = 1$ ed $u'(0) = 0$ ottenendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} s_1 + s_2 = 1 \\ -2s_1 + s_2 = 0 \end{cases} \tag{33}$$

da cui si ricava che:

$$\begin{cases} s_1 = \frac{1}{3} \\ s_2 = \frac{2}{3} \end{cases} \tag{34}$$

Quindi la soluzione finale è:

$$\begin{gathered} u(x) = u_p(x) + u_o(x) = -\frac{e^x}{9} + \frac{e^{-2x}}{9} + \frac{e^x}{3}x + \frac{1}{3}e^{-2x} + \frac{2}{3}e^x \\ \boxed{u(x) = \frac{4}{9}e^{-2x} + \frac{5}{9}e^x + \frac{e^x}{3}x} \end{gathered} \tag{35}$$

Per verifica, non solo si pùò osservare che le condizioni al contorno sono rispettate, ma che se si mette tale soluzione nell'equazione differenziale di partenza è verificata. Lo faccio:

$$\begin{cases} u(0) = \frac{4}{9} + \frac{5}{9} = 1 \\ u'(x) = -\frac{8}{9}e^{-2x} + \frac{5}{9}e^x + \frac{e^x}{3} + \frac{e^x}{3}x \\ u''(x) = \frac{16}{9}e^{-2x} + \frac{5}{9}e^x + \frac{2}{3}e^x + \frac{e^x}{3}x \end{cases} \tag{36}$$

$$\begin{gathered} \frac{16}{9}e^{-2x} + \frac{5}{9}e^x + \frac{2}{3}e^x + \frac{e^x}{3}x + -\frac{8}{9}e^{-2x} + \frac{5}{9}e^x + \frac{e^x}{3} + \frac{e^x}{3}x - 2\left(\frac{4}{9}e^{-2x} + \frac{5}{9}e^x + \frac{e^x}{3}x\right) = e^x \\ e^x = e^x \end{gathered} \tag{37}$$

L'equazione di partenza è verificata.

Per quanto riguarda il punto due, bisogna notare che le condizioni al contorno sono quelle di Robin, ovvero una combinazione lineare dei valori della funzione $u(x)$ e dei valori della sua derivata sul contorno del dominio. In particolare si ha che:

$$\begin{cases} \mu_1 u(0) + \sigma_1 u'(0) = a \\ \mu_2 u(1) + \sigma_2 u'(1) = b \end{cases} \implies \begin{cases} \mu_1 = 0, \ \sigma_1 = 1, \ a = 1 \\ \mu_2 = 1, \ \sigma_2 = 0, \ b = 0. \end{cases} \tag{38}$$

Scrivendo il polinomio caratteristico della (22), si ottiene che $\lambda = \pm 1$. Posso dunque costruire il nucleo $G(x, \xi)$ come:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} c_1(\xi)e^{-x} + c_2(\xi)e^x & \text{per } x < \xi \\ \tilde{c}_1(\xi)e^{-x} + \tilde{c}_2(\xi)e^x & \text{per } x > \xi \end{cases} \tag{39}$$

Si hanno quattro coefficienti, quindi servono 4 equazioni per poter risolvere il sistema. In particolare, considerando il sistema (38) la funzione $G(x, \xi)$ rispetta tali condizioni:

$$\begin{cases} G(x,\xi)\Big|_{x=0} = 0 \\ \frac{dG(x,\xi)}{dx}\Big|_{x=0} = 1 \\ G(x,\xi)\Big|_{x=\xi+\epsilon} = G(x,\xi)\Big|_{x=\xi-\epsilon} \\ \frac{dG(x,\xi)}{dx}\Big|_{x=\xi+\epsilon} - \frac{dG(x,\xi)}{dx}\Big|_{x=\xi-\epsilon} = -\frac{1}{p(\xi)} \end{cases} \implies \begin{cases} c_1(\xi) + c_2(\xi) = 0 \\ -\tilde{c}_1 e^{-1} + \tilde{c}_2 e = 0 \\ \tilde{c}_1(\xi)e^{-\xi} + \tilde{c}_2(\xi)e^{\xi} = c_1(\xi)e^{-\xi} + c_2(\xi)e^{\xi} \\ -\tilde{c}_1 e^{-\xi} + \tilde{c}_2 e^{\xi} + c_1 e^{-\xi} - c_2 e^{\xi} = -1 \end{cases} \tag{40}$$

con $\epsilon \to 0$ ed $p(\xi) = e^0 = 1$. Seguono ora diversi passaggi per ricavare i quattro coefficienti. Per alleggerire la notazione d'ora in poi scriverò che $c_i(\xi) = c_i$ ed $\tilde{c}_i(\xi) = \tilde{c}_i$ con $i = \{1, 2\}$.

$$\begin{cases} c_1 = -c_2 \\ \tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 e^2 \\ \tilde{c}_2 e^{-\xi+2} + \tilde{c}_2 e^{\xi} = -c_2 e^{-\xi} + c_2 e^{\xi} \\ -\tilde{c}_2 e^{-\xi+2} + \tilde{c}_2 e^{\xi} - c_2 e^{-\xi} - c_2 e^{\xi} = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 \\ \tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 e^2 \\ \tilde{c}_2 (e^{-\xi+2} + e^{\xi}) = c_2 (e^{\xi} - e^{-\xi}) \\ -\tilde{c}_2 e^{-\xi+2} + \tilde{c}_2 e^{\xi} - c_2 e^{-\xi} - c_2 e^{\xi} = -1 \end{cases} \tag{41}$$

$$\begin{cases} c_1 = -c_2 \\ \tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 e^2 \\ \tilde{c}_2 = c_2 \frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{e^{-\xi+2} + e^{\xi}} = 2c_2 \frac{\sinh \xi}{e^{-\xi+2} + e^{\xi}} \\ -\tilde{c}_2 e^{-\xi+2} + \tilde{c}_2 e^{\xi} - c_2 e^{-\xi} - c_2 e^{\xi} = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 \\ \tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 e^2 \\ \tilde{c}_2 = c_2 \frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{e^{-\xi+2} + e^{\xi}} = 2c_2 \frac{\sinh \xi}{e^{-\xi+2} + e^{\xi}} \\ -c_2 \frac{e^2 - e^{-2\xi+2}}{e^{-\xi+2} + e^{\xi}} + c_2 \frac{e^{2\xi} - 1}{e^{-\xi+2} + e^{\xi}} - c_2 e^{-\xi} - c_2 e^{\xi} = -1 \end{cases} \tag{42}$$

$$\begin{cases} c_1 = -c_2 \\ \tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 e^2 \\ \tilde{c}_2 = c_2 \frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{e^{-\xi+2} + e^{\xi}} = 2c_2 \frac{\sinh \xi}{e^{-\xi+2} + e^{\xi}} \\ c_2 \left[\frac{-e^2 + e^{-2\xi+2} + e^{2\xi} - 1 - e^{-2\xi+2} - 1 - e^2 - e^{2\xi}}{e^{-\xi+2} + e^{\xi}} \right] = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 \\ \tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 e^2 \\ \tilde{c}_2 = c_2 \frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{e^{-\xi+2} + e^{\xi}} = 2c_2 \frac{\sinh \xi}{e^{-\xi+2} + e^{\xi}} \\ c_2 \left[\frac{-2e^2 - 2}{e^{-\xi+2} + e^{\xi}} \right] = -1 \end{cases} \tag{43}$$

$$\begin{cases} c_1 = -\frac{e^{2-\xi} + e^{\xi}}{2e^2 + 2} \\ \tilde{c}_1 = \frac{e^{\xi+2} - e^{-\xi+2}}{2e^2 + 2} \\ \tilde{c}_2 = \frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{2e^2 + 2} \\ c_2 = \frac{e^{2-\xi} + e^{\xi}}{2e^2 + 2} \end{cases} \tag{44}$$

Alla fine la funzione di Green two-side è:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{e^{2-\xi} + e^{\xi}}{2e^2 + 2} e^{-x} + \frac{e^{2-\xi} + e^{\xi}}{2e^2 + 2} e^{x} & \text{per } x < \xi \\ \frac{e^{\xi+2} - e^{-\xi+2}}{2e^2 + 2} e^{-x} + \frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{2e^2 + 2} e^{x} & \text{per } x > \xi \end{cases} \tag{45}$$

0.3 Esercizio 3: Classificazione di equazioni differenziali quasilineari

1) Determinare le regioni nel piano $x - y$ in cui l'equazione differenziale

$$2xu_{xx} + 2xyu_{xy} + yu_{yy} + x^4 u_x + 2u = cos(x) \tag{46}$$

è iperbolica, parabolica o ellittica. Illustrare il risultato con un disegno.
2) Si consideri l'equazione differenziale

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + y^3 \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + e^{x+2z} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} + \sinh(xy^2) \frac{\partial u}{\partial z} = \ln z. \tag{47}$$

- Determinare la parte principale.

- Determinare una varietà caratteristica $S(x, y, z) = 0$. Suggerimento: La (129) data a lezione si riduce in questo caso a

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^3 + y^3\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^3 + \frac{1}{z}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right) = 0. \tag{48}$$

Risolvere la (48) con l'ansatz di separazione

$$S = S_1(x) + S_2(y) + S_3(z). \tag{49}$$

Soluzione:
Per determinare se l'equazione è iperbolica, parabolica od ellittica bisogna calcolare il discriminante e vedere quando è minore, maggiore o uguale a zero. Si hanno i seguenti casi:

- **Iperbolica:**

$$\delta = x^2y^2 - 2xy > 0 \tag{50}$$

- **Parabolica:**

$$\delta = x^2y^2 - 2xy = 0 \tag{51}$$

- **Ellittica:**

$$\delta = x^2y^2 - 2xy < 0 \tag{52}$$

Da cui si ottiene che le diverse regioni sono:

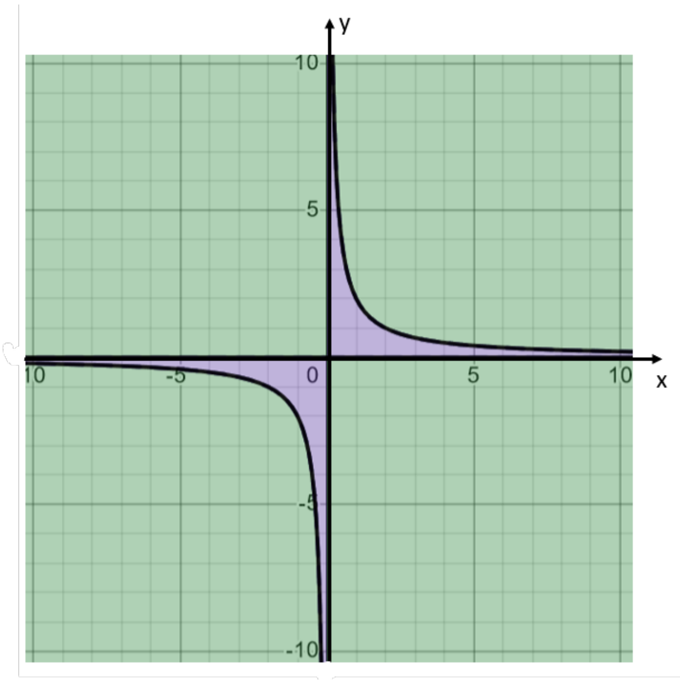

Figura 1: Grafico delle diverse regioni della (46). In verde si ha la regione di iperbolicità, in viola la regione di ellitticità. Le linee nere tra le due regioni rappresentano le curve di parabolicità.

Veniamo al secondo punto. La parte principale è:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + y^3 \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{1}{z}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} \tag{53}$$

Come da suggerimento, sostituisco $S(x,y,z) = S_1(x) + S_2(y) + S_3(z)$. La (48) diventa:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dS_1}{dx}\right)^3 + y^3 \left(\frac{dS_2}{dy}\right)^3 + \frac{1}{z}\left(\frac{dS_1}{dx}\right)^2 \left(\frac{dS_3}{dz}\right) = 0 \\ y^3 \left(\frac{dS_2}{dy}\right)^3 + \left(\frac{dS_1}{dx}\right)^2 \left[\left(\frac{dS_1}{dx}\right) + \frac{1}{z}\left(\frac{dS_3}{dz}\right)\right] = 0 \end{aligned} \tag{54}$$

Siccome $S_1(x)$ è indipendente da $S_2(y)$ che è indipendente da $S_3(z)$ allora le single componenti della (54) devono essere delle costanti tali che la loro somma dia zero. In particolare si ha che:

$$y^3 \left(\frac{dS_2}{dy}\right)^3 = c_1 \implies dS_2 = \frac{\sqrt[3]{c_1}}{y} dy \implies \boxed{S_2 = s_2 + \sqrt[3]{c_1}\ln(y)} \tag{55}$$

$$\frac{1}{z}\left(\frac{dS_3}{dz}\right) = b_1 \implies dS_3 = b_1 z dz \implies \boxed{S_3 = b_1 \frac{z^2}{2}} \tag{56}$$

$$\left(\frac{dS_1}{dx}\right)^3 + b_1 \left(\frac{dS_1}{dx}\right)^2 = -c_1 \tag{57}$$

Quest'ultima equazione è parecchio più complicata delle altre due. Tuttavia il testo richiede semplicemente una (delle infinite) soluzioni. Quindi è lecito porre $b_1 = 0$ ottenendo che:

$$\left(\frac{dS_1}{dx}\right)^3 = -c_1 \implies \boxed{S_1 = -\sqrt[3]{c_1}x + s_1}. \tag{58}$$

In generale si ottiene:

$$\boxed{S = -\sqrt[3]{c_1}x + \sqrt[3]{c_1}\ln(y) + s} \tag{59}$$

con $s = s_1 + s_2$ una generica costante. Si può osservare facilmente come questa soluzione rispetti la (48).

0.4 Esercizio 4: Metodo delle caratteristiche

Risolvere il problema quasilineare

$$uu_x + u_y = 2, \quad u(x,x) = x, \tag{60}$$

col metodo delle caratteristiche (Lagrange-Charpit). Come cambia la soluzione se prendiamo $u(x,x) = x/2$ anzichè $u(x,x) = x$ per la curva iniziale?

Soluzione:

Anzitutto la prima cosa che verifico è che la curva iniziale (Γ) soddisfi la condizione di trasversalità:

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_0(s)}{ds} & a \\ \frac{dy_0(s)}{ds} & b \end{vmatrix} \neq 0. \tag{61}$$

dove i coefficienti a e b dell'equazione (60) sono calcolati su Γ. In questo caso Γ è data in una forma implicita, in particolare sotto forma della generica condizione iniziale:

$$u(x, f(x)) = g(x),$$

con f e g funzioni note e x in un intervallo prefissato. In tal caso, per evitare di confondersi con le notazioni, conviene riportarsi alla forma parametrica scegliendo quindi:

$$\Gamma : \begin{cases} x_0 = x_\Gamma(s) = s \\ y_0 = y_\Gamma(s) = s \\ u_0 = u_\Gamma(s) = s \end{cases} \tag{62}$$

dove s è il parametro di linea della curva iniziale. Si ottiene quindi che la condizione di trasversalità è:

$$\begin{vmatrix} 1 & s \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - s \neq 0. \tag{63}$$

Ovvero $s \neq 1$. Il punto $s = 1$ è detto punto singolare dell'equazione (60).

Il passo successivo è quello di scrivere il sistema caratteristico (in forma parametrica), ottenendo 3 equazioni differenziali ordinarie del I ordine accoppiate:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u \\ \frac{dy}{dt} = 1 \\ \frac{du}{dt} = 2 \end{cases} \tag{64}$$

Tale sistema lo risolvo $\forall s$ trovando la famiglia di curve caratteristiche dipendenti dal paramento di linea t e da 3 costanti arbitrarie c_1, c_2, c_3:

$$\gamma : \begin{cases} x = t^2 + c_1 t + c_3 \\ y = c_2 + t \\ u = 2t + c_1 \end{cases} \tag{65}$$

Un commento interessante è il seguente: così come le prime due equazioni del sistema (62) rappresentano la proiezione sul piano (x, y) della curva Γ, anche le prime due equazioni del sistema (65) rappresentano la proiezione sul piano (x, y) della curva caratteristica γ. Ciò è interessante perché in generale, nulla vieta che tali proiezioni possano intersecarsi, purché nel punto di intersezione i corrispondenti valori di u siano diversi.

Imponendo le condizioni iniziali per x, y, u a $t = 0$ si ottengono le tre costanti c_1, c_2, c_3:

$$\begin{cases} c_1 = s \\ c_2 = s \\ c_3 = s \end{cases} \implies \begin{cases} x = t^2 + st + s \\ y = s + t \\ u = 2t + s \end{cases} \tag{66}$$

ciò significa che per ogni punto della curva iniziale (cioè per ogni valore di s) abbiamo individuato la curva caratteristica che vi passa, fissando le corrispondenti costanti arbitrarie $c_1(s), c_2(s), c_3(s)$. La soluzione $u(x,y)$ in forma esplicita si ottiene ricavando i parametri t e s in funzione di x e y dalle prime due equazioni della (66) e sostituendoli nella terza. In particolare si ottiene che:

$$\begin{cases} s(t+1) = x - t^2 \\ t = y - s \end{cases} \implies \begin{cases} s = \frac{x-t^2}{t+1} \\ t = y - s \end{cases} \implies \begin{cases} s = \frac{x-(y-2)^2}{y-s+1} \\ t = y - s \end{cases} \implies \begin{cases} s = \frac{x-y^2-s^2+2sy}{y-s+1} \\ t = y - s \end{cases}$$

$$\begin{cases} sy - s^2 + s = x - y^2 - s^2 + 2sy \\ t = y - s \end{cases} \implies \begin{cases} -sy + s = x - y^2 \\ t = y - s \end{cases} \implies \begin{cases} s = \frac{x-y^2}{1-y} \\ t = \frac{y-x}{1-y} \end{cases}$$

Da cui la soluzione $u(x,y)$ è:

$$\boxed{u(x,y) = 2t + s = \frac{2y - x - y^2}{1-y}} \tag{67}$$

Ovviamente anche in questo caso possiamo fare la verifica che tale soluzione non solo rispetti la (60), ma che rispetta anche le condizioni iniziali $u(x,x) = x$.

Veniamo alla richiesta che la condizione iniziale sia $u(x,x) = x/2$. In questo caso il sistema (62) cambia come:

$$\Gamma : \begin{cases} x_0 = x_\Gamma(s) = s \\ y_0 = y_\Gamma(s) = s \\ u_0 = u_\Gamma(s) = \frac{s}{2} \end{cases} \tag{68}$$

Tuttavia la famiglia di curve caratteristiche rimane la stessa del sistema (65) con ovviamente la modifica di c_1 che passa da $c_1 = s \longrightarrow c_1 = \frac{s}{2}$. Il sistema (66) diventa quindi:

$$\begin{cases} x = t^2 + \frac{s}{2}t + s \\ y = s + t \\ u = 2t + \frac{s}{2} \end{cases}$$

Come fatto prima, risolviamo tale sistema esplicitando s e t in funzione di x e y:

$$\begin{cases} x - t^2 = s(\frac{t}{2} + 1) \\ t = y - s \end{cases} \implies \begin{cases} s = \frac{x-t^2}{\frac{t}{2}+1} \\ t = y - s \end{cases} \implies \begin{cases} s = \frac{x-y^2-s^2+2ys}{\frac{y}{2}-\frac{s}{2}+1} \\ t = y - s \end{cases}$$

Da cui si ottiene la seguente equazione di secondo grado per s:

$$s^2 - 2s\left(1 - \frac{3}{2}y\right) + 2y^2 - 2x = 0 \tag{69}$$

Il discriminante Δ è:

$$\Delta = 4\left(1 - \frac{3}{2}y\right)^2 - 8(y^2 - x)$$

$$\Delta = 4\left(1 + \frac{9}{4}y^2 - 3y\right) - 8(y^2 - x)$$

$$\Delta = 4 + y^2 - 12y + 8x$$

Da cui le due soluzioni sono:

$$\begin{aligned} s_{\pm} &= -1 + \frac{3}{2}y \pm \sqrt{y^2 - 3y + 2x} \\ t &= \frac{5}{2}y + 1 \mp \sqrt{y^2 - 3y + 2x} \end{aligned} \tag{70}$$

La soluzione finale cambia nel fatto che ora si hanno diverse soluzioni a seconda che si scelga il segno (+) o il segno (-). Cambiare anche di poco la condizione iniziale implica cambiamenti totale durante la risoluzione del problema.

0.5 Esercizio 5: L'equazione di Burgers

Le equazioni di Navier-Stokes per fluidi incompressibili sono date da

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{u}(\vec{x},t) + (\vec{u}(\vec{x},t)\cdot\nabla)\vec{u}(\vec{x},t) = -\nabla p(\vec{x},t) + \nu(\vec{x},t), \quad \nabla\cdot\vec{u}(\vec{x},t) = 0, \tag{71}$$

con $\vec{u}(\vec{x},t)$ il profilo di velocità, p la pressione e ν la viscosità del fluido. Nel 1939 Burgers semplifica la (71) trascurando il termine di pressione. Diversamente dalla (71), quest'equazione può essere studiata in una dimensione spaziale,

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}. \tag{72}$$

La (72) è nota come equazione di Burgers, e ha molte applicazioni, per esempio in astrofisica o nella modellizzazione del traffico.
1) Risolvere la (72) con $\nu = 0$ (equazione di Burgers inviscida) col metodo di Lagrange-Charpit, prendendo come condizione iniziale $u(x,0) = u_0(x)$.
2) Si faccia vedere che la trasformazione di Hopf-Cole,

$$u(x,t) = -2\nu\partial_x \ln(\Psi(x,t)) \tag{73}$$

trasforma la (72) nell'equazione del calore

$$\partial_t\Psi(x,t) = \nu\partial_x^2\Psi(x,t). \tag{74}$$

Suggerimento: sostituendo la (73) nella (72) si arriva a

$$\partial_x\frac{\Psi_t}{\Psi} = \nu\partial_x\frac{\Psi_{xx}}{\Psi}, \tag{75}$$

che può essere integrata col risultato

$$\Psi_t = \nu\Psi_{xx} + f(t)\Psi, \tag{76}$$

dove $f(t)$ è una funzione arbitraria del tempo. Dimostrare che la (76) è equivalente a

$$\partial_t\left(e^{-\int f dt}\Psi\right) = \nu\partial_x^2\left(e^{-\int f dt}\Psi\right), \tag{77}$$

e quindi f(t) può essere eliminata ridefinendo

$$\Psi \to \left(e^{-\int f dt}\Psi\right). \tag{78}$$

Useremo questo fatto per porre $f(t) = 0$ senza perdere la generalità. Trasformare la condizione iniziale $u(x, 0)$ in una condizione iniziale per Ψ, e risolvere la (74) usando il nucleo di calore. Tramite la (73), la soluzione che si ottiene in tal modo fornisce la soluzione generale dell'equazione di Burgers (72) con condizioni iniziali u(x, 0). Suggerimento: definendo $\Psi_0(x) \equiv x, 0)$, si ottiene dalla (73) integrando

$$\Psi_0(x) = \exp\left[-\frac{1}{2\nu}\int u_0(x)dx\right]. \tag{79}$$

Dalla (73) è chiaro che Ψ è definita solo a meno di un fattore moltiplicativo (che può dipendere dal tempo). Perché? Usiamo questa libertà per porre $\Psi_0(x) = 1$. Di conseguenza

$$\Psi_0(x') = \exp\left[-\frac{1}{2\nu}\int_0^{x'} u_0(x'')dx''\right] \tag{80}$$

e perciò

$$u(x,t) = -2\nu\partial_x \ln\left[\int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{1}{(4\pi\nu t)^{1/2}} \exp\left(-\frac{(x-x')^2}{4t\nu} - \frac{1}{2\nu}\int_0^{x'} u_0(x'')dx''\right)\right]. \tag{81}$$

Soluzione:

Come fatto per l'esercizio precedente, anzitutto scrivo la curva iniziale e verifico che non sia caratteristica:

$$\Gamma : \begin{cases} x_0 = s \\ y_0 = 0 \\ u_0 = u_0 \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \tag{82}$$

Ora scrivo il sistema caratteristico trovando le soluzioni (x,t) e u in funzione di τ. In altre parole scrivo (e successivamente risolvo) il sistema $\forall s$. In questo caso la curva caratteristica dipende dal parametro di linea τ

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = u \\ \frac{dt}{d\tau} = 1 \\ \frac{du}{d\tau} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = c_1\tau + c_3 \\ t = \tau + c_1 \\ u = c_2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = u_0\tau + s \\ t = \tau \\ u = u_0(s) \end{cases} \tag{83}$$

C'è un punto importante da poter notare. L'ultimo passaggio del sistema (83) ho usato le condizioni iniziali del problema. Tuttavia nel secondo sistema, eliminando τ fra l'espressione di t e x, si vede subito che sono rette la cui pendenza e intercetta dipendono da u_0 e x_0; poiché queste costanti sono arbitrarie, le posso scegliere completamente a caso e quindi riempire il piano (x, t) di tutte le rette possibili e immaginabili, senza alcun costrutto. L'ordine verrà portato dalle condizioni iniziali, che selezioneranno solo quelle di interesse per il problema dato.

Senza dare una forma esplicita di u_0 non è possibile ricavare il parametro s in funzione di x e t dalla prima delle due equazioni del sistema (83); ci si deve quindi accontentare di una forma implicita della soluzione; la si ottiene sostituendo la seconda delle due equazioni del sistema (83) nella prima, in modo da ricavare s:

$$s = x - u(x,t)t \tag{84}$$

e sostituendolo infine nella seconda:

$$u(x,t) = u_0(x - u(x,t)t). \tag{85}$$

La $u(x,t)$ di (85) soddisfa la condizione iniziale fornita dal problema.
Mostriamo ora che ci si può ricondurre all'equazione del calore tramite la trasformazione di Hopf-Cole. In particolare:

$$\begin{gathered} u(x,t) = -2\nu\partial_x \ln(\Psi(x,t)) \\ u(x,t) = -2\nu\frac{\Psi_x(x,t)}{\Psi(x,t)} \end{gathered} \tag{86}$$

D'ora in poi non esplicito più la dipendenza da x,t in Ψ, ma ovviamente è sottintesa. Calcolo $\partial_t u$, $\partial_x u.$,$u\partial_x u$ ed $\partial_x^2 u$:

$$\begin{gathered} u_t = -2\nu\frac{\Psi_{xt}}{\Psi(x,y)} + 2\nu\frac{\Psi_x\Psi_t}{\Psi^2} \\ u_x = -2\nu\frac{\Psi_{xx}}{\Psi} + 2\nu\frac{\Psi_x^2}{\Psi^2} \\ uu_x = 4\nu\frac{\Psi_{xx}\Psi_x}{\Psi^2} - 4\nu\frac{\Psi_x^3}{\Psi^3} \\ u_{xx} = -2\nu\frac{\Psi_{xxx}}{\Psi} + 2\nu\frac{\Psi_{xx}}{\Psi^2}\Psi_x + 2\nu\frac{2\Psi_x\Psi_{xx}}{\Psi^2} - 4\nu\frac{\Psi_x^3}{\Psi^3} \end{gathered} \tag{87}$$

Mettendo queste quattro espressioni in (72) si ottiene:

$$-\frac{\Psi_{xt}}{\Psi} + \frac{\Psi_x\Psi_t}{\Psi^2} = \nu\frac{\Psi_{xx}\Psi_x}{\Psi^2} - \nu\frac{\Psi_{xxx}}{\Psi}. \tag{88}$$

Quest'ultima espressione equivale alla (75) che riporto per comodità:

$$\partial_x\frac{\Psi_t}{\Psi} = \nu\partial_x\frac{\Psi_{xx}}{\Psi}, \tag{89}$$

Integrando quest'espressione si ottiene che:

$$\begin{gathered} \int \partial_x\frac{\Psi_t}{\Psi} = \int \nu\partial_x\frac{\Psi_{xx}}{\Psi} \\ \frac{\Psi_t}{\Psi} = \nu\frac{\Psi_{xx}}{\Psi} + f(t) \\ \Psi_t = \nu\Psi_{xx} + f(t)\Psi \end{gathered} \tag{90}$$

Dobbiamo mostrare ora che questa forma è equivalente alla (77). Per farlo considero la (77):

$$\partial_t\left(e^{-\int f dt}\Psi\right) = \nu\partial_x^2\left(e^{-\int f dt}\Psi\right), \tag{91}$$

Definisco $\Phi(t) \equiv \int f dt$, in modo tale da ottenere:

$$\begin{gathered} \partial_t\left(e^{-\Phi(t)}\Psi\right) = \nu\partial_x^2\left(e^{-\Phi(t)}\Psi\right) \\ -\Phi'(t)e^{-\Phi(t)}\Psi + e^{-\Phi(t)}\Psi_t' = \nu e^{-\Phi(t)}\Psi_{xx} \\ \Psi_t = \nu\Psi_{xx} + f(t)\Psi, \end{gathered} \tag{92}$$

la quale è uguale alla (90).
Siccome $u(x,0) = u_0(x) \rightarrow \Psi(x,0) = \Psi_0(x)$. Devo risolvere quindi:

$$\partial_t \Psi(x,t) = \nu \partial_x^2 \Psi(x,t) \tag{93}$$

Anzitutto tengo conto della condizione iniziale, sapendo che vale la trasformazione di Hopf-Cole, posso scrivere che:

$$u_0(x) = -2\nu \partial_x \ln(\Psi(x,0)) = -2\nu \partial_x \ln(\Psi_0(x)) = -2\nu \frac{\Psi_0'(x)}{\Psi_0(x)} \tag{94}$$

Il termine:

$$\frac{\Psi_0'(x)}{\Psi_0(x)} = -\frac{u_0(x)}{2\nu} \implies \Psi_0(x) = e^{\tilde{g}(t)} \exp\left[-\frac{1}{2\nu}\int u_0(x)dx\right], \quad \Psi_0(0) = 1, \quad u_0(0) = 0 \tag{95}$$

dove, si verifica facilmente che $\tilde{g}(t) = 0$.
Ora uso la trasformata di Fourier per la Ψ:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int dk e^{ikx}\tilde{\Psi}(k,t) \implies \tilde{\Psi}'(k,t) = -\nu k^2 \tilde{\Psi}(k,t) \tag{96}$$

Ovvero:

$$\tilde{\Psi}(k,t) = \Psi_0(k) e^{-\nu k^2 t} \tag{97}$$

Sostituendo $\tilde{\Psi}(k,t)$ in (96):

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int dk e^{ikx}\Psi_0(k) e^{-\nu k^2 t} \tag{98}$$

Il termine $\Psi_0(k)$, posso anch'esso scriverlo come trasformata di Fourier come:

$$\Psi_0(k) = \int dx' e^{-ikx'}\Psi_0(x') \tag{99}$$

e quindi si ottiene che:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int dk \int dx' \Psi_0(x') e^{ik(x-x')} e^{-\nu k^2 t} \tag{100}$$

Ora mi concentro sull'integrale:

$$G(t,z) \equiv \frac{1}{2\pi}\int dk e^{ikz} e^{-\nu k^2 t} \tag{101}$$

con $z \equiv x - x'$. Questo integrale si può risolvere accorgendosi che il termine all'esponente è possibile riscriverlo come:

$$-\nu t \left(k - \frac{iz}{2\nu t}\right)^2 - \frac{z^2}{4\nu t}, \tag{102}$$

da cui si ottiene che:

$$\begin{aligned} G(t,z) &= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4\nu t}}\int dk \exp\left(-\nu t\left(k-\frac{iz}{2\nu t}\right)^2\right) \\ G(t,z) &= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4\nu t}}\sqrt{\frac{\pi}{\nu t}} \\ G(t,z) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}e^{-\frac{z^2}{4\nu t}} \end{aligned} \tag{103}$$

Quindi, sostituendo in (100) si ottiene che:

$$\begin{aligned} \Psi(x,t) &= \int dx'\Psi_0(x')\cdot G(t,x-x') \\ \Psi(x,t) &= \int dx'\Psi_0(x')\cdot\frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}e^{-\frac{z^2}{4\nu t}} \end{aligned} \tag{104}$$

Ma il termine $\Psi_0(x')$ è analogo alla (80). Quindi:

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx'\frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t)}}\exp\left(-\frac{(x-x')^2}{4t\nu}-\frac{1}{2\nu}\int_0^{x'}u_0(x'')dx''\right) \tag{105}$$

Dalla trasformazione di Hopf-Cole si ottiene la soluzione u(x,t) come:

$$u(x,t) = -2\nu\partial_x \ln\left[\int_{-\infty}^{\infty} dx'\frac{1}{(4\pi\nu t)^{1/2}}\exp\left(-\frac{(x-x')^2}{4t\nu}-\frac{1}{2\nu}\int_0^{x'}u_0(x'')dx''\right)\right]. \tag{106}$$

la quale è analoga alla (81).

0.6 Exercise 6: Quantitative finance: The Black-Scholes model for option pricing

An (American) call/put option is a contract between two parties in which the option buyer (holder) purchases the right (but not the obligation) to buy/sell an underlying asset (e.g. a stock) at a predetermined price (the exercise- or strike price E) from/to the option seller (writer) within a fixed period of time (the expiry T). A European option is a version that limits execution to its expiration date. The most important model to compute the theoretical price of an option is based on the Black-Scholes partial differential equation

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV = 0. \tag{107}$$

Here $V(S,t)$ denotes the value at time t of the option, and $S(t)$ is the price of the asset. t and S range over $0 \le t \le T (T \in \mathcal{R}_+)$, $0 \le S < \infty$, while σ and r are constants representing respectively the volatility of the underlying asset S and the guaranteed interest rate of a risk-free investment. Note that (22) follows from Ito's Lemma under some assumptions on the random function associated to S(t). In what follows, we consider the case of a European call option. We then have the side conditions

$$V(S,T) = \max\{S-E,0\}, \tag{108}$$

$$V(0,t) = 0, \tag{109}$$

$$V(S,t) = S + o(S) \quad \text{for} S \to \infty, \text{uniformly} \text{in} t. \tag{110}$$

(108) means that the option has no value at expiry time T if $S(T) \leq E$. Notice that (110) guarantees uniqueness of the solution. Show that the initial-boundary value problem (107), (108), (109), (110) is solved by

$$V(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2), \tag{111}$$

where

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dy, \tag{112}$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/E) + (r^2 + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = \frac{\ln(S/E) + (r^2 - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{113}$$

$N(x)$ can also be written as

$$N(x) = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(-\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \tag{114}$$

with erfc the complementary error function

$$\mathrm{erfc}(x) = 1 - \mathrm{erf}(x), \quad \mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy \tag{115}$$

Hint: Define new variables x, τ by

$$S =: Ee^x, \quad t =: T - \frac{2\tau}{\sigma^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 \leq \tau \leq \frac{T\sigma^2}{2}, \tag{116}$$

and set

$$V(S,t) =: Ee^{\alpha x + \beta\tau} u(x,\tau). \tag{117}$$

Choose the constants α, β such that (107) turns into the heat equation

$$u_\tau = u_{xx}. \tag{118}$$

Show that (108) translates into the initial condition for u,

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} e^{\frac{k+1}{2}x} - e^{\frac{k-1}{2}x}\ , \ x > 0 \\ 0\ , \ x < 0 \end{cases} \qquad k := \frac{2r}{\sigma^2}. \tag{119}$$

Finally, solve (118), (119) using the heat kernel,

$$u(x,\tau) = \int_{.\infty}^{\infty} dy u_0(y) \frac{1}{(4\pi\tau)^{1/2}} \exp\left(\frac{-(x-y)^2}{4\tau}\right). \tag{120}$$

Soluzione:
Dai suggerimenti, la prima cosa che faccio è calcolare α e β. Per farlo, derivo $V(S,t)$ rispetto ad S e t e metto tali derivate in (107). Non esplicitero la dipendenza da x ed τ in u.

$$\begin{aligned} V_t &= \frac{\partial V}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = (E\beta e^{\alpha x+\beta\tau}u + Ee^{\alpha x+\beta\tau}u_\tau)\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right) \\ V_S &= \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S} = (E\alpha e^{\alpha x+\beta\tau}u + Ee^{\alpha x+\beta\tau}u_x)\left(\frac{1}{S}\right) \\ V_{SS} &= \frac{\partial V_S}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S} = \frac{1}{S^2}(E\alpha^2 e^{\alpha x+\beta\tau}u + 2E\alpha e_x^{\alpha x+\beta\tau} + Ee^{\alpha x+\beta\tau}u_{xx}) \\ &\quad -\frac{1}{S^2}(E\alpha e^{\alpha x+\beta\tau}u - Ee^{\alpha x+\beta\tau}u_x) \\ V_{SS} &= \frac{1}{S^2}(E\alpha^2 e^{\alpha x+\beta\tau}u + 2Ee^{\alpha x+\beta\tau}u_x + Ee^{\alpha x+\beta\tau}u_{xx} - E\alpha e^{\alpha x+\beta\tau}u - Ee^{\alpha x+\beta\tau}u_x) \end{aligned} \tag{121}$$

Mettendo tali derivate in (107) si ottiene che:

$$\sigma^2\alpha - \frac{\sigma^2}{2} + r = 0 \tag{122}$$

da cui:

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma}, \qquad \beta = -\frac{2}{\sigma^2}\left(-\frac{r}{2} + \frac{r^2}{2\sigma^2} + \frac{\sigma^2}{8}\right) \tag{123}$$

Esprimendo α e β in funzione di k si ottiene:

$$\alpha = \frac{1}{2}(1-k), \qquad \beta = -\left(\frac{k+1}{2}\right)^2 \tag{124}$$

Ora risolvo l'equazione del calore descritta in (118). Per farlo mi servono le condizioni al contorno, ovvero

$$\begin{aligned} V(S,T) &= \max\{S-E,0\} \\ Ee^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau) &= \max\{S-E,0\} \\ u(x,\tau) &= \frac{1}{E}e^{-\alpha x-\beta\tau}\max\{Ee^x - E, 0\} \\ u(x,\tau) &= e^{-\alpha x-\beta\tau}\max\{e^x-1,0\} \\ u(x,\tau) &= \begin{cases} e^{\frac{k+1}{2}x} - e^{\frac{k-1}{2}x}\ ,\ x>0 \\ 0\ ,\ x<0 \end{cases} \end{aligned} \tag{125}$$

Ora risolvo l'equazione del calore: scrivo $u(x,\tau)$ come trasformata di Fourier:

$$
\begin{gathered}
u(x,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int dk e^{ikx}\tilde{u}(k,\tau) \\
u(x,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int dk e^{ikx}(\tilde{u}'(k,\tau) - (ik)^2\tilde{u}(k,\tau)) = 0 \\
\tilde{u}'(k,\tau) + k^2\tilde{u}(k,\tau) = 0 \\
\tilde{u}(k,\tau) = \tilde{u}_0(k)e^{-k^2\tau} \\
\tilde{u}_0(k) = \int dy e^{-iky}u_0(y) \\
u(x,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int dk dy e^{ik(x-y)}e^{-k^2\tau}u_0(y) \\
G(x-y,\tau) := \frac{1}{2\pi}\int dk e^{ik(x-y)-k^2\tau} = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4\tau}\right)\sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \\
u(x,\tau) = \int dy G(x-y,\tau)u_0(y) \\
u(x,\tau) = \int \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4\tau}\right)u_0(y)
\end{gathered} \tag{126}
$$

L'equazione di Black Scholes è quindi:

$$
\boxed{V(S,T) = Ee^{\left(\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2}\right)x}e^{-\frac{2}{\sigma^2}\left(-\frac{r}{2}+\frac{r^2}{2\sigma^2}+\frac{\sigma^2}{8}\right)}\cdot\int \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4\tau}\right)u_0(y)} \tag{127}
$$