Multistability In Lasers

Riccardo Striano

Marzo 2025

1 Introduzione

La multistabilità è un fenomeno presente in diversi sistemi dinamici in cui più stati possono coesistere per gli stessi valori dei parametri del sistema.
Questo significa che il sistema può evolversi verso uno stato finale diverso a seconda delle condizioni iniziali o di perturbazioni esterne.
Caratteristiche principali della multistabilità:

- Coesistenza di più stati stabili: il sistema può raggiungere uno di diversi stati di equilibrio stabile, a seconda di come viene inizializzato.
- Dipendenza dalle condizioni iniziali: Poichè ci sono più attrattori stabili, lo stato finale del sistema dipende fortemente da dove inizia.
- Possibilità di transazioni tra stati: il sistema può cambiare stato a causa di perturbazioni esterne o variazioni di parametri.

Tipologie di multistabilità:

- Bistabilità: il sistema ha due stati stabili e può passare da uno all'altro in base a perturbazioni o condizioni iniziali. Un esempio è il comportamento on - off di un interruttore.
- Tri-stabilità: il sistema presenta tre stati stabili, rendendo più complessa la sua dinamica e il passaggio tra stati.
- Multi-stabilità: il sistema può avere più di tre stati stabili, aumentando la complessità e la sensibilità alle perturbazioni.

2 Classificazione dinamica dei laser

La classificazione dinamica dei laser in classi A, B e C si basa sulle differenze nei tempi di rilassamento delle variabili fondamentali: il campo ottico, l'inversione di popolazione e la polarizzazione. Questa categorizzazione è fondamentale per comprendere e prevedere il comportamento dinamico nei laser, in particolare la possibilità di oscillazioni, stabilità o fenomeni caotici.

2.1 Classi dinamici dei laser

Classe A:

- Caratteristiche: il tempo di rilassamento della polarizzazione $\gamma_\perp$ e dell'inversione di popolazione $\gamma_\parallel$ è molto più rapido rispetto a quello del campo ottico k, ovvero $\gamma_\perp \simeq \gamma_\parallel \gg k$. Di conseguenza l'inversione di popolazion si adatta rapidamente alle variazioni del campo ottico.
- Dinamica: Il comportamento è dominato dalla dinamica del campo ottico, con una risposta stabile e senza oscillazioni significative. Non si verificano fenomeni caotici.
- Esempi: Laser He-Ne, Ar, Kr.

Classe B:

- Caratteristiche: il tempo di rilassamento della polarizzazione $\gamma_\perp$ è molto più veloce rispetto a quello del campo ottico k, che a sua volta è comparabile al tempo di rilassamento dell'inversione di popolazione $\gamma_\parallel$, ovvero $\gamma_\perp \gg k \leq \gamma_\parallel$.
- Dinamica: il sistema è descritto da due equazioni di tasso e può presentare oscillazioni di rilassamento. In determinate condizioni possono verificarsi instabilità e biforcazioni, ma non caos senza l'aggiunta di effetti esterni.
- Esempi: CO2 lasers, laser a semiconduttore, laser a fibra

Classe C:

- Caratteristiche: Tutti gli esempi di rilassamento sono comparabili, ovvero $\gamma_\perp \simeq k \simeq \gamma_\parallel$. L'inversione di popolazione varia lentamente rispetto alle rapide fluttuazioni del campo ottico della polarizzazione.
- Dinamica: Devono essere utilizzate tre equazioni di tasso per descriverne il comportamento. Questi laser possono esibire oscillazioni sostenute, fenomeni caotici e multistabilità, poichè nessuna variabile può essere eliminata adiabaticamente.
- Esempi: laser He-Cd, He-Xe, laser a gas nel far-infrarosso.

3 Multistabilità nei sistemi ottici

3.1 Bistabilità ottica

La bistabilità ottica si verifica quando un sistema ottico può stabilizzarsi in due stati stabili distinti a seconda delle condizioni iniziali o delle perturbazioni. Questo fenomeno è spesso legato a effetti di feedback ottico non lineare e viene osservato in dispositivi come laser e cavità ottiche.

Meccanismo:

- In presenza di un feedback ottico che amplifica o attenua l'intensità della luce, il sistema può entrare in due stati stabili (alta o bassa intensità) in risposta a variazioni nei parametri di controllo (come l'intensità della luce in ingresso o la lunghezza della cavità).
- Il circuito di feedback può creare un'isteresi in cui il sistema rimane nello stato attuale fino a una certa perturbazione che lo costringe a passare nell'altro stato stabile.

3.2 Multistabilità spaziale

La multistabilità spaziale si riferisce alla coesistenza di diversi pattern di emissione spaziale all'interno di una cavità ottica. Nei laser VCSEL o in altri sistemi, l'intensità luminosa può essere distribuita in modi differenti:

- Pattern singoli (spot centralizzati)
- Pattern ad anello o strutture filamentose
- Pattern complessi

Fattori influenti: Feedback ottico, corrente di iniezione e variabilità termica nella cavità del laser influenzano la formazione di questi pattern.

3.3 Multistabilità di polarizzazione

Nei laser come i VCSEL, la multistabilità di polarizzazione si manifesta quando il laser può emettere luce in due stati di polarizzazione ortogonali (orizzontale e verticale) a seconda dei parametri di iniezione di corrente e temperatura.

- Meccanismo: Stress meccanico, anisotropie nei materiali e feedback ottico possono stabilizzare uno dei due stati di polarizzazione rispetto all'altro. Le transizioni tra stati di polarizzazione possono essere controllate tramite impulsi elettrici o ottici brevi.
- Applicazioni: Switch ottici basati sulla polarizzazione e memorie ottiche (archiviazione tramite stati di polarizzazione).

4 Multistabilità nei laser a CO_2

4.1 Laser CO_2 modulati (Loss Modulated CO_2 lasers

Nei laser a CO_2, la multistabilità può essere osservata quando le perdite ottiche della cavità sono modulate periodicamente. In questo caso, il sistema può stabilizzarsi in più stati di emissione (ad esempio, alta o bassa intensità) per gli stessi parametri di controllo.
Meccanismo:La modulazione periodica delle perdite crea oscillazioni tra stati di guadagno e assorbimento, portando alla formazione di stati stabili multipli.
Curva di isteresi: il sistema può passare da uno stato stabile all'altro solo quando viene applicata una perturbazione sufficiente.

4.2 Targeting degli attrattori tramite impulsi brevi

L'applicazione di impulsi brevi (ottici o elettrici) può forzare un laser a CO_2 a passare tra diversi attrattori (stati stabili).
Meccanismo: Un impulso breve può perturbare il sistema e costringerlo a passare da un stato stabile (ad esempio, bassa intensità) a un altro (alta intensità).
Questo processo avviene senza l'uso di energia continua, sfruttando la capacità del sistema di restare nel nuovo stato stabile dopo la perturbazione.

4.3 Bistabilità indotta da perturbazioni risonanti

Nei laser a CO_2, la bistabilità può anche essere indotta da perturbazioni che sono in risonanza con il sistema. Queste perturbazioni causano una transizione tra stati stabili a bassa e alta intensità.
Meccanismo La perturbazione risonante modifica la dinamica del sistema, stabilizzando uno stato di emissione rispetto a un altro.

4.4 Bistabilità indotta da feedback ritardato

Il feedback ritardato è un altro meccanismo che induce la bistabilità nei laser a CO_2. Quando il feedback ottico ha un certo ritardo temporale, può indurre il sistema a stabilizzarsi in due diversi stati stabili di emissione.

5 Multistabilità nei laser a semiconduttore

5.1 Laser a semiconduttore con feedback ritardato

Nei laser a semiconduttore, la multistabilità si verifica quando c'è un ritardo nel feedback ottico. Questo feedback ritardato porta a comportamenti complessi, inclusi oscillazioni periodiche e caotiche, che sono tipiche nei sistemi non lineari.
Meccanismo: Il feedback ritardato causa oscillazioni nei parametri del laser, che possono essere stabili o caotiche a seconda della modulazione del feedback.

5.2 Laser semiconduttore modulato direttamente

Nei laser semiconduttori modulati direttamente, la corrente di iniezione è modulata per controllare l'intensità del laser. Questo tipo di modulazione può portare alla bistabilità o multistabilità nei laser, con la possibilità di passare da uno stato stabile a un altro a seconda della frequenza di modulazione.
Meccanismo: La modulazione diretta della corrente porta a transizioni tra diversi regimi di emissione (ad esempio, un regime pulsato o continuo), dando luogo a multistabilità nelle dinamiche del laser.

6 Multistabilità nei laser a fibra

Nei laser a fibra, la multistabilità può essere indotta dalla modulazione delle perdite ottiche. La modulazione periodica delle perdite crea diverse configurazioni stabili di emissione, che possono passare da uno stato stabile all'altro a seconda dei parametri di ingresso e delle perturbazioni.
Meccanismo: La modulazione delle perdite permette di osservare stati di emissione ad alta e bassa intensità in risposta a variazioni di corrente o modulazione esterna.

6.1 Laser a fibra modulati dalla pompa

Nei laser a fibra modulati dalla pompa, la modulazione della pompa (energia iniettata nel sistema) può indurre la multistabilità del sistema. La pompa modula l'intensità di emissione e permette la coesistenza di più stati di intensità.
Meccanismo: La modulazione della pompa induce transizioni tra stati stabili di intensità e può anche produrre oscillazioni caotiche se la modulazione è sufficientemente forte.

7 Conclusioni generali sulla multistabilità

- Multistabilità è un fenomeno che si manifesta in molti tipi di sistemi ottici e laser, portando a più stati stabili che dipendono dalle condizioni iniziali, dalla modulazione dei parametri e dal feedback non lineare.

- I laser a CO_2, laser semiconduttori e laser a fibra sono tutti dispositivi ideali per osservare la multistabilità, e i fenomeni come bistabilità ottica, multistabilità spaziale e polarizzazione giocano un ruolo fondamentale in applicazioni avanzate come memorie ottiche, comunicazioni sicure e elaborazione ottica.

- La modulazione delle perdite, il feedback ritardato e l'uso di impulsi brevi sono tecniche chiave per controllare la transizione tra gli stati stabili e sfruttare la multistabilità per applicazioni in telecomunicazioni e sistemi crittografici.

8 I Modelli e le loro Applicazioni

8.1 Modello di Malthus

Tipo di Modello	Equazione	Soluzione
Malthus Base	$\frac{dP}{dt} = rP$	$P(t) = P_0 e^{rt}$
Logistico	$\frac{dP}{dt} = rP(1 - \frac{P}{K})$	$P(t) = \frac{K}{1+(\frac{K-P_0}{P_0})e^{-rt}}$ 6
Con immigrazione/emigrazione	$\frac{dP}{dt} = rP + c$	$P(t) = (P_0 + \frac{c}{r})e^{rt} - \frac{c}{r}$
Tempo discreto	$P_{n+1} = (1+r)P_n$	$P_n = P_0(1+r)^n$

8.2 Modello logistico

Tipo di Modello	Equazione	Soluzione
Logistico classico	$\frac{dP}{dt} = rP(1 - \frac{P}{K})$	$P(t) = \frac{K}{1+(\frac{K-P_0}{P_0})e^{-rt}}$
Logistico generalizzato	$\frac{dP}{dt} = rP(1 - (\frac{P}{K})^\alpha)$	solo casi specifici hanno soluzioni esplicite
Logistico discreto	$P_{n+1} = P_n + rP_n(1 - \frac{P_n}{K})$	ricorsiva, può diventare caotica
Logistico map (normalizzato)	$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$	dinamica non lineare, comportamento complesso
Logistico con migrazione	$\frac{dP}{dt} = rP(1 - \frac{P}{K}) + c$	soluzione complessa, spesso numerica

8.3 Modello di Ricker

Tipo	Equazione	Note
Ricker base	$P_{n+1} = P_n e^{r\left(1-\frac{P_n}{K}\right)}$	Crescita discreta con limite ambientale
Normalizzato	$x_{n+1} = x_n e^{r(1-x_n)}$	Utile per analisi teorica e biforcazioni
Con migrazione	$P_{n+1} = P_n e^{r\left(1-\frac{P_n}{K}\right)} + c$	Include un termine costante per immigrazione/emigrazione
Con rumore	$P_{n+1} = P_n e^{r\left(1-\frac{P_n}{K}\right)+\epsilon_n}$	Modello stocastico, con $\epsilon_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

8.4 Modelli Stocastici

Tipo	Equazione	Note
Malthus stocastico (continua)	$dP = rP\,dt + \sigma P\,dW_t$	Rumore moltiplicativo continuo. Soluzione lognormale.
Logistico stocastico (continua)	$dP = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)dt + \sigma P\,dW_t$	Include capacità portante e fluttuazioni ambientali.
Ricker stocastico (discreto)	$P_{n+1} = P_n e^{r(1-\frac{P_n}{K})+\epsilon_n},\ \epsilon_n \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$	Crescita discreta con rumore additivo all'esponente.
Poisson/Binomiale	$P_{n+1} \sim \text{Poisson}(rP_n)$ o $\text{Binom}(N,p)$	Usati per popolazioni piccole o discrete.

8.5 Modelli a Due Popolazioni

Modello	Equazioni	Descrizione
Predatore-preda (Lotka-Volterra)	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y \end{cases}$	Oscillazioni cicliche tra preda (x) e predatore (y).
Competizione	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r_1 x\left(1 - \frac{x+\alpha y}{K_1}\right) \\ \frac{dy}{dt} = r_2 y\left(1 - \frac{y+\beta x}{K_2}\right) \end{cases}$	Due specie in competizione per risorse limitate.
Mutualismo	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r_1 x\left(1 - \frac{x}{K_1} + \alpha y\right) \\ \frac{dy}{dt} = r_2 y\left(1 - \frac{y}{K_2} + \beta x\right) \end{cases}$	Entrambe le specie beneficiano della presenza dell'altra.
Discreto (es. Ricker)	$\begin{cases} x_{n+1} = x_n e^{r(1-x_n-ay_n)} \\ y_{n+1} = y_n e^{s(-1+bx_n)} \end{cases}$	Versione a tempo discreto, utile per simulazioni numeriche.

8.6 Modello di MacArthur

Componente	Equazione	Descrizione
Risorse	$\frac{dR_\mu}{dt} = \lambda_\mu - \delta_\mu R_\mu - \sum_i c_{i\mu} N_i R_\mu$	Rigenerazione, decadimento e consumo da parte delle specie.
Specie	$\frac{dN_i}{dt} = N_i \left(\sum_\mu e_{i\mu} c_{i\mu} R_\mu - m_i \right)$	Crescita in funzione delle risorse disponibili e mortalità.
Competizione equivalente	$\frac{dN_i}{dt} = N_i \left(r_i - \sum_j \alpha_{ij} N_j \right)$	Forma ridotta per competizione indiretta tramite risorse.

8.7 Biforcazioni

Tipo	Equazione esempio	Descrizione
Sella-nodo	$\dot{x} = r - x^2$	Due equilibri si annullano (apparizione/sparizione)
Pitchfork	$\dot{x} = rx - x^3$	Transizione da uno a tre equilibri (tipico di simmetria)
Transcritica	$\dot{x} = rx - x^2$	Due equilibri si scambiano stabilità
Hopf	$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$	Nasce o muore un ciclo limite attorno a un equilibrio

8.8 Oscillatore Forzato

Modello	**Equazione**	**Descrizione**
Lineare smorzato	$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F\cos(\omega t)$	Oscillatore armonico soggetto a forzante esterna.
Soluzione stazionaria	$x(t) = A(\omega)\cos(\omega t - \phi)$	Oscillazione permanente con ampiezza e fase dipendenti da ω.
Ampiezza di risonanza	$A(\omega) = \frac{F}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}}$	Massimo per $\omega \approx \omega_0$.
Pendolo forzato	$\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \omega_0^2\sin(\theta) = F\cos(\omega t)$	Non lineare, può generare caos e biforcazioni.

8.9 Oscillatore di Rayleigh

Componente	**Equazione**	**Descrizione**
Forma classica	$\ddot{x} + \epsilon(\dot{x}^2 - 1)\dot{x} + x = 0$	Oscillatore non lineare con smorzamento dipendente dalla velocità.
Forma di sistema	$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - \epsilon(y^2 - 1)y \end{cases}$	Sistema del primo ordine per analisi in fase.
Equilibrio	$(0, 0)$	Punto critico instabile per $\epsilon > 0$; origine di un ciclo limite stabile.
Dinamica tipica	Ciclo limite stabile	Oscillazioni auto-mantenute anche senza forzanti esterne.

8.10 Oscillatore di Hopf

Componente	**Equazione**	**Descrizione**
Sistema di Hopf	$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y - (x^2 + y^2)x \\ \dot{y} = x + \mu y - (x^2 + y^2)y \end{cases}$	Oscillatore non lineare che mostra la biforcazione di Hopf.
Forma normale	$\dot{z} = (\mu + i\omega)z - \lvert z\rvert^2 z$	Descrizione complessa del sistema vicino alla biforcazione.
Biforcazione di Hopf	$\mu = 0$	Quando μ attraversa zero, il punto fisso all'origine perde stabilità e nasce un ciclo limite.
Comportamento per $\mu < 0$	Punto fisso stabile	L'origine è stabile e tutte le traiettorie convergono verso di essa.
Comportamento per $\mu > 0$	Ciclo limite stabile	L'origine diventa instabile e nasce un ciclo limite stabile attorno all'origine.

8.11 Modello SIR

Componente	**Equazione**	**Descrizione**
Equazione per $S(t)$	$\dot{S}(t) = -\beta S(t)I(t)$	Il numero di suscettibili diminuisce man mano che vengono infettati.
Equazione per $I(t)$	$\dot{I}(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t)$	Il numero di infetti cresce per infezione e diminuisce per recupero/mortalità.
Equazione per $R(t)$	$\dot{R}(t) = \gamma I(t)$	Il numero di recuperati (o rimossi) cresce con il tasso di recupero.
Condizione per epidemia	$R_0 = \frac{\beta}{\gamma} > 1$	Se $R_0 > 1$, la malattia può diffondersi nella popolazione.
Comportamento per $R_0 < 1$	Epidemia si estingue	La malattia non si diffonde nella popolazione.

8.12 Modelli Non Lineari

Modello	**Equazione**	**Soluzione / Descrizione**
Logistico	$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$	$x(t) = \frac{K}{1+\left(\frac{K-x_0}{x_0}\right)e^{-rt}}$
Lotka-Volterra	$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$, $\frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y$	Oscillazioni periodiche di prede e predatori.
Van der Pol	$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$	Oscillazioni limitate e autoregolate per valori di $\mu > 0$.

8.13 Modelli Metapopolazione

Modello	**Equazione**	**Soluzione / Descrizione**
Modello di Levins	$\frac{dp}{dt} = c(1 - p) - ep$	$p^* = \frac{c}{e+c}$: frazione di patch occupate al raggiungimento dell'equilibrio.
Modello a due patch	$\frac{dP_1}{dt} = r_1 P_1 \left(1 - \frac{P_1}{K_1}\right) - m(P_1 - P_2)$	La dinamica della popolazione in due patch interconnesse con migrazione tra di esse.
Modello a più patch	Equazione complessa con n patch	La dinamica complessa di una metapopolazione con molte patch interconnesse.