C.3 Laplace-Transformation

Definition

zweiseitig:	einseitig:
$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$ Konvergenzgebiet $\mathcal{K}$: $a < \mathrm{Re}\{s\} < b$	$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$ Konvergenzgebiet $\mathcal{K}$: $\mathrm{Re}\{s\} > a$

Eigenschaften und Rechenregeln

	Zeitbereich	Bildbereich	Konvergenz
Linearität	$c_1\, x_1(t) + c_2\, x_2(t)$	$c_1\, X_1(s) + c_2\, X_2(s)$	$\mathcal{K}_{x_1} \cap \mathcal{K}_{x_2}$
Faltung	$x(t) * y(t)$	$X(s) \cdot Y(s)$	$\mathcal{K}_x \cap \mathcal{K}_y$
Verschiebung	$x(t - t_0)$	$e^{-st_0} \cdot X(s)$	$\mathcal{K}_x$
Dämpfung	$e^{at} \cdot x(t)$	$X(s - a)$	$\mathcal{K}_x + \mathrm{Re}\{a\}$
lineare Gewichtung	$t \cdot x(t)$	$-\frac{d}{ds}\, X(s)$	$\mathcal{K}_x$
Differentiation	$\frac{d}{dt}\, x(t)$	$s \cdot X(s)$	$\mathcal{K}_x$
Integration	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$	$\frac{1}{s} \cdot X(s)$	$\mathcal{K}_x \cap \{\mathrm{Re}\{s\} > 0\}$
Skalierung	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} \cdot X\left(\frac{s}{a}\right)$	$a \cdot \mathcal{K}_x$
konj. komplexes Signal	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	$\mathcal{K}_x$

Spezielle Eigenschaften der einseitigen Laplace-Transformation

Verschiebung links	$x(t + t_0)\,,\ t_0 > 0$	$e^{st_0} \left[X(s) - \int_{0^-}^{t_0} x(t) \cdot e^{-st}\, dt \right]$
Verschiebung rechts	$x(t - t_0)\,,\ t_0 > 0$	$e^{-st_0} \left[X(s) + \int_{-t_0}^{0^-} x(t) \cdot e^{-st}\, dt \right]$
Differentiation	$\frac{d}{dt}\, x(t)$	$s \cdot X(s) - x(0^-)$
Anfangswertsatz	$x(0^+) = \lim_{s \to \infty} s \cdot X(s)\,,$ falls $x(0^+)$ existiert	
Endwertsatz	$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot X(s)\,,$ falls $\lim_{t \to \infty} x(t)$ existiert	