

**Fisica Moderna: Studio dell'esperimento di Richard Beth,  
determinazione del momento angolare di spin intrinseco del fotone.**

March 1, 2024



**UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI TRIESTE**



Dipartimento di

**Fisica**

Dipartimento d'Eccellenza 2023-2027

Riccardo Corte

**Abstract**

Con la seguente completeremo il lavoro di studio delle proprietà del fotone, a seguito della determinazione del momento lineare svolta da Compton, Richard Beth sviluppa un metodo per misurare il momento Angolare intrinseco ad esso. L'obiettivo dell'esperimento sarà dimostrare che momenti angolari di particelle quantistiche sono riconducibili a momenti meccanici, e conseguentemente che i fotoni posseggono un momento angolare intrinseco di spin.

# Contents

1	Introduzione	1
2	Polarizzazione	1
3	Esperimento	3
4	Analisi teorica	8
5	Risultati e discussioni	11
6	Conclusioni	14

# 1 Introduzione

Il momento angolare è una misura che rappresenta come un sistema fisico si comporta a fronte di rotazioni spaziali, è una proprietà già ampiamente studiata nel mondo classico che col seguente esperimento verrà trattata anche nel caso quantistico.

Nel caso classico sappiamo che il momento angolare totale  $\vec{J}$  è dato dal prodotto del vettore di Poynting,  $\vec{P} = \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B})$  per il raggio vettore:

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{P} = \epsilon_0 \int \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}) d^3r$$

Esprimibile come l'integrale totale in  $r$ . Esiste un'altra espressione del momento angolare che deriva dal teorema di Nöther, il quale permette di individuare le due componenti costituenti  $\vec{J}$ :

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

- $\vec{S}$  Rappresenta il momento angolare di spin ("SAM" Spin Angular Momentum), in questo caso, il momento angolare intrinseco della particella, una proprietà di essa.
- $\vec{L}$  Rappresenta il momento angolare orbitale ("OAM" Orbital Angular Momentum), costituisce il momento angolare non-intrinseco, è una proprietà che dipende dal sistema preso in analisi.

La teoria classica ha dimostrato che è possibile trasferire un momento torcente da un'onda elettromagnetica ad un mezzo birifrangente, e questo fenomeno viene normalmente interpretato con un trasferimento di OAM; tale fenomeno però può anche venir spiegato quantisticamente assegnando un SAM ad i fotoni costituenti un raggio di luce e vedendo che nelle giuste condizioni, ossia passando per un mezzo birifrangente, il mezzo considerato riceve un momento meccanico torcente. Questo fenomeno verrà dimostrato da Beth applicando la conservazione del momento angolare e polarizzando circolarmente il raggio di luce entrante.

# 2 Polarizzazione

Elemento importante per comprendere il processo attraverso cui è possibile stimare il SAM dei fotoni è la polarizzazione del campo elettromagnetico costituente la radiazione luminosa. La polarizzazione della luce è il modo in cui il campo elettrico sia nel suo modulo che nella sua direzione nello spazio, cambia nel tempo. Per definizione un campo elettrico oscillante ha le componenti trasversali al verso di propagazione, questo permette di definirne la polarizzazione in ottica classica:

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \Phi)}$$

Assumendo il verso di propagazione dell'onda lungo  $z$  e scegliendo le opportune basi è possibile esprimere il campo elettrico oscillante attraverso la notazione di Jones:

$$\begin{bmatrix} E_{0,x} \\ E_{0,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |E_{0,x}| e^{i\Phi_x} \\ |E_{0,y}| e^{i\Phi_y} \end{bmatrix}$$

Si avrà quindi che questi campi potranno essere espressi con una differenza di fase reciproca, l'uno rispetto all'altro, di  $\epsilon$  :

$$\begin{cases} \vec{E}_x = E_{0,x} \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \hat{x} \\ \vec{E}_y = E_{0,y} \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \epsilon) \hat{y} \end{cases}$$

In funzione di questa differenza di fase si determinano tre diversi stati di polarizzazione.

- **Polarizzazione lineare:** In questo caso si ha che le due componenti del campo oscillano in fase; la differenza di fase è  $\epsilon = 2m\pi$ , l'ampiezza del campo risultante è data dalla somma delle componenti  $E_{0,x}$ ,  $E_{0,y}$  che oscillano sul piano di oscillazione perpendicolare alla direzione di propagazione.
- **Polarizzazione circolare:** Si verifica quando le due componenti hanno la stessa ampiezza e la differenza di fase è  $\epsilon = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$ ; in questo caso si avrà che l'ampiezza dell'onda sarà costante, ma la direzione di  $\vec{E}$  cambierà nel tempo e conseguentemente non giacerà su un unico piano. A seconda che la differenza di fase sia  $\epsilon = \pm \frac{\pi}{2} + 2m\pi$  si ottiene rispettivamente una rotazione circolare destra/sinistra, in ambo i casi si ha una rotazione completa quando la radiazione avanza di una lunghezza d'onda.
- **Polarizzazione ellittica:** Il caso della polarizzazione ellittica è il più generale e rappresenta il caso in cui sia la direzione che l'ampiezza cambiano contemporaneamente. La polarizzazione lineare e circolare costituiscono caso particolari di quella ellittica, ottenuti per opportuni angoli ed ampiezze.

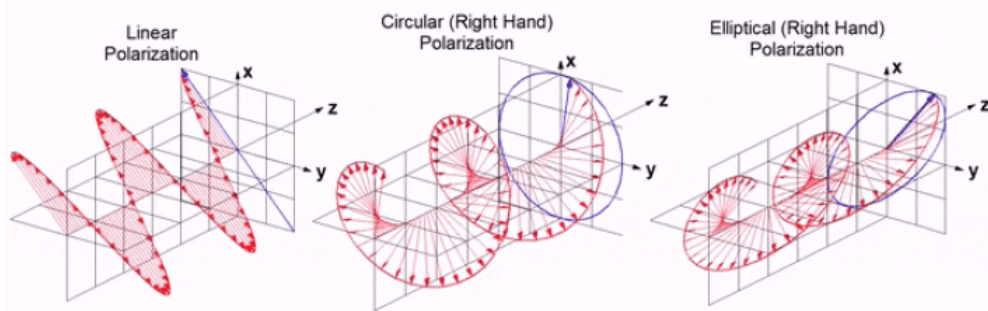


Figure 1: Rappresentazioni grafiche delle diverse polarizzazioni

La particolarità delle polarizzazioni di tipo non lineare è che queste portano con sé un momento angolare di spin.

Per un'onda monocromatica è possibile esprimere il momento totale di spin  $\vec{J}$  (e quindi  $\vec{S}$  se nell'analisi si trascura  $\vec{L}$ ) come:  $\vec{S} = \epsilon_0 \int (\vec{E} \times \vec{A}) d^3r$ . Il risultato che deriva dall'applicazione del teorema di Nöther permette di ottenere un'ultima rappresentazione del vettore per un'onda

monocromatica come:  $\vec{S} = \epsilon_0 \int (\vec{E} \times \vec{E}) d^3r$ .

In conclusione uno spin  $\vec{J} = 0$  sarà conseguenza di una radiazione incidente avente polarizzazione lineare.

### 3 Esperimento

L'obbiettivo dell'esperimento è quello di dimostrare che il momento angolare di una luce con polarizzazione ellittica determina su un particolare mezzo ottico una rotazione di tipo meccanico.

Richard Beth ideò un setup che potesse verificare l'ipotesi secondo cui ogni fotone avesse un momento angolare intrinseco del valore di  $\pm h$ , misurando il momento torcente che veniva trasferito dalla radiazione luminosa al mezzo birifrangente.

#### 3.1 Setup sperimentale

Il setup dell'esperimento è costituito da un corpo principale dove si possono distinguere diversi elementi, lo scopo è generare una luce polarizzata circolarmente e farla incidere su di un cristallo birifrangente. Partendo dal basso verso l'alto si individuano i seguenti elementi:

- Filamento di tungsteno (F): Questo filamento dello spessore di  $3mm$  viene scaldato ad emettere luce per effetto termoionico. La luce emessa è isotropa in direzione e polarizzazione.
- Lente focalizzante (L): Questa lente di quarzo fuso dal diametro di  $10.7mm$  raccoglie un angolo solido della luce emessa dal filamento e la focalizza nel punto di interesse.
- Prisma di Nicol (N): E' l'elemento che polarizza linearmente la luce, verrà meglio analizzato in seguito.
- Cristallo birifrangente di calcite  $\frac{\lambda}{4}$  (B): E' una lamina realizzata con un materiale birifrangente, costituito quindi da due materiali ottici con indici di rifrazione diverse; può essere calibrato facendolo ruotare rispetto al proprio asse.
- Disco di quarzo (W): E' una lamina di quarzo costituente una finestra, separa la camera più interna dove è presente il vuoto dal resto del setup.
- Cristallo birifrangente di calcite  $\frac{\lambda}{2}$  (M): Collegato ad una scala graduata per mezzo di un sottile filo di quarzo, è l'elemento più delicato dell'apparato e costituisce una bilancia di precisione rotazionale.

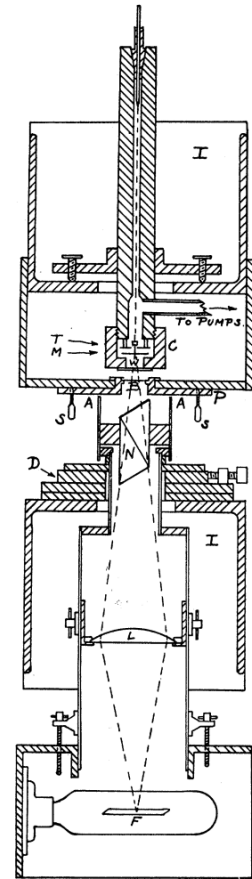


FIG. 1. Diagram of apparatus.

Figure 2: Apparato sperimentale

- Cristallo birifrangente di calcite  $\frac{\lambda}{4}$  (T): Lamina simile al cristallo birifrangente (B). E' ricoperto superiormente da un sottile strato di alluminio avente lo scopo di riflettere la radiazione incidente.

Per le lamine viene scelta la calcite, un cristallo birifrangente relativamente facile da lavorare. E' importante fare alcune specifiche sul cristallo birifrangente (B), e sul funzionamento della bilancia di precisione costituita da (M).

Il cristallo (B) è costruito in modo tale che la luce entrante, polarizzata linearmente, ne esca con polarizzazione circolare destra o sinistra. Questo viene reso possibile per una luce entrante con un opportuno angolo  $\theta$  rispetto agli assi ottici del cristallo della lamina. I due assi, ordinario e straordinario vengono anche chiamati Slow e Fast, in relazione ai differenti indici di rifrazione e alla differente velocità di propagazione della luce in essi.

Il cristallo birifrangente (M) va a costituire una bilancia di precisione molto accurata dove il momento angolare del filo va a compensare la rotazione dell'oggetto, una leva ottica viene sfruttata per aumentare la precisione della misura ed ottenere migliori risultati per il calcolo della variazione del momento angolare.

## 3.2 Materiali birifrangenti

I materiali birifrangenti sono caratterizzati dall'avere indici di rifrazione diversi per le diverse direzioni di propagazione dell'onda elettromagnetica che li attraversa. Si ha che quando un campo elettrico attraversa un mezzo birifrangente la relazione fra campo elettrico e polarizzabilità del materiale non è lineare,  $\vec{P} \nparallel \vec{E}$ , il materiale non incide sulle componenti del campo elettrico in modo uguale bensì distingue una direzione ordinaria ed una straordinaria aventi differenti indici di rifrazione. Queste direzioni definiscono due assi: l'asse ordinario  $O$ , e l'asse straordinario (extraordinary in inglese)  $E$ , con caratteristiche diverse: per il primo asse (ordinario) vale la legge di Snell, mentre per il secondo (straordinario) l'indice di rifrazione varia con l'angolo di incidenza. Avere due indici di rifrazione diversi significa che le velocità di propagazione lungo i due assi sono diverse, infatti:

$$\hat{O} : v_O = \frac{C}{n_O} \quad \hat{E} : v_E = \frac{C}{n_E}$$

Un'onda incidente in un mezzo birifrangente verrà quindi scomposta in due onde che, a causa delle differenze tra i due assi ottici, percorreranno cammini ottici differenti.

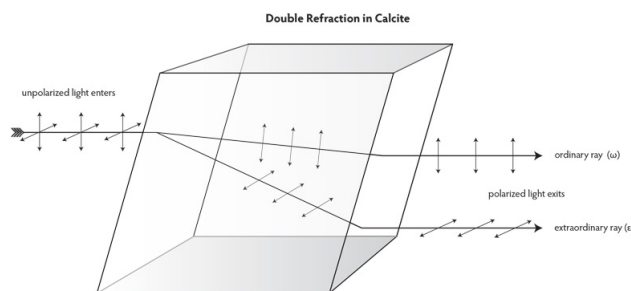


Figure 3: Esempio di prisma birifrangente

### 3.2.1 Polarizzatori circolari

Sfruttando questi materiali è quindi possibile polarizzare la luce, ossia trasformarne la direzione e ampiezza, in arrangiamenti efficaci per evidenziare proprietà fisiche.

Si ha quindi che l'espressione del campo elettrico al passaggio per un mezzo birifrangente è del tipo:

$$\vec{E} = E_0(\hat{o}\cos\theta + \hat{e}\sin\theta e^{i\Delta\Phi})e^{i(kz-wt)}$$

Che evidenzia proprietà particolari nel caso in cui sia  $\Delta\Phi = \frac{\pi}{2} \rightarrow e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ . Infatti in questo caso si otterrebbe:  $\hat{o}\cos\theta + \hat{e}\sin\theta e^{i\Delta\Phi} = \hat{o}\cos\theta + i\hat{e}\sin\theta$ , dove il primo termine  $\in \mathbb{R}$  mentre il secondo  $\in \mathbb{C}$ ; queste rappresentano le componenti che definiscono un campo con polarizzazione circolare.

Dal punto di vista pratico questo si riflette nel fatto che se ho una radiazione con polarizzazione lineare, entrante in un mezzo birifrangente ad un angolo  $\theta = 45^\circ$  rispetto agli assi, allora la polarizzazione uscente sarà circolare.

### 3.2.2 Prisma di Nicol

In questa sezione spiegheremo come funziona il polarizzatore lineare (N), conosciuto come: "Prisma di Nicol" dovuto al nome del suo inventore, William Nicol. Questo polarizzatore è costituito da un cristallo di calcite e sfrutta la birifrangenza per ottenere a partire da un fascio di luce non polarizzato, una polarizzazione uscente lineare.

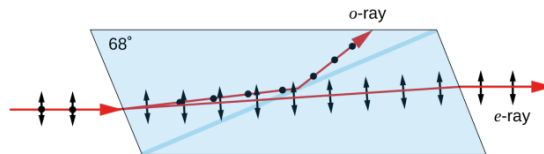


Figure 4: Rappresentazione del funzionamento del prisma di Nicol

Il prisma viene costruito a partire da un cristallo romboedrico di calcite determinato da un angolo compreso tra i  $68^\circ$  e i  $71^\circ$ , quest'ultimo viene tagliato diagonalmente e incollato nuovamente con del Balsamo del Canada, un materiale trasparente. Il motivo di questa costruzione, che potrebbe sembrare rindondante, è lo sfruttamento delle proprietà dell'angolo critico per diversi valori di indici di rifrazione; ciò che si sfrutta in particolare è che, dato un raggio luminoso passante da un mezzo con indice di rifrazione maggiore a uno con indice di rifrazione minore, quest'ultimo viene riflesso totalmente nel momento in cui vi incide con un angolo inferiore all'angolo critico.

Il Balsamo del Canada ha la particolare proprietà di avere un indice di rifrazione di  $n_b = 1.55$ , valore compreso fra quelli degli indici di rifrazione dei due assi, ordinario e straordinario:  $n_E = 1.486$ ,  $n_O = 1.658$ . Avendo in definitiva la relazione  $n_O > n_b > n_E$ , il fenomeno di riflessione totale avverrà solo per l'onda che si muove lungo l'asse ordinario.

Il raggio incidente viene quindi diviso in due raggi, che attraversano il prisma fino al balsamo del Canada, qui il raggio ordinario incide sul balsamo con un angolo di circa  $28^\circ$ , inferiore all'angolo critico di circa  $69^\circ$ , e per questo motivo viene totalmente riflesso e assorbito da uno strato di vernice nera sulla parete laterale del prisma. Il raggio straordinario al contrario attraversa lo strato di balsamo e supera il prisma; si ottiene come risultato finale un'onda polarizzata linearmente.

### 3.3 Funzionamento dell'esperimento

Per svolgere l'esperimento si scalda il filo di tungsteno (F) sfruttando l'effetto Joule, la luce emessa viene focalizzata dalla lente (L), e passando per il Prisma di Nicol (N) viene polarizzata linearmente, per poi incidere sul cristallo (B) che la polarizza circolarmente. Una volta che possiede una polarizzazione circolare la luce passa per la finestra (W) ed entra nella zona dove è presente il vuoto; in questa zona attraversa le varie lamine presenti, trasferisce il suo momento ad (M) e viene poi opportunamente riflessa su (T) per poter ripassare attraverso (M) amplificando l'effetto di trasferimento di momento.

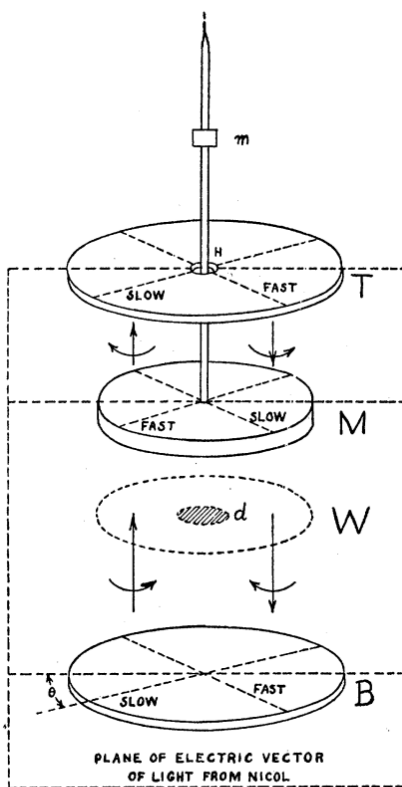


FIG. 3. Wave plate arrangement.

L'esperimento è centrato sul funzionamento del cristallo birifrangente (M) il quale nel momento in cui viene attraversato da una luce polarizzata circolarmente, a causa della birifrangenza, sfasa la radiazione di una fase  $\pi$  invertendone la polarizzazione da destra a sinistra, e viceversa. Per la conservazione del momento angolare, (M) sarà costretta a ruotare, e questa rotazione andrà in conflitto col momento torcente opposto derivante dal filo di quarzo, andando così ad incidere sulla scala graduata e determinando così la misura.

Quanto accade in (M) è l'applicazione di uno shift di fase alla luce, che trasforma la polarizzazione circolare in una polarizzazione con verso opposto. Se la luce cambia polarizzazione da  $L$  a  $R$  allora sto cambiando lo spin da  $-S$  a  $+S$ , il modulo di questa variazione corrisponde ad un valore quantizzato  $\hbar$ . Questo risultato deriva dalla meccanica quantistica, dove per i fotoni, non aventi massa, il vettore (osservabile)  $S_z$  può avere solo le proiezioni  $\pm\hbar$ . Queste sono le proiezioni corrispondenti alle diverse elicità che essi possono possedere.

Quando la luce passa su (M) subisce uno shift  $S \rightarrow -S$ , che corrisponde ad una differenza di momento angolare  $\Delta L = 2S$ . Beth vuole amplificare questo fenomeno, di conseguenza fa sì che la luce dopo aver attraversato (M) passi per (T), che ha lo scopo

di polarizzare nuovamente la luce in arrivo e rifletterla, in modo tale che passi nuovamente per (M). Se (T) fosse costituita unicamente da uno specchio, la luce ripassando su (M) trasferirebbe un momento angolare uguale ed opposto a quello trasmesso al primo passaggio e annullerebbe l'effetto studiato; per ovviare a questo (T) è costituito da un altro cristallo birifrangente che fornisce una



polarizzazione opposta alla luce, venendo attraversato due volte dalla luce (andata e ritorno), prima linearizza la radiazione in arrivo, poi conferisce una nuova polarizzazione circolare alla luce uscente, quest'ultima polarizzazione risulterà inversa alla polarizzazione iniziale entrante. Così facendo al secondo passaggio della luce da (M) si ha una nuova trasmissione di momento angolare che va a sommarsi a quella iniziale, determinando una differenza di momento angolare totale:  $\Delta L_{Tot} = 4S$ . Lo scopo di (T) è quindi quello di amplificare il trasferimento di momento meccanico dai fotoni alla lamina.

### 3.4 Osservazioni di Beth

L'esperimento è incredibilmente delicato e richiede molteplici calibrazioni ed accorgimenti per funzionare in maniera ottimale, di seguito vengono riportati i perfezionamenti adottati e le osservazioni dello stesso Beth. La rotazione misurata è molto piccola e dipende da particelle facilmente suscettibili come i fotoni, per evitare che la misurazione venga disturbata da elementi quali vibrazioni, oscillazioni, temperatura e soffi d'aria, si sceglie di costruire l'apparato esterno in rame così facendo sarà quest'ultimo ad assorbire eventuali variazioni di temperatura e conseguentemente espandersi o comprimersi. Per evitare che spostamenti d'aria incidessero con la misura gli elementi più sensibili sono posti in una camera dove è presente il vuoto, la misura finale viene inoltre amplificata con la leva ottica.

E' necessario, inoltre, prestare attenzione al filo di quarzo in che collega (M) e va a costituire la bilancia di precisione, essendo molto fine la luce entrante potrebbe aver l'effetto di scaldarlo, e variarne la temperatura incidendo sul modulo di Bulk di esso, cambiando il valore del momento torcente del materiale. Per ovviare a questo problema la finestra (W) viene costruita con al centro un piccolo disco di metallo (d) che ha esattamente il ruolo di impedire che la luce proveniente dal filamento di tungsteno incida direttamente sul centro del cristallo (M). Da questa analisi si comprende inoltre che è necessario utilizzare il filo di tungsteno in modo tale che vi sia una ridotta emissione di luce, l'emissione di una luce fioca va quindi ad evitare di scaldare gli elementi ottici, e creare gravi errori sperimentali.

Beth inoltre osserva che per ottimizzare l'esperimento bisogna: Utilizzare per la finestra un materiale che assorba poco, viene quindi scelto il quarzo; per le lamine è invece ideale usare la calcite, lo stesso materiale utilizzato nella configurazione del prisma di Nicole. Questa scelta è dovuta ai processi che avvengono al passaggio della luce per la lamina, quali l'assorbimento, che deve essere limitato per non scaldare il cristallo. Per moderare l'effetto dell'assorbimento Beth fa sì che il cristallo alla lunghezza d'onda utilizzata sia trasparente. Tuttavia l'assorbimento non può essere nullo, perchè se l'indice di rifrazione è tale per cui non è ammesso alcun tipo di interazione tra il materiale e la luce, allora non avverrebbe lo sfasamento ed i fenomeni di birifrangenza. Si ovvia quindi per una via di mezzo che premia un materiale che assorbe poco i fotoni.

## 4 Analisi teorica

Esistono due approcci diversi per stimare il valore di  $\Delta L$  teoricamente, il metodo classico e quello quantistico.

### 4.1 Approccio classico

Come già detto i materiali birifrangenti sono i materiali dove la polarizzazione dell'oggetto è tale per cui  $\vec{P} \nparallel \vec{E}$ . Il vettore polarizzazione deriva dalle proprietà dei campi elettrici secondo cui un materiale sotto l'azione di un campo elettrico si polarizza, ossia sposta le cariche nel mezzo portando alla creazione di dipoli e quindi un vettore di polarizzazione. La configurazione di minima energia sarà quella in cui  $\vec{P}$  ed  $\vec{E}$  sono paralleli, di conseguenza il materiale birifrangente riceve naturalmente un momento torcente  $\vec{l}$  non nullo:

$$\vec{l} = \tau = \vec{P} \times \vec{E}$$

che spinge il sistema allo stato di minima energia. Il materiale polarizzandosi definisce un tensore costante dielettrica  $\epsilon_0 \epsilon_r = \vec{k}$ , in un materiale omogeneo questo sarebbe della forma:

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{pmatrix}$$

tale per cui tutti gli indici di rifrazione della diagonale sono identici. In un materiale birifrangente noi sappiamo invece che  $n_x, n_y$  rappresentano gli indici di rifrazione ordinario e straordinario, per definizione diversi. Proseguiremo lo studio e continuando ad assumere il verso di propagazione del campo elettrico lungo la direzione  $z$ , definendo quindi il campo elettrico avente polarizzazione ellittica, si ottiene:

$$\vec{E} = E_0 (E_0 \cos \theta \cos(z_c - \Delta), E_0 \sin \theta \cos(z_c + \Delta), 0)$$

Dove  $E_0 \cos \theta$ ,  $E_0 \sin \theta$  rappresentano le ampiezze massime del campo elettrico lungo  $x$  e lungo  $y$ , mentre  $\cos(z_c \pm \Delta)$  costituiscono i termini oscillanti sfasati di  $2\Delta$ , si ha ivi che:

$$\Delta = \frac{\pi z (n_y - n_x)}{\lambda}$$

$$z_c = w(t - \frac{nz}{c}) = wt - kz$$

$\Delta$  rappresenta gli elementi che a causa dell'effetto della lamina subiscono uno sfasamento, e si ha  $n = \frac{n_x + n_y}{2}$ , e  $w = \frac{2\pi c}{\lambda}$ .

Si può quindi applicare la definizione di vettore spostamento dielettrico  $\vec{D}$ :

$$\vec{D} = \vec{k} \cdot \vec{E} = (n_x^2 E_0 \cos \theta \cos(z_c - \Delta), n_y^2 E_0 \sin \theta \cos(z_c + \Delta), 0)$$

E sfruttare le equazioni di Maxwell per ottenere  $\vec{P}$ :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho = 4\pi(\rho_f + \rho_b) & \nabla \cdot \vec{P} &= -\rho_b \\ \Downarrow \\ \nabla \cdot \vec{D} &= 4\pi\rho_f = \nabla \cdot (\vec{E} + 4\pi\vec{P}) \Rightarrow \vec{P} = \frac{\vec{D} - \vec{E}}{4\pi}\end{aligned}$$

E' quindi possibile calcolare  $\vec{l}$ :

$$\vec{l} = \tau = \vec{P} \times \vec{E} = \frac{\vec{D} \times \vec{E}}{4\pi}$$

Sviluppando il prodotto vettoriale ed applicando la media temporale ottengo:

$$\vec{l} = \left( 0, 0, \frac{E^2}{8\pi}(n_x^2 - n_y^2)\sin(2\theta)\cos(2\Delta) \right)$$

In definitiva, integrando per un materiale birifrangente contenuto tra le due coordinate  $z_1, z_2$ , ossia integrando in  $dz$  per lo spessore, si ottiene il valore del momento torcente:

$$L = -\left(\frac{A}{4\pi}\right)^2 n\lambda \sin(2\theta) (\sin(2\Delta_2) - \sin(2\Delta_1)) \quad (1)$$

## 4.2 Approccio quantistico

Obbiettivo dell'esperimento è dimostrare la corrispondenza tra i momenti quantistici degli elettroni ed il momento torcente applicato sulle lamine, a giustificare questo ragionamento vi è l'uguaglianza tra i risultati ottenuti studiando il sistema utilizzando l'approccio classico o l'approccio quantistico.

Per derivare il risultato sfruttando la teoria quantistica, si assegna un momento angolare intrinseco (spin) ad ogni fotone polarizzato. Il valore di spin è  $\pm\hbar$ , il segno  $+$  è associato ai fotoni con polarizzazione circolare destra, mentre il  $-$  ai fotoni con polarizzazione circolare sinistra. Si considera quindi un'onda polarizzata ellitticamente che si propaga lungo l'asse  $z$ , tale che  $X_0$  e  $Y_0$  siano le componenti dell'onda nelle direzioni degli assi principali dell'ellisse; l'espressione del campo elettrico sarà del tipo:

$$\vec{E} = (X\cos(Z_q + \Delta), Y\cos(Z_q - \Delta), 0)$$

Similmente allo studio classico,  $Z_q = w(t - \frac{z}{c})$  e si ha  $2\Delta$  che rappresenta la differenza di fase tra le componenti  $x$  e  $y$ . Per il campo valgono le seguenti uguaglianze:

$$XY\sin 2\Delta = X_0Y_0 \quad X^2 + Y^2 = X_0^2 + Y_0^2$$

Sfruttando la notazione dei vettori di Jones è possibile esprimere l'onda in funzione di componenti

quali una componente circolare destra ed una circolare sinistra.

Se le ampiezze delle relative polarizzazioni sono  $L$ ,  $R$ , si può dimostrare che:

$$L^2 - R^2 = XY \sin 2\Delta \quad L^2 + R^2 = \frac{(X^2 + Y^2)}{2}$$

Il numero di fotoni polarizzati circolarmente in una determinata direzione per unità di area e di tempo è data dal rapporto dell'energia totale trasportata, ossia il vettore di Poynting, per l'energia del singolo fotone. Lavorando per i fotoni polarizzati circolarmente a sinistra si ha: vettore di Poynting:  $N_L = \frac{cL^2}{4\pi}$ , e l'energia del singolo fotone vale:  $E_L = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda}$  da cui si ottiene:

$$n_L = \frac{\lambda L^2}{8\pi^2 \hbar}$$

ed analogamente,

$$n_R = \frac{\lambda R^2}{8\pi^2 \hbar}$$

Dato che il momento angolare di ciascun fotone è  $\pm\hbar$ , si ha che i momenti angolare complessivi per unità di area e secondo si ottengono moltiplicando questo momento per la componente polarizzata circolarmente:

$$m_L = n_L \cdot \hbar = \frac{\lambda L^2}{8\pi^2}$$

$$m_R = n_R \cdot (-\hbar) = -\frac{\lambda R^2}{8\pi^2}$$

Unendo le due espressioni si ottiene il momento angolare trasmesso per unità di area e per secondo dall'onda:

$$m_L + m_R = \frac{\lambda L^2}{8\pi^2} - \frac{\lambda R^2}{8\pi^2} = \frac{\lambda XY \sin(2\Delta)}{8\pi^2} = \frac{\lambda X_0 Y_0}{8\pi^2}$$

Tale momento angolare è calcolato nel vuoto, è nostra intenzione applicare la conservazione del momento al passaggio per le superfici di un mezzo. Si applicano conseguentemente le leggi di conservazione e le equazioni di Fresnel per l'ampiezza delle onde riflesse e rifratte. Si può ottenere così il momento angolare trasmesso attraverso la superficie:

$$m = \frac{\lambda XY \sin(2\Delta)}{8\pi^2} \frac{2(n_x + n_y)}{(n_x + 1)(n_y + 1)}$$

Ponendo:

$$A \cos \theta = \frac{2X}{n_x + 1} \quad A \sin \theta = \frac{2Y}{n_y + 1}$$

$$\Delta_c = \Delta = \frac{\pi z(n_y - n_x)}{\lambda}$$

Si ottiene una nuova espressione per il momento angolare trasmesso da questo campo sulla superficie del mezzo:

$$m = \left(\frac{A}{4\pi}\right)^2 n\lambda \sin(2\theta) \sin(2\Delta_c)$$

Applicando questo studio per un mezzo birifrangente situato tra le coordinate  $z_1$  e  $z_2$  si ottiene che il momento **torcente** totale per unità di area e tempo nel mezzo è dato dalla differenza tra i momenti **angolari**. Il risultato derivante dalla seconda equazione cardinale nel caso in cui il valore di  $\vec{L}$  abbia variazioni minime nel tempo è il seguente:  $\vec{L} = \frac{d\vec{M}}{dt} \simeq \frac{\Delta\vec{M}}{\Delta t} = \Delta\vec{m}$ . Si ottiene in definitiva il risultato coerente con quanto ottenuto nell'analisi classica ottenuta in [1]:

$$\begin{aligned} L &\simeq m_1 - m_2 = \left(\frac{A}{4\pi}\right)^2 n\lambda \sin(2\theta) \sin(2\Delta_1) - \left(\frac{A}{4\pi}\right)^2 n\lambda \sin(2\theta) \sin(2\Delta_2) = \\ &= \left(\frac{A}{4\pi}\right)^2 n\lambda \sin(2\theta) (\sin(2\Delta_2) - \sin(2\Delta_1)) \end{aligned}$$

## 5 Risultati e discussioni

L'apparato sperimentale verrà utilizzato per verificare l'accordo della stima teorica con i risultati ottenuti. Data quindi:

$$L = -\left(\frac{A}{4\pi}\right)^2 n\lambda \sin(2\theta) (\sin(2\Delta_2) - \sin(2\Delta_1))$$

Si vuole verificare la dipendenza del momento torcente: dalla lunghezza d'onda della luce incidente  $\lambda$ , dall'angolo di polarizzazione  $\theta$ , e per ultima dagli elementi che creano ritardi di fase  $\Delta$ .

Per verificare l'andamento del momento torcente con la lunghezza d'onda della luce,  $L \propto \lambda$ , è sufficiente andare ad incidere sulla temperatura a cui si scalda il filamento di tungsteno usato come sorgente luminosa. Si può studiare il risultato che ci si aspetta andando a rimaneggiare gli elementi di  $L$ . Il flusso di energia di un singolo fascio luminoso che attraversa (M) ad un  $\lambda$  fissato è:

$$J_\lambda = \frac{A^2}{8\pi} (n_x \cos^2 \theta_\lambda + n_y \cos^2 \theta_\lambda) c = 2\pi c n \left(\frac{A}{4\pi}\right)^2$$

Quindi nel momento in cui si parla di un range di lunghezze d'onda  $[\lambda, \lambda + d\lambda]$  il flusso totale di energia che attraversa (M) è ottenuto integrando  $J_{\lambda tot} d\lambda$  per tutte le lunghezze d'onda incidenti sulla lamina. Il valore  $J_{\lambda tot}$  è ottenuto sommando tutti i contributi di energia dei diversi fasci luminosi che attraversano il disco. Si può quindi esprimere il valore di  $L$  integrando l'energia di tutti i fasci di energia che attraversano il disco per una singola lunghezza d'onda, per tutte le lunghezze d'onde interessate:

$$L'_\lambda = \frac{\lambda J'_\lambda \sin(2\theta_\lambda) (\sin(2\Delta_2) - \sin(2\Delta_1))}{2\pi c}$$

Il mento torcente complessivo su (M) vale quindi:

$$L = \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} L'_{\lambda} d\lambda$$

Ci si aspetta quindi una relazione del tipo lineare,  $L_{\lambda} \propto \lambda$ . Si può vedere dal seguente grafico che questa dipendenza non è perfettamente rispettata, il che è dovuto alle piccole imperfezioni dei cristalli e al fatto che la sorgente utilizzata non fosse perfettamente monocromatica. Come già accennato, per variare la lunghezza d'onda della luce generata, Beth sfrutta la legge di Wien d'accordo con le misurazioni svolte, la quale afferma che il rapporto tra la temperatura  $T$  del filamento è inversamente proporzionale alla lunghezza d'onda  $\lambda$  della luce emessa.

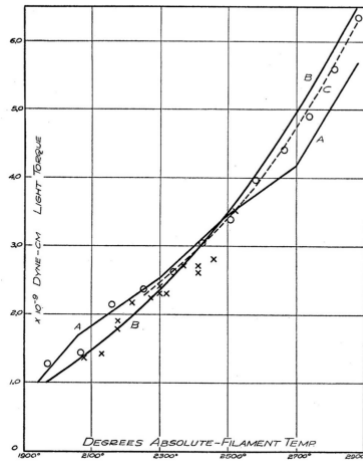


Figure 5: Grafico di  $L$  in funzione di  $T(\lambda)$  per i risultati ottenuti

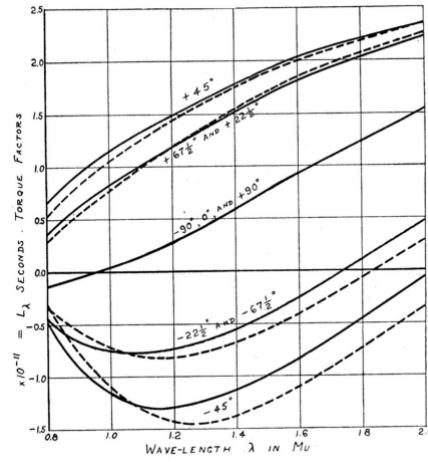


Figure 6: Grafico di  $L_{\lambda}$  in funzione di  $\lambda$  per diversi angoli di polarizzazione della luce

Il secondo tipo di misura serve a verificare la dipendenza del momento torcente dall'angolo di polarizzazione,  $L \propto \theta$ . L'angolo  $\theta$  che si va a considerare è l'angolo tra la polarizzazione lineare proveniente dal prisma di Nicol, e gli assi *fast* e *slow* del setup. Per effettuare queste misure è necessario ruotare, rispetto all'asse d'ingresso della luce, il sistema ottico contenente il prisma di Nicol. Questa misurazione crea degli errori sistematici dovuti alla non uniformità del fascio emesso e dallo schermo (d) che non potendo essere perfettamente centrato rispetto a (W) determina una non uniformità della misura nel momento in cui la luce in ingresso ruota rispetto al proprio asse. Nonostante gli errori sistematici questa misura è la più significativa dell'esperimento, ed il grafico che si ottiene al variare dell'angolo di polarizzazione è il seguente:

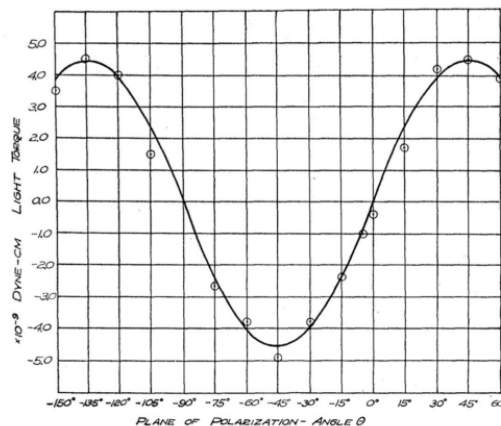


Figure 7: Grafico di  $L$  in funzione di  $\theta$  per i risultati ottenuti

Come si può vedere, il grafico rispetta un andamento sinusoidale secondo la legge:  $L \propto \sin(2\theta)$ . Di particolare interesse è vedere che il momento torcente su (M) si annulla quando la luce incidente è polarizzata linearmente in modo parallelo ad uno degli assi dei dischi ( $0^\circ, 90^\circ$ ). Similmente il modulo del momento torcente è massimo quando l'angolo tra la polarizzazione della luce e degli assi dei dischi è di  $(-135^\circ, -45^\circ, 45^\circ)$ , punti in cui la polarizzazione passa da ellittica a circolare. Questo risultato è incredibilmente rilevante perchè non solo dimostra che è solo la luce polarizzata non linearmente a trasferire momento meccanico su (M), visto che la polarizzazione circolare trasferisce momento massimo, ma che le polarizzazioni circolari destra e sinistra scambiano un momento torcente di modulo uguale e opposto. Questo risultato è anche in accordo con la previsione teorica quantistica che attribuisce ad ogni fotone uno spin intrinseco di  $\pm\hbar$ .

L'ultima misura vuole dimostrare il legame fra il momento torcente trasmesso e lo sfasamento che l'onda elettromagnetica subisce al passaggio per i materiali birifrangenti,  $L \propto \Delta$ . Per compiere questa misura si riporta il setup sperimentale alla configurazione standard e si fa variare l'angolo fra gli assi della lamina in (B) con quella in (T), modificando la posizione del piatto (B). In particolare l'andamento che ci aspettiamo di osservare incidendo sullo stato di polarizzazione dell'onda è:  $L \propto \sin(2\Delta_2) - \sin(2\Delta_1)$ , ossia una modifica dello sfasamento.

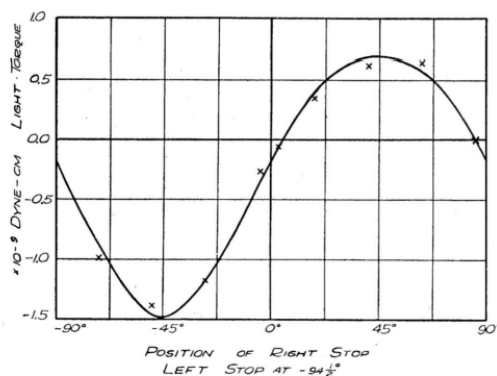


Figure 8: Grafico di  $L$  in funzione dell'angolo di *right stop* per i risultati ottenuti

Le misure effettuate generano risultati coerenti con quanto aspettato.

## 6 Conclusioni

L'esperimento di Richard Beth ha costituito uno stipite della fisica moderna, dimostrando che è possibile trasferire il momento angolare posseduto da una luce polarizzata circolarmente e il momento meccanico, constatando il legame fra essi. In particolare, sfruttando l'approccio quantistico, l'esperimento ha dimostrato che i fotoni possiedono un momento angolare di spin intrinseco, evidenziando l'importanza che ha la meccanica quantistica per uno studio più avanzato e completo della fisica moderna.