9. feladatsor: Összetett kombinatorikai feladatok

1. feladat
A 2, 3, 4, 5, 7 számjegyek egyszeri felhasználásával képezzünk ötjegyű számokat.
(a) Hány számot képezhetünk?
(b) Hány páros van közöttük?
(c) Hány olyan van, amely osztható néggyel?

2. feladat
Hány 5-tel osztható hatjegyű szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4, 5 számokból, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?

3. feladat
Egy tíztagú társaság tagjai között 4 különböző könyvet sorsolnak ki úgy, hogy egy-egy személy csak egy könyvet nyerhet. Hányféleképpen végződhet a sorsolás?

4. feladat
Egy műhelyben egy műszak alatt elkészített 500 db zár 4%-a selejtes. Hányféleképpen lehet kiválasztani 10 zárat úgy, hogy a kiválasztottak közül
(a) pontosan 5 selejtes legyen
(b) legalább 2 selejtes legyen

5. feladat
Egy 32 létszámú osztály, amelynek Nagy Pál is tagja, diákbizottságot választ. A bizottság összetétele: 1 titkár és 4 bizottsági tag. Hány olyan eset lehetséges, amikor Nagy Pál
(a) titkára a bizottságnak
(b) nem titkárként tagja a bizottságnak
(c) szerepel a bizottságban

6. feladat
Három kocsiból álló villamosra 9 ember száll fel úgy, hogy minden kocsira 3 ember jut.
Hányféleképpen történhet ez?

7. feladat
Egy 32 lapos magyarkártya-csomagból egyszerre kiveszünk 5 lapot. Hány olyan húzás lehetséges, ahol a kihúzott lapok között
(a) csak piros fordul elő
(b) pontosan 1 piros van
(c) van piros
(d) 2 piros és 3 zöld van
(e) minden szín előfordul
(f) pontosan 1 ász és 4 piros található
(g) mind ász vagy piros

8. feladat
Egy összejövetelen 9 férfi és 12 nő vesz részt. Hányféleképpen táncolhat 7 pár?

9. feladat
Hányféleképpen lehet 24 egyforma golyót 8 különböző dobozba szétosztani úgy, hogy
(a) a dobozokba akár 0 golyó is kerülhet
(b) minden dobozban legyen legalább 1 golyó
(c) minden dobozban legyen legalább 2 golyó

10. feladat
Egy felmérés során 100 embert megkérdeztek, hogy milyen forrásból szerzi a híreket. A következő válaszokat adták: tévéből 65, rádióból 38, újságból 39, tévéből és rádióból 20, tévéből és újságból 20, rádióból és újságból 9 illetve tévéből, rádióból és újságból 6. Hányan vannak akik a felsoroltak közül egyik forrásból sem szerzik a híreket?

11. feladat
Egy 8-tagú társaság moziba megy. Hányféleképpen ülhetnek le egy sorba úgy, hogy Anna és Béla valamint Dani és Eszmeralda ne kerüljön egymás mellé?

12. feladat
Egy ismerősünknek el akarunk küldeni 8 különböző fényképet. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha pontosan 5 különböző borítékot akarunk felhasználni?

13. feladat
Oldja meg a $\{0, 1, 2, ..., 23\}$ halmazon a $0,7 \cdot \binom{25}{x} = \binom{23}{x}$ egyenletet.

14. feladat
(a) Legyen $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Határozza meg a $\left(\frac{1}{a} + a^2\right)^9$ kifejezésben azt a tagot, amely nem tartalmazza az a paramétert.
(b) Határozzuk meg az $(x^7 + 2x^3)^{27}$ kifejezésben az x^{97} tag együtthatóját.
(c) Határozzuk meg az $(x^{11} + 5x^4)^{57}$ kifejezésben az x^{417} tag együtthatóját.
(d) Határozzuk meg az $(6x^8 - 11x^5)^{32}$ kifejezésben az x^{179} tag együtthatóját.

15. feladat
Igazolja a következő összefüggéseket:
(a) $\sum_{k=0}^{n} (-2)^{(n-k)} \cdot \binom{n}{k} = (-1)^n$
(b) $\sum_{k=0}^{n} 2^{(n-k)} \cdot \binom{n}{k} = 3^n$

16. feladat (*)
Mennyi lesz az $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^{73}$ kifejezésben az
(a) $(x_1)^{10} \cdot (x_2)^{23} \cdot (x_3)^{28} \cdot (x_4)^{12}$
(b) $(x_1)^9 \cdot (x_2)^{21} \cdot (x_3)^{20} \cdot (x_4)^{23}$
(c) $(x_1)^{52} \cdot (x_2)^7 \cdot (x_3) \cdot (x_4)^{13}$
(d) $(x_1)^{37} \cdot (x_2)^{11} \cdot (x_3)^{12} \cdot (x_4)^{14}$

tagok együtthatója?

17. feladat (*)
Mennyi lesz az $(2x^3 + 10x^2 - 7x - 10)^{87}$ kifejezésben az együtthatók összege?

18. feladat
(a) Végezze el a negyedik hatványra emelést az $(a + b)^4$ kifejezésben.
(b) Bizonyítsa be, hogy minden $x \geq 0$ valós számra $(x^3 + 7)^{61} \geq 7^{60} \cdot (7 + 61x^3)$.

19. feladat
Egy bolha ugrál a számegyenesen, minden ugrásnál 1 egységet lép a pozitív vagy a negatív irányba. Hányféleképpen juthat el a 0-ból 10-be pontosan 18 ugrással?

20. feladat
Adott a síkon két egyenes, az egyiken 5, a másikon 7 pont. Hány olyan háromszög van, amelyek csúcsai az adott pontok közül valók?

21. feladat
(a) Mennyi az $1, 2, 3$ számjegyek permutációjával képezhető háromjegyű számok összege?
(b) Mennyi az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ számjegyek felhasználásával képezhető hatjegyű számok összege?

22. feladat
Hány 0 van (a) 1000! (b) 10000! végén?

23. feladat
Egy dobókockával háromszor dobunk egymás után. Hány dobássorozat fordulhat elő, amelyben a 6-os dobás is szerepel?

24. feladat
Az 52-lapos francia kártyában 4 ász és 4 király van. Szétosztjuk a lapokat úgy, hogy 4 játékosnak 13-13 lapot adunk. Hányféle olyan szétosztás lehetséges, melyek során a 4 játékos mindegyikének 1-1 ász és 1-1 király jut, ha a játékosok sorrendjét megkülönböztetjük?

25. feladat
Hányféleképpen lehet 100 rekeszben 30 golyót elhelyezni, ha minden rekeszben vagy pontosan 6 golyó van, vagy egy sem, és
(a) a golyók egyformák
(b) a golyók különbözőek és minden rekeszben figyelembe vesszük a golyók sorrendjét is
(c) a golyók különbözőek de nem vesszük figyelembe a golyók sorrendjét a rekeszeken belül

26. feladat
Legyen $n, k \in \mathbb{N}$. Igazolja a következő azonosságokat:
(a) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$
(b) $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$

Felhasznált irodalom

Béres Zoltán, Csikós Pajor Gizella, Péics Hajnalka: *Algebra elméleti összefoglaló és példatár.* Bolyai Farkas Alapítvány

György Anna, Kárász Péter, Sergyán Szabolcs, Vajda István, Záborszky Ágnes: *Diszkrét matematika példatár.* Budapesti Műszaki Főiskola

Solt György: *Valószínűség-számítás.* Műszaki Kiadó (Bolyai-könyvek sorozat)

Láng Csabáné: *Kombinatorika példatár.* ELTE IK Komputeralgebra Tanszék

Koch-Gömöri Richárd, kgomoririchard@inf.elte.hu, kgomori.richard@gmail.com