NÉV: NEPTUN: GYAKORLATVEZETŐ:

1. zárthelyi dolgozat

Felhasználható idő: 90 perc, használható segédeszközök: üres papír és toll.

1. feladat 10 pont

(a) Döntse el, hogy a következő állítások igazak vagy hamisak (helyes válasz: 1 pont, nincs válasz/helytelen válasz: 0 pont). **4 pont**

(1) Egy komplex szám abszolút értéke valós szám. **I H**

(2) Ha egy reláció nem szimmetrikus, akkor biztosan antiszimmetrikus. **I H**

(3) Egy ekvivalenciareláció esetén az ekvivalenciaosztályok uniója a reláció értelmezési tartománya. **I H**

(4) Ha egy függvény injektív, akkor az inverze függvény. **I H**

(b) Határozza meg az $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 2x - 8 = y\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ reláció értelmezési tartományát és az $R^{-1}(\{-2, -4\})$ inverz képet. **3 pont**

(c) Konstruáljon az a, b, c, d elemek felhasználásával olyan R relációt, melyre: $D_R = \{a, d\}$, nem szimmetrikus, reflexív és $R(\{d\}) = \{d\}$. **3 pont**

2. feladat 13 pont

(a) Igazolja, hogy az $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y$ osztható 5-tel$\}$ reláció ekvivalenciareláció. Mik lesznek az ekvivalenciaosztályok? **7 pont**

(b) Adjon meg olyan A, B és C halmazokat, amelyekre nem teljesül a következő összefüggés: $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$. **2 pont**

(c) Igazolja, hogy tetszőleges A, B és C halmazok esetén igaz a következő összefüggés: $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$. **4 pont**

3. feladat 10 pont

Legyen $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 2y + 5 = -7x\}$ és $S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 2x \geq -7y + 2\}$. Határozza meg az $S \circ R$ és $R \circ S$ kompozíciót.

4. feladat 8 pont

(a) Döntse el a következő relációkról, hogy függvények-e. **5 pont**

$f_1 \subset (\mathbb{R} \setminus \{1\}) \times \mathbb{R}$, $f_1 = \{(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{1\}) \times \mathbb{R} \mid (x - 1)y = 2\}$

$f_2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 = y^2\}$

$f_3 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y - x^2 = -1 + 3y\}$

(b) Döntse el, hogy az $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) := 2\sqrt{x} - 13$ függvény injektív-, szürjektív-, bijektív-e. **3 pont**

5. feladat 10 pont

A trigonometrikus alak segítségével számítsa ki z értékét trigonometrikus és algebrai alakban is, majd adja meg az összes olyan w komplex számot trigonometrikus alakban, melyekre $w^3 = z$, ahol
$$z = \frac{(1+i)^{40}}{\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{12}}.$$

6. feladat 9 pont

Ábrázolja a Gauss-számsíkon a következő halmazokat:

(a) $\{z \in \mathbb{C} \mid 3 \cdot \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z \geq 2 \wedge \operatorname{Im} z < 5\}$ **4 pont**

(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| \geq 4 \wedge \operatorname{Re} z > 2\}$ **5 pont**