4. feladatsor: Relációk kompozíciója, függvények

1. feladat

Legyen $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c, d, e, f\}, C = \{2, 4, 6, 8\}$ továbbá $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$, $R = \{(1, a), (1, b), (2, c), (2, f), (3, d), (3, e), (3, f)\}$ és $S = \{(a, 2), (a, 4), (c, 6), (c, 8), (d, 2), (d, 4), (d, 6), (f, 8)\}$. Határozza meg az $S \circ R$ kompozíciót.

2. feladat

Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}; S, R \subseteq A \times A$. Határozza meg az $S \circ R$ kompozíciót.

(a) $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1)\}$ és $S = \{(1, 6), (2, 3), (2, 4), (3, 1)\}$

(b) $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 5), (5, 6), (6, 7)\}$ és $S = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 6), (5, 6), (7, 2)\}$

(c) $R = \{(2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (4, 4), (5, 3)\}$ és $S = \{(2, 6), (3, 7), (5, 1), (5, 6), (5, 8), (6, 2), (7, 7)\}$

(d) $R = \{(6, 1), (6, 2), (7, 3), (8, 7)\}$ és $S = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (7, 1), (7, 2)\}$

Kommutatív-e a kompozíció? Határozza meg például az (a) esetben az $R \circ S$ kompozíciót.

3. feladat

Legyenek $R, S \subseteq A \times A$ szimmetrikus relációk. Bizonyítsuk be, hogy $R \circ S$ szimmetrikus akkor és csak akkor, ha $R \circ S = S \circ R$.

4. feladat

Legyen $R, S \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Határozza meg az $S \circ R$ és $R \circ S$ kompozíciót.

(a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 4x = y^2 + 6\}$ és $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x - 1 = y\}$

(b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = 2y\}$ és $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^3\}$

(c) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \frac{1}{x} = y^2\}$ és $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \sqrt{x - 2} = 3y\}$

(d) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 - 6x + 5 = y\}$ és $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 = y \land 2y = x\}$

5. feladat

Tekintsük a következő relációkat:

$\rho = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |x - y| \leq 3\}$, $\varphi = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 6x - 1 = 4y + 5\}$,

$\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 4 \mid 2x + 3y\}$, $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 1,5x - 1,5 \leq y\}$

Határozza meg a következő kompozíciókat.

$\rho \circ \varphi \qquad \varphi \circ \lambda \qquad \varphi^3 \qquad \alpha \circ \rho \qquad \rho \circ \alpha$

6. feladat

Válasszuk ki a következő relációk közül a parciális függvényeket illetve a teljes függvényeket. Adja meg a függvények értelmezési tartományát, értékkészletét.

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{10, 11, 12, 13, 14\}, f \subseteq A \times B, f = \{(1, 11), (2, 11), (4, 12), (5, 10)\}$

(b) $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d, e, f\}, f \subseteq A \times B, f = \{(1, a), (2, c), (3, e), (3, f), (4, a)\}$

(c) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{a, b, c, d, e, f\}, f \subseteq A \times B, f = \{(1, a), (4, e), (5, d)\}$

(d) $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 3, 5\}, f \subseteq A \times B, f = \{(1, 1), (2, 5), (3, 5)\}$

7. feladat
Legyen $A = \{2, 4, 6, 8\}; B = \{a, b, c\}; f_1, f_2, f_3 \in A \to B$. Döntsük el, mely függvények szürjektívek.
(a) $f_1 = \{(2, a), (4, b), (6, c), (8, a)\}$
(b) $f_2 = \{(2, a), (4, b), (6, a), (8, b)\}$
(c) $f_3 = \{(2, a), (4, a), (6, a), (8, a)\}$

8. feladat
Legyen $A = \{1, 3, 5\}; B = \{p, q, r, s\}; f_1, f_2, f_3 \in A \to B$. Döntsük el, mely függvények injektívek.
(a) $f_1 = \{(1, p), (3, q), (5, r)\}$
(b) $f_2 = \{(1, s), (3, r), (5, s)\}$
(c) $f_3 = \{(1, q), (3, q), (5, q)\}$

9. feladat
Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := 3x - 4$. Bizonyítsa be, hogy a függvény bijektív, majd határozza meg az inverzét.

10. feladat
Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := 3 - |x|$. Bizonyítsa be, hogy a függvény se nem injektív, se nem szürjektív.

11. feladat
Döntsük el, hogy az alábbi relációk közül melyek függvények.
(a) $f \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, xfy \iff x \mid y$
(b) P a prímszámok halmaza, $f \subseteq P \times P, xfy \iff x \mid y$
(c) $f \subseteq \{0, 3, 5\} \times \{1, 2, 5\}, xfy \iff xy = 0$
(d) $f \subseteq \{1, 2, 5\} \times \{0, 3, 5\}, xfy \iff xy = 0$
(e) $f \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, xfy \iff$ tízes számrendszerben x ugyanazokból a számjegyekből áll mint y
(f) $f \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, xfy \iff 2x = y$
(g) $f \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, xfy \iff x^2 = y^2$
(h) $f \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, xfy \iff x^2 = y^2$
(i) $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}, xfy \iff x^2 + y^2 = 9$

12. feladat
Döntsük el, hogy az alábbi relációk közül melyek függvények.
(a) $f_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 7x = y^2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
(b) $f_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y^2 + 6y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
(c) $f_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 7x^2 - 6 = y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
(d) $f_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \mid y = |x|\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$
(e) $f_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = (x + 4)^2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
(f) $f_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \mid 2y = \sqrt{x}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$
(g) $f_7 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 7 \mid x - y\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
(h) $f_8 = \{(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \mid xy = 1\} \subseteq (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$
(i) $f_9 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid xy = 1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
(j) $f_{10} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |x - y| \leq 3\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
(k) $f_{11} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y(1 - x^2) = x - 1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

(l) $f_{12} = \{(x, y) \in (\mathbb{R}\setminus\{1, -1\})\times(\mathbb{R}\setminus\{1, -1\}) \mid y(1-x^2) = x-1\} \subseteq (\mathbb{R}\setminus\{1, -1\})\times(\mathbb{R}\setminus\{1, -1\})$
Ha a reláció függvény, döntsük el, hogy injektív, szürjektív, bijektív-e illetve ha nem függvény, akkor reflexív, szimmetrikus, tranzitív-e.

Felhasznált irodalom

Láng Csabáné: *Teljes indukció, logika, halmazok, relációk, függvények példatár.* ELTE IK Komputeralgebra Tanszék

Csikós Pajor Gizella, Péics Hajnalka: *Analízis elméleti összefoglaló és példatár.* Bolyai Farkas Alapítvány

Rimán János: *Matematikai analízis feladatgyűjtemény.* EKF Líceum Kiadó

Koch-Gömöri Richárd, kgomoririchard@inf.elte.hu, kgomori.richard@gmail.com