

2. feladatsor: Relációk tulajdonságai, osztályfelbontás, ekvivalenciareláció

1. feladat

Legyen $A = \{1, 2, 3, 4\}$ és $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Tekintsük a következő $\rho \subseteq A \times B$ binér (kétváltozós) relációt: $\rho = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (3, 6), (3, 9), (4, 5), (4, 7), (4, 9)\}$.

- (a) Határozza meg a ρ reláció értelmezési tartományát és értékkészletét.
- (b) Rajzolja meg a reláció gráfját.
- (c) Legyen $H_1 = \{1, 2, 3\}$ és $H_2 = \{4\}$. Határozza meg a ρ reláció H_1 illetve H_2 halmazra való leszűkítését.
- (d) A következő relációk közül melyek lehetnek a ρ reláció kiterjesztései?
 $\rho_1 = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 2), (2, 4), (3, 6), (3, 9), (4, 3), (4, 5), (4, 7), (4, 9)\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\} \times \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
 $\rho_2 = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (3, 6), (3, 8), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 9)\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\} \times \{5, 6, 7, 8, 9\}$
 $\rho_3 = A \times B$
 $\rho_4 = B \times A$
- (e) Határozza meg a ρ reláció inverzét, $\rho(\{1, 2\})$ képet és $\rho^{-1}(\{5, 6\})$ inverz képet.

2. feladat

Legyen $\rho \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ és $\rho = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a = 2b\}$. Határozza meg a ρ reláció értelmezési tartományát, értékkészletét, inverzét, $\rho(\{3, 4, \dots, 10\})$ képet és a ρ leszűkítését $\{1, 2, \dots, 6\}$ -ra.

3. feladat

Az $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 = 2 - x - x^2\}$ relációra határozza meg a $\{0\}$ halmaz képét és teljes inverz képét. Mely $A \subseteq \mathbb{R}$ halmazokra lesz $R(A)$, illetve $R^{-1}(A)$ egyelemű?

4. feladat

Legyen $\rho \subseteq \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$. Döntse el, mely reláció reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus illetve tranzitív.

- (a) $\rho = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$
- (b) $\rho = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\}$
- (c) $\rho = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1)\}$
- (d) $\rho = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$
- (e) $\rho = \{(1, 2)\}$
- (f) $\rho = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$
- (g) $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$
- (h) $\rho = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$

5. feladat

- (a) Lehet-e egy reláció egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus? Illetve reflexív és irreflexív? Állítását indokolja.
- (b) Bizonyítsuk be, hogy minden reláció, amely egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus, egyúttal tranzitív is.
- (c) Bizonyítsuk be, hogy minden nemüres reláció, amely egyszerre irreflexív és szimmetrikus, az nem lehet tranzitív.

6. feladat

Döntse el, mely reláció reflexív, irreflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus illetve tranzitív, továbbá határozza meg a relációk értelmezési tartományát és értékkészletét.

- (a) $R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \cdot b \text{ páratlan}\}$
- (b) $S = \{(a, b) \in B \times B \mid a \text{ vezetékneve rövidebb mint } b\text{-é}\}$ ahol $B = \{\text{budapesti lakosok}\}$
- (c) $T_X = \{(A, B) \in P(X) \times P(X) \mid A \cap B \neq \emptyset\}$ ahol X adott halmaz
- (d) $V = \{(x, y) \in K \times K \mid x \text{ belülről érinti } y\text{-t}\}$ ahol $K = \{\text{egy adott sík körvonalai}\}$

7. feladat

Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ és tekintsük a következő $\rho \subseteq A \times A$ relációt.

- (a) $\rho = \{(1, 1), (1, 5), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4), (5, 1), (5, 5)\}$
 - (b) $\rho = \{(1, 1), (1, 5), (1, 6), (1, 8), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 7), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 5), (5, 6), (5, 8), (6, 1), (6, 5), (6, 6), (6, 8), (7, 3), (7, 7), (8, 1), (8, 5), (8, 6), (8, 8)\}$
- (1) Mutassa meg, hogy ρ ekvivalenciareláció.
 - (2) Határozza meg az A halmaz ρ ekvivalenciareláció szerinti osztályfelbontását (másképp: Határozza meg az A/ρ hányadoshalmazt).

8. feladat

Írjon fel olyan ekvivalenciarelációt, amely az $\{a, b, c, d, e, f\}$ halmaz következő osztályfelbontását határozza meg.

- (a) $\{\{a, b, f\}, \{c\}, \{d, e\}\}$
- (b) $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e, f\}\}$

9. feladat

Bizonyítsa be, hogy az alábbi relációk ekvivalenciarelációk. Adja meg az ekvivalenciaosztályokat.

- (a) $R = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m + n \text{ páros szám}\}$
- (b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x^2 + y^2 \text{ osztható } 2\text{-vel}\}$
- (c) $R = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a - b \text{ racionális}\}$
- (d) $R = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m^2 - n^2 \text{ osztható } 3\text{-mal}\}$
- (e) $R = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid x_1 + y_1 = x_2 + y_2\}$
- (f) $R = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2\}$

10. feladat

Legyen $f \subseteq A \times A$ reláció. Bizonyítsuk be, hogy $f = f^{-1}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $f \subseteq f^{-1}$.

11. feladat

Konstruáljon az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmazon olyan relációt, amely

- (a) reflexív és nem irreflexív
- (b) antiszimmetrikus és nem szimmetrikus
- (c) szimmetrikus és nem antiszimmetrikus
- (d) szimmetrikus és antiszimmetrikus
- (e) nem szimmetrikus és nem antiszimmetrikus
- (f) reflexív és trichotóm
- (g) nem reflexív, nem tranzitív, nem szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem trichotóm