

1. zárthelyi dolgozat

Felhasználható idő: 90 perc, használható segédeszközök: üres papír és toll.

1. feladat 10 pont

- (a) Döntse el, hogy a következő állítások igazak vagy hamisak (helyes válasz: 1 pont, nincs válasz/helytelen válasz: 0 pont). **4 pont**
- (1) Minden valós szám komplex szám is. **I H**
 - (2) Az üres halmaznak létezik nem valódi részhalmaza. **I H**
 - (3) Tetszőleges függvény inverze függvény. **I H**
 - (4) Homogén binér relációk esetén a relációk kompozíciója kommutatív. **I H**
- (b) Határozza meg az $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 5x + 8 = 3y\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ reláció értelmezési tartományát és az $R(\{2, 4, 5\})$ képet. **3 pont**
- (c) Konstruáljon az 1, 2, 3, 4, 5 elemek felhasználásával olyan R relációt, melyre: $D_R = \{1, 4, 5\}$, nem tranzitív, szimmetrikus és $R(\{4\}) = \{1, 5\}$. **3 pont**

2. feladat 13 pont

- (a) Igazolja, hogy az $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y \text{ osztható } 3\text{-mal}\}$ reláció ekvivalenciareláció. Mik lesznek az ekvivalenciaosztályok? **7 pont**
- (b) Adjon meg olyan A, B és C halmazokat, amelyekre nem teljesül a következő összefüggés: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. **2 pont**
- (c) Igazolja, hogy tetszőleges A, B és C halmazok esetén igaz a következő összefüggés: $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. **4 pont**

3. feladat 10 pont

Legyen $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 6x - 1 = 4y\}$ és $S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y + 2 = 7x\}$. Határozza meg az $S \circ R$ és $S \circ R^{-1}$ kompozíciót.

4. feladat 8 pont

- (a) Döntse el a következő relációkról, hogy függvények-e. **5 pont**
- $f_1 \subset \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$, $f_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \mid 2x^3 = 7y^2\}$
 - $f_2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \sqrt{x} = \sqrt{y}\}$
 - $f_3 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y - x^2 = 5\}$
- (b) Döntse el, hogy az $f : [-2; \infty[\rightarrow [-1; \infty[$, $f(x) := 6x^2 - 1$ függvény injektív-, szürjektív-, bijektív-e. **3 pont**

5. feladat 10 pont

A trigonometrikus alak segítségével számítsa ki z értékét trigonometrikus és algebrai alakban is, majd adja meg az összes olyan w komplex számot trigonometrikus alakban, melyekre $w^3 = z$, ahol

$$z = \frac{(1 - i)^{30}}{(1 + \sqrt{3}i)^{11}}.$$

6. feladat 9 pont

Ábrázolja a Gauss-számsíkon a következő halmazokat:

- (a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1 + 2i| \geq 16 \wedge \operatorname{Re}(z) > 2\}$ **4 pont**
- (b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| = |z + 2i| \wedge |z - i| = |z + 2|\}$ **5 pont**