

10. feladatsor: Oszthatóság**1. feladat**

Döntse el mely oszthatósági reláció igaz az egész számok halmazán.

$$2 \mid 2 \quad 2 \mid 3 \quad 2 \mid 4 \quad 7 \mid 1 \quad 8 \mid 88 \quad 4 \mid 0 \quad 0 \mid 7 \quad 0 \mid 0$$

2. feladat

Legyen $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Döntse el, hogy igaz-e a következő kijelentés: 'Ha $c \mid a$ és $c \mid b$ akkor $c \mid 2a + 5b$ és $c \mid 3a + 7b$.' Igaz-e az állítás megfordítása?

3. feladat

Legyen $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Igazolja, hogy ha $c \mid a + b$ és $c \mid b$ akkor $c \mid a$.

4. feladat

Igazolja, hogy bármely három egymást követő természetes szám összege osztható 3-mal.

5. feladat

Bizonyítsuk be, hogy három egymást követő egész szám szorzata osztható 6-tal.

6. feladat

Bizonyítsuk be, hogy négy egymást követő egész szám szorzata osztható 24-gyel.

7. feladat

Igazoljuk, hogy ha n páratlan egész szám, akkor $n^2 - 1$ osztható 8-cal.

8. feladat (*)

- (a) Mik lesznek az egységek \mathbb{N} -ben, \mathbb{Z} -ben, \mathbb{Q} -ban illetve a Gauss-egészek körében?
(b) Mik lesznek a $2 - 7i \in \mathbb{C}$ asszociáltjai a Gauss-egészek körében?

9. feladat (*)

Mik lesznek az egységek a páros számok halmazán?

10. feladat

Határozza meg, hány pozitív egész osztója van a (a) 130 (b) 228 (c) 5000
(d) 138600 (e) $10!$ számoknak.

11. feladat

Végezze el a következő maradékos (euklideszi) osztásokat.

- (a) $7 : 3$ (b) $8 : 4$ (c) $(-2) : 5$ (d) $6 : (-5)$

12. feladat

Igazoljuk, hogy minden 3-nál nagyobb prímszám felírható $6k + 1$ vagy $6k + 5$ ($k \in \mathbb{Z}$) alakban.

13. feladat

Igazoljuk, hogy ha n 3-nál nagyobb prímszám, akkor $n^2 - 1$ osztható 24-gyel.

14. feladat

Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ -re $n^3 + 5n$ osztható 6-tal.

15. feladat

Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromjegyű természetes számot kétszer egymás mellé írunk, akkor az így kapott hatjegyű szám osztható 7-tel, 11-gyel és 13-mal.

16. feladat

Bizonyítsuk be, hogy csupán egyetlen egy olyan $2p + 1$ (p prímszám) alakú egész szám létezik, amely köbszám is.

17. feladat

Igazoljuk, hogy $n > 1$ természetes szám esetén

(a) $n^4 + 4$

(b) $n^4 + n^2 + 1$

összetett szám.

Felhasznált irodalom

Béres Zoltán, Csikós Pajor Gizella, Péics Hajnalka: *Algebra elméleti összefoglaló és példatár*.
Bolyai Farkas Alapítvány

Kovács Attila: *Az informatika matematikai alapjai*. ELTE IK Komputeralgebra Tanszék

Koch-Gömöri Richárd, kgomoririchard@inf.elte.hu, kgomori.richard@gmail.com