1. feladatsor: Matematikai logika

1. feladat
Döntsük el hogy igazak vagy hamisak az alábbi állítások.
(a) A 3 prímszám.
(b) A 4 prímszám.
(c) A 2 osztója a 4-nek.
(d) A 3 prímszám és a 3 osztója a 6-nak.
(e) A 6 prímszám vagy a 7 prímszám.
(f) A 2 prímszám és a 3 prímszám és a 4 prímszám.
Jelölje $P(x)$ azt hogy x prímszám, továbbá $a \mid b$ azt hogy a osztója b-nek. Írja fel formulákkal az (a)-(f) állításokat.

2. feladat
Jelölje A azt az állítást, hogy 'A 6 prímszám', továbbá B azt hogy 'A 4 osztója a 20-nak'. Fogalmazza meg a $\neg A \wedge B$ állítást, továbbá állapítsa meg a logikai értékét.

3. feladat
Legyen x valós szám. Írja fel formulával, hogy x mikor értelmezhető a következő valós kifejezésben.

$$\frac{\sqrt{2x+5}}{\frac{1}{2}\,|x-1|} + \frac{1}{x} + 3$$

4. feladat
Legyenek A, B, C logikai állítások. Írjon fel olyan logikai állítást, amely pontosan akkor igaz, ha
(a) A és B egyszerre igaz, vagy ha C tagadása igaz
(b) A tagadása és B egyszerre igaz
(c) A és B tagadásai közül pontosan az egyik igaz

5. feladat
Legyen x természetes szám. Jelölje $P(x)$ azt hogy x prímszám, $E(x)$ azt hogy x páros, $O(x)$ azt hogy x páratlan, továbbá $a \mid b$ azt hogy a osztója b-nek. Írja fel a következő állításokat formulákkal, majd állapítsa meg logikai értéküket.
(a) Ha a 4 osztója x-nek, akkor x páros szám.
(b) Ha a 2 osztója x-nek, akkor x páros szám.
(c) Ha x nem páros és x nem páratlan, akkor a 4 prímszám.
(d) Ha x 2-től különböző prímszám, akkor x páratlan szám.
Döntse el mely állítások megfordítása igaz.

6. feladat
Jelölje $a \mid b$ azt hogy a osztója b-nek. Állapítsa meg a következő formulák logikai értékét.
(a) $\forall x \in \mathbb{N}^+ \exists y \in \mathbb{N}^+ \, (x \mid y)$
(b) $\forall x \in \mathbb{N}^+ \forall y \in \mathbb{N}^+ \, (x \mid y)$
(c) $\exists x \in \mathbb{N}^+ \forall y \in \mathbb{N}^+ \, (x \mid y)$

(d) $\exists x \in \mathbb{N}^+ \exists y \in \mathbb{N}^+ \, (x \mid y)$

7. feladat

Formalizálja az alábbi kijelentéseket (alkalmas jelölések bevezetésével írja fel a kijelentéseket logikai formulákkal).

(a) Minden prímszámnál van nagyobb prímszám.
(b) Minden 1-nél nagyobb egész számnak van prímosztója.
(c) Bármely két különböző racionális szám között van egy racionális szám.
(d) Az $x^2 + 1 = 0$ egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazán.
(e) Pontosan egy olyan valós szám létezik, amelynek a négyzete egyenlő 0-val.
(f) Pontosan két olyan valós szám létezik, amelynek a négyzete egyenlő 9-cel.

8. feladat

Tagadjuk a következő állítást: 'Minden jelenlévő személy fiú.'

9. feladat

Tagadjuk a következő állításokat.

(a) $\forall x \in \mathbb{R} \, (x = 0)$
(b) $\exists x \in \mathbb{R} \, (x^2 < 0)$
(c) $\forall x \in \mathbb{R} \, (x \cdot 0 = 0)$

10. feladat

Legyen $x, y \in \mathbb{N}^+$, jelölje $P(x), E(x), O(x)$ illetve $x \mid y$ rendre azt, hogy x prím, x páros, x páratlan illetve hogy x osztója y-nak.

(a) Fordítsuk le magyar nyelvre az alábbi formulákat, majd állapítsuk meg hogy igaz-e az állítás.
(b) Tagadjuk a formulákat formálisan.

(1) $\forall x \in \mathbb{N}^+ \, (2 \mid x \to E(x))$
(2) $\exists x \in \mathbb{N}^+ \, (E(x) \wedge x \mid 6)$
(3) $\forall x \in \mathbb{N}^+ \, (\neg E(x) \to \neg(2 \mid x))$
(4) $\forall x \in \mathbb{N}^+ \, (E(x) \to (\forall y \in \mathbb{N}^+ \, (x \mid y \to E(y))))$
(5) $\forall x \in \mathbb{N}^+ \, (P(x) \to (\exists y \in \mathbb{N}^+ \, (E(y) \wedge x \mid y)))$

11. feladat

Legyen A az emberek halmaza, $x, y \in A$. Jelölje $J(x), B(x), U(x)$ illetve $T(x, y)$ rendre azt hogy x jogász, x bíró, x ügyeskedő illetve x tiszteli y-t. Formalizáljuk a következő állításokat.

(a) Minden bíró jogász.
(b) Vannak ügyeskedő jogászok.
(c) Nincs ügyeskedő bíró.
(d) A bírók kivételével minden jogász ügyeskedő.
(e) Bizonyos jogászok csak bírókat tisztelnek.
(f) Bizonyos ügyeskedők egyetlen jogászt sem tisztelnek.
(g) Csak bírók tisztelnek bírókat.
(h) Minden bíró csak bírókat tisztel.

12. feladat

Legyenek A, B, C logikai változók. Igazoljuk a következő azonosságokat.

(a) $A \leftrightarrow B = (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$
(b) $A \to B = \neg B \to \neg A$
(c) $(A \wedge B) \to C = A \to (B \to C)$
(d) $A \to (A \wedge B) = \neg(A \wedge \neg B)$

13. feladat
Állapítsa meg a következő állítások logikai értékét ($\emptyset$ az üres halmaz).
(a) $\exists x \in \emptyset\, (2 \mid x)$
(b) $\forall x \in \emptyset\, (2x + 7 > 0)$

14. feladat
Tagadja a következő állításokat formálisan.
(a) $\nexists x \in \mathbb{Z}\, (2 \mid x)$
(b) $\not\forall x \in \mathbb{Z}\, (3 \mid x)$

Felhasznált irodalom

Béres Zoltán, Csikós Pajor Gizella, Péics Hajnalka: *Algebra elméleti összefoglaló és példatár.* Bolyai Farkas Alapítvány

Láng Csabáné: *Teljes indukció, logika, halmazok, relációk, függvények példatár.* ELTE IK Komputeralgebra Tanszék

Urbán János: *Matematikai logika.* Műszaki Kiadó (Bolyai-könyvek sorozat)

Koch-Gömöri Richárd, kgomoririchard@inf.elte.hu, kgomori.richard@gmail.com