NÉV: NEPTUN: GYAKORLATVEZETŐ:

1. zárthelyi dolgozat

Felhasználható idő: 90 perc, használható segédeszközök: üres papír és toll.

1. feladat 10 pont

(a) Döntse el, hogy a következő állítások igazak vagy hamisak (helyes válasz: 1 pont, nincs válasz/helytelen válasz: 0 pont). **4 pont**

(1) Minden valós szám komplex szám is. **I H**
(2) Az üres halmaznak létezik nem valódi részhalmaza. **I H**
(3) Tetszőleges függvény inverze függvény. **I H**
(4) Homogén binér relációk esetén a relációk kompozíciója kommutatív. **I H**

(b) Határozza meg az $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid 5x+8 = 3y\} \subseteq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ reláció értelmezési tartományát és az $R(\{2, 4, 5\})$ képet. **3 pont**

(c) Konstruáljon az $1, 2, 3, 4, 5$ elemek felhasználásával olyan R relációt, melyre: $D_R = \{1, 4, 5\}$, nem tranzitív, szimmetrikus és $R(\{4\}) = \{1, 5\}$. **3 pont**

2. feladat 13 pont

(a) Igazolja, hogy az $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y$ osztható 3-mal$\}$ reláció ekvivalenciareláció. Mik lesznek az ekvivalenciaosztályok? **7 pont**

(b) Adjon meg olyan A, B és C halmazokat, amelyekre nem teljesül a következő összefüggés: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. **2 pont**

(c) Igazolja, hogy tetszőleges A, B és C halmazok esetén igaz a következő összefüggés: $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. **4 pont**

3. feladat 10 pont

Legyen $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 6x - 1 = 4y\}$ és $S \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y + 2 = 7x\}$. Határozza meg az $S \circ R$ és $S \circ R^{-1}$ kompozíciót.

4. feladat 8 pont

(a) Döntse el a következő relációkról, hogy függvények-e. **5 pont**

$f_1 \subseteq \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+,\ f_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \mid 2x^3 = 7y^2\}$
$f_2 \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ f_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \sqrt{x} = \sqrt{y}\}$
$f_3 \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ f_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y - x^2 = 5\}$

(b) Döntse el, hogy az $f : [-2; \infty[\to [-1; \infty[,\ f(x) := 6x^2 - 1$ függvény injektív-, szürjektív-, bijektív-e. **3 pont**

5. feladat 10 pont

A trigonometrikus alak segítségével számítsa ki z értékét trigonometrikus és algebrai alakban is, majd adja meg az összes olyan w komplex számot trigonometrikus alakban, melyekre $w^3 = z$, ahol
$z = \dfrac{(1-i)^{30}}{\left(1+\sqrt{3}i\right)^{11}}$.

6. feladat 9 pont

Ábrázolja a Gauss-számsíkon a következő halmazokat:

(a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1 + 2i| \geq 16 \wedge \mathrm{Re}(z) > 2\}$ **4 pont**
(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| = |z + 2i| \wedge |z - i| = |z + 2|\}$ **5 pont**