

Diszkrét matematika I. feladatok

Harmadik alkalom (2013.09.23-27.)

1. Bizonyítsuk be, hogy 6 osztója az $n(n+1)(2n+1)$ -nek, ahol n egész szám.
2. Jelöljön m egész számot. Bizonyítsuk be, hogy $m^5 - m$ osztható 6-tal.
3. Bizonyítsuk be, hogy ha a 4-gyel nem osztható páros szám, akkor $a(a^2 - 1)(a^2 - 4)$ osztható 960-nal.
4. Bizonyítsuk be, hogy három egymás után következő egész szám köbének összege osztható
 - a) a középső szám 3-szorosával;
 - b) 9-cel.
5. Bizonyítsuk be, hogy ha a tízes számrendszerben ábrázolt bármelyik háromjegyű természetes számot kétszer egymás mellé írjuk, akkor az így kapott hatjegyű szám osztható 7-tel, 11-gyel és 13-mal.
6. Végezzük el a megadott műveleteket az adott számrendszerben:
 - a) $10011001_{(2)} + 101011010_{(2)}$;
 - b) $1001_{(2)} \cdot 1101_{(2)}$;
 - c) $1221_{(3)} \cdot 2112_{(3)}$;
 - d) $1234_{(5)} + 4321_{(5)}$;
 - e) $1234_{(5)} \cdot 4321_{(5)}$;
 - f) $1236_{(7)} + 6321_{(7)}$;
 - g) $10011001_{(2)} : 101_{(2)}$;
 - h) $110110010101101_{(2)} : 101111001_{(2)}$;
 - h) $12011_{(3)} : 201_{(3)}$;
7. Számítsd ki euklideszi algoritmussal az alábbi számpárok legnagyobb közös osztóját és add meg a legkisebb közös többszörösüket is!
 - a) $a = 86, b = 31$;
 - b) $a = 139, b = 102$;
 - c) $a = 255, b = 111$;
 - d) $a = 332, b = 88$;
 - e) $a = 675, b = 471$;
 - f) $a = 432, b = 300$;
 - g) $a = 756, b = 333$;
 - h) $a = 504, b = 150$;
 - i) $a = 420, b = 154$;
 - j) $a = 1080, b = 285$;
 - k) $a = 2016, b = 880$;
 - l) $a = 30, b = 22$;
 - m) $a = 430, b = 300$;
 - n) $a = 2355, b = 450$;
 - o) $a = 300, b = 132$;
 - p) $a = 518, b = 154$.
8. Az előző feladatban szereplő a, b számpárok esetén írd fel a legnagyobb közös osztót $ax + by = (a, b)$ alakban!

Szorgalmi feladatok

10. Bizonyítsuk be, hogy öt egymás követő szám négyzetének összege sosem lesz négyzetszám!
11. (Bináris loko) Igazoljuk az következő összefüggéseket: $(a, b) = (|a|, |b|)$, $(2a, 2b) = 2(a, b)$, $(a, b) = (a - b, b)$ továbbá páratlan b esetén $(2a, b) = (a, b)$. Az észrevételek felhasználásával írjon hatékony programot bináris számítógépre, mely kiszámolja a legnagyobb közös osztót.