

## 2. feladatsor: Halmazok

### 1. feladat

Legyen az alaphalmaz  $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , továbbá legyen  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{0, 2, 4, 8\}$ ,  $C = \{2, 3, 5, 7\}$ .

(a) Határozza meg a következő halmazokat:

$$A \cap B \qquad B \cup C \qquad A \setminus C \qquad \overline{C}$$

(b) Tekintsük az  $X = \{A, B, C\}$ ,  $Y = \{\{0, 2, 4, 6, 8\}, \{1, 3, 5, 7, 9\}\}$  halmazrendszereket. Határozza meg a következő halmazokat.

$$\cap X \qquad \cup X \qquad X \cup Y \qquad X \cap Y$$

(c) Állapítsa meg a következő kijelentések logikai értékét:

$$\begin{array}{llll} 4 \in B & A \subseteq B & \{\emptyset\} \subseteq X \cup Y & 3 \in A \cap B \\ \{1, 2\} \subseteq A & A \in X \cup Y & A \subseteq X \cup Y & C \cap \emptyset = \emptyset \\ 2 \subseteq A & \{2\} \subseteq A & 2 \in X \cup Y & \{2\} \in X \cap Y \end{array}$$

### 2. feladat

Írja fel az  $\{1, 2, 3\}$  halmaz hatványhalmazát.

### 3. feladat

Legyen  $A = \{a, b, c, d\}$ ,  $B = \{c, d\}$ ,  $C = \{a, e\}$ . Mutassuk meg, hogy ekkor  $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (B \cap C)$ . Igaz-e ez az állítás tetszőleges  $A, B, C$  halmazokra?

### 4. feladat

Tekintsük az  $X = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{0, 2, 3, 7\}\}$  halmazrendszert. Határozza meg a következő halmazokat:  $\cap X$ ,  $X \cup \{5, 6, 7, 8\}$ ,  $\cup (X \cup \{5, 6, 7, 8\})$ ,  $\cap (X \cup \{5, 6, 7, 8\})$ ,  $X \cup \{\{3, 5, 7\}, \{1\}, \{2\}\}$ ,  $\cup (X \cup \{\{3, 5, 7\}, \{1\}, \{2\}\})$ ,  $\cap (X \cup \{\{3, 5, 7\}, \{1\}, \{2\}\})$ .

### 5. feladat

Határozza meg az  $A, B, C$  halmazok elemeit, ha tudjuk, hogy  $A \setminus B = \{1, 3, 5\}$ ,  $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \emptyset$ ,  $C \setminus B = \{2, 4\}$  és  $(A \cap B) \setminus C = \{6\}$ .

### 6. feladat

Legyenek  $A, B, C$  tetszőleges halmazok,  $U$  az alaphalmaz,  $A, B, C \subseteq U$ . Igazoljuk a következő azonosságokat.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & A \cup B = B \cup A \\ \text{(b)} & (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ \text{(c)} & A \cap B = B \cap A \\ \text{(d)} & (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\ \text{(e)} & A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ \text{(f)} & A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ \text{(g)} & \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ \text{(h)} & \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \\ \text{(i)} & A \cup \overline{A} = U \\ \text{(j)} & A \cap \overline{A} = \emptyset \\ \text{(k)} & \overline{\overline{A}} = A \end{array}$$

**7. feladat**

Legyenek  $A, B, C$  tetszőleges halmazok. Igazoljuk a következő állításokat.

- (a) ha  $A \subseteq C$  és  $B \subseteq C$  akkor  $A \cup B \subseteq C$
- (b) ha  $A \subseteq B$  és  $A \subseteq C$  akkor  $A \subseteq B \cap C$
- (c)  $A \cup (B \cap A) = A$

**8. feladat**

Legyen  $A$  és  $B$  nemüres halmazok. Igazolja a következő egyenlőségeket.

- (a)  $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$
- (b)  $(A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = \overline{B}$

**9. feladat**

Legyen az alaphalmaz  $U$  továbbá  $A, B, C \subseteq U$  tetszőleges halmazok. Igazolja a következő egyenlőségeket.

- (a)  $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
- (b)  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
- (c)  $A \setminus (A \setminus (B \setminus C)) = A \cap B \cap \overline{C}$

**10. feladat**

Döntse el a következő halmazrendszerekről, hogy melyek lehetnek az  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  halmaz valamely osztályfelbontása.

- (a)  $X_1 = \{\{1, 7, 8\}, \{2, 5, 6\}, \{3, 4\}\}$
- (b)  $X_2 = \{\{1, 6, 7, 8\}, \{2, 3, 4\}, \{5, 6\}\}$
- (c)  $X_3 = \{\{1, 2, 3\}, \{4\}, \{5, 6, 7, 8\}\}$
- (d)  $X_4 = \{\{1, 3, 5, 7\}, \{2, 4, 6, 8\}\}$
- (e)  $X_5 = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8\}, \emptyset\}$

**11. feladat**

Legyen  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{a, b, c\}$  és  $C = \{2, 3, 4\}$ . Határozza meg az  $A \times A$ ,  $A \times B$ ,  $A \times A \times B$ ,  $B \times A$ ,  $(A \times A) \times B$ ,  $A \times (A \times B)$ ,  $A \triangle B$ ,  $A \triangle C$  halmazokat.

**12. feladat**

Legyenek  $A, B, C$  nemüres halmazok. Igazolja a következő egyenlőséget:  $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ .

**13. feladat**

Legyenek  $A, B, C, D$  nemüres halmazok. Bizonyítsuk be, hogy  $A \times B \subseteq C \times D$  akkor és csak akkor teljesül, ha  $A \subseteq C$  és  $B \subseteq D$ .

**14. feladat**

Legyenek  $A$  és  $B$  tetszőleges halmazok. Bizonyítsuk be, hogy  $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$ , ahol  $P(A)$  jelöli  $A$  hatványhalmazát. Igaz-e az állítás unióval?

**15. feladat**

Döntse el, hogy igazak-e a következő egyenlőségek tetszőleges  $A, B, C$  halmazokra. Állításait bizonyítsa.

- (a)  $\overline{A} \cap B = B \setminus A$
- (b)  $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus B) \cap C$
- (c)  $(A \cup B) \cap (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \setminus B)$
- (d)  $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

### Felhasznált irodalom

Béres Zoltán, Csikós Pajor Gizella, Péics Hajnalka: *Algebra elméleti összefoglaló és példatár*.  
Bolyai Farkas Alapítvány

Urbán János: *Matematikai logika*. Műszaki Kiadó (Bolyai-könyvek sorozat)

Ismeretlen Szerző: *Matematikai analízis jegyzet*. (9. feladat)

Rimán János: *Matematikai analízis feladatgyűjtemény*. EKF Líceum Kiadó

Koch-Gömöri Richárd, kgomoririchard@inf.elte.hu, kgomori.richard@gmail.com