# 2. feladatsor: Relációk tulajdonságai, osztályfelbontás, ekvivalenciareláció

**1. feladat**

Legyen $A = \{1,2,3,4\}$ és $B = \{5,6,7,8,9\}$. Tekintsük a következő $\rho \subseteq A \times B$ binér (kétváltozós) relációt: $\rho = \{(1,5),(1,6),(1,7),(3,6),(3,9),(4,5),(4,7),(4,9)\}$.

(a) Határozza meg a $\rho$ reláció értelmezési tartományát és értékkészletét.

(b) Rajzolja meg a reláció gráfját.

(c) Legyen $H_1 = \{1,2,3\}$ és $H_2 = \{4\}$. Határozza meg a $\rho$ reláció $H_1$ illetve $H_2$ halmazra való leszűkítését.

(d) Határozza meg a $\rho$ reláció inverzét, $\rho(\{1,2\})$ képet és $\rho^{-1}(\{5,6\})$ inverz képet.

**2. feladat**

Legyen $\rho \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ és $\rho = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a = 2b\}$. Határozza meg a $\rho$ reláció értelmezési tartományát, értékkészletét, inverzét.

**3. feladat**

Az $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 = 2 - x - x^2\}$ relációra határozza meg a $\{0\}$ halmaz képét és teljes inverz képét. Mely $A \subseteq R$ halmazokra lesz $R(A)$, illetve $R^{-1}(A)$ egyelemű?

**4. feladat**

Legyen $\rho \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$. Döntse el, mely reláció reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus illetve tranzitív.

(a) $\rho = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

(b) $\rho = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3)\}$

(c) $\rho = \{(1,2),(1,3),(2,1),(3,1)\}$

(d) $\rho = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$

(e) $\rho = \{(1,2)\}$

(f) $\rho = \{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}$

(g) $\rho = \{(1,1),(2,2),(2,3),(3,3)\}$

(h) $\rho = \{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$

**5. feladat**

(a) Lehet-e egy reláció egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus? Illetve reflexív és irreflexív? Állítását indokolja.

(b) Bizonyítsuk be, hogy minden reláció, amely egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus, egyúttal tranzitív is.

(c) Bizonyítsuk be, hogy minden nemüres reláció, amely egyszerre irreflexív és szimmetrikus, az nem lehet tranzitív.

**6. feladat**

Döntse el, mely reláció reflexív, irreflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus illetve tranzitív, továbbá határozza meg a relációk értelmezési tartományát és értékkészletét.

(a) $R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \cdot b \text{ páratlan}\}$

(b) $S = \{(a,b) \in B \times B \mid a \text{ vezetékneve rövidebb mint } b\text{-é}\}$ ahol $B = \{\text{budapesti lakosok}\}$

(c) $T_X = \{(A, B) \in P(X) \times P(X) \mid A \cap B \neq \emptyset\}$ ahol $X$ adott halmaz
(d) $V = \{(x, y) \in K \times K| \mid x$ belülről érinti $y$-t$\}$ ahol $K = \{$egy adott sík körvonalai$\}$

**7. feladat**
Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ és tekintsük a következő $\rho \subseteq A \times A$ relációt.
(a) $\rho = \{(1, 1), (1, 5), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4), (5, 1), (5, 5)\}$
(b) $\rho = \{(1, 1), (1, 5), (1, 6), (1, 8), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 7), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 5), (5, 6), (5, 8), (6, 1), (6, 5), (6, 6), (6, 8), (7, 3), (7, 7), (8, 1), (8, 5), (8, 6), (8, 8)\}$

(1) Mutassa meg, hogy $\rho$ ekvivalenciareláció.
(2) Határozza meg az $A$ halmaz $\rho$ ekvivalenciareláció szerinti osztályfelbontását (másképp: Határozza meg az $A/\rho$ hányadoshalmazt).

**8. feladat**
Írjon fel olyan ekvivalenciarelációt, amely az $\{a, b, c, d, e, f\}$ halmaz következő osztályfelbontását határozza meg.
(a) $\{\{a, b, f\}, \{c\}, \{d, e\}\}$
(b) $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e, f\}\}$

**9. feladat**
Bizonyítsa be, hogy az alábbi relációk ekvivalenciarelációk. Adja meg az ekvivalenciaosztályokat.
(a) $R = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m + n$ páros szám$\}$
(b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x^2 + y^2$ osztható 2-vel$\}$
(c) $R = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a - b$ racionális$\}$
(d) $R = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m^2 - n^2$ osztható 3-mal$\}$
(e) $R = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid x_1 + y_1 = x_2 + y_2\}$
(f) $R = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2\}$

**10. feladat**
Legyen $f \subseteq A \times A$ reláció. Bizonyítsuk be, hogy $f = f^{-1}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $f \subseteq f^{-1}$.

**11. feladat**
Konstruáljon az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmazon olyan relációt, amely
(a) reflexív és nem irreflexív
(b) antiszimmetrikus és nem szimmetrikus
(c) szimmetrikus és nem antiszimmetrikus
(d) szimmetrikus és antiszimmetrikus
(e) nem szimmetrikus és nem antiszimmetrikus
(f) reflexív és trichotóm
(g) nem reflexív, nem tranzitív, nem szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem trichotóm