

## 2. feladatsor: Relációk tulajdonságai, osztályfelbontás, ekvivalenciareláció

### 1. feladat

Legyen  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  és  $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ . Tekintsük a következő  $\rho \subset A \times B$  binér (kétváltozós) relációt:  $\rho = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (3, 6), (3, 9), (4, 5), (4, 7), (4, 9)\}$ .

- (a) Határozza meg a  $\rho$  reláció értelmezési tartományát és értékkészletét.
- (b) Rajzolja meg a reláció gráfját.
- (c) Legyen  $H_1 = \{1, 2, 3\}$  és  $H_2 = \{4\}$ . Határozza meg a  $\rho$  reláció  $H_1$  illetve  $H_2$  halmazra való leszűkítését.
- (d) A következő relációk közül melyek lehetnek a  $\rho$  reláció kiterjesztései?  
 $\rho_1 = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 2), (2, 4), (3, 6), (3, 9), (4, 3), (4, 5), (4, 7), (4, 9)\} \subset \{1, 2, 3, 4\} \times \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$   
 $\rho_2 = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (3, 6), (3, 8), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 9)\} \subset \{1, 2, 3, 4\} \times \{5, 6, 7, 8, 9\}$   
 $\rho_3 = A \times B$   
 $\rho_4 = B \times A$
- (e) Határozza meg a  $\rho$  reláció inverzét,  $\rho(\{1, 2\})$  képet és  $\rho^{-1}(\{5, 6\})$  inverz képet.

### 2. feladat

Legyen  $\rho \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  és  $\rho = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a = 2b\}$ . Határozza meg a  $\rho$  reláció értelmezési tartományát, értékkészletét, inverzét,  $\rho(\{3, 4, \dots, 10\})$  képet és a  $\rho$  leszűkítését  $\{1, 2, \dots, 6\}$ -ra.

### 3. feladat

Az  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 = 2 - x - x^2\}$  relációra határozza meg a  $\{0\}$  halmaz képét és teljes inverz képét. Mely  $A \subset \mathbb{R}$  halmazokra lesz  $R(A)$ , illetve  $R^{-1}(A)$  egyelemű?

### 4. feladat

Legyen  $\rho \subset \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ . Döntse el, mely reláció reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus illetve tranzitív.

- (a)  $\rho = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$
- (b)  $\rho = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\}$
- (c)  $\rho = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1)\}$
- (d)  $\rho = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$
- (e)  $\rho = \{(1, 2)\}$
- (f)  $\rho = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$
- (g)  $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$
- (h)  $\rho = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$

### 5. feladat

- (a) Lehet-e egy reláció egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus? Illetve reflexív és irreflexív? Állítását indokolja.
- (b) Bizonyítsuk be, hogy minden reláció, amely egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus, egyúttal tranzitív is.
- (c) Bizonyítsuk be, hogy minden nemüres reláció, amely egyszerre irreflexív és szimmetrikus, az nem lehet tranzitív.

**6. feladat**

Döntse el, mely reláció reflexív, irreflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus illetve tranzitív, továbbá határozza meg a relációk értelmezési tartományát és értékkészletét.

- (a)  $R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \cdot b \text{ páratlan}\}$
- (b)  $S = \{(a, b) \in B \times B \mid a \text{ vezetékneve rövidebb mint } b\text{-é}\}$  ahol  $B = \{\text{budapesti lakosok}\}$
- (c)  $T_X = \{(A, B) \in P(X) \times P(X) \mid A \cap B \neq \emptyset\}$  ahol  $X$  adott halmaz
- (d)  $V = \{(x, y) \in K \times K \mid x \text{ belülről érinti } y\text{-t}\}$  ahol  $K = \{\text{egy adott sík körvonalai}\}$

**7. feladat**

Tekintsük a következő  $\rho$  relációt.

- (a)  $\rho = \{(1, 1), (1, 5), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4), (5, 1), (5, 5)\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- (b)  $\rho = \{(1, 1), (1, 5), (1, 6), (1, 8), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 7), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 5), (5, 6), (5, 8), (6, 1), (6, 5), (6, 6), (6, 8), (7, 3), (7, 7), (8, 1), (8, 5), (8, 6), (8, 8)\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

- (1) Mutassa meg, hogy  $\rho$  ekvivalenciareláció.
- (2) Határozza meg az  $A$  halmaz  $\rho$  ekvivalenciareláció szerinti osztályfelbontását (másképp: Határozza meg az  $A/\rho$  hányadoshalmazt).

**8. feladat**

Írjon fel olyan ekvivalenciarelációt, amely az  $\{a, b, c, d, e, f\}$  halmaz következő osztályfelbontását határozza meg.

- (a)  $\{\{a, b, f\}, \{c\}, \{d, e\}\}$
- (b)  $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e, f\}\}$

**9. feladat**

Bizonyítsa be, hogy az alábbi relációk ekvivalenciarelációk. Adja meg az ekvivalenciaosztályokat.

- (a)  $R = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m + n \text{ páros szám}\}$
- (b)  $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x^2 + y^2 \text{ osztható } 2\text{-vel}\}$
- (c)  $R = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a - b \text{ racionális}\}$
- (d)  $R = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m^2 - n^2 \text{ osztható } 3\text{-mal}\}$
- (e)  $R = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid x_1 + y_1 = x_2 + y_2\}$
- (f)  $R = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2\}$

**10. feladat**

Legyen  $f \subset A \times A$  reláció. Bizonyítsuk be, hogy  $f = f^{-1}$  akkor és csak akkor teljesül, ha  $f \subset f^{-1}$ .

**11. feladat**

Konstruáljon az  $\{1, 2, 3, 4\}$  halmazon olyan relációt, amely

- (a) reflexív és nem irreflexív
- (b) antiszimmetrikus és nem szimmetrikus
- (c) szimmetrikus és nem antiszimmetrikus
- (d) szimmetrikus és antiszimmetrikus
- (e) nem szimmetrikus és nem antiszimmetrikus
- (f) reflexív és trichotóm
- (g) nem reflexív, nem tranzitív, nem szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem trichotóm