

Diszkrét matematika I. feladatok

Harmadik alkalom (Logika)

1. Jelölje N , E , H , illetve B azt, hogy ma süt a nap, ma esik az eső, ma havazik, illetve hogy tegnap borult volt az ég, Fordítsuk le magyar nyelvre a következő formulákat!

- a) $(N \Rightarrow \neg(E \wedge H))$; b) $(B \Leftrightarrow N)$; c) $(B \wedge (N \vee E))$;
d) $(N \Leftrightarrow ((E \wedge \neg H) \vee B))$; e) $((N \Leftrightarrow E) \wedge (\neg H \vee B))$.

2. Pozitív egészeket tekintve jelölje $P(x)$, $E(x)$, $O(x)$, illetve $D(x, y)$ azt, hogy x prím, páros, páratlan, illetve x osztója y -nak. Fordítsuk le magyar nyelvre az alábbi formulákat! Állapítsuk meg, hogy igaz-e az állítás! Tagadjuk a formulákat formálisan! Tagadjuk a formulákat köznyelvileg! Állapítsuk meg, hogy igaz-e az állítás tagadása!

- a) $P(7)$; b) $(E(2) \wedge P(2))$; c) $(\forall x(D(2, x) \Rightarrow E(x)))$; d) $(\exists x(E(x) \wedge D(x, 6)))$;
e) $(\forall x(\neg E(x) \Rightarrow \neg D(2, x)))$; f) $(\forall x(E(x) \Rightarrow (\forall y(D(x, y) \Rightarrow E(y))))$;
g) $(\forall x(P(x) \Rightarrow (\exists y(E(y) \wedge D(x, y))))$; h) $(\forall x(O(x) \Rightarrow (\forall y(P(y) \Rightarrow \neg D(x, y))))$;
i) $((\exists x(E(x) \wedge P(x))) \wedge (\neg(\exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge (\exists y(\neg(x = y) \wedge E(y) \wedge P(y))))))$.

3. Az embereket tekintve jelölje $J(x)$, $B(x)$, $U(x)$, $I(x)$, $E(x)$, $P(x)$, $K(x)$, $N(x)$, illetve $H(x, y)$ és $T(x, y)$ rendre azt, hogy x jogász, bíró, ügyeskedő, idős, életerős, politikus, képviselő, nő, illetve hogy x házastársa y -nak, valamint hogy x tiszteli y -t. Formalizáljuk az alábbi állításokat!

- a) minden bíró jogász;
b) vannak ügyeskedő jogászok;
c) nincs ügyeskedő bíró;
d) bizonyos bírók idősek, de életerősek;
e) d bíró sem nem idős, sem nem életerős;
f) a bírók kivételével minden jogász ügyeskedő;
g) néhány jogász, aki politikus, képviselő is;
h) egyetlen képviselő felesége sem idős;
i) minden idős képviselő jogász;
j) van olyan nő, aki jogász és képviselő;
k) minden olyan nő, aki jogász, tisztel néhány bírót;
l) bizonyos jogászok csak bírókat tisztelnek;
m) van olyan bíró, aki tisztel néhány nőt;
n) bizonyos ügyeskedők egyetlen jogászt sem tisztelnek;
o) d bíró egyetlen ügyeskedőt sem tisztel;
p) vannak jogászok és ügyeskedők is, akik tisztelik d bírót;
q) csak bírók tisztelnek bírókat;
r) minden bíró csak bírókat tisztel;
s) minden nős képviselő életerős;
t) azok a jogászok, akiknek életerős feleségük van, mind képviselők.

4. Az embereket tekintve jelölje $N(x)$ illetve $G(x, y)$ azt, hogy x nő illetve x gyereke y -nak. Defináljuk formulával az alábbi kapcsolatokat: x az y -nak fia, lánya, szülője, apja, anyja, unokája, nagyszülője, nagyapja, nagyanyja testvére, fivére, nővére, féltestvére, unokatestvére, nagybátyja, nagynénje, unokaöccse, unokahúga!

5. Bevezetve a $H(x, y)$ predikátumot arra, hogy x és y házastársak, definiáljuk formulával az alábbi kapcsolatokat: x az y -nak férje, felesége, sógor, sógornője, apósa, anyósa, veje, menyee!
6. Formalizáljuk az alábbi állításokat!
- Márta nem szőke;
 - nem igaz, hogy Mátyás nem elég virtuóz;
 - esik az eső, de meleg van, bár a nap is elbújt és az idő is későre jár;
 - Éva vagy Pisti ott volt;
 - ha a hegy nem megy Mohamedhez, Mohamed megy a hegyhez;
 - elmegyünk kirándulni, ha nem esik az eső és a szél sem fúj;
 - kizárt, hogy se matekból, se fizikából nem menjek át elsőre;
 - ha a szemtanú megbízható és az ujjlenyomat a tettestől származik, akkor téved az írásszakértő;
 - szivárvány csak akkor van, ha esik az eső, a Nap is süt, de nincs dél;
 - minden ajtón van kilincs;
 - nem mind molnár, ki szekercét fog a hóna alá;
 - ki nem szólt csak bégetett, az kapott dicséretet;
 - mindig fázom, ha fúj a szél.
7. Egy táncmulatságon fiúk és lányok táncolnak. Jelölje $T(L, F)$ azt, hogy az L lány táncolt az F fiúval. Formalizáljuk pontosan az alábbi „gyorsírással” felírt formulákat! Döntsük el, hogy melyik következik a másikkól! (Egy formulából következik egy másik formula, ha valahányszor az egyik igaz, a másik is.)
- $\exists L \forall F T(L, F); \quad \forall F \exists L T(L, F); \quad \exists F \forall L T(L, F);$
 $\forall L \exists F T(L, F); \quad \forall L \forall F T(L, F); \quad \exists L \exists F T(L, F);$
 - $\neg \exists L \exists F T(L, F); \quad \forall F \exists L \neg T(L, F); \quad \forall L \exists F \neg T(L, F); \quad \forall L \forall F \neg T(L, F).$

Szorgalmi feladatok

8. Egy szigeten csak lovagok és lóköltők élnek. A lovagok mindig igazat mondanak, a lóköltők mindig hazudnak. Egy turista odautazik és két helybélivel (X és Y) találkozik. Melyik típusba tartozik X és Y , ha a következőket halljuk?
- X : Kettő meg kettő öt. Y : X hülyeségeket beszél.
 - X : Mindketten lóköltők vagyunk. Y : Tegnap moziban voltam.
 - X : Egyforma típusúak vagyunk. Y : Különböző típusúak vagyunk.
9. Egy matematikus bemegy egy kocsmába, beszélget a csapossal és megtudja, hogy annak 3 gyereke van. Megkérdezi, hogy hány évesek a gyerekek. A következő beszélgetés zajlik közöttük:
- Csapos:** Az életkoruk szorzata... (Megmondja, de mi nem halljuk akkora a zaj a kocsmban. Annyit később megtudunk, hogy 40-nél kisebb szám volt.)
- Vendég:** Ebből még nem tudom megmondani!
- Csapos:** Az életkoruk összege pedig a kocsmá házzzáma.
- Vendég:** (Kimegy megnézi a házzzámat.) Ebből még mindig nem lehet kitalálni!
- Csapos:** A kicsi szőke.
- Vendég:** Na, most már tudom!
- Hány évesek a gyerekek?