5. feladatsor: Struktúrák

1. feladat
Legyen $A = \{2, 3, 6, 8, 9, 12, 18\} \subset \mathbb{N}^+, R \subseteq A \times A$ és $aRb \iff a \mid b$.
(a) Mutassa meg, hogy az R reláció részbenrendezés az A halmazon (másképp: Mutassa meg, hogy $(A; R)$ részbenrendezett struktúra.
(b) Rajzolja meg az R rendezési diagramját (Hasse-diagram).
(c) Adja meg az $A \subset N$ halmaz következő jellemzőit $((\mathbb{N}^+; |)$-re nézve): minimális elem, legkisebb elem, maximális elem, legnagyobb elem, alsó korlát, felső korlát, infimum, szuprémum.
(d) Hogyan változik (a)-(b)-(c), ha az A halmazhoz hozzávesszük az $1 \in \mathbb{N}$ elemet?
(e) Hogyan változik (a)-(b)-(c), ha az A halmazt a szokásos $\leq$ rendezéssel a $(\mathbb{N}; \leq)$ rendezési struktúrában tekintjük?

2. feladat
(a) Bizonyítsa be, hogy $(\mathbb{N}^+; |)$ részbenrendezett struktúra. Részbenrendezett struktúra-e $(\mathbb{N}; |)$ illetve $(\mathbb{Z}; |)$?
(b) Bizonyítsa be, hogy az alábbi relációval $(\mathbb{N}; \leq)$ részbenrendezett struktúra, sőt teljesen rendezett struktúra.
$n, m \in \mathbb{N}, n \leq m \iff \exists k \in \mathbb{N}(n + k = m)$

3. feladat
Döntse el a következő relációkról, hogy részbenrendezési relációk-e az adott halmazon.
(a) P a valós együtthatós polinomok halmaza, $R \subseteq P \times P, fRy \iff \deg f \leq \deg g$
(b) $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, aRb \iff |a| \leq |b|$
(c) V a 10 egység hosszúságú $\mathbb{R}^2$-beli vektorok halmaza, $R \subseteq V \times V, xRy \iff$ az x vektor hajlásszöge kisebb-egyenlő mint az y vektor hajlásszöge (hajlásszög legyen $[0; 2\pi[$-beli)
(d) $R \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, xRy \iff$ az x vektor hossza kisebb-egyenlő mint az y vektor hossza

4. feladat (*)
Határozza meg a következő korlátokat, amikor
(a) az egyes halmazok a valós számok $\mathbb{R}$ halmazának részhalmazai
(b) az egyes halmazok a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmazának részhalmazai

(1) $\sup\{1, 2, ..., n\}$ ahol $n \in \mathbb{N}^+$
(2) $\sup\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$
(3) $\sup\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$
(4) $\inf\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$
(5) $\sup\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$

5. feladat (*)
Tekintsük a $H \subseteq \mathbb{R}$ részhalmazt $\mathbb{R}$-en a szokásos $\leq$ rendezéssel. Határozza meg a H halmaz alsó illetve felső korlátait továbbá infimumát illetve szuprémumát.
(a) $H = [1; 2] \cup (5; 7]$
(b) $H = [-\infty; 3) \cup \{6, 7\}$
(c) $H = (-\infty; 5) \cup (5; \infty)$

(d) $H = [-3;2] \ \cup \ (4;\infty)$
(e) $H = (-3;1] \ \cup \ (2;4) \ \cup \ [5;10)$
(f) $H = \{-8\} \cup \ [1;\infty)$

6. feladat

(a) Mutassa meg, hogy a következő relációk részbenrendezési relációk az adott halmazon.
(b) Rajzolja meg a rendezések Hasse-diagramját.
(c) Állapítsa meg a halmazok következő korlátait: minimális elem, legkisebb elem, maximális elem, legnagyobb elem.
(d) Döntse el, hogy a következő halmazok bármely a, b eleméhez létezik-e $\inf\{a, b\}$ illetve $\sup\{a, b\}$.

(1) az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmaz legalább kételemű részhalmazainak halmazán $A \leq B \iff A \subseteq B$
(2) az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmaz legfeljebb kételemű részhalmazainak halmazán $A \leq B \iff B \subseteq A$
(3) az $\{3, 6, 9, 10, 20, 30\}$ halmaz elemein $a \leq b \iff a \mid b$
(4) az $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ halmaz elemein $a \leq b \iff a \mid b$

7. feladat (*)

Legyen a természetes számokból álló rendezett párok halmazán ($\mathbb{N} \times \mathbb{N}$) definiálva a következő rendezés: $(a, b) \leq (c, d) \iff b < d \vee (a \leq c \wedge b = d)$. Bizonyítsa be, hogy $\leq$ részbenrendezési reláció a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ halmazon. Döntse el, hogy a $\leq$ reláció teljes rendezés-e az $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ halmazon.

8. feladat

Legyen $A = \{a, b, c, d\}$, $f \subseteq A \times A$. Döntse el, hogy az f relációval az A halmaz jólrendezhető-e.
(a) $f = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)\}$
(b) $f = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d), (c, c), (c, d), (d, d)\}$
(c) $f = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, b), (b, d), (d, d), (a, c), (a, d), (c, c), (c, d)\}$

9. feladat

Döntse el, mely relációk teljes rendezések az $A = \{1, 2, 3, 4\}$ halmazon.
(a) $f = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$
(b) $f = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$
(c) $f = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

10. feladat (*)

11. feladat (*)

12. feladat (*)

13. feladat (*)

14. feladat (*)

Felhasznált irodalom

Kovács Attila: *Az informatika matematikai alapjai.* ELTE IK Komputeralgebra Tanszék

Ismeretlen szerző: *Matematikai analízis jegyzet.* (5. feladat)

György Anna, Kárász Péter, Sergyán Szabolcs, Vajda István, Záborszky Ágnes: *Diszkrét matematika példatár.* Budapesti Műszaki Főiskola

Béres Zoltán, Csikós Pajor Gizella, Péics Hajnalka: *Algebra elméleti összefoglaló és példatár.* Bolyai Farkas Alapítvány

Koch-Gömöri Richárd, kgomoririchard@inf.elte.hu, kgomori.richard@gmail.com