

**10. feladatsor: Gráfok alapfogalmai, út, séta, fagráf****1. feladat**

Ábrázoljuk a következő irányítatlan gráfot:  $G = (V, E, \varphi)$ ,  $V = \{A, B, C, D\}$ ,  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ,  $\varphi = \{(e_1, \{A, B\}), (e_2, \{B, C\}), (e_3, \{A, C\}), (e_4, \{C, D\})\}$ . Határozza meg a következőket:  $d(A), d(B), d(C), d(D)$ . Rajzolja le  $\overline{G}$ -t. Izomorf-e  $G$  és  $\overline{G}$ ?

**2. feladat**

Hány olyan 3, 4 illetve 5 csúcsú gráf van, amelyik izomorf a komplementerével?

**3. feladat**

Bizonyítsuk be, hogy egy gráfban a páratlan fokszámú csúcsok száma mindig páros.

**4. feladat**

Lehet-e egy 7 pontú egyszerű gráf fokszámsorozata

- (a) 4, 4, 3, 3, 2, 2, 1;
- (b) 6, 3, 3, 3, 3, 2, 0;
- (c) 5, 5, 5, 2, 2, 2, 1;
- (d) 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2?

**5. feladat**

Van-e olyan 9 pontú gráf, melyben a csúcsok fokai rendre az alábbiak? És egyszerű gráf?

- (a) 7, 7, 7, 6, 6, 6, 5, 5, 5;
- (b) 6, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 1;
- (c) 2, 2, 3, 5, 6, 6, 6, 8, 8?

**6. feladat**

Van-e olyan 8 pontú gráf, melyben a csúcsok fokai rendre 6,6,6,6,3,3,2,2? És egyszerű gráf?

**7. feladat**

- (a) Bizonyítsuk be, hogy véges, egyszerű gráfban létezik 2 különböző pont, melyek fokszáma egyenlő.
- (b) Mutassuk meg, hogy minden társaságban van két ember, akiknek ugyanannyi ismerősük van a jelenlévők között! (Az ismeretségek kölcsönösek.)

**8. feladat**

Bizonyítsuk be, hogy ha egy összefüggő gráfnak kevesebb éle van, mint pontja, akkor van elsőfokú pontja.

**9. feladat**

Ha egy véges egyszerű gráf nem összefüggő, akkor a komplementere összefüggő lesz-e?

**10. feladat**

Mutassuk meg, hogy ha egy  $2n$  csúcsú gráf minden pontjának foka legalább  $n$ , akkor a gráf összefüggő! Mi történik, ha  $n - 1$ -fokú pontokat is megengedünk?

**11. feladat**

Legyen  $G = (V, E)$  egyszerű gráf és  $|V| = 6$ . Bizonyítsuk be, hogy  $G$ -ben vagy  $\overline{G}$ -ben létezik 3 csúcsú teljes gráf.

**12. feladat**

- (a) Igaz-e, hogy ha egy gráf bármely két pontja között van séta, akkor út is van?  
(b) Mutassuk meg, hogy ha  $a$ -ból vezet út  $b$ -be, és  $b$ -ből  $c$ -be, akkor  $a$ -ból is vezet  $c$ -be!

**13. feladat**

Legyen a  $G = (V, E)$  összefüggő gráfnak  $e \in E$  éle elvágó él. Bizonyítsuk be, hogy  $e$  nem lehet  $G$ -beli kör éle.

**14. feladat**

Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráf minden pontjának fokszáma legalább 2, akkor a gráf tartalmaz kört.

**15. feladat**

Bizonyítsuk be, hogy minden, legalább 5 csúcsú gráf esetén maga a gráf vagy a komplementere tartalmaz kört.

**16. feladat**

Rajzoljuk le az összes (páronként nem izomorf) 3, 4 és 5 csúcsú fát.

**17. feladat**

Mely fák izomorfak a komplementerükkel?

**18. feladat**

Hány olyan 8 csúcsú fa van, amelyben pontosan 2 db harmadfokú csúcs van?

**19. feladat**

Létezik-e 10 csúcsú erdő a következő fokszámsorozattal: 1, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6? Bizonyítsuk állításunkat.

**20. feladat**

Igazoljuk, hogy véges gráfban a komponensek számának és az élek számának összege nem kisebb, mint a csúcsszám.

**21. feladat**

Jelöljük egy fa elsőfokú pontjának számát  $f_1$ -gyel, a kettőnél nagyobb fokúak számát pedig  $c$ -vel. Mutassuk meg, hogy ha legalább két pontja van a gráfnak, akkor  $f_1 \geq c + 2$ .

**22. feladat**

Igazoljuk, hogy egy összefüggő véges gráfban bármely két leghosszabb útnak van közös pontja!

**23. feladat**

Mutassuk meg, hogy egy véges fában az összes leghosszabb út egy ponton megy át!

A 24-27 feladatokban legyen  $G = (V, E)$  fagráf,  $|V| = n$ ,  $V_i = \{v \in V \mid d(v) = i\}$ ,  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ .

Legyen  $f_i = |V_i|$ , tehát  $f_i$  az  $i$ -edfokú csúcsok száma.

**24. feladat**

Döntse el, hogy létezik-e olyan fagráf, melyre  $|V| = 8$  és  $f_3 = 2$ . Ha igen, rajzolja le őket.

**25. feladat**

Döntse el, hogy létezik-e olyan fagráf, melyre  $|V| = 9$  és  $f_3 = 2$ .

**26. feladat**

Legyen  $G = (V, E)$  fagráf,  $|V| = n \geq 2$ . Bizonyítsuk be, hogy ekkor  $2 \cdot f_1 + f_2 \geq n + 2$ .

**27. feladat**

Legyen  $G = (V, E)$  fagráf,  $|V| = n \geq 2$ . Bizonyítsuk be, hogy ekkor  $3 \cdot f_1 + 2 \cdot f_2 + f_3 \geq 2 + 2 \cdot n$ .