3. feladatsor: Relációk alapjai, relációk tulajdonságai, ekvivalenciarelációk

1. feladat

Legyen $A = \{1, 2, 3, 4\}$ és $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Tekintsük a következő $\rho \subseteq A \times B$ binér (kétváltozós) relációt: $\rho = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (3, 6), (3, 9), (4, 5), (4, 7), (4, 9)\}$.

(a) Határozza meg a ρ reláció értelmezési tartományát és értékkészletét.

(b) Rajzolja meg a reláció gráfját.

(c) Legyen $H_1 = \{1, 2, 3\}$ és $H_2 = \{4\}$. Határozza meg a ρ reláció H_1 illetve H_2 halmazra való leszűkítését.

(d) A következő relációk közül melyek lehetnek a ρ reláció kiterjesztései?
$\rho_1 = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 2), (2, 4), (3, 6), (3, 9), (4, 3), (4, 5), (4, 7), (4, 9)\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\} \times \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$\rho_2 = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (3, 6), (3, 8), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 9)\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\} \times \{5, 6, 7, 8, 9\}$
$\rho_3 = A \times B$
$\rho_4 = B \times A$

(e) Határozza meg a ρ reláció inverzét, $\rho(\{1, 2\})$ képet és $\rho^{-1}(\{5, 6\})$ inverz képet.

2. feladat

Legyen $A = \{a, b, c, d, e, f\}, S \subseteq A \times A$ binér homogén reláció úgy, hogy
$S = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (b, f), (d, f), (e, b), (e, f)\}$.

(a) Határozza meg az S reláció értelmezési tartományát és értékkészletét.

(b) Rajzolja meg a reláció gráfját és nyíldiagramját.

(c) Határozza meg az S reláció $H = \{b, c, d\}$ halmazra való leszűkítését.

(d) Határozza meg az S reláció inverzét.

3. feladat

Legyen $\rho \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ és $\rho = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a = 2b\}$. Határozza meg a ρ reláció értelmezési tartományát, értékkészletét, inverzét, $\rho(\{3, 4, ..., 10\})$ képet és a ρ leszűkítését $\{1, 2, ..., 6\}$-ra.

4. feladat

Legyen $\rho \subseteq \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$. Döntse el, mely reláció reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus illetve tranzitív.

(a) $\rho = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

(b) $\rho = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\}$

(c) $\rho = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1)\}$

(d) $\rho = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$

(e) $\rho = \{(1, 2)\}$

(f) $\rho = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$

(g) $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

(h) $\rho = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$

5. feladat

Lehet-e egy reláció egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus? Illetve reflexív és irreflexív? Állítását indokolja.

6. feladat

Döntse el, mely reláció reflexív, irreflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus illetve tranzitív továbbá határozza meg a relációk értelmezési tartományát és értékkészletét.

(a) $R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \cdot b \text{ páratlan}\}$

(b) $S = \{(a, b) \in B \times B \mid a \text{ vezetékneve rövidebb mint } b\text{-é}\}$ ahol $B = \{\text{budapesti lakosok}\}$

(c) $T_X = \{(A, B) \in P(X) \times P(X) \mid A \cap B \neq \emptyset\}$ ahol X adott halmaz

(d) $U = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \mid \text{lnko}(a, b) > 1\}$

(e) $V = \{(x, y) \in K \times K| \mid x \text{ belülről érinti } y\text{-t}\}$ ahol $K = \{\text{egy adott sík körvonalai}\}$

7. feladat

Bizonyítsuk be, hogy minden reláció, amely egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus, egyúttal tranzitív is.

8. feladat

Bizonyítsuk be, hogy minden nemüres reláció, amely egyszerre irreflexív és szimmetrikus, az nem lehet tranzitív.

9. feladat

Tekintsük a következő ρ relációt.

(a) $\rho = \{(1, 1), (1, 5), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4), (5, 1), (5, 5)\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(b) $\rho = \{(1, 1), (1, 5), (1, 6), (1, 8), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 7), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 5), (5, 6), (5, 8), (6, 1), (6, 5), (6, 6), (6, 8), (7, 3), (7, 7), (8, 1), (8, 5), (8, 6), (8, 8)\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

(1) Mutassa meg, hogy ρ ekvivalenciareláció.

(2) Határozza meg az A halmaz ρ ekvivalenciareláció szerinti osztályfelbontását (másképp: Határozza meg az A/ρ hányadoshalmazt).

(3) Adja meg A/ρ hányadoshalmaz valamely teljes reprezentáns rendszerét.

10. feladat

Írjon fel olyan ekvivalenciarelációt, amely az $\{a, b, c, d, e, f\}$ halmaz következő osztályfelbontását határozza meg.

(a) $\{\{a, b, f\}, \{c\}, \{d, e\}\}$

(b) $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e, f\}\}$

11. feladat

Bizonyítsa be, hogy az alábbi relációk ekvivalenciarelációk. Adja meg az ekvivalenciaosztályokat.

(a) $R = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m + n \text{ páros szám}\}$

(b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x^2 + y^2 \text{ osztható 2-vel}\}$

(c) $R = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a - b \text{ racionális}\}$

(d) $R = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m^2 - n^2 \text{ osztható 3-mal}\}$

(e) $R = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid x_1 + y_1 = x_2 + y_2\}$

(f) $R = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2\}$

12. feladat

Legyen $f \subseteq A \times A$ reláció. Bizonyítsuk be, hogy $f = f^{-1}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $f \subseteq f^{-1}$.

13. feladat
Konstruáljon az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmazon olyan relációt, amely
(a) reflexív és nem irreflexív
(b) antiszimmetrikus és nem szimmetrikus
(c) szimmetrikus és nem antiszimmetrikus
(d) szimmetrikus és antiszimmetrikus
(e) nem szimmetrikus és nem antiszimmetrikus
(f) reflexív és trichotóm
(g) nem reflexív, nem tranzitív, nem szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem trichotóm

Felhasznált irodalom

Béres Zoltán, Csikós Pajor Gizella, Péics Hajnalka: *Algebra elméleti összefoglaló és példatár.* Bolyai Farkas Alapítvány

György Anna, Kárász Péter, Sergyán Szabolcs, Vajda István, Záborszky Ágnes: *Diszkrét matematika példatár.* Budapesti Műszaki Főiskola

Láng Csabáné: *Teljes indukció, logika, halmazok, relációk, függvények példatár.* ELTE IK Komputeralgebra Tanszék

Rimán János: *Matematikai analízis feladatgyűjtemény.* EKF Líceum Kiadó

Koch-Gömöri Richárd, kgomoririchard@inf.elte.hu, kgomori.richard@gmail.com