1. zárthelyi dolgozat (megoldás)

Felhasználható idő: 16+90 perc, használható segédeszközök: üres papír, toll, számológép.

1. feladat 8 pont
Canvas-ben: Kvízek/zh1-tesztkérdések

2. feladat 9. pont
(a) Igazolja, hogy az $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x^2 + y^2 \text{ páros szám}\}$ reláció ekvivalencia-reláció. Mik lesznek az ekvivalenciaosztályok? Az (a) feladatban vázlatos indoklást is kérek, például "az összeadás kommutativitása miatt", "párosak összege szintén páros" stb.
(b) Adjon meg olyan A, B és C halmazokat, amelyekre nem teljesül a következő összefüggés: $((A \cap B) \cup (B \cap C)) \setminus (A \cap B \cap C) = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.
(c) Igazolja, hogy tetszőleges A, B és C halmazok esetén igaz a következő összefüggés: $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

Megoldás.
(a) reflexív: $\forall a \in \mathbb{Z} : a^2 + a^2$ páros
ez nyilván igaz, mert $a^2 + a^2 = 2a^2$
szimmetrikus: $\forall x, y, \in \mathbb{Z} : x^2 + y^2$ páros $\implies y^2 + x^2$ páros
az összeadás kommutativitása miatt ez teljesül
tranzitív: $\forall x, y, z \in \mathbb{Z} : x^2 + y^2$ páros $\wedge y^2 + z^2$ páros $\implies x^2 + z^2$ páros
$(x^2 + y^2) + (y^2 + z^2) = x^2 + 2y^2 + z^2$ ahol $2y^2$ nyilván páros, ami csak úgy lehet ha $x^2 + z^2$ is páros
ekvivalenciaosztályok:
$\overline{0} = \{b \in \mathbb{Z} : 0^2 + b^2 \text{ páros }\} = \{b \in \mathbb{Z} : b^2 \text{ páros }\} = \{ \text{ páros egészek } \}$
$b^2 = b \cdot b$, itt páros szorozva párossal az eredmény páros, és páratlan szorozva páratlannal az eredmény páratlan
ugyanezen megfontolás miatt
$\overline{1} = \{b \in \mathbb{Z} : 1^2 + b^2 \text{ páros }\} = \{b \in \mathbb{Z} : 1 - b^2 \text{ páros }\} = \{ \text{ páratlan egészek } \}$
más ekvivalencia osztály nincs
(b) Venn-diagramon ábrázolva az egyenlet két oldalát látható, hogy $(B \cap C) \setminus A$ rész tér el; bármilyen olyan példa alkalmas, ahol $(B \cap C) \setminus A \neq \emptyset$
(c) bal oldal:

$$x \in (A \cap B) \setminus C \iff (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin C \iff x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C$$

jobb oldal:

$$(x \in A \wedge x \notin C) \wedge (x \in B \wedge x \notin C) \iff x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C$$

3. feladat 6 pont
Legyen $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^3 = y - 2\}$ és $S \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 2y - 1 = x + 7\}$. Határozza meg az $R \circ S$ és $S^{-1} \circ S$ kompozíciót.
Megoldás.

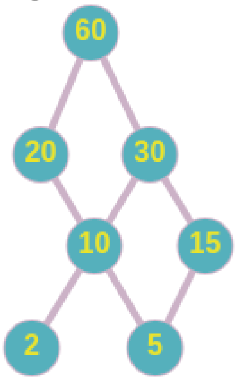
$$\begin{aligned} R \circ S = &\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | \exists z \in \mathbb{R} : xSz \wedge zRy\} = \\ &\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | \exists z \in \mathbb{R} : 2z - 1 = x + 7 \wedge z^3 = y - 2\} = \\ &\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | \left(\frac{1}{2}x + 4\right)^3 = y - 2\} \end{aligned}$$

mert $z := \frac{1}{2}x + 4$ helyettesítéssel, majd rendezéssel $\left(\frac{1}{2}x+4\right)^3 = y-2$

4. feladat 4 pont

A természetes számok halmazán tekintsük az $A = \{2, 5, 10, 15, 20, 30, 60\} \subset \mathbb{N}$ halmazt, illetve tekintsük az A következő részbenrendezését: $R \subseteq A \times A$, $xRy \iff x|y$. Rajzolja meg a rendezés Hasse-diagramját. Adja meg a következő korlátokat: minimális elem, legkisebb elem, maximális elem, legnagyobb elem, $inf\{15, 20\}, inf\{2, 15\}, inf(A), sup\{20, 30\}, sup(A)$.

Megoldás.



minimális elem: 2, 5

legkisebb elem: nem létezik

maximális elem: 60

legnagyobb elem: 60

$\inf\{15, 20\} = lnko(15, 20) = 5$

$\inf\{2, 15\} = lnko(2, 15) = 1$

$\inf(A) = lnko(2, 5, 10, 15, 20, 30, 60) = 1$

$\sup\{20, 30\} = lkkt[20, 30] = 60$

$\sup(A) = lkkt[2, 5, 10, 15, 20, 30, 60] = 60$

5. feladat 9 pont

(a) A trigonometrikus alak segítségével számítsa ki

$$\left(\frac{-\frac{\sqrt{14}}{2} - \frac{\sqrt{14}}{2}i}{\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i}\right)^7$$

értékét (a végeredményt elég trigonometrikus alakban megadni).

(b) A trigonometrikus alak segítségével számítsa ki z értékét trigonometrikus és algebrai alakban is, majd adja meg az összes olyan w komplex számot trigonometrikus alakban, melyekre $w^4 = z$, ahol $z = \dfrac{i}{\frac{5\sqrt{3}}{12} - \frac{5}{12}i}$.

Megoldás.
(a)
számláló:

$$\left|-\frac{\sqrt{14}}{2}-\frac{\sqrt{14}}{2}i\right| = \sqrt{14/4+14/4} = \sqrt{7}$$
$$\frac{\sqrt{14}}{2} : \sqrt{7} = \frac{\sqrt{14}}{2\cdot\sqrt{7}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos(\varphi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin(\varphi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\implies \varphi = 225^\circ$$
$$-\frac{\sqrt{14}}{2}-\frac{\sqrt{14}}{2}i = \sqrt{7}\cdot(\cos(225^\circ)+i\cdot\sin(225^\circ))$$

nevező:

$$\left|\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}i\right| = \frac{2}{3}$$
$$\cos(\varphi) = \sqrt{3}2, \sin(\varphi) = \frac{1}{2}$$
$$\implies \varphi = 30^\circ$$
$$\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}i = \frac{2}{3}\cdot(\cos(30^\circ)+i\cdot\sin(30^\circ))$$

eredeti feladat:

$$\left(\frac{-\frac{\sqrt{14}}{2}-\frac{\sqrt{14}}{2}i}{\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}i}\right)^7 = \left(\frac{\sqrt{7}\cdot(\cos(225^\circ)+i\cdot\sin(225^\circ))}{\frac{2}{3}\cdot(\cos(30^\circ)+i\cdot\sin(30^\circ))}\right)^7 =$$
$$\left(\frac{3\cdot\sqrt{7}}{2}\cdot(\cos(225^\circ-30^\circ)+i\cdot\sin(225^\circ-30^\circ))\right)^7 = \left(\frac{3\cdot\sqrt{7}}{2}\right)^7\cdot(\cos(285^\circ)+i\cdot\sin(285^\circ))$$

(b)

$$z = \frac{i}{\frac{5\sqrt{3}}{12}-\frac{5}{12}i}$$

számláló:

$$i = \cos(90^\circ)+i\cdot\sin(90^\circ)$$

nevező:

$$\left|\frac{5\sqrt{3}}{12}-\frac{5}{12}i\right| = \frac{5}{6}$$
$$\cos(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin(\varphi) = -\frac{1}{2}$$
$$\implies \varphi = 330^\circ$$
$$\frac{5\sqrt{3}}{12}-\frac{5}{12}i = \frac{5}{6}\cdot(\cos(330^\circ)+i\cdot\sin(330^\circ))$$

eredeti feladat:

$$\frac{i}{\frac{5\sqrt{3}}{12}-\frac{5}{12}i}=\frac{\cos(90^\circ)+i\cdot\sin(90^\circ)}{\frac{5}{6}\cdot(\cos(330^\circ)+i\cdot\sin(330^\circ))}=\frac{6}{5}\cdot(\cos(90^\circ-330^\circ)+i\cdot\sin(90^\circ-330^\circ))=$$
$$\frac{6}{5}\cdot(\cos(120^\circ)+i\cdot\sin(120^\circ))$$

a végeredmény algebrai alakjához:

$$\cos(120^\circ)=-\cos(180^\circ-120^\circ)=-\cos(60^\circ)=-\frac{1}{2}$$
$$\sin(120^\circ)=\sin(180^\circ-120^\circ)=\sin(60^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{6}{5}\cdot(\cos(120^\circ)+i\cdot\sin(120^\circ))=\frac{6}{5}\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\frac{3}{5}+\frac{3\cdot\sqrt{3}}{5}i$$

végül komplex negyedik gyököt kell vonni a $\frac{6}{5}\cdot(\cos(120^\circ)+i\cdot\sin(120^\circ))$ számból

$$w_k=\sqrt[4]{\frac{6}{5}}\cdot\left(\cos\left(\frac{120^\circ+k\cdot 360^\circ}{4}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{120^\circ+k\cdot 360^\circ}{4}\right)\right)=$$
$$\sqrt[4]{\frac{6}{5}}\cdot(\cos(30^\circ+k\cdot 90^\circ)+i\cdot\sin(30^\circ+k\cdot 90^\circ)),k=0,1,2,3$$

a komplex gyökök szögei:

$k=0$	30°
$k=1$	$30^\circ+90^\circ=120^\circ$
$k=2$	$30^\circ+2\cdot 90^\circ=210^\circ$
$k=3$	$30^\circ+3\cdot 90^\circ=300^\circ$

6. feladat 4 pont

Ábrázolja a Gauss-számsíkon a következő halmazt: $\{z\in\mathbb{C}\mid 1\le|z-2i+5|\le 3\}$.

Megoldás.

`legyen` $z=x+yi$

$1\le|z-2i+5|\le 3\}$

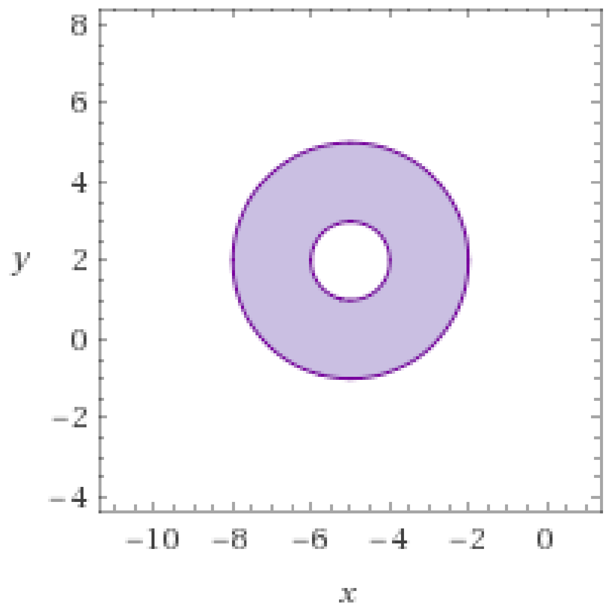
$1\le|x+yi-2i+5|\le 3\}$

$1\le|x+5+i(y-2)|\le 3\}$

$1\le(x+5)^2+(y-2)^2\le 9\}$

a sík azon pontjai, amelyek a $(-5,2)$ középpontú, 1 sugarú körön kívül, de ugyanezen középpontú, 3 sugarú körön belük helyezkednek el

másképpen, a $(-5,2)$ középpontú, 1 és 3 sugarú körgyűrű pontjai



Koch-Gömöri Richárd, kgomoririchard@inf.elte.hu, kgomori.richard@gmail.com