

## 11. feladatsor: $\text{Lnko}$ , $\text{lkkt}$ , euklideszi algoritmus, lineáris diofantikus egyenletek és kongruenciák

### 1. feladat

Határozza meg a 18 és 24 egész számok legnagyobb közös osztóit valamint legkisebb közös többszöröseit. Mi lesz  $\text{lnko}(18, 24)$  illetve  $\text{lkkt}[18, 24]$ ?

### 2. feladat

A módosított kanonikus alak felhasználásával határozza meg meg  $\text{lnko}(350, 16500)$  és  $\text{lkkt}[350, 16500]$  értékeket.

### 3. feladat

- (a) Határozza meg az euklideszi algoritmussal a következő egész számok legnagyobb közös osztóját.  
 (b) Írja fel ezt a legnagyobb közös osztót a két szám lineáris kombinációjaként.  
 (c) Határozza meg a számok legkisebb közös többszörösét.

- (1) 30 és 70
- (2) 126 és 150
- (3) 105 és 231
- (4) 60 és -739
- (5) -182 és 390
- (6) 132 és 275
- (7) 616 és 1155
- (8) -33 és 21
- (9) 33 és 21

### 4. feladat

Határozza meg az  $\text{lnko}(6, 10, 18)$  és  $\text{lkkt}[6, 10, 18]$  értékeket.

### 5. feladat

Döntse el, hogy igazak-e a következő kongruenciák.

$$7 \equiv 3 \pmod{3}$$

$$7 \equiv 3 \pmod{2}$$

$$7 \equiv 3 \pmod{1}$$

$$8 \equiv 10 \pmod{5}$$

$$2 \equiv -1 \pmod{3}$$

$$6 \equiv 6 \pmod{100}$$

$$11 \equiv 8 \pmod{3}$$

$$8 \equiv 5 \pmod{3}$$

$$11 \equiv 5 \pmod{3}$$

$$6 \equiv 2 \pmod{4}$$

$$3 \equiv -5 \pmod{4}$$

$$18 \equiv -10 \pmod{4}$$

$$160 \equiv 80 \pmod{16}$$

$$16 \equiv 8 \pmod{8}$$

### 6. feladat

Mutassa meg, hogy a  $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ,  $aRb \iff a \equiv b \pmod{5}$  reláció ekvivalenciareláció. Mik lesznek az ekvivalenciaosztályok?

**7. feladat**

Oldja meg a következő kongruencia egyenleteket.

- (a)  $2x \equiv 3 \pmod{4}$
- (b)  $x \equiv 2 \pmod{3}$
- (c)  $x \equiv 7 \pmod{2}$
- (d)  $12x \equiv 8 \pmod{20}$
- (e)  $22x \equiv 8 \pmod{10}$
- (f)  $15x \equiv -1 \pmod{7}$

**8. feladat**

Oldja meg a következő lineáris diofantikus egyenleteket.

- (a)  $3x + 10y = 9$
- (b)  $15x + 25y = -70$
- (c)  $14x + 22y = 21$
- (d)  $12x + 10y = 62$

**9. feladat**

Bontsuk fel a 812-t két egész szám összegére úgy, hogy az egyik szám osztható legyen 12-vel illetve a másik 32-vel.

**10. feladat**

A konténerboltban kicsi és nagy méretű konténereket árulnak. Szeretnénk 40 hűtőszekrényt konténerekben elszállítani. A kicsi konténerbe 3, a nagy konténerbe 4 hűtőszekrény fér el. Hány kicsi illetve nagy konténerre van szükségünk ha az összes hűtőszekrényt el szeretnénk szállítani?

**11. feladat**

Legyen  $a_1, a_2, b, c, m \in \mathbb{Z}$ . Igazolja, hogy ha  $a_1 \cdot a_2 \equiv b \pmod{m}$  és  $a_2 \equiv c \pmod{m}$  akkor  $a_1 \cdot c \equiv b \pmod{m}$ .

**12. feladat (\*)**

Írjon fel két olyan egész számot, amelyekre az euklideszi algoritmus

- (a) legfeljebb 50      (b) pontosan 50      (c) pontosan 100
- lépésben befejeződik.