

## 7. feladatsor: Vegyes feladatok komplex számokkal

### 1. feladat

Határozzuk meg a  $z = (3 + 3i)^8$  komplex szám valós és képzetes részét, konjugáltját és abszolút értékét.

### 2. feladat

Határozza meg azt a  $z \in \mathbb{C}$  komplex számot, amelyre teljesül hogy

$$\left| \frac{z-3}{2-\bar{z}} \right| = 1 \wedge \operatorname{Re} \left( \frac{z}{2+i} \right) = 2$$

### 3. feladat

Határozza meg azt a  $z \in \mathbb{C}$  komplex számot, amelyre teljesül hogy  $|z-2| = |z+2i| \wedge |z-i| = |z+2|$

### 4. feladat

Írjuk fel algebrai alakban a  $z = \frac{(1+i)^8}{(1-\sqrt{3}i)^6}$  komplex számot.

### 5. feladat

Oldja meg a következő egyenleteket a komplex számok halmazán.

- (a)  $ix^2 + 6 = 0$
- (b)  $x^2 + 2x + 5 = 0$
- (c)  $x^2 + (3 - 4i)x + (-1 - 5i) = 0$
- (d)  $-x + 2i - 6 = 3\bar{x} + (1 - i)x$
- (e)  $(2 + 5i)x^3 - 2i + 5 = 0$
- (f)  $\frac{x + i - 3i\bar{x}}{x - 4} = i - 1$

### 6. feladat

Tekintsük a következő halmazokat:

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\}$$

$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 2\}$$

$$C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| = 3\}$$

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 - (3 + 2i)z + (5 + 5i) = 0\}$$

Ábrázolja a következő halmazokat a Gauss-számsíkon.

- |                |                |                     |                     |                |                           |
|----------------|----------------|---------------------|---------------------|----------------|---------------------------|
| (a) $A$        | (b) $B$        | (c) $C$             | (d) $D$             | (e) $A \cap B$ | (f) $A \cup B$            |
| (g) $A \cap C$ | (h) $B \cup C$ | (i) $A \setminus B$ | (j) $A \triangle B$ | (k) $A \cap D$ | (l) $C \setminus \bar{B}$ |

### 7. feladat

Ábrázolja a következő halmazokat a Gauss-számsíkon.

- (a)  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - i + 2| = 10\}$

- (b)  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z\}$   
 (c)  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq \operatorname{Im} z\}$   
 (d)  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| \leq |z + 3|\}$   
 (e)  $\{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z + i - 2| \leq 4\}$

**8. feladat**

A Gauss-számsíkon egy négyzet középpontja a  $K = 1 + 2i$  illetve egyik csúcsa az  $A = 5 + 4i$  komplex számnak megfelelő pontban van. Határozza meg a négyzet többi csúcsának megfelelő komplex számokat.

**9. feladat**

Forgassa el síkban a  $\begin{bmatrix} 2 \\ -2\sqrt{3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  vektort (a) 34 (b)  $-176$  fokkal.

**10. feladat**

Írja fel a negyedik egységgyököket majd segítségükkel számítsa ki a -16 negyedik gyökeit.

**11. feladat**

- (a) A  $z = -1 - \sqrt{3}i$  egyik negyedik gyöke  $w_0 = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}(\sqrt{3} - i)$ . Alkalmas primitív negyedik egységgyök segítségével állítsa elő a többi negyedik egységgyököt majd ezek felhasználásával számítsa ki  $z$  többi negyedik gyökét.
- (b) A  $z = -i$  egyik hatodik gyöke  $w_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ . Alkalmas primitív hatodik egységgyök segítségével állítsa elő a többi hatodik egységgyököt majd ezek felhasználásával számítsa ki  $z$  többi hatodik gyökét.
- (A komplex gyökvonás képlete nem használható.)

**Felhasznált irodalom**

Béres Zoltán, Csikós Pajor Gizella, Péics Hajnalka: *Algebra elméleti összefoglaló és példatár*. Bolyai Farkas Alapítvány

György Anna, Kárász Péter, Sergyán Szabolcs, Vajda István, Záborszky Ágnes: *Diszkrét matematika példatár*. Budapesti Műszaki Főiskola

Koch-Gömöri Richárd, kgomoririchard@inf.elte.hu, kgomori.richard@gmail.com