

1. zárthelyi dolgozat

Felhasználható idő: 90 perc, használható segédeszközök: üres papír és toll.

1. feladat 10 pont

- (a) Döntse el, hogy a következő állítások igazak vagy hamisak (helyes válasz: 1 pont, nincs válasz/helytelen válasz: 0 pont). **4 pont**
- (1) Egy komplex szám abszolút értéke nemnegatív valós szám. **I H**
 - (2) Minden halmaznak létezik legalább 1 nem valódi részhalmaza. **I H**
 - (3) Tetszőleges függvény inverze függvény. **I H**
 - (4) Ha egy reláció tranzitív, akkor szimmetrikus is. **I H**
- (b) Határozza meg az $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x + 8 = 4y\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ reláció értelmezési tartományát és az $R(\{2, 4, 8\})$ képet. **3 pont**
- (c) Konstruáljon az 1, 2, 3, 4, 5 elemek felhasználásával olyan R relációt, melyre:
 $dmn(R) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, nem reflexív, szimmetrikus és $R(\{3\}) = \{4, 5\}$. **3 pont**

2. feladat 11 pont

- (a) Igazolja, hogy az $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y \text{ osztható } 3\text{-mal}\}$ reláció ekvivalenciareláció. Mik lesznek az ekvivalenciaosztályok? **7 pont**
- (b) Adjon meg olyan A és B halmazokat, amelyekre nem teljesül a következő összefüggés:
 $(A \setminus B) \cup B = \emptyset$. **1 pont**
- (c) Igazolja, hogy tetszőleges A és B halmazok esetén igaz a következő összefüggés: $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$. **3 pont**

3. feladat 10 pont

Legyen $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 6x = y + 10\}$ és $S \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 2y + 3 = 7x\}$. Határozza meg az $S \circ R$ és $S^{-1} \circ R$ kompozíciót.

4. feladat 10 pont

- (a) Döntse el a következő relációkról, hogy függvények-e. **5 pont**
- $f_1 \subseteq \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$, $f_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \mid 2x^4 = y^2\}$
 - $f_2 \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = |y|\}$
 - $f_3 \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y - x^5 = -1\}$
- (b) Döntse el, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrow [-6; \infty[$, $f(x) := x^2 - 6$ függvény injektív-, szürjektív-, bijektív-e. **5 pont**

5. feladat 10 pont

A trigonometrikus alak segítségével számítsa ki z értékét trigonometrikus és algebrai alakban is, majd adja meg az összes olyan w komplex számot trigonometrikus alakban, melyekre $w^3 = z$, ahol

$$z = \frac{(1 - i)^{11}}{(1 + \sqrt{3}i)^9}.$$

6. feladat 9 pont

- (a) Ábrázolja a Gauss-számsíkon a következő halmazt: $\{z \in \mathbb{C} \mid 2 \geq |z + 1 - 5i| \wedge \operatorname{Re}(z) > 0\}$ **4 pont**
- (b) Oldja meg a következő egyenletet a komplex számok halmazán: $\frac{x + i - 3i\bar{x}}{x - 4} = i - 1$ **5 pont**