

4. feladatsor: Rendezési relációk

1. feladat

Legyen $A = \{2, 3, 6, 8, 9, 12, 18\} \subset \mathbb{N}^+$, $R \subseteq A \times A$ és $aRb \iff a \mid b$.

- (a) Mutassa meg, hogy az R reláció részbenrendezés az A halmazon.
- (b) Rajzolja meg az R rendezési diagramját (Hasse-diagram).
- (c) Adja meg az $A \subset \mathbb{N}$ halmaz következő jellemzőit (\mathbb{N}^+ -en az \mid relációra nézve): minimális elem, legkisebb elem, maximális elem, legnagyobb elem, alsó korlát, felső korlát, infimum, szuprémum.
- (d) Hogyan változik (a)-(b)-(c), ha az A halmazhoz hozzávesszük az $1 \in \mathbb{N}$ elemet?
- (e) Hogyan változik (a)-(b)-(c), ha az A halmazt a szokásos \leq rendezéssel az \mathbb{N} halmazban tekintjük?

2. feladat

- (a) Bizonyítsa be, hogy az \mathbb{N} halmazon \leq részbenrendezési reláció, ahol \leq definíciója:

$$n, m \in \mathbb{N}, n \leq m \iff \exists k \in \mathbb{N} (n + k = m)$$
- (b) Bizonyítsa be, hogy a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ halmazon $(m_1, n_1)R(m_2, n_2) \iff m_1 \leq m_2 \wedge n_1 \leq n_2$ részbenrendezés.

3. feladat

Döntse el a következő relációkról, hogy részbenrendezési relációk-e az adott halmazon.

- (a) P a valós együtthatós polinomok halmaza, $R \subseteq P \times P, fRg \iff \deg f \leq \deg g$
- (b) $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, aRb \iff |a| \leq |b|$
- (c) V a 10 egység hosszúságú \mathbb{R}^2 -beli vektorok halmaza, $R \subseteq V \times V, xRy \iff$ az x vektor hajlásszöge kisebb-egyenlő mint az y vektor hajlásszöge (hajlásszög legyen $[0; 2\pi[$ -beli)
- (d) $R \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, xRy \iff$ az x vektor hossza kisebb-egyenlő mint az y vektor hossza

4. feladat

Döntse el, mely relációk teljes rendezések az $A = \{1, 2, 3, 4\}$ halmazon.

- (a) $f = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$
- (b) $f = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$
- (c) $f = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

5. feladat

- (a) Mutassa meg, hogy a következő relációk részbenrendezési relációk az adott halmazon.
- (b) Rajzolja meg a rendezések Hasse-diagramját.
- (c) Állapítsa meg a halmazok következő korlátait: minimális elem, legkisebb elem, maximális elem, legnagyobb elem.
- (d) Döntse el, hogy a következő halmazok bármely a, b eleméhez létezik-e $\inf\{a, b\}$ illetve $\sup\{a, b\}$.
 - (1) az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmaz legalább kételemű részhalmazainak halmazán
 $A \leq B \iff A \subseteq B$
 - (2) az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmaz legfeljebb kételemű részhalmazainak halmazán
 $A \leq B \iff B \subseteq A$
 - (3) az $\{3, 6, 9, 10, 20, 30\}$ halmaz elemein $a \leq b \iff a \mid b$
 - (4) az $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ halmaz elemein $a \leq b \iff a \mid b$

6. feladat (*)

Legyen a természetes számokból álló rendezett párok halmazán $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ definiálva a következő rendezés: $(a, b) \leq (c, d) \iff b < d \vee (a \leq c \wedge b = d)$. Bizonyítsa be, hogy \leq részbenrendezési reláció a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ halmazon. Döntse el, hogy a \leq reláció teljes rendezés-e az $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ halmazon.