

2010 复赛 纸带

FHOI 马利

Blog: <http://www.richardma.org/>



纸带

- 小明在美术课上给马上要过生日的妈妈做了张贺卡，为了装饰这张贺卡，小明买了一条彩带，但是彩带上并不是所有颜色小明都喜欢，于是小明决定裁剪这条彩带，以取得最好的装饰效果。现已知彩带由 n 种不同颜色顺次相接而成，而每种颜色的装饰效果用一个整数表示，彩带上各个颜色的装饰效果为整数（包括正整数，0，负整数），从左到右依次为 $a_1, a_2 \dots a_n$ ，小明可以从其中裁剪出连续的一段用来装饰贺卡，而装饰效果就是这一段上各个颜色装饰效果的总和。当然，如果所有颜色的装饰效果都只能起到负面的作用（即 $a_i < 0$ ），小明也可以放弃用彩带来装饰贺卡（获得的装饰效果为 0）。

关键词句

- 小明在美术课上给马上就要过生日的妈妈做了张贺卡，为了装饰这张贺卡，小明买了一条彩带，但是彩带上并不是所有颜色小明都喜欢，于是小明决定裁剪这条彩带，以取得最好的装饰效果。现已知彩带由 n 种不同颜色顺次相接而成，而每种颜色的装饰效果用一个整数表示，彩带上各个颜色的装饰效果为整数（包括正整数，0，负整数），从左到右依次为 $a_1, a_2 \dots a_n$ ，小明可以从中裁剪出连续的一段用来装饰贺卡，而装饰效果就是这一段上各个颜色装饰效果的总和。当然，如果所有颜色的装饰效果都只能起到负面的作用（即 $a_i < 0$ ），小明也可以放弃用彩带来装饰贺卡（获得的装饰效果为 0）。

最朴素的穷举法

- 是否能找到所有可能出现的组合？
- 所用时间会不会超过 1 秒？（循环次数超过 100000 次）
- 这些组合是否存在规律？

从最简单的例子开始分析

- 尽量减少数字的个数
- 尽量使用满足条件的小数字，方便计算
 - 1
 - 1 1
 - 1 1 1
- 以上三个例子，那个例子是最简单的例子？
- 注：最简单的例子不能改变问题的本质！

分析最简单的例子——两个数字

- 所有可能出现的情况：
 - 有两个数字组成
 - 数字可能是负数、0 或正数
- 以数列 0, 1 为例，能否写出所有可能的裁剪方案？

分析最简单的例子——两个数字

- 所有可能的裁剪方案：
 - 0
 - 0 , 1
 - 1
- 如果是复杂一点的数列呢？
 - 0 , 1 , 2
 - 0 , 1 , 2 , 3
- 分别写出两个数列所有可能出现的组合。

分析最简单的例子——两个数字

• 0, 1, 2, 3 所有可能出现的组合:

- 0
- 1
- 2
- 3
- 0, 1
- 1, 2
- 2, 3
- 0, 1, 2
- 1, 2, 3
- 0, 1, 2, 3

序列的长度

- 常见的序列分为数列和字符串两类，像 0, 1, 2, 3 这样的数列，或者“hello”这样的字符串，都可以看作一个序列。
- 数列的长度：包含数字的个数。
0, 1, 2, 3 这个序列的长度为 4。
- 字符串的长度：包含字符的个数，QB 中可以使用 len 函数求得。
“hello”这个序列的长度为 5。

分析最简单的例子——寻找规律

- 0, 1, 2, 3 所有可能出现的组合:
 - 0
 - 1
 - 2
 - 3
 - 0, 1
 - 1, 2
 - 2, 3
 - 0, 1, 2
 - 1, 2, 3
 - 0, 1, 2, 3
- 每组开始的数字有什么特点?
 - 每组序列长度是怎样变化的?

穷举循环

- 使用循环语句，在数组中遍历并输出如下格式的数字：
 - 0
 - 0 , 1
 - 0 , 1 , 2
 - 0 , 1 , 2 , 3

代码模板

```
1.CLS
2.DIM array(10)
3.FOR i = 1 TO 10
4.    array(i) = i - 1
5.NEXT i
6.
7.REM //////////////////////////////////////
8.REM Your Code Start
9.REM //////////////////////////////////////
10.
11.REM //////////////////////////////////////
12.REM Your Code End
13.REM //////////////////////////////////////
14.END
```

第一组双重循环代码

```
1. FOR i = 1 TO n
2.   FOR j = 1 TO i
3.     PRINT array(j);
4.   NEXT j
5.   PRINT
6. NEXT i
```

穷举循环

- 修改循环语句，再分别输出如下格式的数字：

- 1

- 2

- 3

- 1 , 2

- 2 , 3

- 1 , 2 , 3

- 观察这几个循环语句，哪部分代码改变了，如何用循环把它们合并到一起？

循环代码的比较

```
1. FOR i = 1 TO n
2.   FOR j = 1 TO i
3.     PRINT array(j);
4.   NEXT j
5. PRINT
6. NEXT i
```

```
1. FOR i = 2 TO n
2.   FOR j = 2 TO i
3.     PRINT array(j);
4.   NEXT j
5. PRINT
6. NEXT i
```

- 将变化的部分用一个变量存储，外层再套一层循环！

三重循环穷举

```
1. FOR k = 1 TO n
2.   FOR i = k TO n
3.     FOR j = k TO i
4.       PRINT array(j);
5.     NEXT j
6.   PRINT
7. NEXT i
8. NEXT k
```


分析最简单的例子——寻找规律

	开始的数字	序列长度
0	0	1
0 1		2
0 1 2		3
0 1 2 3		4
1	1	1
1 2		2
1 2 3		3
2	2	1
2 3		2
3	3	1

深入剖析三重循环

• 0, 1, 2, 3 所有可能出现的组合:

• 0

• 1

• 2

• 3

• 0, 1

• 1, 2

• 2, 3

• 0, 1, 2

• 1, 2, 3

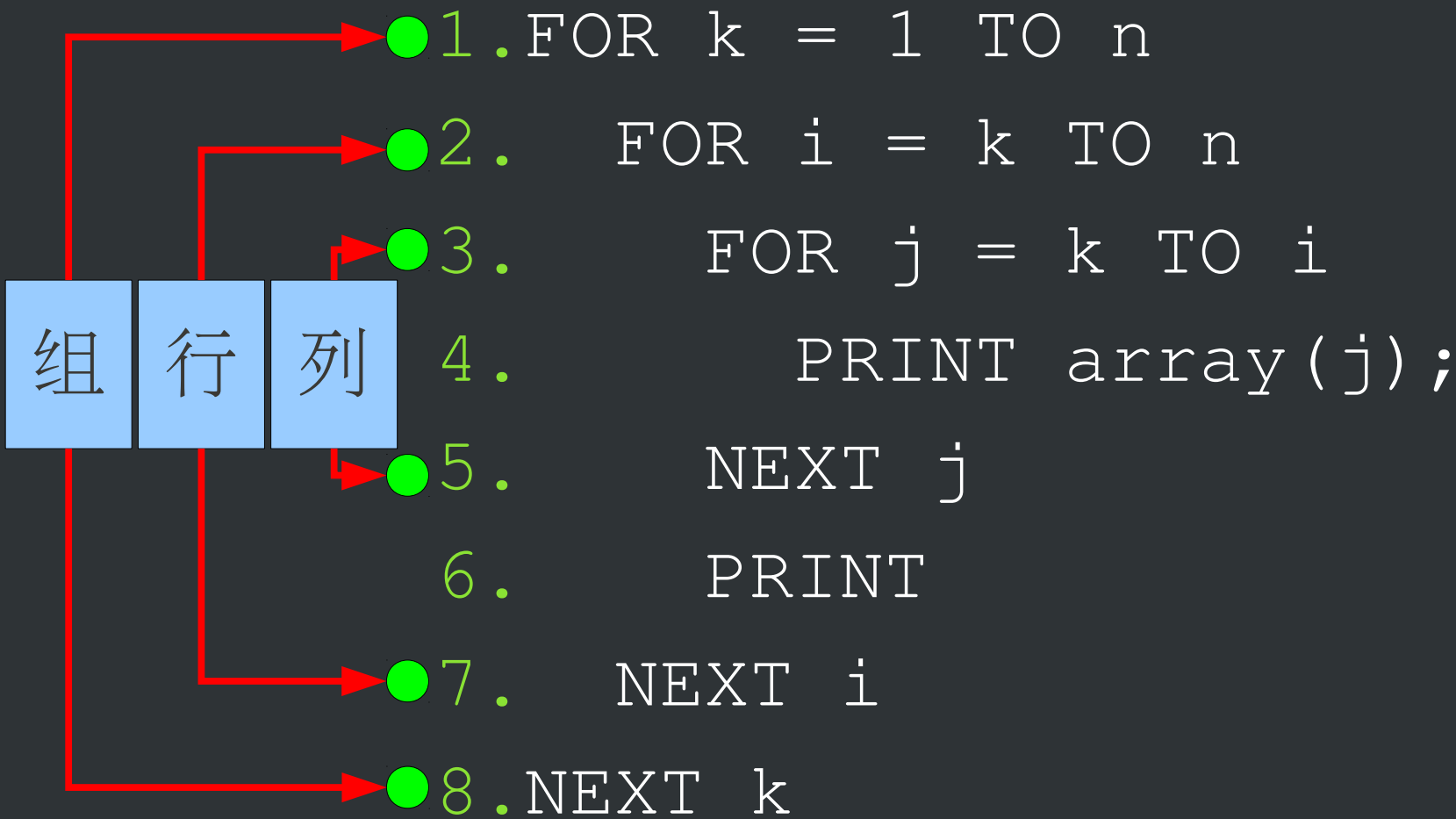
• 0, 1, 2, 3

组

行

列

深入剖析三重循环



回到问题

- 现已知彩带由 n 种不同颜色顺次相接而成，而每种颜色的装饰效果用一个整数表示，彩带上各个颜色的装饰效果为整数（包括正整数, 0, 负整数），从左到右依次为 $a_1, a_2 \dots a_n$ ，小明可以从中裁剪出连续的一段用来装饰贺卡，而装饰效果就是这一段上各个颜色装饰效果的总和。当然，如果所有颜色的装饰效果都只能起到负面的作用（即 $a_i < 0$ ），小明也可以放弃用彩带来装饰贺卡（获得的装饰效果为 0）。
- 对穷举的结果每行求和
- 记录和中最大的数

边界条件

- 如果所有颜色的装饰效果都只能起到负面的作用 (即 $a_i < 0$), 小明也可以放弃用彩带来装饰贺卡 (获得的装饰效果为 0) 。
- 如果最大的和是一个负数, 那么结果应该输出 0 , 而不是这个数字本身。(这就是边界条件, 也就是特殊情况。在比赛中, 这里可能是程序最容易丢分或错误的地方。)

背景问题

- 其实这道题目的数学模型是：
 - 最大子序列和
- 解决方法：
 - 穷举法
 - 分治法
 - 动态规划法