

2010 复赛 纸带

FHOI 马利

Blog: <http://www.richardma.org/>



纸带

- 小明在美术课上给马上要过生日的妈妈做了张贺卡，为了装饰这张贺卡，小明买了一条彩带，但是彩带上并不是所有颜色小明都喜欢，于是小明决定裁剪这条彩带，以取得最好的装饰效果。现已知彩带由 n 种不同颜色顺次相接而成，而每种颜色的装饰效果用一个整数表示，彩带上各个颜色的装饰效果为整数（包括正整数，0，负整数），从左到右依次为 $a_1, a_2 \dots a_n$ ，小明可以从其中裁剪出连续的一段用来装饰贺卡，而装饰效果就是这一段上各个颜色装饰效果的总和。当然，如果所有颜色的装饰效果都只能起到负面的作用（即 $a_i < 0$ ），小明也可以放弃用彩带来装饰贺卡（获得的装饰效果为 0）。

关键词句

- 小明在美术课上给马上要过生日的妈妈做了张贺卡，为了装饰这张贺卡，小明买了一条彩带，但是彩带上并不是所有颜色小明都喜欢，于是小明决定裁剪这条彩带，以取得最好的装饰效果。现已知彩带由 n 种不同颜色顺次相接而成，而每种颜色的装饰效果用一个整数表示，彩带上各个颜色的装饰效果为整数（包括正整数，0，负整数），从左到右依次为 $a_1, a_2 \dots a_n$ ，小明可以从中裁剪出连续的一段用来装饰贺卡，而装饰效果就是这一段上各个颜色装饰效果的总和。当然，如果所有颜色的装饰效果都只能起到负面的作用（即 $a_i < 0$ ），小明也可以放弃用彩带来装饰贺卡（获得的装饰效果为 0）。

背景问题

- 其实这道题目的数学模型是：
 - 最大子序列和
- 解决方法：
 - 穷举法
 - 分治法
 - 动态规划法

最大子序列和

- 给定一个数字（包括正负数和 0）组成的序列。
- 要求找出一个连续的子序列，使得这个子序列的和在所有子序列中最大。

找找子序列

- 请找出 -1 2 -1 2 -1 中的子序列。

找找子序列

- 请找出 -1 2 -1 2 -1 中的子序列
- 一个数字组成的: [-1] [2] [-1] [2] [-1]
- 两个数字组成的: [-1 2] [2 -1] 等
- 三个数字组成的: [-1 2 -1] [2 -1 2] 等
- 四个数字组成的: [-1 2 -1 2] [2 -1 2 -1]
- 五个数字组成的: [-1 2 -1 2 -1]

从最简单的问题开始

- 两个数字组成的序列 A B
- 请思考下面的问题：
- 若 $A > 0$ ，子序列如何取，保证和最大？
- 若 $A < 0$ ，子序列应该如何取？
- 若 $A = 0$ ，子序列应该如何取？

把这个问题复杂一点

- 三个数字组成的序列： A B C
- 提示：把 A B 这两个元素看作一个整体。
- 注：序列里的每一个数字或者字符，我们称为元素。

A B

C

把这个问题复杂一点

A B

C

- 请思考下面的问题:
- 若 $A \cdot B > 0$, 子序列如何取, 保证和最大?
- 若 $A \cdot B < 0$, 子序列应该如何取?
- 若 $A \cdot B = 0$, 子序列应该如何取?
- 这里的 $A \cdot B$ 如何理解?

把这个问题复杂一点

A B

C

- 这里的 A B 如何理解？
- A B 里面最大的子序列和是多少呢？是不是成了一个独立的问题？如果这个问题解决了，那么三个数字 A B C 的最大子序列问题也就有答案了？

回到原点

A B

C

- 现在我们来求 A B 的最大子序列和。
- 这个问题我们已经在前面解决过了，是不是可以直接用前面的结果了？
- 如果是四个数字组成的序列，你有解决的方法了吗？例如：A B C D

一般情况

- 序列都有多个数字组成，例如 n 个数字的序列
 $x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ \dots \ x_n$
- 我们应该如何解决这样的最大子序列和问题？
- 刚才用过的方法还能不能用？试试看。

化繁为简

