Rede de Causalidade para Farol de Bicicleta Movido a Dínamo

Richard L.L. Auzier

6 de novembro de 2024

1 Rede de Causalidade

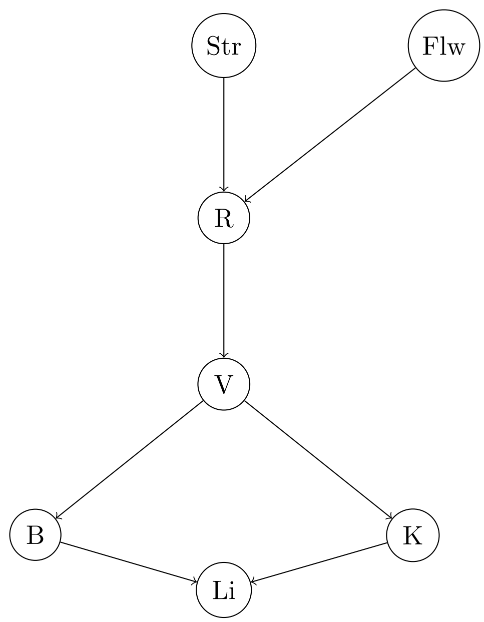

Figure 1: Rede Bayesiana para o Sistema de Diagnóstico do Farol de Bicicleta

2 Explicação da estrutura

A rede de causalidade apresentada na Figura 1 representa as relações entre as variáveis do sistema de diagnóstico para um farol de bicicleta movido a dínamo.

1. **Str** (Condição da rua) e **Flw** (Volante do Dínamo desgastado) são variáveis independentes que influenciam **R** (Dínamo deslizante).

2. **R** influencia diretamente **V** (Dínamo mostra tensão).
3. **V** influencia **Li** (Luz ligada), mas não há conexão direta entre **R** e **Li**, conforme a equação P(Li — V, R) = P(Li — V).
4. **B** (Lâmpada ok) e **K** (Cabo ok) são variáveis independentes que influenciam diretamente **Li**.
5. Não há aresta direta entre **Str** e **Li**, como solicitado na questão original.
6. As variáveis **Str**, **Flw**, **B** e **K** são independentes entre si, como mencionado no documento.
7. Os pares (R, B), (R, K), (V, B) e (V, K) são independentes, o que é refletido na estrutura da rede.

3 Tabelas de Probabilidades Condicionais (CPTs)

3.1 CPT para R (Dínamo deslizante)

R depende de Str (Condição da rua) e Flw (Volante do Dínamo desgastado).

Str	Flw	P(R=true)	P(R=false)
dry	t	0.3	0.7
dry	f	0.1	0.9
wet	t	0.6	0.4
wet	f	0.4	0.6
snow_covered	t	0.9	0.1
snow_covered	f	0.7	0.3

Table 1: CPT para R (Dínamo deslizante)

3.2 CPT para V (Dínamo mostra tensão)

V depende apenas de R, conforme a equação P(V — R, Str) = P(V — R).

R	P(V=true)	P(V=false)
true	0.2	0.8
false	0.9	0.1

Table 2: CPT para V (Dínamo mostra tensão)

3.3 CPT para Li (Luz ligada)

Li depende de V, B e K. Esta tabela foi fornecida no enunciado.

V	B	K	P(Li)
t	t	t	0.99
t	t	f	0.01
t	f	t	0.01
t	f	f	0.001
f	t	t	0.3
f	t	f	0.005
f	f	t	0.005
f	f	f	0

Table 3: CPT para Li (Luz ligada)

4 Tabelas de Probabilidades Condicionais (CPTs)

4.1 CPT para Str (Condição da rua)

Condição	P(Str)
dry	0.6
wet	0.3
snow_covered	0.1

Table 4: CPT para Str (Condição da rua)

4.2 CPT para Flw (Volante do Dínamo desgastado)

Flw	P(Flw)
true	0.3
false	0.7

Table 5: CPT para Flw (Volante do Dínamo desgastado)

4.3 CPT para R (Dínamo deslizante)

Str	Flw	P(R=true)	P(R=false)
dry	t	0.3	0.7
dry	f	0.1	0.9
wet	t	0.6	0.4
wet	f	0.4	0.6
snow_covered	t	0.9	0.1
snow_covered	f	0.7	0.3

Table 6: CPT para R (Dínamo deslizante)

4.4 CPT para V (Dínamo mostra tensão)

R	P(V=true)	P(V=false)
true	0.2	0.8
false	0.9	0.1

Table 7: CPT para V (Dínamo mostra tensão)

4.5 CPT para B (Lâmpada ok)

B	P(B)
true	0.95
false	0.05

Table 8: CPT para B (Lâmpada ok)

4.6 CPT para K (Cabo ok)

K	P(K)
true	0.98
false	0.02

Table 9: CPT para K (Cabo ok)

4.7 CPT para Li (Luz ligada)

V	B	K	P(Li)
t	t	t	0.99
t	t	f	0.01
t	f	t	0.01
t	f	f	0.001
f	t	t	0.3
f	t	f	0.005
f	f	t	0.005
f	f	f	0

Table 10: CPT para Li (Luz ligada)

5 Demonstração da Ausência de Aresta Direta entre Str e Li

Para mostrar que não há uma aresta direta entre Str (Condição da rua) e Li (Luz ligada) na rede bayesiana, vamos usar o conceito de independência condicional.

5.1 Argumento

1. Dada a estrutura da rede, Li é diretamente influenciada apenas por V (Dínamo mostra tensão), B (Lâmpada ok) e K (Cabo ok).

2. A influência de Str em Li é mediada através de R (Dínamo deslizante) e V.

3. Pela propriedade de Markov local, Li é condicionalmente independente de seus não-descendentes, dado seus pais diretos.

4. Portanto, Li é condicionalmente independente de Str, dado V, B e K.

5.2 Prova Matemática

Podemos expressar esta independência condicional como:

$$P(Li|Str, V, B, K) = P(Li|V, B, K)$$

Esta igualdade é verdadeira porque:

$$
\begin{aligned}
P(Li|Str, V, B, K) &= \frac{P(Li, Str, V, B, K)}{P(Str, V, B, K)} \\
&= \frac{P(Li|V, B, K) \cdot P(V, B, K|Str) \cdot P(Str)}{P(V, B, K|Str) \cdot P(Str)} \\
&= P(Li|V, B, K)
\end{aligned}
$$

5.3 Conclusão

A ausência de uma aresta direta entre Str e Li é confirmada pela independência condicional demonstrada acima. Isso significa que, uma vez que conhecemos os estados de V, B e K, o conhecimento adicional sobre Str não altera nossa crença sobre o estado de Li.

6 Cálculo de P(V — Str = snow_covered)

Para calcular P(V — Str = snow_covered), usaremos a regra da probabilidade total e as relações de independência fornecidas na rede bayesiana.

6.1 Passo 1: Aplicar a regra da probabilidade total

$$P(V|\text{Str} = \text{snow\_covered}) = \sum_{R, Flw} P(V|R, Flw, \text{Str} = \text{snow\_covered}) \cdot P(R, Flw|\text{Str} = \text{snow\_covered})$$

6.2 Passo 2: Simplificar usando as relações de independência

Dado que P(V — R, Str) = P(V — R) e Str e Flw são independentes, podemos simplificar:

$$P(V|\text{Str} = \text{snow\_covered}) = \sum_{R, Flw} P(V|R) \cdot P(R|\text{Str} = \text{snow\_covered}) \cdot P(Flw)$$

6.3 Passo 3: Expandir a soma

$$
\begin{aligned}
P(V|\text{Str} = \text{snow\_covered}) = &\; P(V|R = t) \cdot P(R = t|\text{Str} = \text{snow\_covered}) \cdot P(Flw = t) \\
&+ P(V|R = t) \cdot P(R = t|\text{Str} = \text{snow\_covered}) \cdot P(Flw = f) \\
&+ P(V|R = f) \cdot P(R = f|\text{Str} = \text{snow\_covered}) \cdot P(Flw = t) \\
&+ P(V|R = f) \cdot P(R = f|\text{Str} = \text{snow\_covered}) \cdot P(Flw = f)
\end{aligned}
$$

6.4 Passo 4: Substituir valores das CPTs

Usando os valores plausíveis que inserimos anteriormente:

$$\begin{aligned}
P(V = t|\text{Str} = \text{snow_covered}) &= 0.2 \cdot 0.9 \cdot 0.3 \\
&+ 0.2 \cdot 0.7 \cdot 0.7 \\
&+ 0.9 \cdot 0.1 \cdot 0.3 \\
&+ 0.9 \cdot 0.3 \cdot 0.7 \\
&= 0.054 + 0.098 + 0.027 + 0.189 \\
&= 0.368
\end{aligned}$$

6.5 Conclusão

Portanto, P(V = t — Str = snow_covered) 0.368 e P(V = f — Str = snow_covered) = 1 - 0.368 = 0.632.