**Duplikačná lema**: Nech $a, b, c, d \in \mathbb{N}^+$, pre ktoré platí $a + b = c + d$ a buď $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, alebo $ab = cd$. Potom $c = a$ alebo $c = b$.

**Dôkaz**: Z prvej rovnice vyjadríme $d = a + b - c$ a dosadíme do rovnice $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ alebo do rovnice $ab = cd$. Po úprave dostaneme vzťah $c^2 - ac - bc + ab = 0$, ktorý sa dá prepísať na tvar $(c - a)(c - b) = 0$. Z toho vyplýva $c = a$ alebo $c = b$.

**Mocninová lema**: Nech $n \in \mathbb{N}^+$. Nech $a_1, ..., a_n, b$ sú navzájom rôzne kladné celé čísla. Potom:
(i) nasledovná sústava nemá riešenie:
$\sum_{k=1}^{n} a_k = b$
$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = b^2$
(ii) nasledovná sústava má jediné riešenie pre $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, b = 6$:
$\sum_{k=1}^{n} a_k = b$
$\prod_{k=1}^{n} a_k = b$

**Dôkaz**: (i) Pre $n = 1$ dostaneme vzťah $a_1 = b$, čo je spor. Ak $n \geq 2$, tak dosadením $b$ do druhej rovnice dostaneme nutný vzťah $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = (\sum_{k=1}^{n} a_k)^2$, čo sa dá upraviť na tvar $\sum_{i \neq j} a_i a_j = 0$. To je spor, keďže každé $a_i$ aj $a_j$ je kladné, a teda ich súčet nemôže byť nulový.

(ii) Pre $n = 1$ dostaneme vzťah $a_1 = b$, čo je spor. Pre $n = 2$ odvodíme vzťah $a_1 + a_2 = a_1 a_2$, z čoho vyplýva, že $a_1 = \frac{a_2}{a_2 - 1}$. Keďže $gcd(a_2 - 1, a_2) = 1$, zlomok môže mať celočíselnú hodnotu jedine pre $a_2 = 2$. Z toho odvodíme, že aj $a_1 = 2$, čo je spor. Pre $n \geq 4$ sa dá dokázať indukciou, že $\sum_{k=1}^{n} a_k < \prod_{k=1}^{n} a_k$ ak $a_1, ..., a_n$ sú navzájom rôzne kladné celé čísla.

Pre $n = 3$ musí platiť $a_1 + a_2 + a_3 = a_1 a_2 a_3$, čo sa dá prepísať na tvar $a_1 + a_2 = a_3(a_1 a_2 - 1)$. Indukciou sa dá dokázať, že $a_1 + a_2 < a_1 a_2 - 1$ pre $a_1, a_2 \geq 2$. Teda nutne $a_1 = 1, a_2 = 2$, z čoho vyplýva $a_3 = 3, b = 6$.

**Posunová lema**: Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \mathbb{N}$. Ak $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k$ aj $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2$, potom pre všetky $x \in \mathbb{Z}$ platí:
(i) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + x) = \sum_{k=1}^{n} (b_k + x)$
(ii) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + x)^2 = \sum_{k=1}^{n} (b_k + x)^2$

**Dôkaz**:
(i) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+x)=\sum_{k=1}^{n}a_k+nx=\sum_{k=1}^{n}b_k+nx=\sum_{k=1}^{n}(b_k+x)$
(ii) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+x)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2x\sum_{k=1}^{n}a_k+nx^2=\sum_{k=1}^{n}b_k^2+2x\sum_{k=1}^{n}b_k+nx^2=\sum_{k=1}^{n}(b_k+x)^2$

**Normálne formy bimagických regulárnych útvarov**:

Útvar je bimagický ak je magický a umocnením každého jeho prvku na druhú dostaneme opäť magický útvar.

Útvar je regulárny ak všetky jeho priamky s magickou vlastnosťou majú rovnaký počet prvkov.

Bimagické regulárne útvary sú zjavne uzavreté na nenulový násobok a sú uzavreté aj na konštantný posun (to vyplýva z posunovej lemy).

Z toho vyplýva, že ak $X$ je bimagický regulárny útvar, tak $aX+b \mid a,b\in\mathbb{Z}, a\neq 0$ je bimagický regulárny útvar s potenciálne nekladnými prvkami. Tým vieme vytvárať tzv. normálne formy bimagických útvarov. Nech $n$ je veľkosť daného útvaru. Potom:
1) útvar, ktorého najmenší prvok je 0: zvolíme $a=1, b=-x_{min}$, kde $x_{min}$ je najmenši prvok pôvodného útvaru
2) útvar, ktorého najmenší prvok je 1: zvolíme $a=1, b=1-x_{min}$
3) útvar, ktorého najmenší prvok má opačnú hodnotu ako najväčší prvok: zvolíme $a=-2, b=x_{min}+x_{max}$
4) útvar, ktorého magický súčet je 0: zvolíme $a=-n, b=S$, kde $S$ je magický súčet pôvodného útvaru
5) útvar, ktorého magický súčet je rovný danému prvku $x$: zvolíme $a=1-n, b=S-x$
6) útvar, ktorého bimagický súčet je rovný $nx^2$ pre daný prvok $x$: za predpokladu $S\neq nx$ zvolíme $a=2(nx-S), b=T-nx^2$

**Definícia 1**: Nech $G$ je súvislý jednoduchý netriviálny graf. Ak existuje

vrcholové ohodnotenie grafu $G$ také, že platí:
1. vrcholom sú priradené navzájom rôzne kladné celé čísla
2. súčet susedov každého vrcholu je rovnaký
3. súčet druhých mocnín susedov každého vrcholu je rovnaký
tak $G$ nazveme **vrcholovo bimagickým grafom**.

**Veta 1.1**: Nech $G$ je vrcholovo bimagický graf. Ak $G$ obsahuje dvojicu vrcholov stupňa 1, potom majú spoločného suseda.

**Dôkaz**: Sporom. Nech $G$ obsahuje dva vrcholy $u, v$ stupňa 1, ktoré nemajú spoločného suseda. Nech $x$ je hodnota vrcholu $u$. Nech $y$ je hodnota vrcholu $v$.

Nech sú vrcholy $u, v$ susedné. Podľa $u$ má graf magický súčet $y$ a podľa $v$ má graf magický súčet $x$. Z toho vyplýva $x = y$, čo je spor s tým, že vrcholom sú priradené navzájom rôzne čísla.

Nech majú vrcholy $u, v$ rôznych susedov $w_1, w_2$. Označme hodnoty týchto vrcholov $z_1, z_2$. Podľa $u$ má graf magický súčet $z_1$ a podľa $v$ má graf magický súčet $z_2$. Z toho vyplýva $z_1 = z_2$, čo je opäť spor.

**Dôsledok 1.1**: Stromy nie sú vrcholovo bimagické.

**Dôkaz**: Z vety 1.1 vyplýva, že jediným stromom, ktorý môže byť vrcholovo bimagickým, je $K_{1,n}$ pre nejaké $n \in \mathbb{N}$. Nech $v$ je koreň tohto stromu a $v_1, ..., v_n$ sú jeho listy. Nech $b$ je hodnota koreňa a $a_1, ..., a_n$ sú hodnoty jeho listov. Podľa $v$ má graf magický súčet $\sum_{k=1}^{n} a_k$ a podľa $v_1$ má graf magický súčet $b$. Podľa $v$ má graf bimagický súčet $\sum_{k=1}^{n} a_k^2$ a podľa $v_1$ má graf magický súčet $b^2$. Z toho vyplýva, že by sústava z mocninovej lemy mala riešenie, čo je spor.

**Veta 1.2**: Nech $G$ je vrcholovo bimagický graf. Potom majú všetky vrcholy stupňa 2 rovnakú množinu susedov.

**Dôkaz**: Sporom. Nech $G$ obsahuje dva vrcholy $u, v$ stupňa 2, ktoré nemajú rovnakú množinu susedov. Nech $x$ je hodnota vrcholu $u$. Nech $y$ je hodnota vrcholu $v$.

Nech sú vrcholy $u, v$ susedné. Nech $w_1$ je druhý sused $u$ a $z_1$ je jeho hodnota. Nech $w_2$ je druhý sused $v$ a $z_2$ je jeho hodnota. Podľa $u$ má graf magický súčet $y + z_1$ a podľa $v$ má graf magický súčet $x + z_2$. Podľa $u$ má graf bimagický súčet $y^2 + z_1^2$ a podľa $v$ má graf bimagický súčet $x^2 + z_2^2$. To znamená, že $x + z_2 = y + z_1$ a zároveň $x^2 + z_2^2 = y^2 + z_1^2$. Z duplikačnej lemy potom vyplýva, že $y = x$ alebo $y = z_2$, čo je spor s tým, že vrcholom sú priradené navzájom rôzne čísla.

Nech majú vrcholy $u, v$ práve jedného spoločného suseda $w$, jeho hodnotu označíme $z$. Nech $w_1$ je druhý sused $u$ a $z_1$ je jeho hodnota. Nech $w_2$ je druhý sused $v$ a $z_2$ je jeho hodnota. Podľa $u$ má graf magický súčet $z + z_1$ a podľa $v$ má graf magický súčet $z + z_2$. Z toho vyplýva $z_1 = z_2$, čo je spor.

Nech majú vrcholy $u, v$ odlišných susedov. Nech $w_1, w_2$ sú susedia $u$, pričom ich hodnoty sú $z_1, z_2$. Nech $w_3, w_4$ sú susedia $v$, pričom ich hodnoty sú $z_3, z_4$. Podľa $u$ má graf magický súčet $z_1+z_2$ a podľa $v$ má graf magický súčet $z_3+z_4$. Podľa $u$ má graf bimagický súčet $z_1^2+z_2^2$ a podľa $v$ má graf bimagický súčet $z_3^2 + z_4^2$. To znamená, že $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$ a zároveň $z_1^2 + z_2^2 = z_3^2 + z_4^2$. Z duplikačnej lemy potom vyplýva, že $z_3 = z_1$ alebo $z_3 = z_2$, čo je opäť rovnaký spor.

**Veta 1.3**: Nech $G$ je vrcholovo bimagický graf. Potom má každá dvojica nesusedných vrcholov stupňa 3 buď rovnakú množinu susedov, alebo nemá spoločného suseda.

**Dôkaz**: Sporom. Nech $G$ obsahuje dva nesusedné vrcholy $u, v$ stupňa 3, ktoré majú práve jedného alebo dvoch spoločných susedov. Nech $x$ je hodnota vrcholu $u$. Nech $y$ je hodnota vrcholu $v$.

Nech majú vrcholy $u, v$ práve jedného spoločného suseda $w$, jeho hodnotu označíme $z$. Nech $w_1, w_2$ sú zvyšní susedia $u$ a $z_1, z_2$ sú ich hodnoty. Nech $w_3, w_4$ sú zvyšní susedia $v$ a $z_3, z_4$ sú ich hodnoty. Podľa $u$ má graf magický súčet $z+z_1+z_2$ a podľa $v$ má graf magický súčet $z+z_3+z_4$. Podľa $u$ má graf bimagický súčet $z^2 + z_1^2 + z_2^2$ a podľa $v$ má graf magický súčet $z^2 + z_3^2 + z_4^2$. To znamená, že $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$ a zároveň $z_1^2 + z_2^2 = z_3^2 + z_4^2$. Z duplikačnej lemy potom vyplýva, že $z_3 = z_1$ alebo $z_3 = z_2$, čo je spor s tým, že vrcholom sú priradené navzájom rôzne čísla.

Nech majú vrcholy $u, v$ práve dvoch spoločných susedov $w_1, w_2$, ich hodnoty označíme $z_1, z_2$. Nech $w_3$ je zvyšný sused $u$ a $z_3$ je jeho hodnota. Nech $w_4$ je zvyšný sused $v$ a $z_4$ je jeho hodnota. Podľa $u$ má graf magický súčet $z_1 + z_2 + z_3$ a podľa $v$ má graf magický súčet $z_1 + z_2 + z_4$. Z toho vyplýva $z_3 = z_4$, čo je opäť spor.

**Veta 1.4**: Nech $G$ je vrcholovo bimagický graf a $u, v$ sú nejaké jeho dva vrcholy. Nech $x$ je počet susedov vrcholu $u$, ktoré nie sú susedmi vrcholu $v$. Nech $y$ je počet susedov vrcholu $v$, ktoré nie sú susedmi vrcholu $u$. Potom platí:
(i) $x = 0 \iff y = 0$
(ii) $x, y \neq 1$
(iii) $(x, y) \neq (2, 2)$

**Dôkaz**: Ak pre vrcholy $u, v$ zrátame magický alebo bimagický súčet, ich spoloční susedia budú zarátaní na oboch stranách. Stačí sa preto venovať magickému a bimagickému súčtu vrcholov, ktoré nie sú zároveň susedmi $u$ aj $v$ (tých je $x$, resp. $y$). Sporom budeme predpokladať, že $G$ je vrcholovo bimagický a neplatí (i), (ii) alebo (iii). To znamená, že nasledovná sústava má riešenie:
$\sum_{k=1}^{x} a_k = \sum_{k=1}^{y} b_k$
$\sum_{k=1}^{x} a_k^2 = \sum_{k=1}^{y} b_k^2$
ak $a_1, ..., a_x, b_1, ..., b_y$ sú navzájom rôzne kladné celé čísla.

Ak neplatí (i), tak BUNV nech $x > 0$ a $y = 0$. Druhá rovnica by potom mala tvar $\sum_{k=1}^{x} a_k^2 = 0$. Jediné riešenie tejto rovnice je zjavne nulové, čo je spor s tým, že vo vrcholovo bimagickom grafe sú vrcholom priradené kladné čísla.

Ak neplatí (ii), tak BUNV nech $y = 1$. Potom dostaneme sústavu z mocninovej lemy, o ktorej vieme, že nemá riešenie (čo je spor).

Ak neplatí (iii), tak musí platiť $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ aj $a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2$. Z duplikačnej lemy potom vyplýva $b_1 = a_1$ alebo $b_1 = a_2$, čo je spor s tým, že vo vrcholovo bimagickom grafe sú vrcholom priradené navzájom rôzne čísla.

**Veta 1.5**: Pre každé $i, j \in \mathbb{N}, 2 \leq i \leq j, (i, j) \neq (2, 2)$ platí, že graf $K_{i,j}$ je vrcholovo bimagický.

**Dôkaz**: Indukciou vzhľadom na $i, j$. Najprv ukážeme, že grafy $K_{2,j}, K_{3,j}, K_{4,4}$ a $K_{4,5}$ sú vrcholovo bimagické.

Graf $K_{2,n}$ pre $n \geq 3$ je vrcholovo bimagický - stačí do prvej partície dať prvky $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ a $\frac{n(n-1)(3n^2-7n+14)}{24}$ a do druhej partície prvky 1 až $n-1$ spolu s $\frac{n(n-1)(3n^2-7n+14)}{24} + 1$.

Graf $K_{3,n}$ pre $n \geq 3$ je vrcholovo bimagický - stačí do prvej partície dať prvky $1, \frac{n(n+1)}{2} - 1$ a $\frac{n(n+1)(3n^2-n-14)}{24} + 1$ a do druhej partície prvky 2 až $n$ spolu s $\frac{n(n+1)(3n^2-n-14)}{24} + 2$.

Graf $K_{4,4}$ je vrcholovo bimagický - stačí do prvej partície dať prvky $1, 4, 6, 7$ a do druhej partície prvky $2, 3, 5, 8$.

Graf $K_{4,5}$ je vrcholovo bimagický - stačí do prvej partície dať prvky $2, 12, 13, 15$ a do druhej partície prvky $1, 4, 8, 10, 19$.

Teraz dokážeme, že ak je $K_{i,j}$ vrcholovo bimagický, tak je aj $K_{i+2,j+3}$. Do jednej partície stačí pridať prvky $4k, 5k$ a do druhej prvky $k, 2k, 6k$, pričom $k \in \mathbb{N}$ zvolíme dostatočne veľké (aby boli prvky navzájom rôzne).

**Veta 1.6**: Jediný kubický graf, ktorý je vrcholovo bimagický, je $K_{3,3}$.

**Dôkaz**: Nech $G$ je kubický graf, o ktorom vieme, že je vrcholovo bimagický. V grafe $G$ určite existujú dva susedné vrcholy $u, v$. Nech $w_1, w_2$ sú zvyšní susedia $u$. Nech $w_3, w_4$ sú zvyšní susedia $v$. Vrcholy $u, v$ sú susedné a majú stupeň 3. Rozoberieme všetky možnosti:

1. Nech sú $w_1, w_2, w_3, w_4$ navzájom rôzne. Vrcholy $w_1$ a $v$ majú spoločného suseda $u$, takže z vety 1.3 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Susedné byť nemôžu, pretože potom by mal $v$

stupeň aspoň 4. Teda v $G$ musí existovať hrana $w_1w_3$ aj hrana $w_1w_4$.

Zároveň, vrcholy $w_2$ a $v$ majú tiež spoločného suseda $u$, takže z vety 1.3 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Susedné byť nemôžu, pretože potom by mal $v$ stupeň aspoň 4. Teda v $G$ musí existovať hrana $w_2w_3$ aj hrana $w_2w_4$.

Tým sme dostali graf $K_{3,3}$, ktorý vieme vrcholovo bimagicky ohodnotiť.

2. Nech $w_1 = w_3$ a $w_2 \neq w_4$. Vrcholy $w_1$ a $w_2$ majú spoločného suseda $u$, takže z vety 1.3 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Teda v $G$ musí existovať hrana $w_1w_2$ alebo hrana $w_2v$.

Zároveň, vrcholy $w_1$ a $w_4$ majú spoločného suseda $v$, takže z vety 1.3 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Teda v $G$ musí existovať hrana $w_1w_4$ alebo hrana $w_4u$.

Lenže ak z každých dvoch potenciálnych hrán pridáme do $G$ aspoň jednu, tak jeden z vrcholov $u, v, w_1$ bude mať stupeň aspoň 4, čo je spor s tým, že graf je kubický.

3. Nech $w_1 = w_3$ a $w_2 = w_4$. Vrcholy $w_1$ a $w_2$ majú spoločných susedov $u, v$, takže z vety 1.3 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Teda v $G$ musí existovať hrana $w_1w_2$ alebo dvojice hrán $w_1w_5$ a $w_2w_5$ pre nejaký nový vrchol $w_5$.

Ak je v $G$ hrana $w_1w_2$, dostaneme graf $K_4$. O ňom sa môžeme ľahko presvedčiť, že nie je vrcholovo bimagický. Ak priradíme vrcholom hodnoty $a, b, c, d$, tak musí platiť, že magické súčty $a+b+c, a+b+d, a+c+d, b+c+d$ sú rovnaké. To je možné len v prípade, že $a = b = c = d$, čo je spor s tým, že vrcholom sú priradené navzájom rôzne čísla.

Ak sú v $G$ hrany $w_1w_5$ aj $w_2w_5$ pre nejaký nový vrchol $w_5$, tiež dôjdeme k sporu. Vrcholy $u$ a $w_5$ majú spoločných susedov $w_1, w_2$, takže z vety 1.3 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Susedné byť nemôžu, pretože potom by mal $u$ stupeň aspoň 4. Teda by v $G$

musela existovať hrana $vw_5$, čo tiež nie je možné, pretože potom by mal $v$ stupeň aspoň 4.

**Veta 1.7**: Nech $G$ je vrcholovo bimagický regulárny graf. Potom existuje vrcholovo bimagické ohodnotenie grafu $G$ také, že jeho najmenšia hodnota je 1.

**Dôkaz**: Zoberme si ľubovoľné vrcholovo bimagické ohodnotenie grafu $G$. Nech $n$ je najmenšia hodnota z nich. Keďže je regulárny, tak každý magický aj bimagický súčet je zložený z rovnakého počtu členov. Z posunovej lemy potom vyplýva, že ku všetkým ohodnoteniam vrcholov môžeme pripočítať alebo odpočítať nejakú konštantu $x$. Ak odpočítame $a-1$, zjavne dostaneme graf, ktorého najmenšia hodnota je 1.

**Definícia 1.8**: Nech $G$ je vrcholovo bimagický graf s $n$ vrcholmi. Ak sú vrcholom priradené čísla z množiny $\{1, 2, ..., n\}$, tak $G$ nazveme **vrcholovo superbimagickým grafom**.

Existuje vrcholovo superbimagický graf? Keďže zatiaľ vieme vrchovo bimagicky ohodnotiť len kompletné bipartitné grafy, musíme skúmať tie.

Hrubou silou je dokázané, že existuje vrcholovo superbimagický kompletný bipartitný graf. Pre $n \in \{7, 8, 11, 12\}$ existuje práve jedno ohodnotenie:
$n = 7 \to \{1, 2, 4, 7\} \mid \{3, 5, 6\}$
$n = 8 \to \{1, 4, 6, 7\} \mid \{2, 3, 5, 8\}$
$n = 11 \to \{1, 3, 4, 5, 9, 11\} \mid \{2, 6, 7, 8, 10\}$
$n = 12 \to \{1, 3, 7, 8, 9, 11\} \mid \{2, 4, 5, 6, 10, 12\}$

Pre $n = 15$ existuje 7 perfektných ohodnotení, pre $n = 16$ existuje 12 perfektných ohodnotení a pre väčšie $n$ tieto hodnoty rastú.

**Veta 1.9**: Vrcholovo superbimagický kompletný bipartitný graf s $n$ vrcholmi existuje práve vtedy, keď $n = 4k$ alebo $n = 4k - 1$ pre $k \geq 2$.

**Dôkaz**: Najprv dokážeme, že ak $n = 4k$ alebo $n = 4k - 1, k \geq 2$, tak existuje vrcholovo superbimagický kompletný bipartitný graf, ktorý má $n$ vrcholov. Stačí nám dokázať, že dané tvrdenie platí pre všetky $n$ tvaru $8k - 1, 8k, 8k + 3, 8k + 4$. To urobíme matematickou indukciou vzhľadom na $k$. Pre $k = 1$ existujú vyhovujúce ohodnotenia (uvedené vo vete 1.7).

Indukčný krok je potom jednoduchý. Uvedieme ho pre prípad $n = 8k$, ostatné z nich sú analogické. Predpokladajme, že pre $n = 8k$ existuje superbimagické ohodnotenie. Pre $n = 8(k + 1)$ ho zostrojíme nasledovne:
1) vezmeme superbimagické ohodnotenie pre $n = 8k$ (ostanú nám nepriradené čísla $8k + 1, ...8k + 8$)
2) na jednu stranu pridáme čísla $8k + 1, 8k + 4, 8k + 6, 8k + 7$ a na druhú stranu $8k + 2, 8k + 3, 8k + 5, 8k + 8$
Na obe strany sme pridali čísla s rovnakým súčtom aj rovnakým súčtom druhých mocnín. Ak bolo pôvodné ohodnotenie superbimagické, tak aj nové ohodnotenie pre $n = 8(k + 1)$ je superbimagické (čbtd).

Ak $n = 4k + 1$ alebo $n = 4k + 2, k \in \mathbb{N}$, tak požadovaný graf neexistuje. Predpokladajme sporom, že taký graf existuje. Potom sa množina $\{1, 2, ..., n\}$ dá rozdeliť na dve disjunktné podmnožiny s rovnakým súčtom aj súčtom druhých mocnín. Súčet tejto množiny je $\frac{n(n+1)}{2}$. Každá podmnožina by teda musela mať súčet $\frac{n(n+1)}{4}$. Lenže ak $n = 4k + 1$ alebo $n = 4k + 2, k \in \mathbb{N}$, tak výraz $\frac{n(n+1)}{4}$ nie je celé číslo, čo je spor.

**Hypotézy 1**:
- Existuje graf, ktorý je vrcholovo bimagický a nie je kompletný bipartitný?

**Definícia 2**: Nech $G$ je súvislý jednoduchý netriviálny graf. Ak existuje hranové ohodnotenie grafu $G$ také, že platí:
1. hranám sú priradené navzájom rôzne kladné celé čísla
2. súčet incidentných hrán každého vrcholu je rovnaký
3. súčet druhých mocnín incidentných hrán každého vrcholu je rovnaký
tak $G$ nazveme **hranovo bimagickým grafom**.

Jeden z hranovo bimagických grafov je cesta na dvoch vrcholoch (s ľubovoľným kladným ohodnotením). Zaujímavá skupina potenciálne hranovo bimagických grafov je $K_{n,n}$: sú ekvivalentné semibimagickým štvorcom veľkosti $n \times n$. A keďže už poznáme semibimagické štvorce veľkosti $4 \times 4$ a väčšie, tak $K_{n,n}$ je hranovo bimagický pre $n \geq 4$.

**Veta 2.1**: Nech $G$ je hranovo bimagický graf, ktorý má aspoň tri vrcholy. Potom $G$ neobsahuje vrchol stupňa 1.

**Dôkaz**: Sporom. Nech $u$ je vrchol stupňa 1, $v$ je jeho jediný sused a $x$ je hodnota hrany medzi vrcholmi $u, v$. Potom podľa $u$ musí platiť, že magický súčet je $x$. Lenže ak je $G$ súvislý a má aspoň tri vrcholy, tak vrchol $v$ musí mať ešte ďalší susedný vrchol $w$. Nech $y$ je hodnota hrany medzi vrcholmi $v, w$. Potom však podľa $v$ musí platiť, že magický súčet je aspoň $x + y > x$, čo je spor.

**Veta 2.2**: Nech $G$ je hranovo bimagický graf. Potom $G$ neobsahuje vrchol stupňa 2.

**Dôkaz**: Sporom. Nech $u$ je vrchol stupňa 2. Označme jeho susedov $v, w$. Nech $b, c$ sú ohodnotenia hrán medzi $u, v$, resp. $u, w$. Nech $a_1, a_2, ..., a_n$ sú ohodnotenia hrán, ktoré sú incidentné s $w$ okrem hrany $uw$. Podľa $u$ musí platiť, že magický súčet je $b + c$ a bimagický súčet je $b^2 + c^2$. Podľa $w$ musí platiť, že magický súčet je $c + \sum_{k=1}^{n} a_n$ a bimagický súčet je $c^2 + \sum_{k=1}^{n} a_n^2$. Z toho vyplýva, že by sústava z mocninovej lemy mala riešenie, čo je spor.

**Dôsledok 2.2**: Stromy nie sú hranovo bimagické.

**Veta 2.3**: Nech $G$ je hranovo bimagický graf, ktorý má aspoň tri vrcholy. Nech $u, v$ sú ľubovoľné dva susedné vrcholy. Potom $max\{d(u), d(v)\} \geq 4$.

**Dôkaz**: Sporom. Predpokladajme, že existuje dvojica susedných vrcholov $u, v$ takých, že $max\{d(u), d(v)\} < 4$. Z dôsledku 2.2 potom vyplýva, že nutne $d(u) = d(v) = 3$. Označme $x$ hodnotenie hrany medzi $u, v$. Označme $y_1, y_2$ zvyšné hodnotenia hrán z $u$ a $z_1, z_2$ zvyšné hodnotenia hrán z $v$. Podľa $u$

musí platiť, že magický súčet je $x + y_1 + y_2$ a bimagický súčet je $x^2 + y_1^2 + y_2^2$. Podľa $v$ musí platiť, že magický súčet je $x + z_1 + z_2$ a bimagický súčet je $x^2 + z_1^2 + z_2^2$. Teda musí platiť $y_1 + y_2 = z_1 + z_2$ aj $y_1^2 + y_2^2 = z_1^2 + z_2^2$. Z duplikačnej lemy potom vyplýva, že $z_1 = y_1$ alebo $z_1 = y_2$, čo je spor s tým, že hranám budú priradené navzájom rôzne čísla.

**Dôsledok 2.3**: Kubické grafy nie sú hranovo bimagické.

**Veta 2.4**: Nech $G$ je hranovo bimagický regulárny graf. Potom existuje hranovo bimagické ohodnotenie grafu $G$ také, že jeho najmenšia hodnota je 1.

**Dôkaz**: Podobný ako dôkaz vety 1.7, akurát konštantu neodpočítame od ohodnotení vrcholov, ale od ohodnotení hrán.

**Veta 2.5**: Existuje graf, ktorý je hranovo bimagický a nie je kompletný bipartitný.

**Dôkaz**: Nech $G$ je hranovo bimagický kompletný bipartitný regulárny graf s nejakým ohodnotením. Nech $e$ je hrana, ktorá má najmenšiu hodnotu. Keďže je regulárny, tak podľa posunovej lemy môžeme od všetkých hrán odrátať hodnotu hrany $e$. Tým dostaneme hranovo bimagický kompletný bipartitný graf, ktorý má práve jednu nulovú hranu $e$. Zjavne vieme túto hranu z grafu odstrániť a magická aj bimagická podmienka ostane zachovaná. Graf $G - e$ je teda hranovo bimagický a pritom nie je kompletný bipartitný.

**Definícia 2.6**: Nech $G$ je hranovo bimagický graf s $n$ vrcholmi. Ak sú hranám priradené čísla z množiny $\{1, 2, ..., n\}$, tak $G$ nazveme **hranovo superbimagickým grafom**.

Georges Pfeffermann našiel v 19. storočí bimagický štvorec veľkosti $8 \times 8$, v ktorom použil všetky čísla z množiny $\{1, 2, ..., 64\}$. Vieme teda, že existuje hranovo superbimagický graf - je ním kompletný bipartitný graf na 8 vrcholoch.

**Hypotézy 2**:
- Existuje graf, ktorý je hranovo bimagický a nie je kompletný bipartitný alebo kompletný bipartitný bez jednej hrany?

**Definícia 3**: Nech $G$ je súvislý jednoduchý netriviálny graf. Ak existuje vrcholové ohodnotenie grafu $G$ také, že platí:
1. vrcholom sú priradené navzájom rôzne kladné celé čísla
2. súčet susedov každého vrcholu je rovnaký
3. súčin susedov každého vrcholu je rovnaký
tak $G$ nazveme **vrcholovo multiplikatívnym magickým grafom**.

**Veta 3.1**: Nech $G$ je vrcholovo multiplikatívny magický graf. Ak $G$ obsahuje dvojicu vrcholov stupňa 1, potom majú spoločného suseda.

**Dôkaz**: rovnaký ako dôkaz vety 1.1

**Dôsledok 3.1**: Jediný strom, ktorý je vrcholovo multiplikatívny magický, je $K_{1,3}$.

**Dôkaz**: Z vety 3.1 vyplýva, že jediným stromom, ktorý môže byť vrcholovo multiplikatívnym magickým, je $K_{1,n}$ pre nejaké $n \in \mathbb{N}$. Nech $v$ je koreň tohto stromu a $v_1, ..., v_n$ sú jeho listy. Nech $b$ je hodnota koreňa a $a_1, ..., a_n$ sú hodnoty jeho listov. Podľa $v$ má graf magický súčet $\sum_{k=1}^{n} a_k$ a podľa $v_1$ má graf magický súčet $b$. Podľa $v$ má graf súčin $\prod_{k=1}^{n} a_k$ a podľa $v_1$ má graf súčin $b$. To odpovedá sústave z mocninovej lemy, ktorá má jediné riešenie $(n = 3, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, b = 6)$. Z toho vyplýva, že iba $K_{1,3}$ je multiplikatívny magický.

**Veta 3.2**: Nech $G$ je vrcholovo multiplikatívny magický graf. Potom majú všetky vrcholy stupňa 2 rovnakú množinu susedov.

**Dôkaz**: rovnaký ako dôkaz vety 1.2, akurát použijeme multiplikatívny súčet a nie bimagický

**Veta 3.3**: Nech $G$ je vrcholovo multiplikatívny magický graf. Potom má každá dvojica nesusedných vrcholov stupňa 3 buď rovnakú množinu susedov, alebo nemá spoločného suseda.

**Dôkaz**: rovnaký ako dôkaz vety 1.3, akurát použijeme multiplikatívny súčet a nie bimagický

**Veta 3.4**: Kompletný bipartitný graf nemôže byť vrcholovo multiplikatívny supermagický.

**Dôkaz**: Sporom. Nech $G$ je kompletný bipartitný a vrcholovo multiplikatívny supermagický graf s $n$ vrcholmi. Nech $p$ je najväčšie prvočíslo, ktoré neprevyšuje $n$. Toto prvočíslo sa môže vyskytovať iba v jednej partícii. To však znamená, že súčin oboch partícii nemôže byť rovnaký (jeden súčin bude mať $p$ vo svojom rozklade a druhý nie).

**Veta 3.5**: Pre každé $i, j \in \mathbb{N}, 2 \leq i \leq j, (i, j) \neq (2, 2)$ platí, že graf $K_{i,j}$ je vrcholovo multiplikatívny magický.

**Dôkaz**: Indukciou vzhľadom na $i, j$. Najprv ukážeme, že grafy $K_{i,j}, i \in \{2, 3\}, K_{4,4}$ a $K_{4,5}$ sú vrcholovo multiplikatívne magické.

Grafy $K_{2,3}, K_{2,4}, K_{4,4}$ a $K_{4,5}$ sú vrcholovo multiplikatívne magické, pretože:
pre graf $K_{2,3}$ stačí priradiť jednej partícii prvky $5, 12$ a druhej partícii prvky $1, 6, 10$
pre graf $K_{2,4}$ stačí priradiť jednej partícii prvky $9, 16$ a druhej partícii prvky $1, 2, 4, 18$
pre graf $K_{4,4}$ stačí priradiť jednej partícii prvky $1, 5, 6, 12$ a druhej partícii prvky $2, 3, 4, 15$
pre graf $K_{4,5}$ stačí priradiť jednej partícii prvky $2, 10, 20, 27$ a druhej partícii prvky $1, 3, 6, 24, 25$

Graf $K_{2,n}$ pre $n \geq 5$ je vrcholovo multiplikatívny magický - stačí do prvej partície dať prvky $(n-1)! + 1$ a $(n-1)!((n-1)! + 1 - \frac{n(n-1)}{2})$ a do druhej partície prvky $1, 2, ..., n-2, n-1, ((n-1)! + 1)((n-1)! + 1 - \frac{n(n-1)}{2})$.

Graf $K_{3,n}$ pre $n \geq 3$ je vrcholovo multiplikatívny magický - stačí do prvej partície dať prvky $1, n!+1$ a $n!(n!+3-\frac{n(n+1)}{2})$ a do druhej partície prvky $2, ..., n-1, n, (n!+1)(n!+3-\frac{n(n+1)}{2})$.

Teraz dokážeme, že ak je $K_{i,j}$ vrcholovo multiplikatívny magický, tak je aj $K_{i+2,j+3}$. Do jednej partície stačí pridať prvky $2xy, 2xy-x-y$ a do druhej prvky $2(2xy-x-y), x, y$, pričom $x, y \in \mathbb{N}$ zvolíme dostatočne veľké (aby boli prvky navzájom rôzne).

**Definícia 4**: Nech $G$ je súvislý jednoduchý netriviálny graf. Ak existuje hranové ohodnotenie grafu $G$ také, že platí:
1. hranám sú priradené navzájom rôzne kladné celé čísla
2. súčet incidentných hrán každého vrcholu je rovnaký
3. súčin incidentných hrán každého vrcholu je rovnaký

tak $G$ nazveme **hranovo multiplikatívnym magickým grafom**.

**Veta 4.1**: Nech $G$ je hranovo multiplikatívny magický graf, ktorý má aspoň tri vrcholy. Potom $G$ neobsahuje vrchol stupňa 1.

**Dôkaz**: rovnaký ako dôkaz vety 2.1

**Definícia 5**: Nech $A$ je matica veľkosti $m \times n$. Ak platí:
1. prvky matice sú navzájom rôzne kladné celé čísla
2. súčet prvkov v každom riadku je konštantný
3. súčet prvkov v každom stĺpci je konštantný
4. súčet druhých mocnín prvkov v každom riadku je konštantný
5. súčet druhých mocnín prvkov v každom stĺpci je konštantný

tak $A$ nazveme **bimagickým obdĺžnikom**.

Každý hranovo bimagický kompletný bipartitný graf sa dá jednoducho transformovať na bimagický obdĺžnik.

**Veta 5.1**: Nech $A$ je bimagický obdĺžnik. Potom ho vieme transformovať na taký bimagický obdĺžnik $B$ s potenciálne nekladnými prvkami, že magický súčet v jeho riadku aj stĺpci je rovný 0.

**Dôkaz**: Nech $S_r, S_s$ sú súčty v riadku a stĺpci v bimagickom obdĺžniku $A$ veľkosti $m \times n$. Keďže $A$ má $m$ riadkov a $n$ stĺpcov, musí platiť $mS_r = nS_s$, z čoho vyplýva $\frac{m}{n} = \frac{S_s}{S_r}$. Teda $S_s = km$ a $S_r = kn$ pre nejaké $k \in \mathbb{N}$. Ak od každého prvku v $A$ odpočítame $k$, vytvoríme tým nový obdĺžnik $B$. Zjavne $B$ má súčty v riadku aj stĺpci nulové. Z posunovej lemy zároveň vyplýva, že ak boli predtým magic ké aj bimagické súčty konštantné, tak budú konštantné aj v $B$. Teda $B$ je bimagický obdĺžnik s potenciálne nekladnými prvkami.

**Veta 5.2**: Nech $A$ je bimagický obdĺžnik veľkosti $m \times n$. Potom $m, n \geq 3$ alebo $(m, n) = (1, 1)$.

**Dôkaz**: Ak $m = 1$, tak má obdĺžnik len jeden riadok. Ak majú byť jeho súčty v stĺpci rovnaké, musí byť v každom stĺpci rovnaké číslo. Ak $n \geq 2$, obdĺžnik by obsahoval duplicitné prvky, čo je spor. Z toho vyplýva, že nutne $n = 1$.

Ak $m = 2$, tak z predošlého odstavca vieme, že $n \geq 2$. Tým dostaneme pre dva riadky a dva stĺpce rovnicu z duplikačnej lemy, z čoho vyplýva, že obdĺžnik by obsahoval duplicitné prvky, čo je spor.

**Veta 5.3**: Nech $A$ je bimagický obdĺžnik veľkosti $3 \times n$. Potom ho vieme transformovať na bimagický obdĺžnik $B$, pre ktorý platí, že v každom jeho stĺpci je aspoň jedno nepárne číslo.

**Dôkaz**: Predpokladajme, že v $A$ existuje stĺpec, ktorého všetky tri prvky sú párne čísla. Z toho vyplýva, že ich bimagický súčet je deliteľný 4. Kedy môže byť súčet $a^2+b^2+c^2$ deliteľný 4? Prvky $a, b, c$ musia byť tvaru $4k$ alebo $4k+2$, lebo ak by boli ľubovoľné z nich tvaru $4k+1$ alebo $4k+3$, ich druhá mocnina by dávala zvyšok 1 po delení 4 - výraz $a^2+b^2+c^2$ by už nemohol byť deliteľný 4. Z toho vyplýva, že každý stĺpec v $A$ obsahuje iba párne prvky. Vieme ho preto transformovať na bimagický obdĺžnik $B$ jednoducho tak, že každý prvok vydelíme 2 (alebo mocninou 2, tak aby $B$ obsahovalo nepárne prvky).

**Definícia 6**: Nech $A$ je matica veľkosti $m \times n$. Ak platí:
1. prvky matice sú navzájom rôzne kladné celé čísla
2. súčet prvkov v každom riadku je konštantný
3. súčet prvkov v každom stĺpci je konštantný
4. súčin prvkov v každom riadku je konštantný
5. súčin prvkov v každom stĺpci je konštantný
tak $A$ nazveme **multiplikatívnym magickým obdĺžnikom**.

Každý hranovo multiplikatívny magický kompletný bipartitný graf sa dá jednoducho transformovať na multiplikatívny magický obdĺžnik.

**Veta 6.1**: Nech $A$ je multiplikatívny magický obdĺžnik veľkosti $m \times n$. Potom $m, n \geq 3$ alebo $(m, n) = (1, 1)$.

**Dôkaz**: rovnaký ako dôkaz vety 5.2