Algoritmy pre vrcholovo bimagické grafy

Algoritmus 1: Na vstupe dostaneme ľubovoľný súvislý graf. Výstupom je odpoveď, či má graf šancu byť vrcholovo bimagickým. Pre každú dvojicu jeho vrcholov overíme, či spĺňa podmienku z vety 1.4. Ak existuje dvojica vrcholov, pre ktorú graf nevyhovuje niektorej z podmienok (i) - (iii), tak môžeme s istotou povedať, že nie je vrcholovo bimagický.

Pseudokód:
def otestuj(G):
pre všetky dvojice vrcholov v_1, v_2 grafu G
x = |{susedia[v1]} - {susedia[v2]}|
y = |{susedia[v2]} - {susedia[v1]}|
ak ($xy = 0$ a $x + y > 0$) RETURN graf G nie je vrcholovo bimagický
ak $x = 1$ alebo $y = 1$ RETURN graf G nie je vrcholovo bimagický
ak $x = y = 2$ RETURN graf G nie je vrcholovo bimagický

Výsledky: jediné súvislé grafy s menej ako 10 vrcholmi, ktoré spĺňajú všetky podmienky (a teda môžu byť vrcholovo bimagickými), sú:
$K_{2,3}$
$K_{2,4}, K_{3,3}$
$K_{2,5}, K_{3,4}$
$K_{2,6}, K_{3,5}, K_{4,4}, K_{2,3,3}$
$K_{2,7}, K_{3,6}, K_{4,5}, K_{2,3,4}, K_{3,3,3}$

Algoritmus 2: Na vstupe dostaneme kompletný bipartitný graf $K_{i,j}$. Výstupom má byť vrcholové bimagické ohodnotenie tohto grafu. Algoritmus bude replikovať indukčný dôkaz vety 1.5.

Pseudokód:
def ohodnot(i,j):
ak $i > j$ RETURN ohodnot(j,i)
ak $i \leq 1$ alebo $i = j = 2$ RETURN nie je možné ohodnotiť graf $K_{i,j}$
ak $i = 2$ RETURN $(\frac{n(n-1)}{2}+1, \frac{n(n-1)(3n^2-7n+14)}{24}), (1, ..., n-1, \frac{n(n-1)(3n^2-7n+14)}{24}+1)$
ak $i = 3$ RETURN $(1, \frac{n(n+1)}{2}-1, \frac{n(n+1)(3n^2-n-14)}{24}+1), (2, ..., n, \frac{n(n+1)(3n^2-n-14)}{24}+$

2)
ak $(i, j) = (4, 4)$ RETURN $(1, 4, 6, 7), (2, 3, 5, 8)$
ak $(i, j) = (4, 5)$ RETURN $(2, 12, 13, 15), (1, 4, 8, 10, 19)$
H = ohodnot(i - 2, j - 3); m = max(H) + 1
na ľavú stranu H pridaj $4m, 5m$, na pravú stranu H pridaj $m, 2m, 6m$
RETURN H

Algoritmus 3: Na vstupe dostaneme číslo $n \in \mathbb{N}$. Výstupom algoritmu má byť vrcholové superbimagické ohodnotenie kompletného bipartitného grafu s n vrcholmi. Algoritmus bude replikovať indukčný dôkaz vety 1.9.

Pseudokód:
def ohodnotSuper(n):
ak $n < 7$ RETURN nie je možné ohodnotiť
ak dáva n po delení 4 zvyšok 1 alebo 2 RETURN nie je možné ohodnotiť
ak $n = 7$ RETURN (1, 2, 4, 7), (3, 5, 6)
ak $n = 8$ RETURN (1, 4, 6, 7), (2, 3, 5, 8)
ak $n = 11$ RETURN (1, 3, 4, 5, 9, 11), (2, 6, 7, 8, 10)
ak $n = 12$ RETURN (1, 3, 7, 8, 9, 11), (2, 4, 5, 6, 10, 12)
H = ohodnotSuper(n - 8)
pre x od 1 po 8 vrátane
ak je x z množiny $1, 4, 6, 7$ pridaj $(n - 8) + x$ na ľavú stranu H
ak je x z množiny $2, 3, 5, 8$ pridaj $(n - 8) + x$ na pravú stranu H
po skončení RETURN H

Algoritmy pre bimagické obdĺžniky

Algoritmus 1: Na vstupe dostaneme čísla $n, h \in \mathbb{N}, n \geq 4$. Výstupom má byť bimagický obdĺžnik veľkosti $3 \times n$, ktorého prvky sú kladné celé čísla neprevyšujúce h. Náš algoritmus predpokladá, že najmenší prvok obdĺžnika je 1. Pre každú trojicu rôznych celých čísel a, b, c väčších ako 1 si predpočíta ich magický a bimagický súčet. Ak medzi súčtami platí istý vzťah, potom je možné nájsť celé čísla d, e tak, aby mohli byť trojice (a, b, c) a $(1, d, e)$ použité ako stĺpce v tom istom bimagickom obdĺžniku. Pre každú takú trojicu (a, b, c) si algoritmus uloží hodnoty $(1, d, e)$ ako kľúč do asociatívneho poľa. Potom toto pole prejde a v každom kľúči vyberie $n-1$ rôznych zapamätaných trojíc (ku ktorým pridá trojicu v kľúči).

Pseudokód:
def ohodnot(n,h):
pre a od 1 po h vrátane
pre b od $a+1$ po h vrátane
pre c od $b+1$ po h vrátane
$s = a+b+c; t = a^2+b^2+c^2$
ak je $2t-(s-1)^2-2$ druhou mocninou celého čísla a má inú paritu ako s
pridám do asociatívneho poľa D trojicu (a,b,c) pre kľúč $(1, \frac{s-1+sqrt(2t-(s-1)^2-2)}{2}, \frac{s-1-sqrt(2t-(s-1)^2-2)}{2})$
po skončení pre každý kľúč k v D
pre každú $(n-1)$-prvkovú podmnožinu trojíc v D[k]
ak sú všetky vybraté čísla navzájom rôzne
prejdi všetky permutácie každej trojice
kľúč k a $n-1$ trojíc v danom poradí ulož vedľa seba do stĺpcov
ak má vzniknutý obdĺžnik bimagické riadky, vypíš ho

Výsledky: Neexistuje bimagický obdĺžnik veľkosti $3 \times n$, ktorého všetky prvky neprevyšujú 400.

Algoritmus 2: Na vstupe dostaneme čísla $n \in \mathbb{N}$. Výstupom má byť bimagický obdĺžnik veľkosti $3 \times n$, ktorého prvky sú celé (potenciálne záporné) čísla v absolútnej hodnote neprevyšujúce h. Náš algoritmus predpokladá, že bimagický obdĺžnik má v každom riadku aj stĺpci nulový súčet. Trojica prvkov v každom stĺpci je preto v tvare $a, b, -a-b$. Pre každú dvojicu celých čísel a, b si algoritmus uloží hodnotu výrazu $a^2+b^2+(-a-b)^2$ ako kľúč do asociatívneho poľa. Potom toto pole prejde a v každom kľúči vyberie n rôznych zapamätaných dvojíc.

Pseudokód:
def ohodnot(n,h):
pre a od 0 po h vrátane
pre b od $-a+1$ po $a-1$ vrátane
$t = a^2+b^2+(-a-b)^2$
pridám do asociatívneho poľa D dvojicu (a,b) pre kľúč t

po skončení pre každý kľúč k v D
pre každú n-prvkovú podmnožinu dvojíc v D[k]
z každej dvojice (a, b) zrekonštruuj trojicu $(a, b, -a - b)$
ak sú všetky vybraté čísla navzájom rôzne
prejdi všetky permutácie každej trojice (ber do úvahy aj opačné znamienka)
n trojíc v danom poradí ulož vedľa seba do stĺpcov
ak má vzniknutý obdĺžnik bimagické riadky, vypíš ho

Algoritmy pre multiplikatívne magické obdĺžniky

Algoritmus 1: Na vstupe dostaneme čísla $n, h \in \mathbb{N}, n \geq 4$. Výstupom má byť multiplikatívny magický obdĺžnik veľkosti $3 \times n$, ktorého prvky sú kladné celé čísla neprevyšujúce h. Vieme, že obdĺžnik nemôže obsahovať prvočíslo p, pre ktoré platí $pn > h$ (inak by sme mali nanajvýš $n - 1$ násobkov p, ktoré by sme museli vedieť rozdeliť do n stĺpcov, čo je spor). Náš algoritmus si pre každú trojicu vyhovujúcich rôznych kladných čísel predpočíta ich súčet a súčin a obe hodnoty si uloží ako kľúč do asociatívneho poľa. Potom toto pole prejde a v každom kľúči vyberie n rôznych zapamätaných trojíc.

Pseudokód:
def ohodnot(n,h):
vyhovuju = $\{x \mid x \in \{1, ..., h\}, x$ nie je prvočíslo alebo $xn \leq h\}$
pre všetky trojice rôznych vyhovujúcich čísel a, b, c
$s = a + b + c; p = abc$
pridám do asociatívneho poľa D trojicu (a, b, c) pre kľúč (s, p)
po skončení pre každý kľúč k v D
pre každú n-prvkovú podmnožinu trojíc v D[k]
ak sú všetky vybraté čísla navzájom rôzne
prejdi všetky permutácie pre druhú, tretiu, ... , n-tú trojicu
n trojíc v danom poradí ulož vedľa seba do stĺpcov
ak má vzniknutý obdĺžnik multiplikatívne magické riadky, vypíš ho

Výsledky: Neexistuje multiplikatívny magický obdĺžnik veľkosti $3 \times n$, ktorého všetky prvky neprevyšujú 400.