Algoritmy pre magické štvorce

Algoritmus 1.1: Na vstupe dostaneme navzájom rôzne kladné celé čísla $u_1, v_1, u_2, v_2 \in \mathbb{N}$. Výstupom je magický štvorec veľkosti 3×3, ktorého aspoň 7 prvkov sú druhé mocniny prirodzených čísel. Algoritmus využije tri parametrické vzorce z vety 1.2, ktoré generujú vyhovujúce magické štvorce.

Pseudokód:
def otestuj(u_1, v_1, u_2, v_2):
$p = (u_1^2 + v_1^2)(u_2^2 + 2u_2v_2 - v_2^2)$
$q = (u_1^2 + 2u_1v_1 - v_1^2)(u_2^2 + v_2^2)$
$r = (-u_1^2 + 2u_1v_1 + v_1^2)(u_2^2 + v_2^2)$
$s = (u_1^2 + v_1^2)(-u_2^2 + 2u_2v_2 + v_2^2)$
$t = (u_1^2 + v_1^2)(u_2^2 + v_2^2)$
ak sú aspoň dva z $3t^2 - p^2 - q^2, 3t^2 - p^2 - r^2, 3t^2 - q^2 - s^2, 3t^2 - r^2 - s^2$ štvorce
RETURN prvý štvorec
ak sú aspoň dva z $3t^2 - p^2 - q^2, 3t^2 - p^2 - r^2, 3t^2 - q^2 - s^2, 3t^2 - r^2 - s^2$ štvorce
RETURN druhý štvorec
ak sú aspoň dva z $3t^2 - p^2 - q^2, r^2 + s^2 - p^2, p^2 + q^2 - s^2, 3t^2 - r^2 - s^2$ štvorce
RETURN tretí štvorec

Výsledky: Pre $u_1, v_1, u_2, v_2 < 1000$ nedokážu parametrické vzorce vygenerovať magický štvorec veľkosti 3×3, ktorého aspoň 7 prvkov sú druhé mocniny prirodzených čísel.

Algoritmus 1.2: Na vstupe dostaneme kladné celé číslo $x \in \mathbb{N}$. Výstupom je magický štvorec veľkosti 3×3, ktorého aspoň 7 prvkov sú druhé mocniny prirodzených čísel. Algoritmus využije dva parametrické vzorce z vety 1.3, ktoré generujú vyhovujúce magické štvorce.

Pseudokód:
def otestuj(x):
ak je $(x^2 - 2)(8x^2 - 1)(x^6 - 6x^4 - 2)$ druhou mocninou RETURN prvý štvorec
ak je $(x^2 - 2)(8x^8 - x^6 + 30x^4 - 40x^2 + 2)$ druhou mocninou RETURN prvý štvorec
ak je $(x^2 - 2)(8x^8 - 25x^6 + 18x^4 - 28x^2 + 2)$ druhou mocninou RETURN prvý štvorec

ak je $\frac{4x^{10}-31x^8+76x^6+76x^4-31x^2+4}{2}$ druhou mocninou RETURN druhý štvorec
ak je $\frac{4x^{10}+17x^8+4x^6+4x^4+17x^2+4}{2}$ druhou mocninou RETURN druhý štvorec
ak je $\frac{4x^{10}+65x^8-68x^6-68x^4+65x^2+4}{2}$ druhou mocninou RETURN druhý štvorec

Výsledky: Pre $x < 10^8$ nedokážu parametrické vzorce vygenerovať magický štvorec veľkosti 3×3, ktorého aspoň 7 prvkov sú druhé mocniny prirodzených čísel.

Algoritmy pre bimagické štvorce

Algoritmus 2.1: Na vstupe dostaneme kladné celé číslo $h \in \mathbb{N}$. Výstupom je bimagický štvorec veľkosti 5×5.

Pseudokód:
def ohodnot(h):
pre a od 1 po h vrátane
pre b od $a+1$ po h vrátane
pre c od $b+1$ po h vrátane
pridám do asociatívneho poľa D trojicu (a, b, c) pre kľúč $a^2 + b^2 + c^2$
po skončení pre každý kľúč k v D
pre každé dve trojice $(a, b, c), (d, e, f)$ v D[k]
zostroj štvorice $(a+b-c, a-b+c, -a+b+c, -a-b-c), (d+e-f, d-e+f, -d+e+f, -d-e-f)$
ak sú všetky vybraté čísla navzájom rôzne

Algoritmus 2.2: Na vstupe dostaneme kladné celé číslo $h \in \mathbb{N}$. Výstupom je bimagický štvorec veľkosti 5×5.

Pseudokód:
def ohodnot(h):
pre a od 0 po h vrátane
pre b od $a+1$ po h vrátane
pre c od $b+1$ po h vrátane
pridám do asociatívneho poľa D_1 trojicu (a, b, c) pre kľúč $a^2 + b^2 + c^2$
pridám do asociatívneho poľa D_2 trojicu (a, b, c) pre kľúč $(a+b+c, a^2+b^2+c^2)$

po skončení pre každý kľúč k v D_1
pre každé dve trojice $(a, b, c), (d, e, f)$ v $D_1[k]$
$x = \frac{(a+b+c)-(d+e+f)}{2}$
pre p od 0 po h vrátane
pre všetky trojice g, h, i v $D_2[(a+b+c-x)+p, (a^2+b^2+c^2-x^2)+p^2]$
ak sú všetky čísla $a, b, c, d, e, f, g, h, i, x, -x, p$ navzájom rôzne
prejdi cez všetky permutácie n-tíc $(a, b, c, -x), (d, e, f, x), (g, h, i)$ štvorice ulož v poradí na obe diagonály
trojicu ulož na druhé, tretie a štvrté miesto v poslednom riadku
na základe magického a bimagického súčtu vyplň postupne celý štvorec
ak si došiel na koniec, vypíš vzniknutý štvorec

Výsledky:

Algoritmy pre multiplikatívne magické štvorce

Algoritmus 3.1: Na vstupe dostaneme ???. Výstupom je semimultiplikatívny štvorec veľkosti 5×5 alebo 6×6, ktorý má čo najbližšie k semimagickej vlastnosti (odchylky súčtov v riadkoch a stĺpcoch sú najmenšie možné).

Výsledky:

Algoritmus 3.2: Na vstupe dostaneme ???. Výstupom je multiplikatívny štvorec veľkosti 5×5 alebo 6×6, ktorý má čo najbližšie k magickej vlastnosti (odchylky súčtov v riadkoch, stĺpcoch a diagonálach sú najmenšie možné).

Výsledky:

Algoritmy pre vrcholovo bimagické grafy

Algoritmus 4.1: Na vstupe dostaneme ľubovoľný súvislý graf. Výstupom je odpoveď, či má graf šancu byť vrcholovo bimagickým. Pre každú dvojicu jeho vrcholov overíme, či spĺňa podmienku z vety 1.4. Ak existuje dvojica vrcholov, pre ktorú graf nevyhovuje niektorej z podmienok (i) - (iii), tak môžeme s istotou povedať, že nie je vrcholovo bimagický.

Pseudokód:
def otestuj(G):
pre všetky dvojice vrcholov v_1, v_2 grafu G
x = |{susedia[v1]} - {susedia[v2]}|
y = |{susedia[v2]} - {susedia[v1]}|
ak ($xy = 0$ a $x + y > 0$) RETURN graf G nie je vrcholovo bimagický
ak $x = 1$ alebo $y = 1$ RETURN graf G nie je vrcholovo bimagický
ak $x = y = 2$ RETURN graf G nie je vrcholovo bimagický

Výsledky: jediné súvislé grafy s menej ako 10 vrcholmi, ktoré spĺňajú všetky podmienky (a teda môžu byť vrcholovo bimagickými), sú:
$K_{2,3}$
$K_{2,4}, K_{3,3}$
$K_{2,5}, K_{3,4}$
$K_{2,6}, K_{3,5}, K_{4,4}, K_{2,3,3}$
$K_{2,7}, K_{3,6}, K_{4,5}, K_{2,3,4}, K_{3,3,3}$

Vieme, že $K_{i,j}$ je vrcholovo bimagický pre $i, j \geq 2, (i, j) \neq (2, 2)$. Môžeme sa ľahko presvedčiť, že aj zvyšné grafy majú vrcholové bimagické ohodnotenie:
$K_{2,3,3} \to 11, 13 \mid 1, 8, 15 \mid 3, 5, 16$
$K_{2,3,4} \to 11, 19 \mid 1, 9, 20 \mid 1, 2, 6, 21$
$K_{3,3,3} \to 1, 12, 14 \mid 2, 9, 16 \mid 4, 6, 17$

Algoritmus 4.2: Na vstupe dostaneme kompletný bipartitný graf $K_{i,j}$. Výstupom má byť vrcholové bimagické ohodnotenie tohto grafu. Algoritmus bude replikovať indukčný dôkaz vety 1.5.

Pseudokód:
def ohodnot(i,j):
ak $i > j$ RETURN ohodnot(j,i)
ak $i \leq 1$ alebo $i = j = 2$ RETURN nie je možné ohodnotiť graf $K_{i,j}$
ak $i = 2$ RETURN $(\frac{j(j-1)}{2}+1, \frac{j(j-1)(3j^2-7j+14)}{24}), (1, ..., j-1, \frac{j(j-1)(3j^2-7j+14)}{24}+1)$
ak $i = 3$ RETURN $(1, \frac{j(j+1)}{2} - 1, \frac{j(j+1)(3j^2-j-14)}{24} + 1), (2, ..., j, \frac{j(j+1)(3j^2-j-14)}{24} +$

2)
ak $(i, j) = (4, 4)$ RETURN $(1, 4, 6, 7), (2, 3, 5, 8)$
ak $(i, j) = (4, 5)$ RETURN $(2, 12, 13, 15), (1, 4, 8, 10, 19)$
H = ohodnot(i - 2, j - 3); m = max(H) + 1
na ľavú stranu H pridaj $4m, 5m$, na pravú stranu H pridaj $m, 2m, 6m$
RETURN H

Algoritmus 4.3: Na vstupe dostaneme číslo $n \in \mathbb{N}$. Výstupom algoritmu má byť vrcholové superbimagické ohodnotenie kompletného bipartitného grafu s n vrcholmi. Algoritmus bude replikovať indukčný dôkaz vety 1.9.

Pseudokód:
def ohodnotSuper(n):
ak $n < 7$ RETURN nie je možné ohodnotiť
ak dáva n po delení 4 zvyšok 1 alebo 2 RETURN nie je možné ohodnotiť
ak $n = 7$ RETURN (1, 2, 4, 7), (3, 5, 6)
ak $n = 8$ RETURN (1, 4, 6, 7), (2, 3, 5, 8)
ak $n = 11$ RETURN (1, 3, 4, 5, 9, 11), (2, 6, 7, 8, 10)
ak $n = 12$ RETURN (1, 3, 7, 8, 9, 11), (2, 4, 5, 6, 10, 12)
H = ohodnotSuper(n - 8)
pre x od 1 po 8 vrátane
ak je x z množiny $1, 4, 6, 7$ pridaj $(n - 8) + x$ na ľavú stranu H
ak je x z množiny $2, 3, 5, 8$ pridaj $(n - 8) + x$ na pravú stranu H
po skončení RETURN H

Algoritmy pre vrcholovo multiplikatívne magické grafy

Algoritmus 5.1: Na vstupe dostaneme kompletný bipartitný graf $K_{i,j}$. Výstupom má byť vrcholové multiplikatívne magické ohodnotenie tohto grafu. Algoritmus bude replikovať indukčný dôkaz vety 1.5.

Pseudokód:
def ohodnot(i,j):
ak $i > j$ RETURN ohodnot(j,i)
ak $i \leq 1$ alebo $i = j = 2$ RETURN nie je možné ohodnotiť graf $K_{i,j}$
ak $(i, j) = (2, 3)$ RETURN $(5, 12), (1, 6, 10)$

ak $(i,j) = (2,4)$ RETURN $(9,16),(1,2,4,18)$
ak $i = 2$ RETURN $((j-1)!+1,(j-1)!((j-1)!+1-\frac{j(j-1)}{2}),(1,...,j-1,((j-1)!+1)((j-1)!+1-\frac{j(j-1)}{2}))$
ak $i = 3$ RETURN $(1,j!+1,j!(j!+3-\frac{j(j+1)}{2}),(2,...,j,(j!+1)(j!+3-\frac{j(j+1)}{2}))$
ak $(i,j) = (4,4)$ RETURN $(1,5,6,12),(2,3,4,15)$
ak $(i,j) = (4,5)$ RETURN $(2,10,20,27),(1,3,6,24,25)$
H = ohodnot(i - 2, j - 3); x = max(H) + 1; y = max(H) + 2
na ľavú stranu H pridaj $2xy, 2xy - x - y$
na pravú stranu H pridaj $2(2xy - x - y), x, y$
RETURN H

Algoritmy pre bimagické obdĺžniky

Algoritmus 6.1: Na vstupe dostaneme číslo $n, h \in \mathbb{N}, n \geq 4$. Výstupom má byť bimagický obdĺžnik veľkosti $3 \times n$, ktorého prvky sú kladné celé čísla neprevyšujúce h. Náš algoritmus predpokladá, že najmenší prvok obdĺžnika je 1. Pre každú trojicu rôznych celých čísel a, b, c väčších ako 1 si predpočíta ich magický a bimagický súčet. Ak medzi súčtami platí istý vzťah, potom je možné nájsť celé čísla d, e tak, aby mohli byť trojice (a, b, c) a $(1, d, e)$ použité ako stĺpce v tom istom bimagickom obdĺžniku. Pre každú takú trojicu (a, b, c) si algoritmus uloží hodnoty $(1, d, e)$ ako kľúč do asociatívneho poľa. Potom toto pole prejde a v každom kľúči vyberie $n-1$ rôznych zapamätaných trojíc (ku ktorým pridá trojicu v kľúči).

Pseudokód:
def ohodnot(n,h):
pre a od 2 po h vrátane
pre b od $a+1$ po h vrátane
pre c od $b+1$ po h vrátane
$s = a + b + c; t = a^2 + b^2 + c^2$
ak je $2t - (s-1)^2 - 2$ druhou mocninou celého čísla a má inú paritu ako s
pridám do asociatívneho poľa D trojicu (a, b, c) pre kľúč $(1, \frac{s-1+sqrt(2t-(s-1)^2-2)}{2}, \frac{s-1-sqrt(2t-(s-1)^2-2)}{2})$
po skončení pre každý kľúč k v D
pre každú $(n-1)$-prvkovú podmnožinu trojíc v D[k]
ak sú všetky vybraté čísla navzájom rôzne
prejdi všetky permutácie každej trojice

kľúč k a $n-1$ trojíc v danom poradí ulož vedľa seba do stĺpcov
ak má vzniknutý obdĺžnik bimagické riadky, vypíš ho

Výsledky: Neexistuje bimagický obdĺžnik veľkosti $3 \times n$, ktorého všetky prvky neprevyšujú 400.

Algoritmus 6.2: Na vstupe dostaneme čísla $n, s \in \mathbb{N}, n \geq 4$. Výstupom má byť bimagický obdĺžnik veľkosti $3 \times n$, ktorého prvky sú kladné celé čísla, pričom ich súčet v každom stĺpci je s. Náš algoritmus predpokladá, že najmenší prvok obdĺžnika je 1. Pre každú trojicu rôznych celých čísel a, b, c $(1 < a < b < c, a + b + c = s)$ si predpočíta ich bimagický súčet. Ak platí istý vzťah, potom je možné nájsť celé čísla d, e tak, aby mohli byť trojice (a, b, c) a $(1, d, e)$ použité ako stĺpce v tom istom bimagickom obdĺžniku. Pre každú takú trojicu (a, b, c) si algoritmus uloží hodnoty $(1, d, e)$ ako kľúč do asociatívneho poľa. Potom toto pole prejde a v každom kľúči vyberie $n-1$ rôznych zapamätaných trojíc (ku ktorým pridá trojicu v kľúči).

Pseudokód:
def ohodnot(n,s):
pre a od 2 po $\frac{s}{3}$ vrátane
pre b od $a+1$ po $\frac{s-a}{2}$ vrátane
$c = s - a - b; t = a^2 + b^2 + c^2$
pokračujem rovnako ako predchádzajúci algoritmus

Výsledky: Neexistuje bimagický obdĺžnik veľkosti $3 \times n$, ktorého súčet prvkov v riadku je menší ako 384. Podarilo sa nájsť niekoľko magických obdĺžnikov veľkosti 3×6, 3×8 a 3×10 s bimagickými stĺpcami a jediným nebimagickým riadkom. Najmenší z nich má súčet v stĺpci rovný 144:
1, 3, 88, 8, 93, 95
63, 56, 51, 91, 11, 16
80, 85, 5, 45, 40, 33

Algoritmus 6.3: Na vstupe dostaneme číslo $n \in \mathbb{N}$. Výstupom má byť bimagický obdĺžnik veľkosti $3 \times n$, ktorého prvky sú celé (potenciálne záporné) čísla v absolútnej hodnote neprevyšujúce h. Náš algoritmus predpokladá, že bimagický obdĺžnik má v každom riadku aj stĺpci nulový súčet. Trojica prvkov v každom stĺpci je preto v tvare $a, b, -a-b$. Pre každú dvojicu celých čísel a, b si algoritmus uloží hodnotu výrazu $a^2 + b^2 + (-a-b)^2$ ako kľúč do asociatívneho poľa. Potom toto pole prejde a v každom kľúči vyberie n rôznych zapamätaných dvojíc.

Pseudokód:
def ohodnot(n,h):
pre a od 0 po h vrátane
pre b od $-a+1$ po $a-1$ vrátane
$t = a^2 + b^2 + (-a-b)^2$
pridám do asociatívneho poľa D dvojicu (a, b) pre kľúč t
po skončení pre každý kľúč k v D
pre každú n-prvkovú podmnožinu dvojíc v D[k]
z každej dvojice (a, b) zrekonštruuj trojicu $(a, b, -a-b)$
ak sú všetky vybraté čísla navzájom rôzne
prejdi všetky permutácie každej trojice (zober do úvahy aj opačné znamienka)
n trojíc v danom poradí ulož vedľa seba do stĺpcov
ak má vzniknutý obdĺžnik bimagické riadky, vypíš ho

Algoritmy pre multiplikatívne magické obdĺžniky

Algoritmus 7.1: Na vstupe dostaneme čísla $n, h \in \mathbb{N}, n \geq 4$. Výstupom má byť multiplikatívny magický obdĺžnik veľkosti $3 \times n$, ktorého prvky sú kladné celé čísla neprevyšujúce h. Vieme, že obdĺžnik nemôže obsahovať prvočíslo p, pre ktoré platí $pn > h$ (inak by sme mali nanajvýš $n-1$ násobkov p, ktoré by sme museli vedieť rozdeliť do n stĺpcov, čo je spor). Náš algoritmus si pre každú trojicu vyhovujúcich rôznych kladných čísel predpočíta ich súčet a súčin a obe hodnoty si uloží ako kľúč do asociatívneho poľa. Potom toto pole prejde a v každom kľúči vyberie n rôznych zapamätaných trojíc.

Pseudokód:
def ohodnot(n,h):
vyhovuju $= \{x \mid x \in \{1, ..., h\}, x$ nie je prvočíslo alebo $xn \leq h\}$
pre všetky trojice rôznych vyhovujúcich čísel a, b, c
$s = a + b + c; p = abc$
pridám do asociatívneho poľa D trojicu (a, b, c) pre kľúč (s, p)
po skončení pre každý kľúč k v D

pre každú n-prvkovú podmnožinu trojíc v D[k]
ak sú všetky vybraté čísla navzájom rôzne
prejdi všetky permutácie pre druhú, tretiu, ... , n-tú trojicu
n trojíc v danom poradí ulož vedľa seba do stĺpcov
ak má vzniknutý obdĺžnik multiplikatívne magické riadky, vypíš ho

Algoritmus 7.2: Na vstupe dostaneme čísla $n, s \in \mathbb{N}, n \geq 4$. Výstupom má byť multiplikatívny magický obdĺžnik veľkosti $3 \times n$, ktorého prvky sú kladné celé čísla, pričom ich súčet v každom stĺpci je s. Vieme, že obdĺžnik nemôže obsahovať prvočíslo p, pre ktoré platí $pn > s$. Náš algoritmus si pre každú trojicu vyhovujúcich rôznych kladných čísel si ich súčin uloží ako kľúč do asociatívneho poľa. Potom toto pole prejde a v každom kľúči vyberie n rôznych zapamätaných trojíc.

Pseudokód:
def ohodnot(n,s):
vyhovuju = $\{x \mid x \in \{1, ..., s\}, x$ nie je prvočíslo alebo $xn \leq s\}$
pre všetky dvojice rôznych vyhovujúcich čísel a, b
ak $c = s - a - b$ je vyhovujúce
$p = abc$
pridám do asociatívneho poľa D trojicu (a, b, c) pre kľúč p
po skončení pokračujem rovnako ako predchádzajúci algoritmus

Výsledky: Neexistuje multiplikatívny magický obdĺžnik veľkosti $3 \times n$, ktorého súčet prvkov v riadku je menší ako 4000. Podarilo sa nájsť niekoľko multiplikatívnych obdĺžnikov veľkosti 3×6 a 3×9 s magickými stĺpcami. Najmenší z nich má súčet v stĺpci rovný 485:
14, 294, 16, 385, 60, 396
231, 15, 154, 72, 392, 40
240, 176, 315, 28, 33, 49

Poznámka: Algoritmy pre multiplikatívne magické obdĺžniky sa dajú obmedziť tak, aby dovoľovali iba konečný počet prvočísel v prvočíselnom rozklade.