Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Magické útvary

Bakalárska práca

2021
Richard Bíró

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Magické útvary

Bakalárska práca

Študijný program:	Informatika
Študijný odbor:	Informatika
Školiace pracovisko:	Katedra informatiky
Školiteľ:	doc. RNDr. Ján Mazák, PhD.

Bratislava, 2021
Richard Bíró

39991241

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Richard Bíró
Študijný program: informatika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: informatika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Magické útvary
Magic shapes

Anotácia: Magické útvary rôzneho typu zaujímali matematikov odpradávna a mnohé súvisiace problémy sú aj dnes otvorené. Náplňou práce je pozrieť sa na súvislosti medzi magickými útvarmi a magickými ohodnoteniami v diskrétnej matematike (grafy, konfigurácie z konečných geometrií apod.) a implementovať algoritmické prehľadávanie pre vybrané otvorené problémy.

Cieľ: 1. Zorientovať sa v oblasti klasických magických útvarov a podobných problémov a spraviť aspoň čiastočný prehľad.
2. Formulovať analogické problémy pre iné diskrétne štruktúry, napr. grafy či konfigurácie vznikajúce z konečných geometrií.
3. Vybrať si niekoľko otvorených problémov (či už nových, alebo známych), implementovať algoritmické prehľadávanie priestoru potenciálnych riešení a skombinovať toto počítačové prehľadávanie s teoretickou analýzou.
4. Vysloviť zaujímavé hypotézy, ktoré bude možné skúmať v budúcnosti.

Vedúci: doc. RNDr. Ján Mazák, PhD.
Katedra: FMFI.KI - Katedra informatiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Martin Škoviera, PhD.

Dátum zadania: 26.10.2020

Dátum schválenia: 31.10.2020

doc. RNDr. Daniel Olejár, PhD.
garant študijného programu

.... študent

.... vedúci práce

Poďakovanie: **V prvom rade by som chcel poďakovať vedúcemu doc. RNDr. Jánovi Mazákovi, PhD. za pomoc a nápady k tejto práci. Zároveň chcem poďakovať rodičom a príbuzným za podporu.**

Abstrakt

Práca obsahuje prehľad v oblasti klasických magických útvarov. Definujeme pojmy, na základe ktorých preskúmame nové magické vlastnosti jednotlivých útvarov. Objavíme parametrické riešenia pre magické štvorce veľkosti 3×3, ktorých aspoň 6 prvkov sú druhé mocniny kladných celých čísel. Zameriame sa na tieto nové typy útvarov: vrcholovo a hranovo bimagické grafy, vrcholovo a hranovo multiplikatívne magické grafy, bimagické a multiplikatívne magické obdĺžniky. Súčasťou práce je aj implementácia algoritmov na hľadanie potenciálnych riešení vybraných otvorených problémov.

Kľúčové slová: magický útvar, prvok, algoritmus

Abstract

Thesis contains overview of classic magic shapes. We explore new magic properties on the basis of our defined concepts. Parametric solutions for 3×3 magic squares with at least 6 squared elements are discovered. We focus on the following new shapes: vertex and edge bimagic graphs, vertex and edge multiplicative magic graphs, bimagic and multiplicative magic rectangles. Thesis also describes implementation of algorithms which look for potential solutions to chosen open problems.

Keywords: magic shape, element, algorithm

Obsah

Úvod

Magické útvary zaujímali ľudí už odpradávna. Najznámejším z nich je magický štvorec. Ide o štvorcovú tabuľku veľkosti 3×3 vyplnenú číslami, pre ktorú platí, že súčty čísel v riadkoch, stĺpcoch a na oboch diagonálach sú rovnaké. Medzi ďalšie známe magické útvary patria obdĺžniky, grafy, kruhy alebo hviezdy [1].

Existujú aj iné magické vlastnosti, ktoré môžeme na útvaroch skúmať. V štvorci nás môže zaujímať súčin prvkov a nie ich súčet (vtedy ide o multiplikatívny štvorec). Alebo budeme brať do úvahy súčet prvkov aj súčet ich druhých mocnín (vtedy hovoríme o bimagickom štvorci).

V kapitole 1 uvedieme základné pojmy pri práci s útvarmi. Sformulujeme teóriu, ktorá bude definovať všetky magické útvary a ich vlastnosti. Spomenieme aj súčasný stav problematiky.

O niektorých útvaroch s konkrétnymi magickými vlastnosťami stále nevieme povedať, či existujú. V kapitole 2 podrobnejšie preskúmame niektoré známe otvorené problémy z oblasti magických útvarov. Dokážeme niekoľko viet, na základe ktorých budeme vedieť implementovať algoritmy v kapitole 4.

Magické vlastnosti niektorých útvarov ešte stále neboli preskúmané. Na nové definované problémy z oblasti magických útvarov sa pozrieme v kapitole 3. Zadefinujeme tieto nové typy útvarov: vrcholovo a hranovo bimagické grafy, vrcholovo a hranovo multiplikatívne magické grafy, bimagické a multiplikatívne magické obdĺžniky. Ku každému z nich uvedieme zistenia a nutné podmienky, ktoré pre daný útvar musia platiť.

Implementáciu algoritmického prehľadávania potenciálnych riešení pre vybrané otvorené problémy popíšeme v kapitole 4. Program s jednotlivými algoritmami budeme písať v jazyku Python.

V kapitole Záver zhrnieme naše dosiahnuté výsledky z oblasti magických útvarov a vyslovíme hypotézy, ktoré bude možné skúmať v budúcnosti.

Kapitola 1

Základné pojmy a definície

Útvar definujeme ako neprázdnu množinu bodov v konečnej geometrii. *Prvok* je bod útvaru, ktorý má priradenú hodnotu x, kde x je kladné celé číslo. Prvky musia mať priradené navzájom rôzne hodnoty.

Ľubovoľnú neprázdnu podmnožinu bodov nazývame *skupinou.* Každý útvar má priradený nenulový počet skupín. Hovoríme, že útvar má *magickú vlastnosť*, ak všetky jeho skupiny majú magickú vlastnosť.

1.1 Magické útvary

Definícia 1.1. *Útvar je* ***magický****, ak súčty prvkov v jednotlivých skupinách sú rovnaké.*

1.1.1 Magické štvorce

Definícia 1.2. ***Magický štvorec*** *je matica prvkov veľkosti $n \times n$, pre ktorú platí, že súčty prvkov v riadkoch, stĺpoch a na oboch diagonálach sú rovnaké [2].*

4	3	8
9	5	1
2	7	6

Skupinami v štvorci sú jeho riadky, stĺpce a diagonály.

Definícia 1.3. *Ak je súčet prvkov v každom riadku a stĺpci rovnaký, daný štvorec nazývame* ***semimagickým****.*

Definícia 1.4. *Ak sú prvkami čísla z množiny $\{1, \dots, n^2\}$, daný štvorec nazývame* ***supermagickým****.*

Špeciálnu triedu tvoria magické štvorce, ktorých prvky sú k-tymi mocninami kladných celých čísel. Príklad štvorca pre $n = 4, k = 2$ [2]:

48^2	23^2	6^2	19^2
21^2	26^2	33^2	32^2
1^2	36^2	13^2	42^2
22^2	27^2	44^2	9^2

Existencia štvorca pre $n = 3, k = 2$ je otvoreným problémom. Je dokázané, že ak by taký štvorec existoval, jeho prvky by museli byť väčšie ako 10^{16}. Nikomu sa nepodarilo nájsť ani taký magický štvorec, ktorého 8 prvkov sú druhé mocniny prirodzených čísel. Je známe iba jedno základné riešenie so 7 prvkami, ktoré objavil v roku 1999 Andrew Bremner [2]:

373^2	289^2	565^2
360721	425^2	23^2
205^2	527^2	222121

Pre $n = k = 3$ je dokázané, že takýto magický štvorec neexistuje. Existencia štvorcov pre $4 \leq n \leq 6, k = 3$ je otvoreným problémom. Pre $4 \leq n \leq 10, k \geq 4$ sú známe iba semimagické štvorce [2].

1.1.2 Magické obdĺžniky

Definícia 1.5. ***Magický obdĺžnik*** *je matica prvkov veľkosti $m \times n$, pre ktorú platí, že súčty prvkov v riadkoch sú rovnaké a zároveň súčty prvkov v stĺpcoch sú rovnaké.*

1	7	6	4
8	2	3	5

Definícia 1.6. *Ak sú prvkami čísla z množiny $\{1, \ldots, mn\}$, daný obdĺžnik nazývame* ***supermagickým*** *[7].*

Semimagické štvorce sú špeciálnym prípadom magických obdĺžnikov pre $m = n$. Preto budeme ďalej predpokladať, že $m \neq n$.

Nevyžadujeme, aby boli súčty v riadkoch a stĺpcoch rovnaké, pretože z vlastnosti $m \neq n$ vieme ľahko odvodiť, že by museli byť rovné 0 (čo je spor s tým, že prvky sú navzájom rôzne kladné celé čísla). Z toho vyplýva, že obdĺžnik má dva druhy skupín: jedna je tvorená riadkami a druhá stĺpcami.

Slovenský matematik Marián Trenkler skúmal supermagické obdĺžniky [7]:

Veta 1.7. *(Trenkler, 1999) Pre všetky kladné celé $n > 2$ vieme zostrojiť supermagický obdĺžnik veľkosti $2 \times (2n - 2)$ aj $n \times n^2$.*

Veta 1.8. *(Trenkler, 1999) Nech a, b sú kladné celé čísla a n je ich súčin, pričom $n > 2$. Potom vieme zostrojiť supermagický obdĺžnik veľkosti $an \times bn$.*

Veta 1.9. *(Trenkler, 1999) Ak vieme zostrojiť supermagické obdĺžniky veľkosti $m \times n$ aj $p \times q$ pre nejaké $m, n, p, q \in \mathbb{N}^+$, potom vieme zostrojiť aj supermagický obdĺžnik veľkosti $mp \times nq$.*

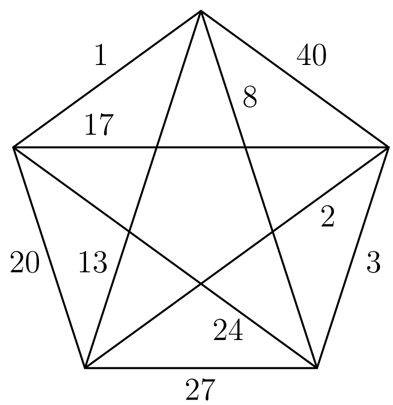
Keďže obdĺžniková matica nemá diagonály, pri definícii ich neuvažujeme. Z toho vyplýva, že v ľubovoľnom magickom obdĺžniku vieme vymeniť dva riadky alebo stĺpce a magická vlastnosť ostane zachovaná.

1.1.3 Magické grafy

Definícia 1.10. ***Magický graf*** *je neorientovaný graf s ohodnotenými hranami, v ktorom platí, že súčty hodnôt hrán incidentných s jednotlivými vrcholmi sú rovnaké [1].*

Vrcholy sú považované za prvky útvaru. Skupinami sú hodnoty incidentných hrán s daným vrcholom.

Príklad magického grafu so súčtom 62 [1]:



Kompletné bipartitné regulárne grafy sú ekvivalentné magickým štvorcom [1].

Slovenskí matematici Samuel Jezný a Marián Trenkler dokázali vetu, ktorá hovorí o tom, kedy je graf magický [4]:

Veta 1.11. *(Jezný, Trenkler, 1983) Graf je magický práve vtedy, keď každá hrana v G patrí do nejakého $(1-2)$-faktora a zároveň každá dvojica hrán e_1, e_2 je separovateľná $(1-2)$-faktorom grafu G.*

Poznámka 1.12. $(1-2)$*-faktor grafu je podgraf, ktorý obsahuje všetky vrcholy a zároveň každý jeho komponent je kružnica alebo izolovaná hrana.*

Magická vlastnosť grafu sa dá skúmať viacerými spôsobmi. Môžeme napríklad pre každý vrchol zrátať súčet hodnôt jeho susedov (v takom prípade budú v skupine hodnoty susedov daného vrchola). V čase písania tejto práce nie sú známe žiadne štúdie, ktoré by sa zaoberali skúmaním bimagických a multiplikatívnych magických vlastností na grafoch. Bimagické a multiplikatívne magické útvary definujeme nižšie.

1.2 Multiplikatívne útvary

Definícia 1.13. *Útvar je* ***multiplikatívny****, ak súčiny prvkov v jednotlivých skupinách sú rovnaké.*

Definícia 1.14. ***Multiplikatívny štvorec*** *je matica prvkov veľkosti* $n \times n$*, pre ktorú platí, že súčiny prvkov v riadkoch, stĺpcoch a na oboch diagonálach sú rovnaké [2].*

8	256	2
4	16	64
128	1	32

Poznámka 1.15. ***Semimultiplikatívne*** *štvorce sú definované analogicky.*

K ľubovoľnému magickému štvorcu vieme zostrojiť multiplikatívny štvorec napríklad tak, že všetky jeho prvky x nahradíme 2^x.

1.3 Bimagické útvary

Definícia 1.16. *Útvar je* ***bimagický****, ak je magický a umocnením každého jeho prvku na druhú dostaneme opäť magický útvar [2].*

Poznámka 1.17. ***Semibimagické*** *a* ***superbimagické*** *útvary sú definované analogicky.*

Je zrejmé, že bimagický štvorec veľkosti 2×2 neexistuje. Edouard Lucas, Luke Pebody a Jean-Claude Rosa dokázali silnejšie tvrdenia [2]:

Veta 1.18. *(Lucas, 1891) Neexistuje bimagický štvorec veľkosti* 3×3.

Veta 1.19. *(Pebody, Rosa, 2004) Neexistuje bimagický štvorec veľkosti* 4×4.

Sú známe semibimagické štvorce veľkosti $n \times n$ pre $n \geq 4$.

Na to, aby bol štvorec veľkosti 5×5 bimagickým, muselo by byť jeho 12 magických a 12 bimagických súčtov rovnakých. Čiastočné riešenie našiel Michael Quist v júni 2010. Toto obsahovalo 23 správnych súčtov [2]:

25	129	200	295	195
257	165	1	225	196
127	340	171	111	95
267	85	265	176	51
168	125	207	37	307

Dodnes zostáva otvoreným problémom existencia riešenia pre veľkosť 5×5, ktoré by malo 24 správnych súčtov.

V roku 2006 našiel Jaroslaw Wroblewski riešenie pre 6×6 [2]:

17	36	55	124	62	114
58	40	129	50	111	20
108	135	34	44	38	49
87	98	92	102	1	28
116	25	86	7	96	78
22	74	12	81	100	119

Georges Pfeffermann objavil v roku 1890 superbimagický štvorec veľkosti 8×8. Použil v ňom všetky čísla z množiny $\{1, 2, \ldots, 64\}$ [2]:

56	34	8	57	18	47	9	31
33	20	54	48	7	29	59	10
26	43	13	23	64	38	4	49
19	5	35	30	53	12	46	60
15	25	63	2	41	24	50	40
6	55	17	11	36	58	32	45
61	16	42	52	27	1	39	22
44	62	28	37	14	51	21	3

Nasledovná veta dokazuje, že bimagických štvorcov je nekonečne veľa [3]:

Veta 1.20. *(Chen, Li, 2004) Nech m, n sú kladné celé čísla s rovnakou paritou, pričom $m, n \notin \{2, 3, 6\}$. Potom existuje superbimagický štvorec veľkosti $mn \times mn$.*

1.4 Multiplikatívne magické útvary

Definícia 1.21. *Útvar je **multiplikatívny magický**, ak je magický aj multiplikatívny [2].*

Je zrejmé, že multiplikatívny magický štvorec veľkosti 2×2 neexistuje. Lee Morgenstern dokázal silnejšie tvrdenie [2]:

Veta 1.22. *(Morgenstern, 2007) Neexistuje multiplikatívny magický štvorec veľkosti* 3×3 *ani* 4×4.

Morgenstern taktiež skúmal multiplikatívne magické štvorce veľkosti 5×5 a 6×6. V roku 2007 našiel nasledovný štvorec s jedinou skupinou, ktorá nemá multiplikatívnu magickú vlastnosť [2]:

105	182	40	198	45
78	216	66	175	35
220	42	65	63	180
140	55	189	30	156
27	75	210	104	154

Objavil aj tento semimultiplikatívny magický štvorec (nemá multiplikatívne diagonály) [2]:

27	25	156	48	84	20
75	144	18	56	52	15
24	12	45	117	50	112
16	65	21	30	108	120
140	72	40	9	60	39
78	42	80	100	6	54

V roku 2016 našiel Sébastien Miquel riešenie pre veľkosť 7×7 [2]:

126	66	50	90	48	1	84
20	70	16	54	189	110	6
100	2	22	98	36	72	135
96	60	81	4	10	49	165
3	63	30	176	120	45	28
99	180	14	25	7	108	32
21	24	252	18	55	80	15

Existencia multiplikatívneho magického štvorca veľkosti 5×5 alebo 6×6 zostáva naďalej otvoreným problémom.

Kapitola 2

Známe otvorené problémy

2.1 Magické štvorce

Hypotéza 2.1. *Existuje jediný magický štvorec veľkosti* 3×3 *(spolu s jeho násobkami, rotáciami a symetriami), ktorého aspoň 7 prvkov sú druhé mocniny kladných celých čísel.*

Najskôr ukážeme, že prvky v magickom štvorci veľkosti 3×3 spĺňajú isté vzťahy:

Veta 2.2. *Nech* e *je prostredným prvkom magického štvorca veľkosti* 3×3. *Potom je magický súčet rovný* $3e$.

Dôkaz. Nech s je magický súčet. Označme $a, b, \ldots, i$ prvky štvorca zľava doprava po jednotlivých riadkoch (čiže e je prostredným z nich). Potom pre magický štvorec platia vzťahy $3s = (a+e+i)+(b+e+h)+(c+e+g) = (a+b+c)+(g+h+i)+3e = 2s+3e$, z čoho vyplýva, že $s = 3e$.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

□

Dôsledok 2.3. *Nech* e *je prostredným prvkom magického štvorca veľkosti* 3×3 *a* x, y *sú jeho ľubovoľné dva protiľahlé prvky. Potom* $x + y = 2e$.

Dôsledok 2.4. *Nech* z *je prvok v ľubovoľnom rohu magického štvorca veľkosti* 3×3 *a* x, y *sú prvky, ktoré susedia stranou s jeho protiľahlým rohom. Potom* $x + y = 2z$.

Dôkaz. Opäť označme $a, b, \ldots, i$ prvky štvorca. Dokážeme iba vzťah $f+h = 2a$, ostatné z nich sú analogické. Platí $c + f + i = g + h + i = 3e$ a zároveň $a + i = c + g = 2e$ (na základe dôsledku 2.3). Z prvého vzťahu vyjadríme $c = 3e - f - i$, $g = 3e - h - i$ a z druhého $a = 2e - i$. Dosadením do $c + g = 2e$ dostaneme $2(2e - i) = f + h$, čím je rovnosť $2a = f + h$ dokázaná. □

Nasledovná lema bude pre nás užitočná pri vytváraní parametrických vzorcov [6]:

Lema 2.5. *Všetky celočíselné riešenia rovnice* $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ *majú parametrické vyjadrenie* $a = pr + qs$, $b = qr - ps$, $c = ps + qr$, $d = pr - qs$, *kde* $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$.

Z lemy 2.5 dokážeme odvodiť parametrické vyjadrenie pre modifikovanú rovnicu:

Lema 2.6. *Nech* a, b, c *sú kladné celé čísla, pre ktoré platí* $a^2+b^2 = 2c^2$. *Potom existujú* $u, v, w \in \mathbb{N}$ *také, že* $a = w(u^2 + 2uv - v^2)$, $b = w(-u^2 + 2uv + v^2)$, $c = w(u^2 + v^2)$.

Dôkaz. Aplikovaním lemy 2.5 na rovnicu $a^2 + b^2 = c^2 + c^2$ dostaneme parametrické vyjadrenie $a = pr + qs$, $b = qr - ps$, $c = ps + qr = pr - qs$ pre nejaké $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$. Keď vyjadríme $s = r\frac{p-q}{p+q}$ a dosadíme do a, b, c, dostaneme $a = \frac{r}{p+q}(p^2 + 2pq - q^2)$, $b = \frac{r}{p+q}(-p^2 + 2pq + q^2)$, $c = \frac{r}{p+q}(p^2 + q^2)$. Keď použijeme substitúciu $u = p$, $v = q$, $w = \frac{r}{p+q}$ (čo môžeme, pretože hodnotu výrazu $\frac{r}{p+q}$ vieme regulovať premennou r), získame hľadanú parametrizáciu. □

Na základe lemy 2.6 vieme odvodiť nasledovný vzorec:

Veta 2.7. *Nech* u_1, v_1, u_2, v_2 *sú navzájom rôzne kladné celé čísla. Definujme hodnoty* p, q, r, s, t *nasledovne:*

$$
\begin{aligned}
p &= (u_1^2 + v_1^2)(u_2^2 + 2u_2v_2 - v_2^2) \\
q &= (u_1^2 + 2u_1v_1 - v_1^2)(u_2^2 + v_2^2) \\
r &= (-u_1^2 + 2u_1v_1 + v_1^2)(u_2^2 + v_2^2) \\
s &= (u_1^2 + v_1^2)(-u_2^2 + 2u_2v_2 + v_2^2) \\
t &= (u_1^2 + v_1^2)(u_2^2 + v_2^2)
\end{aligned}
$$

Potom vieme zostrojiť nasledovné štyri magické štvorce, ktorých aspoň 5 *prvkov sú druhé mocniny kladných celých čísel:*

p^2	$3t^2 - p^2 - q^2$	q^2
$3t^2 - p^2 - r^2$	t^2	$3t^2 - q^2 - s^2$
r^2	$3t^2 - r^2 - s^2$	s^2

$2(r^2 + s^2)$	$4p^2$	$2(q^2 + s^2)$
$4q^2$	$4t^2$	$4r^2$
$2(p^2 + r^2)$	$4s^2$	$2(p^2 + q^2)$

p^2	q^2	$3t^2 - p^2 - q^2$
$r^2 + s^2 - p^2$	t^2	$p^2 + q^2 - s^2$
$3t^2 - r^2 - s^2$	r^2	s^2

p^2	r^2	$3t^2 - p^2 - r^2$
$q^2 + s^2 - p^2$	t^2	$p^2 + r^2 - s^2$
$3t^2 - q^2 - s^2$	q^2	s^2

Dôkaz. Na základe lemy 2.6 vidíme, že platí $p^2 + s^2 = q^2 + r^2 = 2t^2$. Dokážeme konštrukciu prvého štvorca, zvyšné prípady sú analogické. Uvažujme štvorec v nasledovnom tvare:

p^2	$-$	q^2
$-$	t^2	$-$
r^2	$-$	s^2

Podľa dôsledku 2.3 vidíme, že podmienka $p^2 + s^2 = q^2 + r^2 = 2t^2$ je zachovaná. Dopočítaním zvyšných prvkov dostaneme platný magický štvorec veľkosti 3×3, ktorého aspoň 5 prvkov sú druhé mocniny kladných celých čísel. □

Na základe objaveného parametrického vzorca sme implementovali algoritmus 4.1.

Výsledok 2.8. *Pre $u_1, v_1, u_2, v_2 < 1000$ dokáže parametrický vzorec vygenerovať iba jeden magický štvorec veľkosti 3×3, ktorého aspoň 7 prvkov sú druhé mocniny kladných celých čísel (ten, ktorý už poznáme). Dosiahneme ho napr. pre $u_1 = 3$, $v_1 = 4$, $u_2 = 2$, $v_2 = 9$ a vydelením prvkov ich spoločným deliteľom.*

Zameriame sa aj na špecifické parametrické vzorce, ktoré generujú magické štvorce veľkosti 3×3 s aspoň 6 druhými mocninami kladných celých čísel.

V januári 2020 objavil Arkadiusz Wesolowski nasledovný vzorec pre dané $n \in \mathbb{N}$, $w = 6n^2 + 6n + 2$, $x = 2n + 1$, $y = 3n^2 + 2n$, $z = 3n^2 + 4n + 1$, $k = x^2y^2 + w^2z^2$ [2]:

$(wz + xy)^2$	$(wy - xz)^2$	$(2y^2 - z^2)x^2 + (2z^2 - y^2)w^2$
$2k - (wy + xz)^2$	k	$(wy + xz)^2$
$x^2z^2 + w^2y^2$	$2k - (wy - xz)^2$	$(wz - xy)^2$

Na konštrukciu našich parametrických vzorcov využijeme nasledovnú identitu [6]:

Lema 2.9. *Nech $x \in \mathbb{Z}$. Nech $a = x^5 - 2x$, $b = x^5 + x$, $c = -2x^4 + 1$, $d = x^4 + 1$. Potom $ab(a^2 - b^2) = cd(c^2 - d^2)$.*

Veta 2.10. *Nech x je kladné celé číslo. Nech $x_1 = 8x^8 - 49x^6 + 6x^4 - 16x^2 + 2$, $x_2 = 8x^8 - x^6 + 30x^4 - 40x^2 + 2$, $x_3 = 8x^8 - 25x^6 + 18x^4 - 28x^2 + 2$. Potom vieme zostrojiť nasledovné dva magické štvorce veľkosti 3×3, ktorých aspoň 6 prvkov sú druhé mocniny kladných celých čísel.*

$(2x^5 + 4x^3 - 7x)^2$	$x_1(x^2 - 2)$	$(5x^4 - 2x^2 + 2)^2$
$(x^4 + 8x^2 - 2)^2$	$(2x^5 - 2x^3 + 5x)^2$	$x_2(x^2 - 2)$
$x_3(x^2 - 2)$	$(7x^4 - 4x^2 - 2)^2$	$(2x^5 - 8x^3 - x)^2$

$(5x^4 - 2x^2 + 2)^2$	$(2x^5 + 4x^3 - 7x)^2$	$\frac{4x^{10}-31x^8+76x^6+76x^4-31x^2+4}{2}$
$(2x^5 - 8x^3 - x)^2$	$\frac{4x^{10}+17x^8+4x^6+4x^4+17x^2+4}{2}$	$(7x^4 - 4x^2 - 2)^2$
$\frac{4x^{10}+65x^8-68x^6-68x^4+65x^2+4}{2}$	$(x^4 + 8x^2 - 2)^2$	$(2x^5 - 2x^3 + 5x)^2$

Dôkaz. Uvažujme nasledovný magický štvorec veľkosti 3×3, ktorého aspoň 6 prvkov sú druhé mocniny kladných celých čísel:

a^2	$-$	e^2
b^2	f^2	$-$
$-$	c^2	d^2

Z dôsledku 2.4 vyplýva, že $b^2 + c^2 = 2e^2$. Aplikovaním lemy 2.6 zistíme, že platí $b = w(u^2 + 2uv - v^2)$, $c = w(-u^2 + 2uv + v^2)$, $e = w(u^2 + v^2)$ pre nejaké $u, v, w \in \mathbb{N}$. Označme $N = \frac{b^2 - c^2}{2}$. Potom:

$$N = \frac{w^2(u^2 + 2uv - v^2)^2 - w^2(-u^2 + 2uv + v^2)^2}{2} = 4uv(u^2 - v^2)w^2$$

Z dôsledku 2.4 vyplýva, že $d^2 + a^2 = 2f^2$. Aplikovaním lemy 2.6 zistíme, že platí $d = w_2(u_2^2 + 2u_2v_2 - v_2^2)$, $a = w_2(-u_2^2 + 2u_2v_2 + v_2^2)$, $f = w_2(u_2^2 + v_2^2)$ pre nejaké $u_2, v_2, w_2 \in \mathbb{N}$. Zároveň platí $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = e^2 + f^2$, z čoho vyplývajú vzťahy $d^2 = a^2 + b^2 - c^2$, $f^2 = a^2 + b^2 - \frac{b^2+c^2}{2} = a^2 + \frac{b^2-c^2}{2}$. Potom $a^2 + 2N = d^2$ a $a^2 + N = f^2$. Teda $d^2 - f^2 = N$. Po dosadení do d, f, N dostaneme nasledujúcu rovnosť:

$$w_2^2(u_2^2 + 2u_2v_2 - v_2^2)^2 - w_2^2(u_2^2 + v_2^2)^2 = 4uv(u^2 - v^2)w^2$$
$$w_2^2u_2v_2(u_2^2 - v_2^2) = w^2uv(u^2 - v^2)$$

Uvažujme špeciálny prípad $w = w_2$. Potom dostaneme $u_2v_2(u_2^2 - v_2^2) = uv(u^2 - v^2)$, pričom z lemy 2.9 vieme, že jedno z parametrických riešení je $u_2 = p^5 + p$, $v_2 = p^5 - 2p$, $u = -2p^4 + 1$, $v = p^4 + 1$ pre $p \in \mathbb{Z}$. Po spätnom dosadení do a, b, c, d, e, f, substitúcii $x = p^2$ a dopočítaní zvyšných prvkov dostaneme prvý štvorec.

Druhý štvorec získame tak, že prvý

a	b	c
d	e	f
g	h	i

transformujeme na

c	a	$\frac{d+i}{2}$
i	$\frac{c+e}{2}$	h
$\frac{a+h}{2}$	d	e

□

Na základe objaveného parametrického vzorca sme implementovali algoritmus 4.2.

Výsledok 2.11. *Pre $x = 1$ dostaneme štvorec, ktorého prvky nie sú navzájom rôzne. Pre $1 < x < 10^8$ nedokážu parametrické vzorce vygenerovať magický štvorec veľkosti 3×3, ktorého aspoň 7 prvkov sú druhé mocniny prirodzených čísel.*

2.2 Bimagické štvorce

Hypotéza 2.12. *Neexistuje bimagický štvorec veľkosti* 5×5.

V predchádzajúcej kapitole sme uviedli, že Eduard Lucas, Luke Pebody a Jean-Claude Rosa už dokázali neexistenciu bimagických štvorcov menších ako 5×5. Lee Morgenstern neskôr dokázal tieto tvrdenia jednoduchšie pomocou duplikačnej lemy [2]:

Lema 2.13. *(Duplikačná) Nech* $a, b, c, d \in \mathbb{N}^+$*, pre ktoré platí* $a + b = c + d$ *a buď* $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$*, alebo* $ab = cd$*. Potom* $c = a$ *alebo* $c = b$.

Dôkaz. Z prvej rovnice vyjadríme $d = a + b - c$ a dosadíme do rovnice $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ alebo do rovnice $ab = cd$. Po úprave dostaneme vzťah $c^2 - ac - bc + ab = 0$, ktorý sa dá prepísať na tvar $(c - a)(c - b) = 0$. Z toho vyplýva, že $c = a$ alebo $c = b$. □

Veta 2.14. *(Morgenstern, 2007) Neexistuje bimagický štvorec veľkosti* 3×3.

Dôkaz. Sporom. Nech a, b sú prvky v prvom riadku a prvých dvoch stĺpcoch. Nech c, d sú prvky v poslednom stĺpci a posledných dvoch riadkoch. Nech x je prvok v prvom riadku a poslednom stĺpci. Potom musia platiť vzťahy $a + b + x = x + c + d$ aj $a^2 + b^2 + x^2 = x^2 + c^2 + d^2$. Tým dostaneme sústavu z duplikačnej lemy 2.13, z čoho vyplýva, že $c = a$ alebo $c = b$, čo je spor. □

Veta 2.15. *(Morgenstern, 2007) Neexistuje bimagický štvorec veľkosti* 4×4.

Dôkaz. Sporom. Nech $a, b, \ldots, o, p$ sú prvky zľava doprava v jednotlivých riadkoch štvorca. Keďže štvorec je magický, musia platiť nasledovné vzťahy:

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= m + n + o + p \\ a + f + k + p &= b + f + j + n \\ d + g + j + m &= c + g + k + o \end{aligned}$$

Ich sčítaním dostaneme $a + d = n + o$. Keďže štvorec je zároveň aj bimagický, musia platiť nasledovné vzťahy:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &= m^2 + n^2 + o^2 + p^2 \\ a^2 + f^2 + k^2 + p^2 &= b^2 + f^2 + j^2 + n^2 \\ d^2 + g^2 + j^2 + m^2 &= c^2 + g^2 + k^2 + o^2 \end{aligned}$$

Ich sčítaním dostaneme $a^2 + d^2 = n^2 + o^2$. Tým dostaneme sústavu z duplikačnej lemy 2.13, z čoho vyplýva, že $n = a$ alebo $n = d$, čo je spor. □

Morgenstern hľadal bimagické štvorce veľkosti 5×5 svojou výpočtovou metódou a prišiel k nasledujúcemu zisteniu [2]:

Veta 2.16. *(Morgenstern, 2014) Neexistuje bimagický štvorec veľkosti* 5×5*, ktorého prvky neprevyšujú* 1500.

Jeho metóda spočívala v nájdení štvoríc navzájom rôznych kladných celých čísel (A, G, S, Y), (C, H, R, W), (E, I, Q, U), pre ktoré platí:

$$A + G + S + Y = C + H + R + W = E + I + Q + U$$
$$A^2 + G^2 + S^2 + Y^2 = C^2 + H^2 + R^2 + W^2 = E^2 + I^2 + Q^2 + U^2$$

Na základe týchto hodnôt dopočítal zvyšné prvky štvorca:

A	b	C	d	E
f	G	H	I	j
k	l	m	n	o
p	Q	R	S	t
U	v	W	x	Y

Naším cieľom bude zefektívniť Morgensternov algoritmus. Urobíme niekoľko pozorovaní. Je zrejmé, že bimagické štvorce sú uzavreté na kladný celočíselný násobok. Z nasledovnej lemy vyplýva, že sú uzavreté aj na konštantný posun:

Lema 2.17. *(Posunová) Nech* $n \in \mathbb{N}$*. Nech* $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{N}$*. Ak platia vzťahy* $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k$ *aj* $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2$*, potom pre všetky* $x \in \mathbb{Z}$ *platí:*

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + x) = \sum_{k=1}^{n}(b_k + x)$$
$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + x)^2 = \sum_{k=1}^{n}(b_k + x)^2$$

Dôkaz.

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + x) = \sum_{k=1}^{n} a_k + nx = \sum_{k=1}^{n} b_k + nx = \sum_{k=1}^{n}(b_k + x)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + x)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2x\sum_{k=1}^{n} a_k + nx^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2 + 2x\sum_{k=1}^{n} b_k + nx^2 = \sum_{k=1}^{n}(b_k + x)^2$$

□

Dôsledok 2.18. *Nech* X *je bimagický štvorec. Nech* $a, b \in \mathbb{Z}$*, pričom* $a \neq 0$*. Potom* $aX + b$ *je bimagický štvorec s potenciálne zápornými prvkami.*

Vďaka tomu vieme definovať normálne formy bimagických štvorcov.

Veta 2.19. *Nech X je bimagický štvorec s magickým súčtom S, veľkosťou n a najmenším prvkom x_{min}. Nech $a, b \in \mathbb{Z}$, pričom $a \neq 0$. Potom:*

1. *Ak $a = 1$, $b = 1 - x_{min}$, tak $aX + b$ je bimagický štvorec, ktorého najmenší prvok je 1.*
2. *Ak $a = -n$, $b = S$, tak $aX + b$ je bimagický štvorec s potenciálne zápornými prvkami, ktorého magický súčet je 0.*
3. *Ak $a = 1-n$, $b = S - x$, tak $aX+b$ je bimagický štvorec s potenciálne zápornými prvkami, ktorého magický súčet je rovný danému prvku x.*

Dôkaz. Výpočtom. □

Budeme predpokladať, že bimagický štvorec má magický súčet rovný prostrednému prvku. To využijeme pri dôkaze nasledovných viet:

Veta 2.20. *Nech A, B, C, D, E, F, G, H sú navzájom rôzne celé čísla, pričom:*

$$A + B + C + D = E + F + G + H = 0$$
$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = E^2 + F^2 + G^2 + H^2$$

Potom existujú $a, b, c, e, f, g \in \mathbb{Z}$ také, že:

$$a^2 + b^2 + c^2 = e^2 + f^2 + g^2$$
$$\{2A, 2B, 2C, 2D\} = \{-a + b + c,\ a - b + c,\ a + b - c,\ -a - b - c\}$$
$$\{2E, 2F, 2G, 2H\} = \{-e + f + g,\ e - f + g,\ e + f - g,\ -e - f - g\}$$

Dôkaz. Dosadením $D = -A - B - C$, $H = -E - F - G$ do druhej rovnice dostaneme vzťah $A^2 + B^2 + C^2 + (-A - B - C)^2 = E^2 + F^2 + G^2 + (-E - F - G)^2$. Ten sa dá upraviť na tvar $(A + B)^2 + (A + C)^2 + (B + C)^2 = (E + F)^2 + (E + G)^2 + (F + G)^2$. Nech $a = A + B$, $b = A + C$, $c = B + C$, $e = E + F$, $g = E + G$, $h = F + G$. Potom $a^2 + b^2 + c^2 = e^2 + f^2 + g^2$. Zároveň si vieme sústavou rovníc odvodiť, že $A = \frac{a+b-c}{2}$, $B = \frac{a-b+c}{2}$, $C = \frac{-a+b+c}{2}$, $E = \frac{e+f-g}{2}$, $F = \frac{e-f+g}{2}$, $G = \frac{-e+f+g}{2}$. Spätným dosadením zistíme, že $D = \frac{-a-b-c}{2}$, $H = \frac{-e-f-g}{2}$, čím je dôkaz ukončený. □

Veta 2.21. *Nech $K \in \mathbb{N}$. Nech $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4, C_1, C_2, C_3, C_4$ sú navzájom rôzne celé čísla, pričom:*

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0$$
$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 + B_4^2 = C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 = K$$

Nech $x, y \in \mathbb{Z}$. Potom existuje iba konečne veľa $s \in \mathbb{Z}$, pre ktoré je nasledujúca časť štvorca veľkosti 5×5 bimagická:

A_1	x	B_1	y	C_1
$-$	A_2	B_2	C_2	$-$
$-$	$-$	s	$-$	$-$
$-$	C_3	B_3	A_3	$-$
C_4	$-$	B_4	$-$	A_4

Dôkaz. Prvý riadok má magický súčet $A_1 + B_1 + C_1 + x + y$ a jeho bimagický súčet je $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 + x^2 + y^2$. Prostredný stĺpec má magický súčet s a bimagický súčet $s^2 + K$. Z toho vyplýva, že musia platiť nasledovné vzťahy:

$$A_1 + B_1 + C_1 + x + y = s$$
$$A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 + x^2 + y^2 = s^2 + K$$

Z prvého vyjadríme $y = s - A_1 - B_1 - C_1 - x$. Dosadením do druhého vznikne vzťah $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 + x^2 + (s - A_1 - B_1 - C_1 - x)^2 = s^2 + K$, ktorý sa dá upraviť na tvar $x^2 - x[s - (A_1 + B_1 + C_1)] - s(A_1 + B_1 + C_1) + A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 + A_1B_1 + A_1C_1 + B_1C_1 - \frac{K}{2} = 0$. Nech $S' = A_1 + B_1 + C_1$. Riešením tejto kvadratickej rovnice je:

$$x = \frac{s - S' \pm \sqrt{(s + S')^2 - 4(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 + A_1B_1 + A_1C_1 + B_1C_1) + 2K}}{2}$$

Keďže $x \in \mathbb{Z}$, nutne $(s + S')^2 - 4(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 + A_1B_1 + A_1C_1 + B_1C_1) + 2K = n^2$ pre nejaké $n \in \mathbb{N}$. Po úprave dostaneme nasledovný vzťah:

$$(s + n + S')(s - n + S') = 4(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 + A_1B_1 + A_1C_1 + B_1C_1) - 2K$$

Keďže všetky použité výrazy sú celé čísla, existuje iba konečný počet rozkladov čísla $4(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 + A_1B_1 + A_1C_1 + B_1C_1) - 2K$ na dva prvočinitele, z čoho vyplýva, že existuje iba konečný počet vyhovujúcich s (ktoré môžeme nájsť faktorizáciou). □

Podľa predošlých viet vieme implementovať efektívejší algoritmus 4.3 na hľadanie bimagických štvorcov veľkosti 5×5.

Výsledok 2.22. *Pre* $h < 12500$ *neexistuje bimagický štvorec veľkosti* 5×5. *Našli sme štyri magické štvorce veľkosti* 5×5 *so zápornými prvkami, ktoré majú iba tri zlé bimagické súčty:*

58	30	−10	−232	−76
−234	−80	44	26	14
160	−18	−230	−74	−68
−198	66	48	−12	−134
−16	−228	−82	62	34

58	30	−10	−232	−76
−234	−80	44	26	14
96	−18	−230	−74	−4
−134	66	48	−12	−198
−16	−228	−82	62	34

58	30	−10	−232	−76
14	−80	44	26	−234
−88	−18	−230	−74	180
−198	66	48	−12	−134
−16	−228	−82	62	34

58	30	−10	−232	−76
14	−80	44	26	−234
−152	−18	−230	−74	244
−134	66	48	−12	−198
−16	−228	−82	62	34

2.3 Multiplikatívne magické štvorce

Hypotéza 2.23. *Neexistuje multiplikatívny magický štvorec veľkosti* 5×5 *alebo* 6×6.

Veta 2.24. *(Morgenstern, 2007) Neexistuje multiplikatívny magický štvorec veľkosti* 3×3.

Dôkaz. Sporom. Nech a, b sú prvky v prvom riadku a prvých dvoch stĺpcoch. Nech c, d sú prvky v poslednom stĺpci a posledných dvoch riadkoch. Nech x je prvok v prvom riadku a poslednom stĺpci. Potom musia platiť vzťahy $a+b+x = x+c+d$ aj $abx = xcd$. Tým dostaneme sústavu z duplikačnej lemy 2.13, z čoho vyplýva, že $c = a$ alebo $c = b$, čo je spor. □

Veta 2.25. *(Morgenstern, 2007) Neexistuje multiplikatívny magický štvorec veľkosti* 4×4.

Dôkaz. Sporom. Nech $a, b, \dots, o, p$ sú prvky zľava doprava v jednotlivých riadkoch štvorca. Keďže štvorec je magický, musia platiť nasledovné vzťahy:

$$a + b + c + d = m + n + o + p$$
$$a + f + k + p = b + f + j + n$$
$$d + g + j + m = c + g + k + o$$

Ich sčítaním dostaneme $a + d = n + o$. Keďže štvorec je zároveň aj multiplikatívny, musia platiť nasledovné vzťahy:

$$abcd = mnop$$
$$afkp = bfjn$$
$$dgjm = cgko$$

Ich vynásobením dostaneme $ad = no$. Tým dostaneme sústavu z duplikačnej lemy 2.13, z čoho vyplýva, že $n = a$ alebo $n = d$, čo je spor. □

Multiplikatívne magické štvorce veľkosti 5×5 sú už pomerne dobre preskúmané. Christian Boyer dokázal hrubou silou nasledovnú vetu [2]:

Veta 2.26. *(Boyer, 2009) Neexistuje multiplikatívny magický štvorec veľkosti* 5×5*, ktorého prvky sú menšie ako* 1000 *alebo jeho multiplikatívny súčin je menší ako prostredný prvok vynásobený* 10^9*.*

Morgenstern dospel po prehľadávaní štvorcov veľkosti 6×6 hrubou silou k nasledovnému výsledku [2]:

Veta 2.27. *(Morgenstern, 2007) Neexistuje multiplikatívny magický štvorec veľkosti* 6×6*, ktorého prvky sú menšie ako* 136*.*

Vzhľadom na veľký pokrok pre veľkosti 5×5 sme sa sústredili na hľadanie multiplikatívnych magických štvorcov veľkosti 6×6. Keďže generovanie všetkých potenciálnych riešení by bolo neefektívne, rozhodli sme sa pre aproximačný prístup. Najskôr si zadefinujeme špeciálny pojem, ktorý využijeme pri neskoršej implementácii:

Definícia 2.28. *Nech S je magický alebo multiplikatívny štvorec. Podmnožinu prvkov V nazývame **vzorkou**, ak sa v každom riadku, stĺpci a diagonále nachádza práve jeden prvok z V. Ak každý prvok štvorca z V vynásobíme číslom $n \in \mathbb{N}^+$, hovoríme o **prenásobení vzorky V číslom** n.*

Štvorce veľkosti 3×3 zjavne nemajú žiadnu vzorku. Pre veľkosť 4×4 existuje celkovo 8 vzoriek:

*			
		*	
			*
	*		

*			
			*
	*		
		*	

	*		
		*	
*			
			*

	*		
			*
		*	
*			

		*	
*			
	*		
			*

		*	
	*		
			*
*			

			*
*			
		*	
	*		

			*
	*		
*			
		*	

Vzorkami vieme generovať multiplikatívne štvorce, o čom hovorí nasledovná veta:

Veta 2.29. *Nech A je multiplikatívny štvorec, V je ľubovoľná jeho vzorka a n je kladné celé číslo. Nech B je štvorec, ktorý vznikne prenásobením vzorky V číslom n a obsahuje navzájom rôzne prvky. Potom B je multiplikatívny štvorec.*

Dôkaz. Každý riadok, stĺpec aj diagonála štvorca A je prenásobená tým istým číslom. Z toho vyplýva, že multiplikatívna vlastnosť zostáva zachovaná. □

Definícia 2.30. *Nech n je kladné celé číslo. Nech S je magický alebo multiplikatívny štvorec veľkosti $n \times n$ a $v_1, \ldots, v_n$ sú jeho disjunktné vzorky. Potom nazývame skupinu $v_1, \ldots, v_n$ **štvorcovou vzorkou**.*

Na základe tohto zistenia sme vymysleli algoritmus 4.4. Ten niekoľkokrát prenásobil jednotkový štvorec veľkosti 6×6 štvorcovými vzorkami a následne upravoval ich hodnoty tak, aby bola magická odchýlka čo najmenšia.

Výsledok 2.31. *Aproximačná metóda vzorkovaním nenašla žiaden multiplikatívny magický štvorec veľkosti* 6×6*. Nasledovný multiplikatívny štvorec mal najmenšie rozpätie súčtov* 26*:*

150	384	297	78	308	340
352	102	120	220	351	420
330	252	286	450	136	96
459	300	192	336	110	143
156	121	140	306	480	360
112	390	510	176	180	198

Kapitola 3

Nové otvorené problémy

Najprv dokážeme nasledovnú lemu, ktorá nám zjednoduší prácu:

Lema 3.1. *(Jednotková) Nech $n \in \mathbb{N}^+$. Nech $a_1, \ldots, a_n, b$ sú navzájom rôzne kladné celé čísla. Potom:*

1. *nasledovná sústava nemá riešenie:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = b$$
$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = b^2$$

2. *nasledovná sústava má jediné riešenie pre $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $b = 6$:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = b$$
$$\prod_{k=1}^{n} a_k = b$$

Dôkaz. Uvažujme, aké hodnoty môže v oboch sústavách nadobúdať n.

1. Pre $n = 1$ dostaneme vzťah $a_1 = b$, čo je spor. Ak $n \geq 2$, tak dosadením b do druhej rovnice dostaneme vzťah $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = (\sum_{k=1}^{n} a_k)^2$, čo upravíme na tvar $\sum_{i \neq j} a_i a_j = 0$. To je spor, keďže každé a_i aj a_j je kladné, a teda ich súčet nemôže byť nulový.

2. Pre $n = 1$ dostaneme vzťah $a_1 = b$, čo je spor. Pre $n = 2$ dostaneme $a_1 + a_2 = a_1 a_2$, z čoho vyplýva, že $a_1 = \frac{a_2}{a_2 - 1}$. Keďže čísla $a_2 - 1$ a a_2 sú nesúdeliteľné, zlomok môže mať celočíselnú hodnotu jedine pre $a_2 = 2$. Z toho odvodíme, že aj $a_1 = 2$, čo je spor. Pre $n \geq 4$ sa dá dokázať indukciou, že $\sum_{k=1}^{n} a_k < \prod_{k=1}^{n} a_k$, ak $a_1, \ldots, a_n$

sú navzájom rôzne kladné celé čísla. Pre $n = 3$ musí platiť $a_1 + a_2 + a_3 = a_1a_2a_3$, čo sa dá prepísať na tvar $a_1 + a_2 = a_3(a_1a_2 - 1)$. Indukciou vieme dokázať, že $a_1 + a_2 < a_1a_2 - 1$ pre $a_1, a_2 \geq 2$. Teda nutne $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, z čoho vyplýva $a_3 = 3$, $b = 6$.

□

3.1 Bimagické grafy

3.1.1 Vrcholovo bimagické grafy

Definícia 3.2. *Nech G je súvislý jednoduchý netriviálny graf. Ak existuje vrcholové ohodnotenie grafu G také, že platí:*

1. *vrcholom sú priradené navzájom rôzne kladné celé čísla*
2. *súčty hodnôt susedov jednotlivých vrcholov sú rovnaké*
3. *súčty druhých mocnín hodnôt susedov jednotlivých vrcholov sú rovnaké*

*tak G nazývame **vrcholovo bimagickým grafom**.*

Veta 3.3. *Nech G je vrcholovo bimagický graf. Ak G obsahuje dvojicu vrcholov stupňa* 1, *potom majú spoločného suseda.*

Dôkaz. Sporom. Nech G obsahuje dva vrcholy u, v stupňa 1, ktoré nemajú spoločného suseda. Nech x je hodnota vrchola u. Nech y je hodnota vrchola v.

Nech sú vrcholy u, v susedné. Podľa u má graf magický súčet y a podľa v má graf magický súčet x. Z toho vyplýva $x = y$, čo je spor s tým, že vrcholom sú priradené navzájom rôzne čísla.

Nech majú vrcholy u, v rôznych susedov w_1, w_2. Označme hodnoty týchto vrcholov z_1, z_2. Podľa u má graf magický súčet z_1 a podľa v má graf magický súčet z_2. Z toho vyplýva $z_1 = z_2$, čo je opäť spor. □

Dôsledok 3.4. *Stromy nie sú vrcholovo bimagické.*

Dôkaz. Z predchádzajúcej vety vyplýva, že jediným stromom, ktorý môže byť vrcholovo bimagickým, je $K_{1,n}$ pre nejaké $n \in \mathbb{N}$. Nech v je koreň tohto stromu a $v_1, \ldots, v_n$ sú jeho listy. Nech b je hodnota koreňa a $a_1, \ldots, a_n$ sú hodnoty jeho listov. Podľa v má graf magický súčet $\sum_{k=1}^{n} a_k$ a podľa v_1 má graf magický súčet b. Podľa v má graf bimagický súčet $\sum_{k=1}^{n} a_k^2$ a podľa v_1 má graf magický súčet b^2. Z toho vyplýva, že by sústava z jednotkovej lemy 3.1 mala riešenie, čo je spor. □

Veta 3.5. *Nech G je vrcholovo bimagický graf. Potom majú všetky vrcholy stupňa* 2 *rovnakú množinu susedov.*

Dôkaz. Sporom. Nech G obsahuje dva vrcholy u, v stupňa 2, ktoré nemajú rovnakú množinu susedov. Nech x je hodnota vrchola u. Nech y je hodnota vrchola v.

Nech sú vrcholy u, v susedné. Nech w_1 je druhý sused u a z_1 je jeho hodnota. Nech w_2 je druhý sused v a z_2 je jeho hodnota. Podľa u má graf magický súčet $y + z_1$ a podľa v má graf magický súčet $x + z_2$. Podľa u má graf bimagický súčet $y^2 + z_1^2$ a podľa v má graf bimagický súčet $x^2 + z_2^2$. To znamená, že $x + z_2 = y + z_1$ a zároveň $x^2 + z_2^2 = y^2 + z_1^2$. Z duplikačnej lemy 2.13 potom vyplýva, že $y = x$ alebo $y = z_2$, čo je spor s tým, že vrcholom sú priradené navzájom rôzne čísla.

Nech majú vrcholy u, v práve jedného spoločného suseda w, jeho hodnotu označíme z. Nech w_1 je druhý sused u a z_1 je jeho hodnota. Nech w_2 je druhý sused v a z_2 je jeho hodnota. Podľa u má graf magický súčet $z + z_1$ a podľa v má graf magický súčet $z + z_2$. Z toho vyplýva $z_1 = z_2$, čo je spor.

Nech majú vrcholy u, v odlišných susedov. Nech w_1, w_2 sú susedia u, pričom ich hodnoty sú z_1, z_2. Nech w_3, w_4 sú susedia v, pričom ich hodnoty sú z_3, z_4. Podľa u má graf magický súčet $z_1 + z_2$ a podľa v má graf magický súčet $z_3 + z_4$. Podľa u má graf bimagický súčet $z_1^2 + z_2^2$ a podľa v má graf bimagický súčet $z_3^2 + z_4^2$. To znamená, že $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$ a zároveň $z_1^2 + z_2^2 = z_3^2 + z_4^2$. Z duplikačnej lemy potom vyplýva, že $z_3 = z_1$ alebo $z_3 = z_2$, čo je opäť rovnaký spor. □

Veta 3.6. *Nech G je vrcholovo bimagický graf. Potom buď má každá dvojica nesusedných vrcholov stupňa* 3 *rovnakú množinu susedov, alebo nemá spoločného suseda.*

Dôkaz. Sporom. Nech G obsahuje dva nesusedné vrcholy u, v stupňa 3, ktoré majú práve jedného alebo dvoch spoločných susedov. Nech x je hodnota vrchola u. Nech y je hodnota vrchola v.

Nech majú vrcholy u, v práve jedného spoločného suseda w, jeho hodnotu označíme z. Nech w_1, w_2 sú zvyšní susedia u a z_1, z_2 sú ich hodnoty. Nech w_3, w_4 sú zvyšní susedia v a z_3, z_4 sú ich hodnoty. Podľa u má graf magický súčet $z + z_1 + z_2$ a podľa v má graf magický súčet $z + z_3 + z_4$. Podľa u má graf bimagický súčet $z^2 + z_1^2 + z_2^2$ a podľa v má graf magický súčet $z^2 + z_3^2 + z_4^2$. To znamená, že $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$ a zároveň $z_1^2 + z_2^2 = z_3^2 + z_4^2$. Z duplikačnej lemy potom vyplýva, že $z_3 = z_1$ alebo $z_3 = z_2$, čo je spor s tým, že vrcholom sú priradené navzájom rôzne čísla.

Nech majú vrcholy u, v práve dvoch spoločných susedov w_1, w_2, ich hodnoty označíme z_1, z_2. Nech w_3 je zvyšný sused u a z_3 je jeho hodnota. Nech w_4 je zvyšný sused v a z_4 je jeho hodnota. Podľa u má graf magický súčet $z_1 + z_2 + z_3$ a podľa v má graf magický súčet $z_1 + z_2 + z_4$. Z toho vyplýva $z_3 = z_4$, čo je opäť spor. $\square$

Veta 3.7. *Nech G je vrcholovo bimagický graf. Nech e je most v G. Nech G_1, G_2 sú komponenty, ktoré vzniknú odobraním e z G. Potom $G_1 \cup e$, $G_2 \cup e$ sú vrcholovo bimagické grafy.*

Dôkaz. Použijeme rovnaké vrcholové ohodnotenie ako v pôvodnom grafe G. $\square$

Veta 3.8. *Jediný kubický vrcholovo bimagický graf je $K_{3,3}$.*

Dôkaz. Nech G je kubický graf, o ktorom vieme, že je vrcholovo bimagický. V grafe G určite existujú dva susedné vrcholy u, v. Nech w_1, w_2 sú zvyšní susedia u. Nech w_3, w_4 sú zvyšní susedia v. Vrcholy u, v sú susedné a majú stupeň 3. Rozoberieme všetky možnosti:

1. Nech sú w_1, w_2, w_3, w_4 navzájom rôzne. Vrcholy w_1 a v majú spoločného suseda u, takže z vety 3.6 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Susedné byť nemôžu, pretože potom by mal v stupeň aspoň 4. Teda v G musí existovať hrana w_1w_3 aj hrana w_1w_4.

   Zároveň, vrcholy w_2 a v majú tiež spoločného suseda u, takže z vety 3.6 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Susedné byť nemôžu, pretože potom by mal v stupeň aspoň 4. Teda v G musí existovať hrana w_2w_3 aj hrana w_2w_4.

   Tým sme dostali graf $K_{3,3}$, ktorý vieme vrcholovo bimagicky ohodnotiť.

2. Nech $w_1 = w_3$ a $w_2 \neq w_4$. Vrcholy w_1 a w_2 majú spoločného suseda u, takže z vety 3.6 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Teda v G musí existovať hrana w_1w_2 alebo hrana w_2v.

   Zároveň, vrcholy w_1 a w_4 majú spoločného suseda v, takže z vety 3.6 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Teda v G musí existovať hrana w_1w_4 alebo hrana w_4u.

   Lenže ak z každých dvoch potenciálnych hrán pridáme do G aspoň jednu, tak jeden z vrcholov u, v, w_1 bude mať stupeň aspoň 4, čo je spor s tým, že graf je kubický.

3. Nech $w_1 = w_3$ a $w_2 = w_4$. Vrcholy w_1 a w_2 majú spoločných susedov u, v, takže z vety 3.6 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Teda v G musí existovať hrana w_1w_2 alebo dvojice hrán w_1w_5 a w_2w_5 pre nejaký nový vrchol w_5.

   Ak je v G hrana w_1w_2, dostaneme graf K_4. O ňom sa môžeme ľahko presvedčiť, že nie je vrcholovo bimagický. Ak priradíme vrcholom hodnoty a, b, c, d, tak musí platiť, že magické súčty $a+b+c$, $a+b+d$, $a+c+d$, $b+c+d$ sú rovnaké. To je možné len v prípade, že $a = b = c = d$, čo je spor s tým, že vrcholom sú priradené navzájom rôzne čísla.

   Ak sú v G hrany w_1w_5 aj w_2w_5 pre nejaký nový vrchol w_5, tiež dôjdeme k sporu. Vrcholy u a w_5 majú spoločných susedov w_1, w_2, takže z vety 3.6 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Susedné byť nemôžu, pretože potom by mal u stupeň aspoň 4. Teda v G by musela existovať hrana vw_5, čo tiež nie je možné, pretože potom by mal v stupeň aspoň 4.

□

Veta 3.9. *Nech G je vrcholovo bimagický graf a u, v sú nejaké jeho dva vrcholy. Nech x je počet susedov vrchola u, ktoré nie sú susedmi vrchola v. Nech y je počet susedov vrchola v, ktoré nie sú susedmi vrchola u. Potom platí:*

$$x = 0 \iff y = 0$$
$$x, y \neq 1$$
$$(x, y) \neq (2, 2)$$

Dôkaz. Ak pre vrcholy u, v zrátame magický alebo bimagický súčet, ich spoloční susedia budú započítaní na oboch stranách. Stačí sa preto venovať magickému a bimagickému súčtu vrcholov, ktoré nie sú zároveň susedmi u aj v (tých je x, resp. y). Sporom budeme predpokladať, že G je vrcholovo bimagický a jedna z podmienok nie je splnená. Nech $a_1, a_2, \ldots, a_x$ sú hodnoty susedov vrchola u, ktorí nie sú susedmi vrchola v. Nech $b_1, b_2, \ldots, b_y$ sú hodnoty susedov vrchola v, ktorí nie sú susedmi vrchola u. To znamená, že nasledovná sústava:

$$\sum_{k=1}^{x} a_k = \sum_{k=1}^{y} b_k$$
$$\sum_{k=1}^{x} a_k^2 = \sum_{k=1}^{y} b_k^2$$

má riešenie, ak $a_1, \dots, a_x, b_1, \dots, b_y$ sú navzájom rôzne kladné celé čísla.

Ak neplatí $x = 0 \iff y = 0$, tak bez ujmy na všeobecnosti nech $x > 0$ a $y = 0$. Druhá rovnica by potom mala tvar $\sum_{k=1}^{x} a_k^2 = 0$. Jediné riešenie tejto rovnice je zjavne nulové, čo je spor s tým, že vo vrcholovo bimagickom grafe sú vrcholom priradené kladné čísla.

Ak neplatí $x, y \neq 1$, tak bez ujmy na všeobecnosti nech $y = 1$. Potom dostaneme sústavu z jednotkovej lemy 3.1, o ktorej vieme, že nemá riešenie (čo je spor).

Ak neplatí $(x, y) \neq (2, 2)$, tak musí platiť $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ aj $a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2$. Z duplikačnej lemy 2.13 potom vyplýva $b_1 = a_1$ alebo $b_1 = a_2$, čo je spor s tým, že vo vrcholovo bimagickom grafe sú vrcholom priradené navzájom rôzne čísla. $\square$

Veta 3.10. *Pre každé $i, j \in \mathbb{N}$, $2 \leq i \leq j$, $(i, j) \neq (2, 2)$ platí, že graf $K_{i,j}$ je vrcholovo bimagický.*

Dôkaz. Indukciou vzhľadom na i, j. Najprv ukážeme, že grafy $K_{2,j}, K_{3,j}, K_{4,4}$ a $K_{4,5}$ sú vrcholovo bimagické.

Graf $K_{2,n}$ pre $n \geq 3$ je vrcholovo bimagický - stačí do prvej partície dať prvky $\frac{n(n-1)}{2}+1$ a $\frac{n(n-1)(3n^2-7n+14)}{24}$ a do druhej partície prvky 1 až $n-1$ a $\frac{n(n-1)(3n^2-7n+14)}{24}+1$.

Graf $K_{3,n}$ pre $n \geq 3$ je vrcholovo bimagický - stačí do prvej partície dať prvky $1, \frac{n(n+1)}{2}-1$ a $\frac{n(n+1)(3n^2-n-14)}{24}+1$ a do druhej partície prvky 2 až n a $\frac{n(n+1)(3n^2-n-14)}{24}+2$.

Graf $K_{4,4}$ je vrcholovo bimagický - stačí do prvej partície dať prvky $1, 4, 6, 7$ a do druhej partície prvky $2, 3, 5, 8$.

Graf $K_{4,5}$ je vrcholovo bimagický - stačí do prvej partície dať prvky $2, 12, 13, 15$ a do druhej partície prvky $1, 4, 8, 10, 19$.

Teraz dokážeme, že ak je $K_{i,j}$ vrcholovo bimagický, tak to platí aj pre $K_{i+2,j+3}$. Do jednej partície stačí pridať prvky $4k, 5k$ a do druhej prvky $k, 2k, 6k$, pričom $k \in \mathbb{N}$ zvolíme dostatočne veľké (aby boli prvky navzájom rôzne). $\square$

Z vety 3.9 sme schopní priamo implementovať algoritmus 4.5, ktorý overí, či zadaný graf môže byť vrcholovo bimagický.

Výsledok 3.11. *Jediné súvislé grafy s menej ako 10 vrcholmi, ktoré spĺňajú všetky podmienky z vety 3.9 (a teda môžu byť vrcholovo bimagické), sú $K_{2,3}, K_{2,4}, K_{2,5}, K_{2,6}, K_{2,7}, K_{3,3}, K_{3,4}, K_{3,5}, K_{3,6}, K_{4,4}, K_{4,5}, K_{2,3,3}, K_{2,3,4}$ a $K_{3,3,3}$.*

Podľa vety 3.10 vieme, že $K_{i,j}$ je vrcholovo bimagický pre $i, j \geq 2, (i, j) \neq (2, 2)$. Môžeme sa ľahko presvedčiť, že aj zvyšné grafy majú vrcholové bimagické ohodnotenie:

$$K_{2,3,3} \to 11, 13 \mid 1, 8, 15 \mid 3, 5, 16$$
$$K_{2,3,4} \to 11, 19 \mid 1, 9, 20 \mid 1, 2, 6, 21$$
$$K_{3,3,3} \to 1, 12, 14 \mid 2, 9, 16 \mid 4, 6, 17$$

Definícia 3.12. *Nech G je vrcholovo bimagický graf s n vrcholmi. Ak sú vrcholom priradené čísla z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, tak G nazývame **vrcholovo superbimagickým grafom**.*

Existuje vrcholovo superbimagický graf? Keďže zatiaľ vieme vrchovo bimagicky ohodnotiť len kompletné bipartitné grafy, musíme skúmať tie.

Veta 3.13. *Pre $n \in \{7, 8, 11, 12\}$ existuje práve jeden vrcholovo superbimagický kompletný bipartitný graf.*

Dôkaz. Hrubou silou.

$$n = 7 \to \{1, 2, 4, 7\} \mid \{3, 5, 6\}$$
$$n = 8 \to \{1, 4, 6, 7\} \mid \{2, 3, 5, 8\}$$
$$n = 11 \to \{1, 3, 4, 5, 9, 11\} \mid \{2, 6, 7, 8, 10\}$$
$$n = 12 \to \{1, 3, 7, 8, 9, 11\} \mid \{2, 4, 5, 6, 10, 12\}$$

□

Veta 3.14. *Vrcholovo superbimagický kompletný bipartitný graf s n vrcholmi existuje práve vtedy, keď $n = 4k$ alebo $n = 4k - 1$ pre $k \geq 2$.*

Dôkaz. Najprv dokážeme, že ak $n = 4k$ alebo $n = 4k - 1, k \geq 2$, tak existuje vrcholovo superbimagický kompletný bipartitný graf, ktorý má n vrcholov. Stačí nám dokázať, že dané tvrdenie platí pre všetky n tvaru $8k-1, 8k, 8k+3, 8k+4$. To urobíme matematickou indukciou vzhľadom na k. Pre $k = 1$ existujú vyhovujúce ohodnotenia (uvedené vo vete 3.13).

Indukčný krok je potom jednoduchý. Uvedieme ho pre prípad $n = 8k$, ostatné z nich sú analogické. Predpokladajme, že pre $n = 8k$ existuje superbimagické ohodnotenie. Pre $n = 8(k + 1)$ ho zostrojíme nasledovne: najprv vezmeme superbimagické ohodnotenie pre $n = 8k$ (ostanú nám nepriradené čísla $8k + 1, \ldots 8k + 8$). Potom na jednu stranu pridáme čísla $8k + 1$, $8k + 4$, $8k + 6$, $8k + 7$ a na druhú stranu $8k + 2$, $8k+3$, $8k+5$, $8k+8$. Na obe strany sme pridali čísla s rovnakým súčtom aj rovnakým súčtom druhých mocnín. Ak bolo pôvodné ohodnotenie superbimagické, tak aj nové ohodnotenie pre $n = 8(k+1)$ je superbimagické.

Ak $n = 4k+1$ alebo $n = 4k+2, k \in \mathbb{N}$, tak požadovaný graf neexistuje. Predpokladajme sporom, že taký graf existuje. Potom sa množina $\{1, 2, \ldots, n\}$ dá rozdeliť na dve disjunktné podmnožiny s rovnakým súčtom aj súčtom druhých mocnín. Súčet tejto množiny je $\frac{n(n+1)}{2}$. Teda každá podmnožina by musela mať súčet $\frac{n(n+1)}{4}$. Lenže ak $n = 4k+1$ alebo $n = 4k+2, k \in \mathbb{N}$, tak výraz $\frac{n(n+1)}{4}$ nie je celé číslo, čo je spor. □

Hypotéza 3.15. *Každý vrcholovo bimagický graf je kompletný bipartitný.*

3.1.2 Hranovo bimagické grafy

Definícia 3.16. *Nech G je súvislý jednoduchý netriviálny graf. Ak existuje hranové ohodnotenie grafu G také, že platí:*

1. *hranám sú priradené navzájom rôzne kladné celé čísla*
2. *súčty hodnôt hrán incidentných s jednotlivými vrcholmi sú rovnaké*
3. *súčty druhých mocnín hodnôt hrán incidentných s jednotlivými vrcholmi sú rovnaké*

*tak G nazývame **hranovo bimagickým grafom**.*

Jedným z hranovo bimagických grafov je cesta na dvoch vrcholoch s ľubovoľným kladným ohodnotením.

Zaujímavou skupinou potenciálne hranovo bimagických grafov sú kompletné bipartitné regulárne grafy $K_{n,n}$. Tie sú ekvivalentné semibimagickým štvorcom veľkosti $n \times n$. Keďže semibimagické štvorce veľkosti $n \times n$ existujú práve pre $n \geq 4$, tak $K_{n,n}$ je hranovo bimagický pre $n \geq 4$.

Veta 3.17. *Nech G je hranovo bimagický graf, ktorý má aspoň tri vrcholy. Potom G neobsahuje vrchol stupňa* 1.

Dôkaz. Sporom. Nech u je vrchol stupňa 1, v je jeho jediný sused a x je hodnota hrany medzi vrcholmi u, v. Potom podľa u musí platiť, že magický súčet je x. Lenže ak je G súvislý a má aspoň tri vrcholy, tak vrchol v musí mať ešte ďalší susedný vrchol w. Nech y je hodnota hrany medzi vrcholmi v, w. Potom však podľa v musí platiť, že magický súčet je aspoň $x + y > x$, čo je spor. □

Veta 3.18. *Nech G je hranovo bimagický graf. Potom G neobsahuje vrchol stupňa* 2.

Dôkaz. Sporom. Nech u je vrchol stupňa 2. Označme jeho susedov v, w. Nech b, c sú ohodnotenia hrán medzi u, v, resp. u, w. Nech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sú ohodnotenia hrán, ktoré sú incidentné s w okrem hrany uw. Podľa u musí platiť, že magický súčet je $b + c$ a bimagický súčet je $b^2 + c^2$. Podľa w musí platiť, že magický súčet je $c + \sum_{k=1}^{n} a_n$ a bimagický súčet je $c^2 + \sum_{k=1}^{n} a_n^2$. Z toho vyplýva, že by sústava z jednotkovej lemy mala riešenie, čo je spor. □

Dôsledok 3.19. *Jediný hranovo bimagický strom je cesta na dvoch vrcholoch.*

Dôsledok 3.20. *Nech G je hranovo bimagický graf, ktorý má aspoň tri vrcholy. Potom má G minimálny stupeň vrchola* 3.

Veta 3.21. *Nech G je hranovo bimagický graf, ktorý má aspoň tri vrcholy. Nech u, v sú ľubovoľné dva susedné vrcholy. Potom $max\{d(u), d(v)\} \geq 4$.*

Dôkaz. Sporom. Predpokladajme, že existuje dvojica susedných vrcholov u, v takých, že $max\{d(u), d(v)\} < 4$. Z dôsledku 3.20 potom vyplýva, že nutne $d(u) = d(v) = 3$. Označme x hodnotenie hrany medzi u, v. Označme y_1, y_2 zvyšné hodnotenia hrán z u a z_1, z_2 zvyšné hodnotenia hrán z v. Podľa u musí platiť, že magický súčet je $x + y_1 + y_2$ a bimagický súčet je $x^2 + y_1^2 + y_2^2$. Podľa v musí platiť, že magický súčet je $x + z_1 + z_2$ a bimagický súčet je $x^2 + z_1^2 + z_2^2$. Teda musí platiť $y_1 + y_2 = z_1 + z_2$ aj $y_1^2 + y_2^2 = z_1^2 + z_2^2$. Z duplikačnej lemy potom vyplýva, že $z_1 = y_1$ alebo $z_1 = y_2$, čo je spor s tým, že hranám budú priradené navzájom rôzne čísla. □

Dôsledok 3.22. *Kubické grafy nie sú hranovo bimagické.*

Dôsledok 3.23. *Nech G je hranovo bimagický graf s aspoň tromi vrcholmi a $\alpha(G)$ je jeho číslo nezávislosti. Potom má G aspoň $2V(G) - \frac{\alpha(G)}{2}$ hrán.*

Dôkaz. Ak pre ľubovoľné dva susedné vrcholy u, v platí $max\{d(u), d(v)\} \geq 4$, potom nemôžu v grafe G existovať dva susedné vrcholy stupňa 3. Z toho vyplýva, že počet vrcholov stupňa 3 nemôže byť väčší ako $\alpha(G)$ a ostatné musia byť stupňa aspoň 4. Preto G musí mať aspoň $\frac{3\alpha(G)+4[V(G)-\alpha(G)]}{2} = \frac{4V(G)-\alpha(G)}{2} = 2V(G) - \frac{\alpha(G)}{2}$ hrán. □

Poznámka 3.24. *Číslo nezávislosti grafu G je najväčší počet vrcholov G, z ktorých žiadne dva nie sú spojené hranou.*

Veta 3.25. *Existuje graf, ktorý je hranovo bimagický a nie je kompletný bipartitný.*

Dôkaz. Nech G je hranovo bimagický kompletný bipartitný regulárny graf s nejakým ohodnotením. Nech e je hrana, ktorá má najmenšiu hodnotu. Keďže je regulárny, tak podľa posunovej lemy 2.17 môžeme od všetkých hrán odrátať hodnotu hrany e. Tým dostaneme hranovo bimagický kompletný bipartitný graf, ktorý má práve jednu nulovú hranu e. Zjavne vieme túto hranu z grafu odstrániť a magická aj bimagická podmienka ostane zachovaná. Graf $G - e$ je teda hranovo bimagický, a pritom nie je kompletný bipartitný. □

Definícia 3.26. *Nech G je hranovo bimagický graf s n vrcholmi. Ak sú hranám priradené čísla z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, tak G nazývame **hranovo superbimagickým grafom**.*

Keďže Georges Pfeffermann našiel superbimagický štvorec veľkosti 8×8, vieme, že existuje hranovo superbimagický graf - je ním kompletný bipartitný graf na 8 vrcholoch.

Hypotéza 3.27. *Každý hranovo bimagický graf je kompletný bipartitný alebo kompletný bipartitný bez jednej hrany.*

3.2 Multiplikatívne magické grafy

3.2.1 Vrcholovo multiplikatívne magické grafy

Definícia 3.28. *Nech G je súvislý jednoduchý netriviálny graf. Ak existuje vrcholové ohodnotenie grafu G také, že platí:*

1. *vrcholom sú priradené navzájom rôzne kladné celé čísla*
2. *súčty hodnôt susedov jednotlivých vrcholov sú rovnaké*
3. *súčiny hodnôt susedov jednotlivých vrcholov sú rovnaké*

*tak G nazývame **vrcholovo multiplikatívnym magickým grafom**.*

Veta 3.29. *Nech G je vrcholovo multiplikatívny magický graf. Ak G obsahuje dvojicu vrcholov stupňa 1, potom majú spoločného suseda.*

Dôkaz. Rovnaký ako dôkaz vety 3.3. □

Dôsledok 3.30. *Jediný vrcholovo multiplikatívny magický strom je $K_{1,3}$.*

Dôkaz. Z vety vyplýva, že jediným stromom, ktorý môže byť vrcholovo multiplikatívnym magickým, je $K_{1,n}$ pre nejaké $n \in \mathbb{N}$. Nech v je koreň tohto stromu a $v_1, \ldots, v_n$ sú jeho listy. Nech b je hodnota koreňa a $a_1, \ldots, a_n$ sú hodnoty jeho listov. Podľa v má graf magický súčet $\sum_{k=1}^{n} a_k$ a podľa v_1 má graf magický súčet b. Podľa v má graf súčin $\prod_{k=1}^{n} a_k$ a podľa v_1 má graf súčin b. To odpovedá sústave z jednotkovej lemy 3.1, ktorá má jediné riešenie ($n = 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $b = 6$). Z toho vyplýva, že iba $K_{1,3}$ je multiplikatívny magický. □

Nasledovné vety vieme dokázať rovnakými technikami ako pri vrcholovo bimagických grafoch:

Veta 3.31. *Nech G je vrcholovo multiplikatívny magický graf. Potom majú všetky vrcholy stupňa 2 rovnakú množinu susedov.*

Veta 3.32. *Nech G je vrcholovo multiplikatívny magický graf. Potom buď má každá dvojica nesusedných vrcholov stupňa 3 rovnakú množinu susedov, alebo nemá spoločného suseda.*

Veta 3.33. *Nech G je vrcholovo multiplikatívny magický graf. Nech e je most v G. Nech G_1, G_2 sú komponenty, ktoré vzniknú odobraním e z G. Potom $G_1 \cup e$, $G_2 \cup e$ sú vrcholovo multiplikatívne magické grafy.*

Veta 3.34. *Jediný kubický vrcholovo multiplikatívny magický graf je $K_{3,3}$.*

Ako je to s vrcholovo multiplikatívnymi supermagickými grafmi?

Veta 3.35. *Kompletný bipartitný graf nemôže byť vrcholovo multiplikatívny supermagický.*

Dôkaz. Sporom. Nech G je kompletný bipartitný a vrcholovo multiplikatívny supermagický graf s n vrcholmi. Nech p je najväčšie prvočíslo, ktoré neprevyšuje n. Toto prvočíslo sa môže vyskytovať iba v jednej partícii. To však znamená, že súčin oboch partícii nemôže byť rovnaký (jeden súčin bude mať p vo svojom rozklade a druhý nie). □

Veta 3.36. *Pre každé $i, j \in \mathbb{N}$, $2 \leq i \leq j$, $(i, j) \neq (2, 2)$ platí, že graf $K_{i,j}$ je vrcholovo multiplikatívny magický.*

Dôkaz. Indukciou vzhľadom na i, j. Najprv ukážeme, že grafy $K_{i,j}, i \in \{2, 3\}, K_{4,4}$ a $K_{4,5}$ sú vrcholovo multiplikatívne magické.

Grafy $K_{2,3}, K_{2,4}, K_{4,4}$ a $K_{4,5}$ sú vrcholovo multiplikatívne magické, pretože:

- Pre graf $K_{2,3}$ stačí priradiť jednej partícii prvky $5, 12$ a druhej partícii prvky $1, 6, 10$.
- Pre graf $K_{2,4}$ stačí priradiť jednej partícii prvky $9, 16$ a druhej partícii prvky $1, 2, 4, 18$.
- Pre graf $K_{4,4}$ stačí priradiť jednej partícii prvky $1, 5, 6, 12$ a druhej partícii prvky $2, 3, 4, 15$.
- Pre graf $K_{4,5}$ stačí priradiť jednej partícii prvky $2, 10, 20, 27$ a druhej partícii prvky $1, 3, 6, 24, 25$.

Graf $K_{2,n}$ pre $n \geq 5$ je vrcholovo multiplikatívny magický - stačí do prvej partície dať prvky $(n-1)! + 1$ a $(n-1)![(n-1)! + 1 - \frac{n(n-1)}{2}]$ a do druhej partície prvky $1, 2, \ldots, n-2, n-1, [(n-1)! + 1][(n-1)! + 1 - \frac{n(n-1)}{2}]$.

Podobným spôsobom ukážeme, že aj graf $K_{3,n}$ pre $n \geq 3$ je vrcholovo multiplikatívny magický. Stačí do prvej partície dať prvky $1, n! + 1$ a $n![n! + 3 - \frac{n(n+1)}{2}]$ a do druhej partície prvky $2, \ldots, n-1, n, (n!+1)[n! + 3 - \frac{n(n+1)}{2}]$.

Teraz dokážeme, že ak je $K_{i,j}$ vrcholovo multiplikatívny magický, tak to platí aj pre $K_{i+2,j+3}$. Do jednej partície stačí pridať prvky $2xy, 2xy - x - y$ a do druhej prvky $2(2xy-x-y), x, y$, pričom $x, y \in \mathbb{N}$ zvolíme dostatočne veľké (aby boli prvky navzájom rôzne). □

3.2.2 Hranovo multiplikatívne magické grafy

Definícia 3.37. *Nech G je súvislý jednoduchý netriviálny graf. Ak existuje hranové ohodnotenie grafu G také, že platí:*

1. *hranám sú priradené navzájom rôzne kladné celé čísla*
2. *súčty hodnôt hrán incidentných s jednotlivými vrcholmi sú rovnaké*
3. *súčiny hodnôt hrán incidentných s jednotlivými vrcholmi sú rovnaké*

*tak G nazývame **hranovo multiplikatívnym magickým grafom**.*

Jedným z hranovo multiplikatívnych magických grafov je cesta na dvoch vrcholoch s ľubovoľným kladným ohodnotením.

Veta 3.38. *Nech G je hranovo multiplikatívny magický graf, ktorý má aspoň tri vrcholy. Potom G neobsahuje vrchol stupňa 1.*

Dôkaz. Rovnaký ako dôkaz vety 3.17. □

Veta 3.39. *Nech G je hranovo multiplikatívny magický graf. Potom G neobsahuje vrchol stupňa 2.*

Dôkaz. Sporom. Nech u je vrchol stupňa 2. Označme jeho susedov v, w. Nech b, c sú ohodnotenia hrán medzi u, v, resp. u, w. Nech $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sú ohodnotenia hrán, ktoré sú incidentné s v okrem hrany uv. Nech $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ sú ohodnotenia hrán, ktoré sú incidentné s w okrem hrany uw. Podľa u musí platiť, že magický súčet je $b + c$ a multiplikatívny súčin je bc. Podľa v musí platiť, že magický súčet je $b + \sum_{k=1}^{m} a_m$ a multiplikatívny súčin je $b \prod_{k=1}^{m} a_m$. Podľa w musí platiť, že magický súčet je $c + \sum_{k=1}^{n} a'_n$ a multiplikatívny súčin je $c \prod_{k=1}^{n} a'_n$. Z toho vyplýva, že by sústava z jednotkovej lemy 3.1 mala dve rôzne riešenia, čo je spor. □

Dôsledok 3.40. *Jediný hranovo multiplikatívny magický strom je cesta na dvoch vrcholoch.*

Dôsledok 3.41. *Každý hranovo multiplikatívny magický graf má minimálny stupeň vrchola* 3.

3.3 Magické obdĺžniky

Veta 3.42. *V každom magickom obdĺžniku platí, že zámenou ľubovoľných dvoch riadkov alebo stĺpcov dostaneme opäť magický obdĺžnik.*

Dôkaz. Zrejmý. □

Dôsledok 3.43. *Ku každému magickému obdĺžniku A vieme zostrojiť magický obdĺžnik B, v ktorom platí, že jeho prvky v prvom riadku aj prvom stĺpci sú usporiadané vzostupne.*

Dôsledok 3.44. *V každom magickom obdĺžniku si vieme bez ujmy na všeobecnosti určiť poradie stĺpcov aj poradie prvkov v prvom stĺpci.*

3.3.1 Bimagické obdĺžniky

Definícia 3.45. *Nech A je matica veľkosti $m \times n$. Ak platí:*

1. *prvkami matice sú navzájom rôzne kladné celé čísla*
2. *súčty prvkov v jednotlivých riadkoch sú rovnaké*
3. *súčty prvkov v jednotlivých stĺpcoch sú rovnaké*
4. *súčty druhých mocnín prvkov v jednotlivých riadkoch sú rovnaké*
5. *súčty druhých mocnín prvkov v jednotlivých stĺpcoch sú rovnaké*

tak A nazývame ***bimagickým obdĺžnikom****.*

Veta 3.46. *Nech A je bimagický obdĺžnik veľkosti $m \times n$. Potom platí $m, n \geq 3$ alebo $(m, n) = (1, 1)$.*

Dôkaz. Ak $m = 1$, tak obdĺžnik má len jeden riadok. Ak majú byť jeho súčty v stĺpci rovnaké, musí byť v každom stĺpci rovnaké číslo. Ak $n \geq 2$, obdĺžnik by obsahoval duplicitné prvky, čo je spor. Z toho vyplýva, že nutne $n = 1$.

Ak $m = 2$, tak z predošlého odstavca vieme, že $n \geq 2$. Tým dostaneme pre dva riadky a dva stĺpce rovnicu z duplikačnej lemy 2.13, z čoho vyplýva, že obdĺžnik by obsahoval duplicitné prvky, čo je spor. □

Veta 3.47. *Nech A je bimagický obdĺžnik. Potom ho vieme transformovať na taký bimagický obdĺžnik B, že jeho najmenší prvok je 1.*

Dôkaz. Využijeme normálnu formu bimagických útvarov. Nech A_{min} je najmenší prvok A. Bimagický obdĺžnik B zostrojíme tak, že ku každému prvku A pripočítame $1-A_{min}$. Z posunovej lemy 2.17 zároveň vyplýva, že ak boli magické aj bimagické súčty rovnaké v A, tak budú aj v B. Teda B je bimagický obdĺžnik. □

Veta 3.48. *Nech A je bimagický obdĺžnik veľkosti $3 \times n$ pre $n \geq 4$, ktorého najmenší prvok je 1. Nech S je magický súčet a T je bimagický súčet tohto obdĺžnika. Potom je výraz $2T - (S-1)^2 - 2$ druhou mocninou celého čísla.*

Dôkaz. Nech x, y sú zvyšné prvky v stĺpci, kde sa nachádza 1. Potom musia platiť vzťahy:

$$x + y = S - 1$$
$$x^2 + y^2 = T - 1$$

Z prvého vzťahu vyjadríme $y = S - 1 - x$. Dosadením do druhého a následnou úpravou dostaneme kvadratickú rovnicu $2x^2 - 2x(S-1) + (S-1)^2 - T + 1 = 0$. Jej diskriminant je $4[2T - (S-1)^2 - 2]$. Keďže $x \in \mathbb{N}$, nutne musí byť $2T - (S-1)^2 - 2$ druhou mocninou celého čísla. □

Na základe viet 3.47 a 3.48 vieme implementovať algoritmy 4.9 a 4.10.

Výsledok 3.49. *Neexistuje bimagický obdĺžnik veľkosti $3 \times n$, ktorého súčet prvkov v stĺpci je menší ako 384. Podarilo sa nájsť niekoľko magických obdĺžnikov veľkosti 3×6, 3×8 a 3×10 s bimagickými stĺpcami a jediným nebimagickým riadkom. Najmenší z nich má súčet v stĺpci rovný 90:*

1	2	3	57	58	59
42	37	53	26	9	13
47	51	34	7	23	18

Výsledok 3.50. *Neexistuje bimagický obdĺžnik veľkosti $3 \times n$, ktorého prvky sú kladné celé čísla menšie ako 400.*

Spomínané algoritmy vieme ľahko modifikovať tak, aby hľadali aj väčšie bimagické obdĺžniky. Tým sme prišli k ďalšiemu zisteniu:

Výsledok 3.51. *Neexistuje bimagický obdĺžnik veľkosti $4 \times n$, ktorého súčet prvkov v stĺpci je menší ako 82. Podarilo sa nájsť niekoľko magických obdĺžnikov veľkosti 3×6 s bimagickými stĺpcami a len dvomi rôznymi bimagickými súčtami v riadkoch. Najmenší z nich má súčet v stĺpci rovný 68:*

1	30	24	19	22	6
16	2	29	13	31	11
23	21	3	32	5	18
28	15	12	4	10	33

Hypotéza 3.52. *Neexistuje bimagický obdĺžnik veľkosti $m \times n$ pre $m \neq n$.*

3.3.2 Multiplikatívne magické obdĺžniky

Definícia 3.53. *Nech A je matica veľkosti $m \times n$. Ak platí:*

1. *prvkami matice sú navzájom rôzne kladné celé čísla*
2. *súčty prvkov v jednotlivých riadkoch sú rovnaké*
3. *súčty prvkov v jednotlivých stĺpcoch sú rovnaké*
4. *súčiny prvkov v jednotlivých riadkoch sú rovnaké*
5. *súčiny prvkov v jednotlivých stĺpcoch sú rovnaké*

*tak A nazývame **multiplikatívnym magickým obdĺžnikom**.*

Veta 3.54. *Nech A je multiplikatívny magický obdĺžnik veľkosti $m \times n$. Potom $m, n \geq 3$ alebo $(m, n) = (1, 1)$.*

Dôkaz. Rovnaký ako dôkaz vety 3.46. □

Veta 3.55. *Nech A je multiplikatívny magický obdĺžnik veľkosti $m \times n, m \leq n$ a M je jeho najväčší prvok. Potom pre všetky $x \in A$ platí, že x je zložené číslo alebo $xn \leq M$.*

Dôkaz. Sporom. Nech existuje $x \in A$ také, že x nie je zložené číslo. Potom nutne platí, že každý súčin v n riadkoch alebo stĺpcoch je deliteľný x. Ak však platí $xn > M$, tak máme k dispozícii najviac $n - 1$ prvkov, ktoré sú deliteľné x a neprevyšujú M. Z Dirichletovho princípu potom vyplýva, že aspoň v dvoch riadkoch alebo stĺpcoch musia byť rovnaké prvky, čo je spor. □

Využitím vety 3.55 vieme implementovať algoritmus 4.11 a jeho modifikáciu pre väčšie multiplikatívne magické obdĺžniky.

Výsledok 3.56. *Neexistuje multiplikatívny magický obdĺžnik veľkosti $3 \times n$, ktorého súčet prvkov v stĺpci je menší ako 4000. Podarilo sa nájsť niekoľko multiplikatívnych obdĺžnikov veľkosti 3×6 a 3×9 s magickými stĺpcami. Najmenší z nich má súčet v stĺpci rovný 485:*

14	294	16	385	60	396
231	15	154	72	392	40
240	176	315	28	33	49

Výsledok 3.57. *Neexistuje multiplikatívny magický obdĺžnik veľkosti* $4 \times n$*, ktorého súčet prvkov v stĺpci je menší ako* 160*. Našli sme jediný magický obdĺžnik veľkosti* 4×6 *s multiplikatívnymi stĺpcami a dvoma multiplikatívnymi riadkami:*

6	32	64	18	90	24
42	81	20	56	14	21
48	35	9	10	36	96
60	8	63	72	16	15

Hypotéza 3.58. *Neexistuje multiplikatívny magický obdĺžnik veľkosti* $m \times n$ *pre* $m \neq n$*.*

Kapitola 4

Implementácia algoritmov

Program sme písali v jazyku Python. Zvolili sme si ho predovšetkým z dôvodu, že má neobmedzené číselné premenné (niektoré algoritmy budú pracovať s hodnotami, ktoré sa nezmestia do bežnej 32-bitovej premennej). Zdrojový kód je uvedený ako príloha k tejto práci.

4.1 Magické štvorce

4.1.1 Magické štvorce druhého stupňa

Algoritmus 4.1. *Vstupom sú navzájom rôzne kladné celé čísla $u_1, v_1, u_2, v_2 \in \mathbb{N}$. Výstupom je magický štvorec veľkosti 3×3, ktorého aspoň 7 prvkov sú druhé mocniny kladných celých čísel. Algoritmus využije parametrický vzorec z vety 2.7, ktorý generuje vyhovujúce magické štvorce.*

$p \leftarrow (u_1^2 + v_1^2)(u_2^2 + 2u_2v_2 - v_2^2)$
$q \leftarrow (u_1^2 + 2u_1v_1 - v_1^2)(u_2^2 + v_2^2)$
$r \leftarrow (-u_1^2 + 2u_1v_1 + v_1^2)(u_2^2 + v_2^2)$
$s \leftarrow (u_1^2 + v_1^2)(-u_2^2 + 2u_2v_2 + v_2^2)$
$t \leftarrow (u_1^2 + v_1^2)(u_2^2 + v_2^2)$
if aspoň dva z $3t^2 - p^2 - q^2, 3t^2 - p^2 - r^2, 3t^2 - q^2 - s^2, 3t^2 - r^2 - s^2$ sú štvorce **then**
  print(prvý štvorec)
if aspoň dva z $2(r^2 + s^2), 2(q^2 + s^2), 2(p^2 + r^2), 2(p^2 + q^2)$ sú štvorce **then**
  print(druhý štvorec)
if aspoň dva z $3t^2 - p^2 - q^2, r^2 + s^2 - p^2, p^2 + q^2 - s^2, 3t^2 - r^2 - s^2$ sú štvorce **then**
  print(tretí štvorec)
if aspoň dva z $3t^2 - p^2 - r^2, q^2 + s^2 - p^2, p^2 + r^2 - s^2, 3t^2 - q^2 - s^2$ sú štvorce **then**
  print(štvrtý štvorec)

Algoritmus 4.2. *Na vstupe dostaneme kladné celé číslo* $x \in \mathbb{N}$. *Výstupom je magický štvorec veľkosti* 3×3, *ktorého aspoň* 7 *prvkov sú druhé mocniny kladných celých čísel. Algoritmus využije dva parametrické vzorce z vety 2.10, ktoré generujú vyhovujúce magické štvorce.*

$x_1 \leftarrow 8x^8 - 49x^6 + 6x^4 - 16x^2 + 2$
$x_2 \leftarrow 8x^8 - x^6 + 30x^4 - 40x^2 + 2$
$x_3 \leftarrow 8x^8 - 25x^6 + 18x^4 - 28x^2 + 2$
if $x_1(x^2 - 2)$ je štvorec **then**
  print(prvý štvorec)
if $x_2(x^2 - 2)$ je štvorec **then**
  print(prvý štvorec)
if $x_3(x^2 - 2)$ je štvorec **then**
  print(prvý štvorec)
if $\frac{4x^{10}-31x^8+76x^6+76x^4-31x^2+4}{2}$ je štvorec **then**
  print(druhý štvorec)
if $\frac{4x^{10}+17x^8+4x^6+4x^4+17x^2+4}{2}$ je štvorec **then**
  print(druhý štvorec)
if $\frac{4x^{10}+65x^8-68x^6-68x^4+65x^2+4}{2}$ je štvorec **then**
  print(druhý štvorec)

4.1.2 Bimagické štvorce

Algoritmus 4.3. *Na vstupe dostaneme kladné celé číslo* $h \in \mathbb{N}$. *Výstupom je bimagický štvorec veľkosti* 5×5 *s potenciálne zápornými prvkami. Algoritmus predpokladá, že magický súčet je rovný prostrednému prvku* s *(konštrukciou z vety 2.19). Potom si vygeneruje trojice* (a, b, c), *z ktorých podľa vety 2.20 vytvorí zodpovedajúce štvorice* $(-a + b + c,\ a - b + c,\ a + b - c,\ -a - b - c)$. *Pokračuje hľadaním všetkých vyhovujúcich prvkov* s *podľa vety 2.21 pre každý riadok štvorca. Na záver sa pokúsi doplniť vyhovujúce čísla do stĺpcov, a tým vygenerovať bimagický štvorec veľkosti* 5×5.

$trojice \leftarrow dict()$
for all $a, b, c \in \mathbb{N}; a < b < c; a^2 + b^2 + c^2 < h$ **do**
  pridaj (a, b, c) do $trojice[a^2 + b^2 + c^2]$
for all $k \in trojice$ **do**
  for all $(a, b, c), (d, e, f), (g, h, i) \in trojice[k]$ **do**
    $mozneProstrednePrvky \leftarrow dict()$
    $diagonala1 \leftarrow \{a + b - c,\ a - b + c,\ -a + b + c,\ -a - b - c\}$
    $prostrednyStlpec \leftarrow \{d + e - f,\ d - e + f,\ -d + e + f,\ -d - e - f\}$

$diagonala2 \leftarrow \{g+h-i,\ g-h+i,\ -g+h+i,\ -g-h-i\}$
for all $p \in diagonala1, q \in prostrednyStlpec, r \in diagonala2$ **do**
faktorizáciou nájdi všetky $s, n \in \mathbb{Z}$, pre ktoré platí

$$(s+n+p+q+r)(s-n+p+q+r) = 4(pq+pr+qr+p^2+q^2+r^2) - 2k$$

pre každé dopočítaj $x \leftarrow \frac{s-(p+q+r)\pm n}{2}, y \leftarrow s-x-(p+q+r)$
if $x \in \mathbb{Z}$ **and** $diagonala1, stred, diagonala2, \{x, y, s\}$ sú disjunktné **then**
pridaj $(diagonala1.index(p), stred.index(q), diagonala2.index(r), p, q, r, x, y)$
do $mozneProstrednePrvky[s]$

for all $k \in mozneProstrednePrvky$ **do**
for all $(pi_n, qi_n, ri_n, p_n, q_n, r_n, x_n, y_n) \in mozneProstrednePrvky[k], n \in \{1,2,3,4\}$
do
if $\{pi_1, pi_2, pi_3, pi_4\} = \{qi_1, qi_2, qi_3, qi_4\} = \{ri_1, ri_2, ri_3, ri_4\} = \{0,1,2,3\}$ **then**
skonštruuj nasledovný štvorec A

p_1	x_1	q_1	y_1	r_1
x_2	p_2	q_2	r_2	y_2
$-$	$-$	s	$-$	$-$
x_3	r_3	q_3	p_3	x_4
r_4	x_4	q_4	y_4	p_4

for all $A'; A' = A$ **or** A' má vymenené niektoré x_n, y_n vzhľadom na A **do**
doplň čísla do prostredného riadku A' tak, aby vznikol magický štvorec
if A' je bimagický **then**
print(A')

4.1.3 Multiplikatívne magické štvorce

Algoritmus 4.4. *Na vstupe dostaneme kladné celé čísla p, h. Výstupom je multiplikatívny štvorec veľkosti 6×6, ktorý má čo najbližšie k magickej vlastnosti (odchýlky súčtov v riadkoch, stĺpcoch a diagonálach sú najmenšie možné), používa p štvorcových vzoriek a žiadna z nich nemá na začiatku vyššiu hodnotu ako h. Tento aproximačný algoritmus využíva vetu 2.29. Začneme so štvorcom, ktorého všetky prvky sú 1. Potom ho niekoľkokrát prenásobíme náhodnou štvorcovou vzorkou s náhodnou hodnotou. Nakoniec troma operáciami upravujeme hodnoty tak, aby sme sa čo najviac priblížili k multiplikatívnemu magickému štvorcu: vymeníme navzájom dve hodnoty, zmeníme jednu hodnotu alebo pripočítame k hodnotám jedno z čísel $-1, 0, 1$. Ako primárny indikátor sme si zvolili variačné rozpätie vzniknutého štvorca (rozdiel najväčšieho a najmenšieho magického súčtu), a ako sekundárny indikátor počet jeho rôznych magických súčtov. Čím majú oba indikátory menšiu hodnotu, tým je výsledok lepší.*

$vzorky \leftarrow$ [všetky vzorky v štvorci veľkosti 6×6 uložené ako šestice]
$stvorcove \leftarrow []$
for all $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \in vzorky$ **do**
  if $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ vypĺňajú celý štvorec **then**
    pridaj $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ do *stvorcove*
while true **do**
  $hodnoty \leftarrow []$
  $pouzite \leftarrow []$
  for $i \leftarrow 0, i < p$ **do**
    pridaj 6 náhodných hodnôt medzi 1 a h do *hodnoty*
    pridaj náhodnú štvorcovú vzorku z *stvorcove* do *pouzite*
  while true **do**
    $stvorec \leftarrow$ štvorec veľkosti 6×6, ktorého prvky sú 1
    $index \leftarrow 0$
    for all stvorcovaVzorka $\in pouzite$ **do**
      for all $v \in$ stvorcovaVzorka **do**
        prenásob *stvorec* vzorkou v s hodnotou $hodnoty[index]$
        index++
    if *stvorec* obsahuje navzájom rôzne prvky **then**
      $stavZaciatok = stav$
      $stav \leftarrow$ (variačné rozpätie *stvorec*, počet rôznych súčtov *stvorec*)
      for all $hodnotyNove$; $hodnotyNove$ dostanem z *hodnoty* operáciou **do**
        $stvorecNovy \leftarrow$ štvorec prenásobený vzorkami s novými hodnotami
        $stavNovy \leftarrow$ (variačné rozpätie $stvorecNovy$, počet rôznych súčtov $stvorecNovy$)
        if $stavNovy$ je lepší ako $stav$ **then**
          $stav \leftarrow stavNovy$
          $stvorec \leftarrow stvorecNovy$
          $hodnoty \leftarrow hodnotyNove$
      if $stav$ nie je lepší ako $stavZaciatok$ **then**
        print(stav, stvorec)
        break

4.2 Magické grafy

4.2.1 Vrcholovo bimagické grafy

Algoritmy v tejto podkapitole pracujú so súvislými grafmi s daným počtom vrcholov, pričom sú uložené v *graph*6 formáte. Na prácu s ním sme využili funkciu *read_graph6* z knižnice *networkx*. Údaje sme získali z webstránky, ktorá obsahuje kolekciu grafov rôzneho druhu [5].

Algoritmus 4.5. *Na vstupe dostaneme ľubovoľný súvislý graf. Výstupom je odpoveď, či daný graf môže byť vrcholovo bimagický. Pre každú dvojicu jeho vrcholov overíme, či spĺňa tri podmienky z vety 3.9. Ak existuje dvojica vrcholov, pre ktorú graf nevyhovuje niektorej z troch podmienok, tak môžeme s istotou povedať, že nie je vrcholovo bimagický.*

for $v_1, v_2 \in V(G)$ **do**
  $x \leftarrow |\{susedia[v1]\} - \{susedia[v2]\}|$
  $y \leftarrow |\{susedia[v2]\} - \{susedia[v1]\}|$
  if $xy = 0$ **and** $x + y > 0$ **then**
    return G nie je vrcholovo bimagický
  if $x = 1$ **or** $y = 1$ **then**
    return G nie je vrcholovo bimagický
  if $x = 2$ **and** $y = 2$ **then**
    return G nie je vrcholovo bimagický

Algoritmus 4.6. *Na vstupe dostaneme čísla $i, j \in \mathbb{N}$. Výstupom má byť vrcholové bimagické ohodnotenie grafu $K_{i,j}$. Algoritmus bude replikovať indukčný dôkaz vety 3.10.*

if $i > j$ **then**
  return ohodnot(j, i) s vymenenými partíciami
if $i \leq 1$ **or** $(i = 2$ **and** $j = 2)$ **then**
  return
if $i = 2$ **then**
  return $(\frac{j(j-1)}{2} + 1, \frac{j(j-1)(3j^2-7j+14)}{24}), (1, \ldots, j-1, \frac{j(j-1)(3j^2-7j+14)}{24} + 1)$
if $i = 3$ **then**
  return $(1, \frac{j(j+1)}{2} - 1, \frac{j(j+1)(3j^2-j-14)}{24} + 1), (2, \ldots, j, \frac{j(j+1)(3j^2-j-14)}{24} + 2)$
if $i = 4$ **and** $j = 4$ **then**
  return $(1, 4, 6, 7), (2, 3, 5, 8)$
if $i = 4$ **and** $j = 5$ **then**
  return $(2, 12, 13, 15), (1, 4, 8, 10, 19)$
$H \leftarrow$ ohodnot$(i-2, j-3)$
$m \leftarrow \max(H) + 1$
na ľavú stranu H pridaj $4m, 5m$
na pravú stranu H pridaj $m, 2m, 6m$
return H

Algoritmus 4.7. *Na vstupe dostaneme číslo $n \in \mathbb{N}$. Výstupom algoritmu má byť vrcholové superbimagické ohodnotenie kompletného bipartitného grafu s n vrcholmi. Algoritmus bude replikovať indukčný dôkaz vety 3.14.*

if $n < 7$ **then**
  return
if n **mod** $4 = 1$ **or** n **mod** $4 = 2$ **then**
  return
if $n = 7$ **then**
  return $(1, 2, 4, 7), (3, 5, 6)$
if $n = 8$ **then**
  return $(1, 4, 6, 7), (2, 3, 5, 8)$
if $n = 11$ **then**
  return $(1, 3, 4, 5, 9, 11), (2, 6, 7, 8, 10)$
if $n = 12$ **then**
  return $(1, 3, 7, 8, 9, 11), (2, 4, 5, 6, 10, 12)$
$H \leftarrow$ ohodnot$(n - 8)$
for $x \leftarrow 1, 8$ **do**
  if $x \in \{1, 4, 6, 7\}$ **then**
    pridaj $(n - 8) + x$ na ľavú stranu H
  else
    pridaj $(n - 8) + x$ na pravú stranu H
return H

4.2.2 Vrcholovo multiplikatívne magické grafy

Algoritmus 4.8. *Na vstupe dostaneme kompletný bipartitný graf $K_{i,j}$. Výstupom má byť vrcholové multiplikatívne magické ohodnotenie tohto grafu. Algoritmus bude replikovať indukčný dôkaz vety 3.36.*

if $i > j$ **then**
  return ohodnot(j, i) s vymenenými partíciami
if $i \leq 1$ **or** $(i = 2$ **and** $j = 2)$ **then**
  return
if $i = 2$ **and** $j = 3$ **then**
  return $(5, 12), (1, 6, 10)$
if $i = 2$ **and** $j = 4$ **then**
  return $(9, 16), (1, 2, 4, 18)$
if $i = 2$ **then**

$j' \leftarrow (j-1)!$
return $(j'+1, j'[j'+1-\frac{j(j-1)}{2}]), (1, \ldots, j-1, [j'+1][j'+1-\frac{j(j-1)}{2}])$
if $i = 3$ **then**
return $(1, j!+1, j!(j!+3-\frac{j(j+1)}{2})), (2, \ldots, j, (j!+1)(j!+3-\frac{j(j+1)}{2}))$
if $i = 4$ **and** $j = 4$ **then**
return $(1, 5, 6, 12), (2, 3, 4, 15)$
if $i = 4$ **and** $j = 5$ **then**
return $(2, 10, 20, 27), (1, 3, 6, 24, 25)$
$H \leftarrow$ ohodnot$(i-2, j-3)$
$x \leftarrow \max(H) + 1$
$y \leftarrow \max(H) + 2$
na ľavú stranu H pridaj $2xy, 2xy - x - y$
na pravú stranu H pridaj $2(2xy - x - y), x, y$
return H

4.3 Magické obdĺžniky

Všetky algoritmy v tejto podkapitole pracujú efektívne s poradím stĺpcov podľa dôsledku 3.44.

4.3.1 Bimagické obdĺžniky

Algoritmus 4.9. *Na vstupe dostaneme kladné celé čísla $n, s \in \mathbb{N}, n \geq 4$. Výstupom má byť bimagický obdĺžnik veľkosti $3 \times n$, ktorého prvky sú kladné celé čísla, pričom ich súčet v každom stĺpci je s. Náš algoritmus predpokladá, že najmenší prvok obdĺžnika je 1 (s využitím vety 3.47). Pre každú trojicu rôznych celých čísel a, b, c so súčtom s si predpočíta ich bimagický súčet. Keďže platí podmienka z vety 3.48, vieme nájsť celé čísla d, e tak, aby mohli byť trojice (a, b, c) a $(1, d, e)$ použité ako stĺpce v tom istom bimagickom obdĺžniku. Pre každú takú trojicu (a, b, c) si algoritmus uloží hodnoty $(1, d, e)$ ako kľúč do asociatívneho poľa. Potom toto pole prejde a v každom kľúči vyberie $n-1$ rôznych zapamätaných trojíc (ku ktorým pridá trojicu v kľúči).*

$trojice \leftarrow dict()$
for $a \leftarrow 2, \lceil \frac{s}{3} \rceil$ **do**
for $b \leftarrow a+1, \lceil \frac{s-a}{2} \rceil$ **do**
$c \leftarrow s - a - b$
$t \leftarrow a^2 + b^2 + c^2$
if $2t - (s-1)^2 - 2$ je druhou mocninou celého čísla **then**
pridaj (a, b, c) do $trojice[(1, \frac{s-1+\sqrt{2t-(s-1)^2-2}}{2}, \frac{s-1-\sqrt{2t-(s-1)^2-2}}{2})]$

for all $k \in trojice$ **do**
  for all $(a_1, b_1, c_1), \ldots, (a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}) \in trojice[k]$ **do**
    if $1, k[1], k[2], a_1, b_1, c_1, \ldots, a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}$ sú navzájom rôzne **then**
      for all permutácie $(a_i, b_i, c_i), i \in \{1, \ldots, n-1\}$ **do**
        vytvor obdĺžnik s prvým stĺpcom $1, k[1], k[2]$ a j-tym stĺpcom $a_{j-1}, b_{j-1}, c_{j-1}$ pre $j \in \{2, \ldots, n\}$
        if obdĺžnik má bimagické riadky **then**
          print(obdĺžnik)

Algoritmus 4.10. *Na vstupe dostaneme kladné celé čísla $n, h \in \mathbb{N}, n \geq 4$. Výstupom algoritmu má byť bimagický obdĺžnik veľkosti $3 \times n$, ktorého prvky sú kladné celé čísla neprevyšujúce h. Od predchádzajúceho algoritmu sa líši tým, že si do asociatívneho poľa ukladá trojice čísel od 2 do h a nie trojice s daným súčtom.*

$trojice \leftarrow dict()$
for $a \leftarrow 2, h$ **do**
  for $b \leftarrow a+1, h$ **do**
    for $c \leftarrow b+1, h$ **do**
      $s \leftarrow a + b + c$
      $t \leftarrow a^2 + b^2 + c^2$
      if $2t - (s-1)^2 - 2$ je druhou mocninou celého čísla **then**
        pridaj (a, b, c) do $trojice[(1, \frac{s-1+\sqrt{2t-(s-1)^2-2}}{2}, \frac{s-1-\sqrt{2t-(s-1)^2-2}}{2})]$
pokračuj rovnako ako predchádzajúci algoritmus

Tento algoritmus je efektívnejší ako algoritmus 4.9, lebo spracováva všetky trojice a nie iba tie s konkrétnym súčtom. Jeho nevýhodou je obmedzená funkcionalita (pre $h > 500$ je nepoužiteľný z pamäťových dôvodov) a zlá iterácia (ak poznáme riešenia pre $h = 400$, tak na nájdenie riešení pre $h = 450$ je potrebné spustiť algoritmus úplne od začiatku).

4.3.2 Multiplikatívne magické obdĺžniky

Algoritmus 4.11. *Na vstupe dostaneme kladné celé čísla $n, s \in \mathbb{N}, n \geq 4$. Výstupom má byť multiplikatívny magický obdĺžnik veľkosti $3 \times n$, ktorého prvky sú kladné celé čísla, pričom ich súčet v každom stĺpci je s. Vieme, že obdĺžnik nemôže obsahovať číslo x, pre ktoré neplatí veta 3.55. Náš algoritmus si pre každú trojicu vyhovujúcich rôznych kladných čísel uloží ich súčin ako kľúč do asociatívneho poľa. Potom toto pole prejde a v každom kľúči vyberie n rôznych zapamätaných trojíc.*

$trojice \leftarrow dict()$

$vyhovuju \leftarrow \{x \mid x \in \{1, \ldots, s\}, x$ nie je prvočíslo alebo $xn \leq s\}$
for all $a, b \in vyhovuju; a < b; a + 2b < s$ **do**
  $c \leftarrow s - a - b$
  if $c \in vyhovuju$ **then**
    $p \leftarrow abc$
    pridaj (a, b, c) do $trojice[p]$
for all $k \in trojice$ **do**
  for all $(a_1, b_1, c_1), \ldots, (a_n, b_n, c_n) \in trojice[k]$ **do**
    if $a_1, b_1, c_1, \ldots, a_n, b_n, c_n$ sú navzájom rôzne **then**
      for all permutácie $(a_i, b_i, c_i), i \in \{2, \ldots, n\}$ **do**
        vytvor obdĺžnik s j-tym stĺpcom a_j, b_j, c_j pre $j \in \{1, \ldots, n\}$
        if obdĺžnik má multiplikatívne magické riadky **then**
          print(obdĺžnik)

Záver

V tejto práci sme skúmali magické útvary. Zaoberali sme sa známymi aj novými otvorenými problémami. Výsledkom sú zistenia, ktoré prinášajú pokrok v tejto oblasti.

Vymysleli sme parametrický vzorec generujúci štyri magické štvorce, ktorých aspoň 5 prvkov sú druhými mocninami kladných celých čísel. Okrem toho sme objavili dva nové špecifické parametrické vzorce, pri ktorých bolo aspoň 6 prvkov druhými mocninami kladných celých čísel. Algoritmické prehľadávanie nenašlo žiadne nové riešenie so 7 prvkami.

Odvodili sme normálne formy bimagických štvorcov, ktoré vznikli z ich uzáverových vlastností na konštantný posun a kladný celočíselný násobok. Na základe toho sme popísali implementáciu algoritmického prehľadávania bimagických štvorcov veľkosti 5×5. Výsledkom tohto prehľadávania boli štyri magické štvorce, ktoré mali iba tri zlé bimagické súčty.

Impelmentovali sme aproximačný algoritmus na hľadanie multiplikatívnych magických štvorcov veľkosti 6×6, ktorý fungoval na princípe náhodného vzorkovania a jeho následnom optimalizovaní. Podarilo sa nám zostrojiť multiplikatívny štvorec s nízkym magickým variačným rozpätím 26.

Pre vrcholovo bimagické grafy sme dokázali podmienky pre stupne vrcholov $1, 2, 3$. Objavili sme spôsob, ako takýto graf s mostom rozdeliť na dva podgrafy, ktoré majú tiež vrcholovo bimagické ohodnotenie. Určili sme tri nutné podmienky, ktoré musí vrcholovo bimagický graf spĺňať pre ľubovoľnú dvojicu vrcholov. Zistili sme, že jediný kubický graf tohto typu je $K_{3,3}$. Podarilo sa nám implementovať algoritmus, ktorý zostrojí kompletné bipartitné vrcholovo bimagické alebo superbimagické grafy s daným počtom vrcholov.

Dokázali sme, že pre ľubovoľné dva susedné vrcholy v hranovo bimagickom grafe platí, že oba sú stupňa aspoň 3 a zároveň jeden z nich je stupňa aspoň 4 (okrem cesty na dvoch vrcholoch). Odvodili sme, že hranovo bimagický graf G s číslom nezávislosti

$\alpha(G)$ musí mať aspoň $2V(G) - \frac{\alpha(G)}{2}$ hrán. Ukázali sme, že $K_{8,8}$ je hranovo superbimagický na základe existujúceho superbimagického štvorca veľkosti 8×8. Uviedli sme hypotézu, ktorá hovorí, že všetky hranovo bimagické grafy sú nutne kompletné bipartitné alebo kompletné bipartitné bez jednej hrany.

Mnohé vlastnosti vrcholovo bimagických grafov zdedili aj vrcholovo multiplikatívne magické grafy. Objavili sme jediný vrcholovo multiplikatívny magický strom. Ukázali sme konštrukciu kompletných bipartitných a neexistenciu supermagických grafov tohto typu. Vyslovili sme hypotézu, že všetky vrcholovo bimagické aj multiplikatívne magické grafy sú nutne kompletné bipartitné.

Pre hranovo multiplikatívne magické grafy sme ukázali, že ich minimálny stupeň vrchola je 3. Tieto typy grafov zostávajú predmetom ďalšieho možného skúmania.

Definovali sme pojem bimagického a multiplikatívneho magického obdĺžnika. Bimagické obdĺžniky sme previedli do normálnej formy, v ktorej bol ich najmenší prvok 1. Pri multiplikatívnych magických sme obmedzili počet možných prvkov vzhľadom na veľkosť a najväčší prvok útvaru. Prehľadávaním sme nenašli žiadne riešenia pre veľkosti $3 \times n$ ani $4 \times n$. V oboch prípadoch sa nám podarilo nájsť iba čiastočné obdĺžniky, v ktorých nemali niektoré riadky hľadanú vlastnosť. Na základe toho sme vyslovili hypotézu, že bimagické ani multiplikatívne magické obdĺžniky veľkosti $m \times n$ pre $m \neq n$ neexistujú. V budúcnosti je možné preskúmať väčšie magické obdĺžniky (predovšetkým veľkosti 5×6) a pokúsiť sa nájsť vyhovujúci útvar s bimagickou alebo multiplikatívnou vlastnosťou.

Spravili sme prehľad v oblasti klasických magických útvarov. Sformulovali sme analogické problémy pre magické grafy. Vybrali sme si niekoľko známych aj nových otvorených problémov a implementovali sme algoritmické prehľadávanie priestoru ich potenciálnych riešení spojené s teoretickou analýzou. Vyslovili sme niekoľko hypotéz, ktoré bude možné skúmať v budúcnosti. Z toho vyplýva, že všetky ciele práce boli splnené.

Literatúra

[1] Martin Bača, Mirka Miller, Joe Ryan and Andrea Semaničová-Feňovčíková. *Magic and Antimagic Graphs*. Springer, 2019.

[2] Christian Boyer. Multimagic squares site, 2002. [Citované 2021-01-20] Dostupné z http://www.multimagie.com.

[3] Kejun Chen and Wen Li. Existence of normal bimagic squares. *Discrete Mathematics*, 312(21):3077-3086, 2012.

[4] Samuel Jezný and Marián Trenkler. *Characterization of magic graphs*. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 33(3):435-438, 1983.

[5] Brendan McKay. Combinatorial Data, 2021. [Citované 2021-05-07] Dostupné z http://users.cecs.anu.edu.au/∼bdm/data/.

[6] Tito Piezas. A Collection of Algebraic Identities, 2010. [Citované 2021-04-30] Dostupné z https://sites.google.com/site/tpiezas/.

[7] Marián Trenkler. Magic Rectangles. *The Mathematical Gazette*, 83(496):102-105, 1999.

Príloha

V elektronickej prílohe priloženej k práci sa nachádza zdrojový kód programu s jednotlivými algoritmami. Zdrojový kód je zverejnený aj na `https://github.com/richardbiro/bakalarska_praca`.