

Duplikačná lema: Nech $a, b, c, d \in \mathbb{N}^+$, pre ktoré platí $a + b = c + d$ a buď $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, alebo $ab = cd$. Potom $c = a$ alebo $c = b$.

Dôkaz: Z prvej rovnice vyjadríme $d = a + b - c$ a dosadíme do rovnice $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ alebo do rovnice $ab = cd$. Po úprave dostaneme vzťah $c^2 - ac - bc + ab = 0$, ktorý sa dá prepísať na tvar $(c - a)(c - b) = 0$. Z toho vyplýva $c = a$ alebo $c = b$.

Mocninová lema: Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech a_1, \dots, a_n, b sú navzájom rôzne kladné celé čísla. Potom nasledovná sústava nemá riešenie:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_k &= b \\ \sum_{k=1}^n a_k^2 &= b^2\end{aligned}$$

Dôkaz: Rozoberieme tri situácie na základe n .

Ak $n = 0$, tak by platilo $b = 0$, čo je spor s tým, že b je kladné.

Ak $n = 1$, tak by platilo $a_1 = b$, čo je spor s tým, že sú navzájom rôzne.

Ak $n \geq 2$, tak dosadením b do druhej rovnice dostaneme nutný vzťah $\sum_{k=1}^n a_k^2 = (\sum_{k=1}^n a_k)^2$, čo sa dá upraviť na tvar $\sum_{i \neq j} a_i a_j = 0$. To je spor, keďže každé a_i aj a_j je kladné, a teda ich súčet nemôže byť nulový.

Posunová lema: Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{N}$. Ak $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n b_k$ aj $\sum_{k=1}^n a_k^2 = \sum_{k=1}^n b_k^2$, potom pre všetky $x \in \mathbb{Z}$ platí:

- (i) $\sum_{k=1}^n (a_k + x) = \sum_{k=1}^n (b_k + x)$
- (ii) $\sum_{k=1}^n (a_k + x)^2 = \sum_{k=1}^n (b_k + x)^2$

Dôkaz:

- (i) $\sum_{k=1}^n (a_k + x) = \sum_{k=1}^n a_k + nx = \sum_{k=1}^n b_k + nx = \sum_{k=1}^n (b_k + x)$
- (ii) $\sum_{k=1}^n (a_k + x)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2x \sum_{k=1}^n a_k + nx^2 = \sum_{k=1}^n b_k^2 + 2x \sum_{k=1}^n b_k + nx^2 = \sum_{k=1}^n (b_k + x)^2$

Normálne formy bimagických regulárnych útvarov:

Útvar je bimagický ak je magický a umocnením každého jeho prvku na druhú dostaneme opäť magický útvar.

Útvar je regulárny ak všetky jeho priamky s magickou vlastnosťou majú rovnaký počet prvkov.

Bimagické regulárne útvary sú zjavne uzavreté na nenulový násobok a sú uzavreté aj na konštantný posun (to vyplýva z posunovej lemy).

Z toho vyplýva, že ak X je bimagický regulárny útvar, tak $aX + b \mid a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0$ je bimagický regulárny útvar s potenciálne nekladnými prvkami. Tým vieme vytvárať tzv. normálne formy bimagických útvarov. Nech n je veľkosť daného útvaru. Potom:

- 1) útvar, ktorého najmenší prvok je 0: zvolíme $a = 1, b = -x_{min}$, kde x_{min} je najmenší prvok pôvodného útvaru
- 2) útvar, ktorého najmenší prvok je 1: zvolíme $a = 1, b = 1 - x_{min}$
- 3) útvar, ktorého najmenší prvok má opačnú hodnotu ako najväčší prvok: zvolíme $a = -2, b = x_{min} + x_{max}$
- 4) útvar, ktorého magický súčet je 0: zvolíme $a = -n, b = S$, kde S je magický súčet pôvodného útvaru
- 5) útvar, ktorého magický súčet je rovný danému prvku x : zvolíme $a = 1 - n, b = S - x$
- 6) útvar, ktorého bimagický súčet je rovný nx^2 pre daný prvok x : za predpokladu $S \neq nx$ zvolíme $a = 2(nx - S), b = T - nx^2$

Definícia 1: Nech G je súvislý jednoduchý netriviálny graf. Ak existuje vrcholové ohodnotenie grafu G také, že platí:

1. vrcholom sú priradené navzájom rôzne kladné celé čísla
 2. súčet susedov každého vrcholu je rovnaký
 3. súčet druhých mocnín susedov každého vrcholu je rovnaký
- tak G nazveme **vrcholovo bimagickým grafom**.

Veta 1.1: Nech G je vrcholovo bimagický graf. Ak G obsahuje dvojicu vrcholov stupňa 1, potom majú spoločného suseda.

Dôkaz: Sporom. Nech G obsahuje dva vrcholy u, v stupňa 1, ktoré nemajú spoločného suseda. Nech x je hodnota vrcholu u . Nech y je hodnota vrcholu v .

Nech sú vrcholy u, v susedné. Podľa u má graf magický súčet y a podľa v má graf magický súčet x . Z toho vyplýva $x = y$, čo je spor s tým, že vrcholom sú priradené navzájom rôzne čísla.

Nech majú vrcholy u, v rôznych susedov w_1, w_2 . Označme hodnoty týchto vrcholov z_1, z_2 . Podľa u má graf magický súčet z_1 a podľa v má graf magický súčet z_2 . Z toho vyplýva $z_1 = z_2$, čo je opäť spor.

Veta 1.2: Nech G je vrcholovo bimagický graf. Potom majú všetky vrcholy stupňa 2 rovnakú množinu susedov.

Dôkaz: Sporom. Nech G obsahuje dva vrcholy u, v stupňa 2, ktoré nemajú rovnakú množinu susedov. Nech x je hodnota vrcholu u . Nech y je hodnota vrcholu v .

Nech sú vrcholy u, v susedné. Nech w_1 je druhý sused u a z_1 je jeho hodnota. Nech w_2 je druhý sused v a z_2 je jeho hodnota. Podľa u má graf magický súčet $y + z_1$ a podľa v má graf magický súčet $x + z_2$. Podľa u má graf bimagický súčet $y^2 + z_1^2$ a podľa v má graf bimagický súčet $x^2 + z_2^2$. To znamená, že $x + z_2 = y + z_1$ a zároveň $x^2 + z_2^2 = y^2 + z_1^2$. Z duplikačnej lemy potom vyplýva, že $y = x$ alebo $y = z_2$, čo je spor s tým, že vrcholom sú priradené navzájom rôzne čísla.

Nech majú vrcholy u, v práve jedného spoločného suseda w , jeho hodnotu označíme z . Nech w_1 je druhý sused u a z_1 je jeho hodnota. Nech w_2 je druhý sused v a z_2 je jeho hodnota. Podľa u má graf magický súčet $z + z_1$ a podľa v má graf magický súčet $z + z_2$. Z toho vyplýva $z_1 = z_2$, čo je spor.

Nech majú vrcholy u, v odlišných susedov. Nech w_1, w_2 sú susedia u , pričom ich hodnoty sú z_1, z_2 . Nech w_3, w_4 sú susedia v , pričom ich hodnoty sú z_3, z_4 . Podľa u má graf magický súčet $z_1 + z_2$ a podľa v má graf magický súčet $z_3 + z_4$. Podľa u má graf bimagický súčet $z_1^2 + z_2^2$ a podľa v má graf bimagický súčet $z_3^2 + z_4^2$. To znamená, že $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$ a zároveň $z_1^2 + z_2^2 = z_3^2 + z_4^2$. Z

duplikačnej lemy potom vyplýva, že $z_3 = z_1$ alebo $z_3 = z_2$, čo je opäť rovnaký spor.

Veta 1.3: Nech G je vrcholovo bimagický graf. Potom má každá dvojica nesusedných vrcholov stupňa 3 buď rovnakú množinu susedov, alebo nemá spoločného suseda.

Dôkaz: Sporom. Nech G obsahuje dva nesusedné vrcholy u, v stupňa 3, ktoré majú práve jedného alebo dvoch spoločných susedov. Nech x je hodnota vrcholu u . Nech y je hodnota vrcholu v .

Nech majú vrcholy u, v práve jedného spoločného suseda w , jeho hodnotu označíme z . Nech w_1, w_2 sú zvyšní susedia u a z_1, z_2 sú ich hodnoty. Nech w_3, w_4 sú zvyšní susedia v a z_3, z_4 sú ich hodnoty. Podľa u má graf magický súčet $z + z_1 + z_2$ a podľa v má graf magický súčet $z + z_3 + z_4$. Podľa u má graf bimagický súčet $z^2 + z_1^2 + z_2^2$ a podľa v má graf magický súčet $z^2 + z_3^2 + z_4^2$. To znamená, že $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$ a zároveň $z_1^2 + z_2^2 = z_3^2 + z_4^2$. Z duplikačnej lemy potom vyplýva, že $z_3 = z_1$ alebo $z_3 = z_2$, čo je spor s tým, že vrcholom sú priradené navzájom rôzne čísla.

Nech majú vrcholy u, v práve dvoch spoločných susedov w_1, w_2 , ich hodnoty označíme z_1, z_2 . Nech w_3 je zvyšný sused u a z_3 je jeho hodnota. Nech w_4 je zvyšný sused v a z_4 je jeho hodnota. Podľa u má graf magický súčet $z_1 + z_2 + z_3$ a podľa v má graf magický súčet $z_1 + z_2 + z_4$. Z toho vyplýva $z_3 = z_4$, čo je opäť spor.

Veta 1.4: Nech G je vrcholovo bimagický graf a u, v sú nejaké jeho dva vrcholy. Nech x je počet susedov vrcholu u , ktoré nie sú susedmi vrcholu v . Nech y je počet susedov vrcholu v , ktoré nie sú susedmi vrcholu u . Potom platí:

- (i) $x = 0 \iff y = 0$
- (ii) $x, y \neq 1$
- (iii) $(x, y) \neq (2, 2)$

Dôkaz: Ak pre vrcholy u, v zrátame magický alebo bimagický súčet, ich spoloční susedia budú zarátaní na oboch stranách. Stačí sa preto venovať

magickému a bimagickému súčtu vrcholov, ktoré nie sú zároveň susedmi u aj v (tých je x , resp. y). Sporom budeme predpokladať, že G je vrcholovo bimagický a neplatí (i), (ii) alebo (iii). To znamená, že nasledovná sústava má riešenie:

$$\sum_{k=1}^x a_k = \sum_{k=1}^y b_k$$

$$\sum_{k=1}^x a_k^2 = \sum_{k=1}^y b_k^2$$

ak $a_1, \dots, a_x, b_1, \dots, b_y$ sú navzájom rôzne kladné celé čísla.

Ak neplatí (i), tak BUNV nech $x > 0$ a $y = 0$. Druhá rovnica by potom mala tvar $\sum_{k=1}^x a_k^2 = 0$. Jediné riešenie tejto rovnice je zjavne nulové, čo je spor s tým, že vo vrcholovo bimagickom grafe sú vrcholom priradené kladné čísla.

Ak neplatí (ii), tak BUNV nech $y = 1$. Potom dostaneme sústavu z mocnovej lemy, o ktorej vieme, že nemá riešenie (čo je spor).

Ak neplatí (iii), tak musí platiť $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ aj $a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2$. Z duplikačnej lemy potom vyplýva $b_1 = a_1$ alebo $b_1 = a_2$, čo je spor s tým, že vo vrcholovo bimagickom grafe sú vrcholom priradené navzájom rôzne čísla.

Veta 1.5: Pre každé $i, j \in \mathbb{N}, 2 \leq i \leq j, (i, j) \neq (2, 2)$ platí, že graf $K_{i,j}$ je vrcholovo bimagický.

Dôkaz: Indukciou vzhľadom na i, j . Najprv ukážeme, že grafy $K_{2,j}, K_{3,j}, K_{4,4}$ a $K_{4,5}$ sú vrcholovo bimagické.

Graf $K_{2,n}$ pre $n \geq 3$ je vrcholovo bimagický - stačí do prvej partície dať prvky $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ a $\frac{n(n-1)(3n^2-7n+14)}{24}$ a do druhej partície prvky 1 až $n - 1$ spolu s $\frac{n(n-1)(3n^2-7n+14)}{24} + 1$.

Graf $K_{3,n}$ pre $n \geq 3$ je vrcholovo bimagický - stačí do prvej partície dať prvky 1, $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ a $\frac{n(n+1)(3n^2-n-14)}{24} + 1$ a do druhej partície prvky 2 až n spolu s $\frac{n(n+1)(3n^2-n-14)}{24} + 2$.

Graf $K_{4,4}$ je vrcholovo bimagický - stačí do prvej partície dať prvky 1, 4, 6, 7 a do druhej partície prvky 2, 3, 5, 8.

Graf $K_{4,5}$ je vrcholovo bimagický - stačí do prvej partície dať prvky 2, 12, 13, 15 a do druhej partície prvky 1, 4, 8, 10, 19.

Teraz dokážeme, že ak je $K_{i,j}$ vrcholovo bimagický, tak je aj $K_{i+2,j+3}$. Do jednej partície stačí pridať prvky $4k, 5k$ a do druhej prvky $k, 2k, 6k$, pričom $k \in \mathbb{N}$ zvolíme dostatočne veľké (aby boli prvky navzájom rôzne).

Veta 1.6: Jediný kubický graf, ktorý je vrcholovo bimagický, je $K_{3,3}$.

Dôkaz: Nech G je kubický graf, o ktorom vieme, že je vrcholovo bimagický. V grafe G určite existujú dva susedné vrcholy u, v . Nech w_1, w_2 sú zvyšní susedia u . Nech w_3, w_4 sú zvyšní susedia v . Vrcholy u, v sú susedné a majú stupeň 3. Rozoberieme všetky možnosti:

1. Nech sú w_1, w_2, w_3, w_4 navzájom rôzne. Vrcholy w_1 a v majú spoločného suseda u , takže z vety 1.3 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Susedné byť nemôžu, pretože potom by mal v stupeň aspoň 4. Teda v G musí existovať hrana w_1w_3 aj hrana w_1w_4 .

Zároveň, vrcholy w_2 a v majú tiež spoločného suseda u , takže z vety 1.3 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Susedné byť nemôžu, pretože potom by mal v stupeň aspoň 4. Teda v G musí existovať hrana w_2w_3 aj hrana w_2w_4 .

Tým sme dostali graf $K_{3,3}$, ktorý vieme vrcholovo bimagicky ohodnotiť.

2. Nech $w_1 = w_3$ a $w_2 \neq w_4$. Vrcholy w_1 a w_2 majú spoločného suseda u , takže z vety 1.3 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Teda v G musí existovať hrana w_1w_2 alebo hrana w_2v .

Zároveň, vrcholy w_1 a w_4 majú spoločného suseda v , takže z vety 1.3 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Teda v G musí existovať hrana w_1w_4 alebo hrana w_4u .

Lenže ak z každých dvoch potenciálnych hrán pridáme do G aspoň jednu,

tak jeden z vrcholov u, v, w_1 bude mať stupeň aspoň 4, čo je spor s tým, že graf je kubický.

3. Nech $w_1 = w_3$ a $w_2 = w_4$. Vrcholy w_1 a w_2 majú spoločných susedov u, v , takže z vety 1.3 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Teda v G musí existovať hrana w_1w_2 alebo dvojice hrán w_1w_5 a w_2w_5 pre nejaký nový vrchol w_5 .

Ak je v G hrana w_1w_2 , dostaneme graf K_4 . O ňom sa môžeme ľahko presvedčiť, že nie je vrcholovo bimagický. Ak priradíme vrcholom hodnoty a, b, c, d , tak musí platiť, že magické súčty $a+b+c, a+b+d, a+c+d, b+c+d$ sú rovnaké. To je možné len v prípade, že $a = b = c = d$, čo je spor s tým, že vrcholom sú priradené navzájom rôzne čísla.

Ak sú v G hrany w_1w_5 aj w_2w_5 pre nejaký nový vrchol w_5 , tiež dôjdeme k sporu. Vrcholy u a w_5 majú spoločných susedov w_1, w_2 , takže z vety 1.3 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Susedné byť nemôžu, pretože potom by mal u stupeň aspoň 4. Teda by v G musela existovať hrana vw_5 , čo tiež nie je možné, pretože potom by mal v stupeň aspoň 4.

Veta 1.7: Nech G je vrcholovo bimagický regulárny graf. Potom existuje vrcholovo bimagické ohodnotenie grafu G také, že jeho najmenšia hodnota je 1.

Dôkaz: Zoberme si ľubovoľné vrcholovo bimagické ohodnotenie grafu G . Nech n je najmenšia hodnota z nich. Keďže je regulárny, tak každý magický aj bimagický súčet je zložený z rovnakého počtu členov. Z posunovej lemy potom vyplýva, že ku všetkým ohodnoteniam vrcholov môžeme pripočítať alebo odpočítať nejakú konštantu x . Ak odpočítame $a - 1$, zjavne dostaneme graf, ktorého najmenšia hodnota je 1.

Definícia 1.8: Nech G je vrcholovo bimagický graf s n vrcholmi. Ak sú vrcholom priradené čísla z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, tak G nazveme **vrcholovo superbimagickým grafom**.

Existuje vrcholovo superbimagický graf? Keďže zatiaľ vieme vrcholovo bimagický ohodnotiť len kompletne bipartitné grafy, musíme skúmať tie.

Hrubou silou je dokázané, že existuje vrcholovo superbimagický kompletne bipartitný graf. Pre $n \in \{7, 8, 11, 12\}$ existuje práve jedno ohodnotenie:

$$n = 7 \rightarrow \{1, 2, 4, 7\} \mid \{3, 5, 6\}$$

$$n = 8 \rightarrow \{1, 4, 6, 7\} \mid \{2, 3, 5, 8\}$$

$$n = 11 \rightarrow \{1, 3, 4, 5, 9, 11\} \mid \{2, 6, 7, 8, 10\}$$

$$n = 12 \rightarrow \{1, 3, 7, 8, 9, 11\} \mid \{2, 4, 5, 6, 10, 12\}$$

Pre $n = 15$ existuje 7 perfektných ohodnotení, pre $n = 16$ existuje 12 perfektných ohodnotení a pre väčšie n tieto hodnoty rastú.

Veta 1.9: Vrcholovo superbimagický kompletne bipartitný graf s n vrcholmi existuje práve vtedy, keď $n = 4k$ alebo $n = 4k - 1$ pre $k \geq 2$.

Dôkaz: Najprv dokážeme, že ak $n = 4k$ alebo $n = 4k - 1, k \geq 2$, tak existuje vrcholovo superbimagický kompletne bipartitný graf, ktorý má n vrcholov. Stačí nám dokázať, že dané tvrdenie platí pre všetky n tvaru $8k - 1, 8k, 8k + 3, 8k + 4$. To urobíme matematickou indukciou vzhľadom na k . Pre $k = 1$ existujú vyhovujúce ohodnotenia (uvedené vo vete 1.7).

Indukčný krok je potom jednoduchý. Uvedieme ho pre prípad $n = 8k$, ostatné z nich sú analogické. Predpokladajme, že pre $n = 8k$ existuje superbimagické ohodnotenie. Pre $n = 8(k + 1)$ ho zostrojíme nasledovne:

1) vezmeme superbimagické ohodnotenie pre $n = 8k$ (ostanú nám nepriradené čísla $8k + 1, \dots, 8k + 8$)

2) na jednu stranu pridáme čísla $8k + 1, 8k + 4, 8k + 6, 8k + 7$ a na druhú stranu $8k + 2, 8k + 3, 8k + 5, 8k + 8$

Na obe strany sme pridali čísla s rovnakým súčtom aj rovnakým súčtom druhých mocnín. Ak bolo pôvodné ohodnotenie superbimagické, tak aj nové ohodnotenie pre $n = 8(k + 1)$ je superbimagické (čbtd).

Ak $n = 4k + 1$ alebo $n = 4k + 2, k \in \mathbb{N}$, tak požadovaný graf neexistuje. Predpokladajme sporom, že taký graf existuje. Potom sa množina $\{1, 2, \dots, n\}$ dá rozdeliť na dve disjunktné podmnožiny s rovnakým súčtom aj súčtom druhých mocnín. Súčet tejto množiny je $\frac{n(n+1)}{2}$. Každá podmnožina by teda musela mať súčet $\frac{n(n+1)}{4}$. Lenže ak $n = 4k + 1$ alebo $n = 4k + 2, k \in \mathbb{N}$, tak výraz $\frac{n(n+1)}{4}$ nie je celé číslo, čo je spor.

Hypotézy 1:

- Existuje graf, ktorý je vrcholovo bimagický a nie je kompletný bipartitný?

Definícia 2: Nech G je súvislý jednoduchý netriviálny graf. Ak existuje hranové ohodnotenie grafu G také, že platí:

1. hranám sú priradené navzájom rôzne kladné celé čísla
 2. súčet incidentných hrán každého vrcholu je rovnaký
 3. súčet druhých mocnín incidentných hrán každého vrcholu je rovnaký
- tak G nazveme **hranovo bimagickým grafom**.

Jeden z hranovo bimagických grafov je cesta na dvoch vrcholoch (s ľubovoľným kladným ohodnotením). Zaujímavá skupina potenciálne hranovo bimagických grafov je $K_{n,n}$: sú ekvivalentné semibimagickým štvorcom veľkosti $n \times n$. A keďže už poznáme semibimagické štvorce veľkosti 4×4 a väčšie, tak $K_{n,n}$ je hranovo bimagický pre $n \geq 4$.

Veta 2.1: Nech G je hranovo bimagický graf, ktorý má aspoň tri vrcholy. Potom G neobsahuje vrchol stupňa 1.

Dôkaz: Sporom. Nech u je vrchol stupňa 1, v je jeho jediný sused a x je hodnota hrany medzi vrcholmi u, v . Potom podľa u musí platiť, že magický súčet je x . Lenže ak je G súvislý a má aspoň tri vrcholy, tak vrchol v musí mať ešte ďalší susedný vrchol w . Nech y je hodnota hrany medzi vrcholmi v, w . Potom však podľa v musí platiť, že magický súčet je aspoň $x + y > x$, čo je spor.

Veta 2.2: Nech G je hranovo bimagický graf. Potom G neobsahuje vrchol

stupňa 2.

Dôkaz: Sporom. Nech u je vrchol stupňa 2. Označme jeho susedov v, w . Nech b, c sú ohodnotenia hrán medzi u, v , resp. u, w . Nech a_1, a_2, \dots, a_n sú ohodnotenia hrán, ktoré sú incidentné s w okrem hrany uw . Podľa u musí platiť, že magický súčet je $b + c$ a bimagický súčet je $b^2 + c^2$. Podľa w musí platiť, že magický súčet je $c + \sum_{k=1}^n a_k$ a bimagický súčet je $c^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2$. Z toho vyplýva, že by sústava z mocninovej lemy mala riešenie, čo je spor.

Dôsledok 2.2: Ak má hranovo bimagický graf aspoň tri vrcholy, tak všetky jeho vrcholy majú stupeň aspoň 3.

Veta 2.3: Nech G je hranovo bimagický graf, ktorý má aspoň tri vrcholy. Nech u, v sú ľubovoľné dva susedné vrcholy. Potom $\max\{d(u), d(v)\} \geq 4$.

Dôkaz: Sporom. Predpokladajme, že existuje dvojica susedných vrcholov u, v takých, že $\max\{d(u), d(v)\} < 4$. Z dôsledku 2.2 potom vyplýva, že nutne $d(u) = d(v) = 3$. Označme x hodnotenie hrany medzi u, v . Označme y_1, y_2 zvyšné hodnotenia hrán z u a z_1, z_2 zvyšné hodnotenia hrán z v . Podľa u musí platiť, že magický súčet je $x + y_1 + y_2$ a bimagický súčet je $x^2 + y_1^2 + y_2^2$. Podľa v musí platiť, že magický súčet je $x + z_1 + z_2$ a bimagický súčet je $x^2 + z_1^2 + z_2^2$. Teda musí platiť $y_1 + y_2 = z_1 + z_2$ aj $y_1^2 + y_2^2 = z_1^2 + z_2^2$. Z duplikačnej lemy potom vyplýva, že $z_1 = y_1$ alebo $z_1 = y_2$, čo je spor s tým, že hranám budú priradené navzájom rôzne čísla.

Dôsledok 2.3: Kubické grafy nie sú hranovo bimagické.

Veta 2.4: Nech G je hranovo bimagický regulárny graf. Potom existuje hranovo bimagické ohodnotenie grafu G také, že jeho najmenšia hodnota je 1.

Dôkaz: Podobný ako dôkaz vety 1.7, akurát konštantu neodpočítame od ohodnotení vrcholov, ale od ohodnotení hrán.

Veta 2.5: Existuje graf, ktorý je hranovo bimagický a nie je kompletný bipartitný.

Dôkaz: Nech G je hranovo bimagický kompletný bipartitný regulárny graf s nejakým ohodnotením. Nech e je hrana, ktorá má najmenšiu hodnotu. Keďže je regulárny, tak podľa posunovej lemy môžeme od všetkých hrán odrátať hodnotu hrany e . Tým dostaneme hranovo bimagický kompletný bipartitný graf, ktorý má práve jednu nulovú hranu e . Zjavne vieme túto hranu z grafu odstrániť a magická aj bimagická podmienka ostane zachovaná. Graf $G - e$ je teda hranovo bimagický a pritom nie je kompletný bipartitný.

Definícia 2.6: Nech G je hranovo bimagický graf s n vrcholmi. Ak sú hranám priradené čísla z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, tak G nazveme **hranovo superbimagickým grafom**.

Georges Pfeffermann našiel v 19. storočí bimagický štvorec veľkosti 8×8 , v ktorom použil všetky čísla z množiny $\{1, 2, \dots, 64\}$. Vieme teda, že existuje hranovo superbimagický graf - je ním kompletný bipartitný graf na 8 vrchoch.

Hypotézy 2:

- Existuje graf, ktorý je hranovo bimagický a nie je kompletný bipartitný alebo kompletný bipartitný bez jednej hrany?

Definícia 3: Nech G je súvislý jednoduchý netriviálny graf. Ak existuje vrcholové ohodnotenie grafu G také, že platí:

1. vrcholom sú priradené navzájom rôzne kladné celé čísla
2. súčet susedov každého vrcholu je rovnaký
3. súčin susedov každého vrcholu je rovnaký

tak G nazveme **vrcholovo multiplikatívnym magickým grafom**.

Veta 3.1: Nech G je vrcholovo multiplikatívny magický graf. Ak G obsahuje dvojicu vrcholov stupňa 1, potom majú spoločného suseda.

Dôkaz: rovnaký ako dôkaz vety 1.1

Veta 3.2: Nech G je vrcholovo multiplikatívny magický graf. Potom majú všetky vrcholy stupňa 2 rovnakú množinu susedov.

Dôkaz: rovnaký ako dôkaz vety 1.2, akurát použijeme multiplikatívny súčet a nie bimagický

Veta 3.3: Nech G je vrcholovo multiplikatívny magický graf. Potom má každá dvojica nesusedných vrcholov stupňa 3 buď rovnakú množinu susedov, alebo nemá spoločného suseda.

Dôkaz: rovnaký ako dôkaz vety 1.3, akurát použijeme multiplikatívny súčet a nie bimagický

Veta 3.4: Kompletný bipartitný graf nemôže byť vrcholovo multiplikatívny supermagický.

Dôkaz: Sporom. Nech G je kompletný bipartitný a vrcholovo multiplikatívny supermagický graf s n vrcholmi. Nech p je najväčšie prvočíslo, ktoré neprevyšuje n . Toto prvočíslo sa môže vyskytovať iba v jednej partícii. To však znamená, že súčin oboch partícií nemôže byť rovnaký (jeden súčin bude mať p vo svojom rozklade a druhý nie).

Veta 3.5: Pre každé $i, j \in \mathbb{N}, 2 \leq i \leq j, (i, j) \neq (2, 2)$ platí, že graf $K_{i,j}$ je vrcholovo multiplikatívny magický.

Dôkaz: Indukciou vzhľadom na i, j . Najprv ukážeme, že grafy $K_{i,j}, i \in \{2, 3\}$ a $K_{4,5}$ sú vrcholovo multiplikatívne magické.

Grafy $K_{2,3}, K_{2,4}, K_{3,3}$ a $K_{4,5}$ sú vrcholovo multiplikatívne magické, pretože:

pre graf $K_{2,3}$ stačí priradiť jednej partícii prvky 5, 12 a druhej partícii prvky 1, 6, 10

pre graf $K_{2,4}$ stačí priradiť jednej partícii prvky 9, 16 a druhej partícii prvky 1, 2, 4, 18

pre graf $K_{3,3}$ stačí priradiť jednej partícii prvky 3, 8, 10 a druhej partícii prvky 4, 5, 12

pre graf $K_{4,5}$ stačí priradiť jednej partícii prvky 2, 10, 20, 27 a druhej partícii

prvky 1, 3, 6, 24, 25

Graf $K_{2,n+1}$ pre $n \geq 4$ je vrcholovo multiplikatívny magický - stačí do prvej partície dať prvky $n! + 1$ a $n!(n! + 1 - \frac{n(n+1)}{2})$ a do druhej partície prvky $1, 2, \dots, n-1, n, (n! + 1)(n! + 1 - \frac{n(n+1)}{2})$.

Graf $K_{3,n}$ pre $n \geq 3$ je vrcholovo multiplikatívny magický - stačí do prvej partície dať prvky $1, n! + 1$ a $n!(n! + 3 - \frac{n(n+1)}{2})$ a do druhej partície prvky $2, \dots, n-1, n, (n! + 1)(n! + 3 - \frac{n(n+1)}{2})$.

Teraz dokážeme, že ak je $K_{i,j}$ vrcholovo multiplikatívny magický, tak je aj $K_{i+2,j+3}$. Do jednej partície stačí pridať prvky $5k, 12k$ a do druhej prvky $k, 6k, 10k$, pričom $k \in \mathbb{N}$ zvolíme dostatočne veľké (aby boli prvky navzájom rôzne).

Definícia 4: Nech G je súvislý jednoduchý netriviálny graf. Ak existuje hranové ohodnotenie grafu G také, že platí:

1. hranám sú priradené navzájom rôzne kladné celé čísla
2. súčet incidentných hrán každého vrcholu je rovnaký
3. súčin incidentných hrán každého vrcholu je rovnaký

tak G nazveme **hranovo multiplikatívnym magickým grafom**.

Veta 4.1: Nech G je hranovo multiplikatívny magický graf, ktorý má aspoň tri vrcholy. Potom G neobsahuje vrchol stupňa 1.

Dôkaz: rovnaký ako dôkaz vety 2.1

Definícia 5: Nech A je matica veľkosti $m \times n$. Ak platí:

1. prvky matice sú navzájom rôzne kladné celé čísla
 2. súčet prvkov v každom riadku je konštantný
 3. súčet prvkov v každom stĺpci je konštantný
 4. súčet druhých mocnín prvkov v každom riadku je konštantný
 5. súčet druhých mocnín prvkov v každom stĺpci je konštantný
- tak A nazveme **bimagickým obdĺžnikom**.

Každý hranovo bimagický kompletný bipartitný graf sa dá jednoducho transformovať na bimagický obdĺžnik.

Veta 5.1: Nech A je bimagický obdĺžnik. Potom ho vieme transformovať na taký bimagický obdĺžnik B s potenciálne nekladnými prvkami, že magický súčet v jeho riadku aj stĺpci je rovný 0.

Dôkaz: Nech S_r, S_s sú súčty v riadku a stĺpci v bimagickom obdĺžniku A veľkosti $m \times n$. Keďže A má m riadkov a n stĺpcov, musí platiť $mS_r = nS_s$, z čoho vyplýva $\frac{m}{n} = \frac{S_s}{S_r}$. Teda $S_s = km$ a $S_r = kn$ pre nejaké $k \in \mathbb{N}$. Ak od každého prvku v A odpočítame k , vytvoríme tým nový obdĺžnik B . Zjavne B má súčty v riadku aj stĺpci nulové. Z posunovej lemy zároveň vyplýva, že ak boli predtým magic ké aj bimagické súčty konštantné, tak budú konštantné aj v B . Teda B je bimagický obdĺžnik s potenciálne nekladnými prvkami.

Veta 5.2: Nech A je bimagický obdĺžnik veľkosti $m \times n$. Potom $m, n \geq 3$ alebo $(m, n) = (1, 1)$.

Dôkaz: Ak $m = 1$, tak má obdĺžnik len jeden riadok. Ak majú byť jeho súčty v stĺpci rovnaké, musí byť v každom stĺpci rovnaké číslo. Ak $n \geq 2$, obdĺžnik by obsahoval duplicitné prvky, čo je spor. Z toho vyplýva, že nutne $n = 1$.

Ak $m = 2$, tak z predošlého odstavca vieme, že $n \geq 2$. Tým dostaneme pre dva riadky a dva stĺpce rovnicu z duplikačnej lemy, z čoho vyplýva, že obdĺžnik by obsahoval duplicitné prvky, čo je spor.

Veta 5.3: Nech A je bimagický obdĺžnik veľkosti $3 \times n$. Potom ho vieme transformovať na bimagický obdĺžnik B , pre ktorý platí, že v každom jeho stĺpci je aspoň jedno nepárne číslo.

Dôkaz: Predpokladajme, že v A existuje stĺpec, ktorého všetky tri prvky sú párne čísla. Z toho vyplýva, že ich bimagický súčet je deliteľný 4. Kedy môže byť súčet $a^2 + b^2 + c^2$ deliteľný 4? Prvky a, b, c musia byť tvaru $4k$ alebo $4k + 2$, lebo ak by boli ľubovoľné z nich tvaru $4k + 1$ alebo $4k + 3$, ich druhá

mocnina by dávala zvyšok 1 po delení 4 - výraz $a^2 + b^2 + c^2$ by už nemohol byť deliteľný 4. Z toho vyplýva, že každý stĺpec v A obsahuje iba párne prvky. Vieme ho preto transformovať na bimagický obdĺžnik B jednoducho tak, že každý prvok vydělíme 2 (alebo mocninou 2, tak aby B obsahovalo nepárne prvky).

Definícia 6: Nech A je matica veľkosti $m \times n$. Ak platí:

1. prvky matice sú navzájom rôzne kladné celé čísla
 2. súčet prvkov v každom riadku je konštantný
 3. súčet prvkov v každom stĺpci je konštantný
 4. súčin prvkov v každom riadku je konštantný
 5. súčin prvkov v každom stĺpci je konštantný
- tak A nazveme **multiplikatívnym magickým obdĺžnikom**.

Každý hranovo multiplikatívny magický kompletný bipartitný graf sa dá jednoducho transformovať na multiplikatívny magický obdĺžnik.

Veta 6.1: Nech A je multiplikatívny magický obdĺžnik veľkosti $m \times n$. Potom $m, n \geq 3$ alebo $(m, n) = (1, 1)$.

Dôkaz: rovnaký ako dôkaz vety 5.2