

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

MAGICKÉ ÚTVARY
BAKALÁRSKA PRÁCA

2021
RICHARD BÍRÓ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

MAGICKÉ ÚTVARY
BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Informatika
Študijný odbor: Informatika
Školiace pracovisko: Katedra informatiky
Školiteľ: doc. RNDr. Ján Mazák, PhD.

Bratislava, 2021
Richard Bíró



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Richard Bíró
Študijný program: informatika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: informatika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Magické útvary
Magic shapes

Anotácia: Magické útvary rôzneho typu zaujímali matematikov odpradáva a mnohé súvisiace problémy sú aj dnes otvorené. Náplňou práce je pozrieť sa na súvislosti medzi magickými útvarmi a magickými ohodnoteniami v diskkrétnej matematike (grafy, konfigurácie z konečných geometrií apod.) a implementovať algoritmické prehládávanie pre vybrané otvorené problémy.

Cieľ:

1. Zorientovať sa v oblasti klasických magických útvarov a podobných problémov a spraviť aspoň čiastočný prehľad.
2. Formulovať analogické problémy pre iné diskkrétne štruktúry, napr. grafy či konfigurácie vznikajúce z konečných geometrií.
3. Vybrať si niekoľko otvorených problémov (či už nových, alebo známych), implementovať algoritmické prehládávanie priestoru potenciálnych riešení a skombinovať toto počítačové prehládávanie s teoretickou analýzou.
4. Vysloviť zaujímavé hypotézy, ktoré bude možné skúmať v budúcnosti.

Vedúci: doc. RNDr. Ján Mazák, PhD.
Katedra: FMFI.KI - Katedra informatiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Martin Škoviera, PhD.
Dátum zadania: 26.10.2020

Dátum schválenia: 31.10.2020

doc. RNDr. Daniel Olejár, PhD.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Pod'akovanie:

Abstrakt

Abstract

Obsah

Úvod	1
1 Základné pojmy a definície	3
1.1 Magické útvary	3
1.1.1 Magické štvorce	3
1.1.2 Magické obdĺžniky	5
1.1.3 Magické grafy	6
1.2 Multiplikatívne útvary	7
1.3 Bimagické útvary	7
1.4 Multiplikatívne magické útvary	8
2 Otvorené problémy	11
2.1 Magické štvorce	11
2.2 Bimagické štvorce	12
2.3 Multiplikatívne magické štvorce	13
3 Nové problémy	15
3.1 Bimagické grafy	17
3.1.1 Vrcholovo bimagické grafy	17
3.1.2 Hranovo bimagické grafy	22
3.2 Multiplikatívne magické grafy	24
3.2.1 Vrcholovo multiplikatívne magické grafy	24
3.2.2 Hranovo multiplikatívne magické grafy	26
3.3 Magické obdĺžniky	26
3.3.1 Bimagické obdĺžniky	26
3.3.2 Multiplikatívne magické obdĺžniky	27
4 Implementácia	29
4.1 Magické štvorce	29
4.1.1 Magické štvorce druhého stupňa	29
4.1.2 Bimagické štvorce	30

4.1.3	Multiplikatívne magické štvorce	32
4.2	Magické grafy	33
4.2.1	Vrcholovo bimagické grafy	33
4.2.2	Vrcholovo multiplikatívne magické grafy	34
4.3	Magické obdĺžniky	35
4.3.1	Bimagické obdĺžniky	35
4.3.2	Multiplikatívne magické obdĺžniky	37
5	Výsledky	39
5.1	Magické štvorce	39
5.1.1	Magické štvorce druhého stupňa	39
5.1.2	Bimagické štvorce	39
5.1.3	Multiplikatívne magické štvorce	40
5.2	Magické grafy	40
5.2.1	Vrcholovo bimagické grafy	40
5.2.2	Vrcholovo multiplikatívne magické grafy	41
5.3	Magické obdĺžniky	41
5.3.1	Bimagické obdĺžniky	41
5.3.2	Multiplikatívne magické obdĺžniky	41
	Záver	43

Zoznam obrázkov

1.1	Magický štvorec veľkosti 3×3	4
1.2	Magický štvorec veľkosti 4×4 s druhými mocninami	4
1.3	Magický štvorec veľkosti 3×3 so 7 druhými mocninami	4
1.4	Magický štvorec veľkosti 7×7 s tretími mocninami	5
1.5	Magický obdĺžnik veľkosti 2×4	5
1.6	Magický graf	6
1.7	Multiplikatívny štvorec veľkosti 3×3	7
1.8	Bimagický štvorec veľkosti 6×6	8
1.9	Multiplikatívny magický štvorec veľkosti 7×7	9

Úvod

V tejto kapitole uvedieme stručný úvod do problematiky magických útvarov, ako aj význam a ciele práce.

Kapitola 1

Základné pojmy a definície

V tejto kapitole uvedieme základné pojmy a definície pri práci s útvarmi, ako aj súčasný stav danej problematiky.

Priamka je objekt v konečnom geometrickom systéme, ktorý prechádza aspoň jedným bodom. *Útvar* je množina bodov, ktoré sú spojené priamkami. *Prvok* je bod útvaru, ktorý má priradenú hodnotu x , kde x je prirodzené číslo. Prvky útvaru majú priradené navzájom rôzne hodnoty. Útvar má *magickú vlastnosť* ak všetky jeho priamky majú magickú vlastnosť.

Ak má útvar pravidelné usporiadanie, môže byť reprezentovaný maticou (priamkami budú riadky, stĺpce a prípadne diagonály danej matice) alebo neorientovaným ohodnoteným grafom.

1.1 Magické útvary

Definícia 1.1.1. *Útvar je magický ak súčet prvkov na každej jeho priamke je konštantný.*

1.1.1 Magické štvorce

Definícia 1.1.1.1. *Magický štvorec je matica prvkov veľkosti $n \times n$, pre ktorú platí, že súčet prvkov v každom riadku, stĺpci a na oboch diagonálach je konštantný.*

Príklad magického štvorca je na obrázku 1.1.

	4	3	8	=15
	9	5	1	=15
	2	7	6	=15
=15	=15	=15	=15	=15

Obr. 1.1: Magický štvorec veľkosti 3×3 [1]

Poznámka 1.1.1.1. Ak je súčet prvkov v každom riadku a stĺpci konštantný, daný štvorec nazývame *semimagickým*. Ak je súčet na oboch diagonálach rovnaký, ale iný ako súčet v riadkoch a stĺpcoch, daný štvorec nazývame *panmagickým*.

Špeciálnu triedu tvoria magické štvorce, ktorých prvky sú k -tymi mocninami prirodzených čísel. Na obrázku 1.2 je príklad štvorca pre $n = 4, k = 2$.

48^2	23^2	6^2	19^2
21^2	26^2	33^2	32^2
1^2	36^2	13^2	42^2
22^2	27^2	44^2	9^2

Obr. 1.2: Magický štvorec veľkosti 4×4 s druhými mocninami [1]

Existencia štvorca pre $n = 3, k = 2$ je otvoreným problémom. Je dokázané, že ak by taký štvorec existoval, jeho prvky by museli byť väčšie ako 10^{16} . Nikomu sa nepodarilo nájsť ani magický štvorec, ktorého 8 prvkov sú druhé mocniny prirodzených čísel. A je známe iba jedno základné riešenie so 7 prvkami (obrázok 1.3, [1]), ktoré objavil v roku 1999 Andrew Bremner.

373^2	289^2	565^2
360721	425^2	23^2
205^2	527^2	222121

Obr. 1.3: Jediný známy magický štvorec veľkosti 3×3 so 7 druhými mocninami [1]

Poznámka 1.1.1.2. Existujú vzorce, ktoré dokážu vygenerovať magický štvorec so 6 prvkami, ktoré sú druhými mocninami prirodzených čísel.

Pre $n = k = 3$ je dokázané, že taký magický štvorec neexistuje. Existencia štvorcov pre $4 \leq n \leq 6, k = 3$ je otvoreným problémom. Sébastien Miquel našiel v roku 2015 riešenie (obrázok 1.4, [1]) pre $n = 7, k = 3$.

24^3	65^3	25^3	58^3	38^3	32^3	31^3
39^3	16^3	49^3	56^3	33^3	60^3	20^3
10^3	54^3	74^3	11^3	37^3	6^3	9^3
15^3	14^3	35^3	55^3	4^3	23^3	73^3
62^3	28^3	17^3	21^3	8^3	64^3	43^3
67^3	53^3	22^3	41^3	3^3	13^3	44^3
2^3	19^3	27^3	1^3	78^3	45^3	29^3

Obr. 1.4: Magický štvorec veľkosti 7×7 s tretími mocninami [1]

Pre $4 \leq n \leq 10, k \geq 4$ sú známe iba semimagické štvorce [1].

1.1.2 Magické obdĺžniky

Definícia 1.1.2.1. *Magický obdĺžnik je matica prvkov veľkosti $m \times n$, pre ktorú platí, že súčet prvkov v každom riadku je konštantný a zároveň súčet prvkov v každom stĺpci je konštantný.*

Príklad magického obdĺžnika je na obrázku 1.5.

1	7	6	4
8	2	3	5

Obr. 1.5: Magický obdĺžnik veľkosti 2×4 [2]

Nevyžadujeme, aby boli súčty v riadkoch a stĺpcoch rovnaké, pretože pre $m \neq n$ vieme ľahko odvodiť, že by museli byť rovné 0 (čo je spor s tým, že prvky sú navzájom rôzne prirodzené čísla).

Slovenský matematik Marián Trenkler skúmal obdĺžniky veľkosti $m \times n$, ktoré sú supermagické (ich prvkami sú čísla od 1 po mn) [2].

Veta 1.1.2.1. (Trenkler, 1999) *Pre všetky prirodzené $n > 2$ vieme zostrojiť supermagický obdĺžnik veľkosti $2 \times (2n - 2)$ aj $n \times n^2$.*

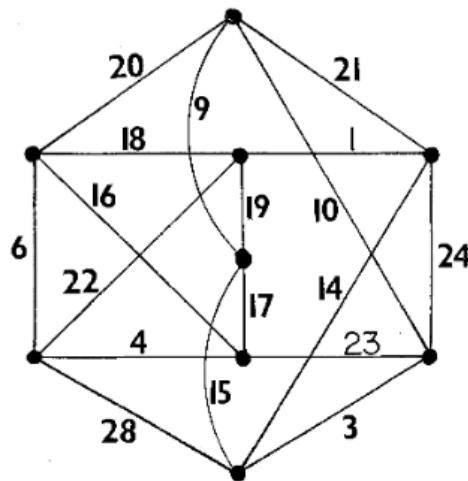
Keďže obdĺžniková matica nemá diagonály, pri definícii ich neuvažujeme. Z toho vyplýva, že v ľubovoľnom magickom obdĺžniku vieme vymeniť dva riadky alebo stĺpce a magická vlastnosť ostane zachovaná.

Semimagické štvorce sú špeciálnym prípadom magických obdĺžnikov pre $m = n$.

1.1.3 Magické grafy

Definícia 1.1.3.1. *Magický graf je neorientovaný graf s ohodnotenými hranami, v ktorom pre každý vrchol platí, že súčet hrán incidentných s ním je konštantný. Vrcholy sú považované za prvky útvaru.*

Príklad magického grafu je na obrázku 1.6.



Obr. 1.6: Magický graf s magickým súčtom 60 [3]

Slovenskí matematici Samuel Jezný a Marián Trenkler dokázali vetu, ktorá hovorí o tom, kedy je graf magický [4].

Veta 1.1.3.1. (Jezný, Trenkler, 1983) *Graf je magický práve vtedy, keď každá hrana G patrí do nejakého $(1-2)$ -faktora a zároveň každá dvojica hrán e_1, e_2 je separovateľná $(1-2)$ -faktorom grafu G .*

Poznámka 1.1.3.1. $(1-2)$ -faktor grafu je jeho rozklad na izolované hrany a kružnice.

Na grafoch sa dajú skúmať aj iné magické vlastnosti. Môžeme ohodnotiť vrcholy a pre každú hranu zrátať súčet hodnôt jej koncových vrcholov. Alebo pre každý vrchol zrátať súčet hodnôt jeho susedov. Ku grafom vieme hľadať ich elegantné označenie (*graceful labelling*).

Definícia 1.1.3.2. *Nech G je graf s n vrcholmi. Elegantné označenie grafu G je také priradenie hodnôt $0, \dots, n-1$ jeho vrcholom, že rozdiely hodnôt susedných vrcholov sú navzájom rôzne.*

Je dokázané, že niektoré špeciálne typy grafov ako kolesá alebo obdĺžnikové mriežky majú vždy elegantné označenie [5]. Rozhodnúť, či k ľubovoľnému stromu existuje elegantné označenie, je dodnes otvoreným problémom.

1.2 Multiplikatívne útvary

Definícia 1.2.1. *Útvar je multiplikatívny ak súčin prvkov na každej jeho priamke je konštantný.*

Príklad multiplikatívneho štvorca je na obrázku 1.7.

Multiplicative			=4096
8	256	2	=4096
4	16	64	=4096
128	1	32	=4096
=4096	=4096	=4096	=4096

Obr. 1.7: Multiplikatívny štvorec veľkosti 3×3 [1]

Poznámka 1.2.1. *Semimultiplikatívne a panmultiplikatívne štvorce sú definované analogicky.*

K ľubovoľnému magickému štvorcu vieme zostrojiť multiplikatívny štvorec napríklad tak, že všetky jeho prvky x nahradíme 2^x .

Tieto typy štvorcov sa dajú hľadať vzorkovou metódou. Vzorku získame tak, že zvolíme niekoľko prvkov štvorca, pričom:

- v každom riadku je zvolený práve jeden prvok
- v každom stĺpci je zvolený práve jeden prvok
- na každej diagonále je zvolený práve jeden prvok

Princíp prehľadávania je potom jednoduchý. Najprv začneme so štvorcom, ktorého všetky prvky majú hodnotu 1. Potom si opakovanne vyberieme ľubovoľnú vzorku a všetky jej zvolené prvky vynásobíme nejakou konštantou. Tým generujeme štvorec, ktorý je multiplikatívny (za predpokladu, že výsledné prvky sú navzájom rôzne).

1.3 Bimagické útvary

Definícia 1.3.1. *Útvar je bimagický ak je magický a umocnením každého jeho prvku na druhú dostaneme opäť magický útvar.*

Je zrejmé, že bimagický štvorec veľkosti 2×2 neexistuje. Edouard Lucas, Luke Pebody a Jean-Claude Rosa dokázali silnejšie tvrdenia [1].

Veta 1.3.1. *(Lucas, 1891) Neexistuje bimagický štvorec veľkosti 3×3 .*

Veta 1.3.2. (Pebody, Rosa, 2004) *Neexistuje bimagický štvorec veľkosti 4×4 .*

V roku 2006 našiel Jaroslaw Wroblewski riešenie pre 6×6 (obrázok 1.8, [1]).

6x6 magic square...							=408		...squared							=36826
17	36	55	124	62	114		=408		17 ²	36 ²	55 ²	124 ²	62 ²	114 ²		=36826
58	40	129	50	111	20		=408		58 ²	40 ²	129 ²	50 ²	111 ²	20 ²		=36826
108	135	34	44	38	49		=408	>>>	108 ²	135 ²	34 ²	44 ²	38 ²	49 ²		=36826
87	98	92	102	1	28		=408		87 ²	98 ²	92 ²	102 ²	1 ²	28 ²		=36826
116	25	86	7	96	78		=408		116 ²	25 ²	86 ²	7 ²	96 ²	78 ²		=36826
22	74	12	81	100	119		=408		22 ²	74 ²	12 ²	81 ²	100 ²	119 ²		=36826
=408	=408	=408	=408	=408	=408	=408			=36826	=36826	=36826	=36826	=36826	=36826	=36826	

Obr. 1.8: Bimagický štvorec veľkosti 6×6 [1]

Na tomto štvorci je zaujímavé to, že má asociatívnu vlastnosť - súčet protiľahlých prvkov je konštantný.

Na to, aby bol štvorec veľkosti 5×5 bimagickým, muselo by byť jeho 12 magických a 12 bimagických súčtov rovnakých. Boli nájdené čiastočné riešenia, ktoré obsahovali 23 správnych súčtov [1]. Existencia riešenia pre 5×5 (ktoré by malo 24 správnych súčtov) je však dodnes otvoreným problémom.

Nasledovná veta dokazuje, že bimagických štvorcov je nekonečne veľa [6]:

Veta 1.3.3. (Chen, Li, 2004) *Nech m, n sú kladné celé čísla s rovnakou paritou, pričom $m, n \notin \{2, 3, 6\}$. Potom existuje normálny bimagický štvorec veľkosti $mn \times mn$.*

Bimagické štvorce sú evidentne uzavreté na nenulový násobok. Majú však ďalšiu zaujímavú vlastnosť: sú uzavreté aj na konštantný posun. Z toho vyplýva, že vieme definovať normálne formy bimagických útvarov, ako napríklad:

- útvar, ktorého najmenší prvok je 1
- útvar, ktorého magický súčet je 100
- útvar, ktorého bimagický súčet je päťnásobkom nejakého jeho prvku

Keď predpokladáme, že bimagický štvorec je v nejakej normálnej forme, prehľadávanie sa zjednoduší.

1.4 Multiplikatívne magické útvary

Definícia 1.4.1. *Útvar je multiplikatívny magický ak má magickú aj multiplikatívnu vlastnosť.*

Je zrejmé, že multiplikatívny magický štvorec veľkosti 2×2 neexistuje. Lee Morgenstern dokázal silnejšie tvrdenie [1].

Veta 1.4.1. (*Morgenstern, 2007*) *Neexistuje multiplikatívny magický štvorec veľkosti 3×3 ani 4×4 .*

V roku 2016 našiel Sébastien Miquel multiplikatívny magický štvorec veľkosti 7×7 (obrázok 1.9, [1]).

126	66	50	90	48	1	84
20	70	16	54	189	110	6
100	2	22	98	36	72	135
96	60	81	4	10	49	165
3	63	30	176	120	45	28
99	180	14	25	7	108	32
21	24	252	18	55	80	15

Obr. 1.9: Multiplikatívny magický štvorec veľkosti 7×7 [1]

Multiplikatívne štvorce je možné nájsť napríklad vzorkovaním. Ale existencia multiplikatívneho magického štvorca veľkosti 5×5 alebo 6×6 je naďalej otvoreným problémom.

Kapitola 2

Otvorené problémy

V tejto kapitole podrobnejšie preskúmame niektoré známe otvorené problémy z oblasti magických útvarov.

2.1 Magické štvorce

Hypotéza 2.1.1. *Existuje jediný magický štvorec veľkosti 3×3 (spolu s jeho násobkami, rotáciami a symetriami), ktorého aspoň 7 prvkov sú druhé mocniny prirodzených čísel.*

Veta 2.1.1. *Nech e je prostredný prvok magického štvorca veľkosti 3×3 . Potom je jeho magický súčet rovný $3e$.*

Dôkaz. Nech s je magický súčet. Označme a, b, \dots, i prvky štvorca zľava doprava po jednotlivých riadkoch (čiže e je prostredný z nich). Potom platí $3s = (a + e + i) + (b + e + h) + (c + e + g) = (a + b + c) + (g + h + i) + 3e = 2s + 3e$, z čoho vyplýva, že $s = 3e$. \square

Dôsledok 2.1.1. *Nech e je prostredný prvok magického štvorca veľkosti 3×3 a x, y sú jeho ľubovoľné dva protiľahlé prvky. Potom $x + y = 2e$.*

Veta 2.1.2. *Nech u_1, v_1, u_2, v_2 sú navzájom rôzne kladné celé čísla. Definujme hodnoty p, q, r, s, t nasledovne:*

$$p = (u_1^2 + v_1^2)(u_2^2 + 2u_2v_2 - v_2^2)$$

$$q = (u_1^2 + 2u_1v_1 - v_1^2)(u_2^2 + v_2^2)$$

$$r = (-u_1^2 + 2u_1v_1 + v_1^2)(u_2^2 + v_2^2)$$

$$s = (u_1^2 + v_1^2)(-u_2^2 + 2u_2v_2 + v_2^2)$$

$$t = (u_1^2 + v_1^2)(u_2^2 + v_2^2)$$

Potom vieme zostrojiť nasledovné magické štvorce, ktorých aspoň 5 prvkov sú druhé mocniny prirodzených čísel:

p^2	$3t^2 - p^2 - q^2$	q^2
$3t^2 - p^2 - r^2$	t^2	$3t^2 - q^2 - s^2$
r^2	$3t^2 - r^2 - s^2$	s^2
$2(r^2 + s^2)$	$4p^2$	$2(q^2 + s^2)$
$4q^2$	$4t^2$	$4r^2$
$2(p^2 + r^2)$	$4s^2$	$2(p^2 + q^2)$
p^2	q^2	$3t^2 - p^2 - q^2$
$r^2 + s^2 - p^2$	t^2	$p^2 + q^2 - s^2$
$3t^2 - r^2 - s^2$	r^2	s^2
p^2	r^2	$3t^2 - p^2 - r^2$
$q^2 + s^2 - p^2$	t^2	$p^2 + r^2 - s^2$
$3t^2 - q^2 - s^2$	q^2	s^2

Veta 2.1.3. *Nech x je kladné celé číslo. Nech $x_1 = 8x^8 - 49x^6 + 6x^4 - 16x^2 + 2$, $x_2 = 8x^8 - x^6 + 30x^4 - 40x^2 + 2$, $x_3 = 8x^8 - 25x^6 + 18x^4 - 28x^2 + 2$. Potom vieme zostrojiť nasledovné magické štvorce veľkosti 3×3 , ktorých aspoň 6 prvkov sú druhé mocniny prirodzených čísel.*

$(2x^5 + 4x^3 - 7x)^2$	$x_1(x^2 - 2)$	$(5x^4 - 2x^2 + 2)^2$
$(x^4 + 8x^2 - 2)^2$	$(2x^5 - 2x^3 + 5x)^2$	$x_2(x^2 - 2)$
$x_3(x^2 - 2)$	$(7x^4 - 4x^2 - 2)^2$	$(2x^5 - 8x^3 - x)^2$
$(5x^4 - 2x^2 + 2)^2$	$(2x^5 + 4x^3 - 7x)^2$	$\frac{4x^{10} - 31x^8 + 76x^6 + 76x^4 - 31x^2 + 4}{2}$
$(2x^5 - 8x^3 - x)^2$	$\frac{4x^{10} + 17x^8 + 4x^6 + 4x^4 + 17x^2 + 4}{2}$	$(7x^4 - 4x^2 - 2)^2$
$\frac{4x^{10} + 65x^8 - 68x^6 - 68x^4 + 65x^2 + 4}{2}$	$(x^4 + 8x^2 - 2)^2$	$(2x^5 - 2x^3 + 5x)^2$

2.2 Bimagické štvorce

Hypotéza 2.2.1. *Neexistuje bimagický štvorec veľkosti 5×5 .*

Veta 2.2.1. *Neexistuje bimagický štvorec veľkosti 3×3 .*

Dôkaz. Sporom. Nech a, b sú prvky v prvom riadku a prvých dvoch stĺpcoch. Nech c, d sú prvky v poslednom stĺpci a posledných dvoch riadkoch. Nech x je prvok v prvom riadku a poslednom stĺpci. Potom musia platiť vzťahy $a + b + x = x + c + d$ aj $a^2 + b^2 + x^2 = x^2 + c^2 + d^2$. Tým dostaneme sústavu z duplikačnej lemy, z čoho vyplýva, že $c = a$ alebo $c = b$, čo je spor. \square

Veta 2.2.2. *Neexistuje bimagický štvorec veľkosti 4×4 .*

Dôkaz. Sporom. Nech a, b, \dots, o, p sú prvky zľava doprava v jednotlivých riadkoch štvorca. Keďže štvorec je magický, musia platiť nasledovné vzťahy:

$$a + b + c + d = m + n + o + p$$

$$a + f + k + p = b + f + j + n$$

$$d + g + j + m = c + g + k + o$$

Ich sčítaním dostaneme $a + d = n + o$. Keďže štvorec je zároveň aj multiplikatívny, musia platiť nasledovné vzťahy:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = m^2 + n^2 + o^2 + p^2$$

$$a^2 + f^2 + k^2 + p^2 = b^2 + f^2 + j^2 + n^2$$

$$d^2 + g^2 + j^2 + m^2 = c^2 + g^2 + k^2 + o^2$$

Ich sčítaním dostaneme $a^2 + d^2 = n^2 + o^2$. Tým dostaneme sústavu z duplikačnej lemy, z čoho vyplýva, že $n = a$ alebo $n = d$, čo je spor. \square

Veta 2.2.3. *Neexistuje bimagický štvorec veľkosti 5×5 , ktorého prvky sú čísla od 1 do 1500.*

Veta 2.2.4. *Nech A je semibimagický štvorec veľkosti 5×5 . Potom existuje číslo $x \in \mathbb{N}$, pre ktoré vieme zostrojiť semibimagický štvorec B rovnakej veľkosti, pričom platí:*

(i) *v prvom riadku B sú v poradí prvky $x, a + b - c, a - b + c, -a + b + c, -a - b - c$, pričom $a, b, c \in \mathbb{N}$*

(ii) *v prvom stĺpci B sú v poradí prvky $x, d + e - f, d - e + f, -d + e + f, -d - e - f$, pričom $d, e, f \in \mathbb{N}$*

Dôkaz. Uvažujme magický štvorec veľkosti 5×5 , ktorého súčet prvých 4 prvkov v prvom riadku je rovný 0. Ak sú prvé 3 prvky A, B, C , tak posledný musí byť $-A - B - C$. Ich bimagický súčet je potom $A^2 + B^2 + C^2 + (-A - B - C)^2 = (A + B)^2 + (A + C)^2 + (B + C)^2$. Nech $a = A + B, b = A + C, c = B + C$. Potom $A = \frac{a+b-c}{2}, B = \frac{a-b+c}{2}, C = \frac{a+b-c}{2}$. Rovnako odvodíme, že ak sú v poslednom stĺpci prvé 3 prvky D, E, F , tak $D = \frac{d+e-f}{2}, E = \frac{d-e+f}{2}, F = \frac{d+e-f}{2}$ pre vhodné d, e, f . Všetky prvky A, B, C, D, E, F vynásobíme 2 a môžeme ich v danom riadku alebo stĺpci ľubovoľne premiestňovať (keďže sme v bimagickom štvorci). \square

Veta 2.2.5. *Nech A je bimagický štvorec veľkosti 5×5 . Potom existuje číslo $x \in \mathbb{N}$, pre ktoré vieme zostrojiť semibimagický štvorec B rovnakej veľkosti, pričom platí, že v ľavom dolnom rohu B je prvok x a v pravom dolnom rohu prvok $-x$.*

2.3 Multiplikatívne magické štvorce

Hypotéza 2.3.1. *Neexistuje multiplikatívny magický štvorec veľkosti 5×5 alebo 6×6 .*

Veta 2.3.1. *Neexistuje multiplikatívny magický štvorec veľkosti 3×3 .*

Dôkaz. Sporom. Nech a, b sú prvky v prvom riadku a prvých dvoch stĺpcoch. Nech c, d sú prvky v poslednom stĺpci a posledných dvoch riadkoch. Nech x je prvok v prvom riadku a poslednom stĺpci. Potom musia platiť vzťahy $a+b+x = x+c+d$ aj $abx = xcd$. Tým dostaneme sústavu z duplikačnej lemy, z čoho vyplýva, že $c = a$ alebo $c = b$, čo je spor. \square

Veta 2.3.2. *Neexistuje multiplikatívny magický štvorec veľkosti 4×4 .*

Dôkaz. Sporom. Nech a, b, \dots, o, p sú prvky zľava doprava v jednotlivých riadkoch štvorca. Keďže štvorec je magický, musia platiť nasledovné vzťahy:

$$a + b + c + d = m + n + o + p$$

$$a + f + k + p = b + f + j + n$$

$$d + g + j + m = c + g + k + o$$

Ich sčítaním dostaneme $a + d = n + o$. Keďže štvorec je zároveň aj multiplikatívny, musia platiť nasledovné vzťahy:

$$abcd = mnop$$

$$afkp = bfjn$$

$$dgjm = cgko$$

Ich vynásobením dostaneme $ad = no$. Tým dostaneme sústavu z duplikačnej lemy, z čoho vyplýva, že $n = a$ alebo $n = d$, čo je spor. \square

Veta 2.3.3. *Nech A je multiplikatívny štvorec veľkosti 5×5 alebo 6×6 , V je ľubovoľná jeho vzorka a n je kladné celé číslo. Nech B je štvorec, ktorý vznikne pre násobením vzorky V číslom n . Potom B je multiplikatívny štvorec.*

Kapitola 3

Nové problémy

V tejto kapitole podrobnejšie preskúmame nové definované problémy z oblasti magic-kých útvarov.

Lema 3.0.1. (*Duplikačná*) *Nech $a, b, c, d \in \mathbb{N}^+$, pre ktoré platí $a + b = c + d$ a buď $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, alebo $ab = cd$. Potom $c = a$ alebo $c = b$.*

Dôkaz. Z prvej rovnice vyjadríme $d = a + b - c$ a dosadíme do rovnice $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ alebo do rovnice $ab = cd$. Po úprave dostaneme vzťah $c^2 - ac - bc + ab = 0$, ktorý sa dá prepísať na tvar $(c - a)(c - b) = 0$. Z toho vyplýva $c = a$ alebo $c = b$. \square

Lema 3.0.2. (*Mocninová*) *Nech $n \in \mathbb{N}^+$. Nech a_1, \dots, a_n, b sú navzájom rôzne kladné celé čísla. Potom:*

(i) *nasledovná sústava nemá riešenie:*

$$\sum_{k=1}^n a_k = b$$

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 = b^2$$

(ii) *nasledovná sústava má jediné riešenie pre $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, b = 6$:*

$$\sum_{k=1}^n a_k = b$$

$$\prod_{k=1}^n a_k = b$$

Dôkaz. (i) Pre $n = 1$ dostaneme vzťah $a_1 = b$, čo je spor. Ak $n \geq 2$, tak dosadením b do druhej rovnice dostaneme nutný vzťah $\sum_{k=1}^n a_k^2 = (\sum_{k=1}^n a_k)^2$, čo sa dá upraviť na tvar $\sum_{i \neq j} a_i a_j = 0$. To je spor, keďže každé a_i aj a_j je kladné, a teda ich súčet nemôže byť nulový.

(ii) Pre $n = 1$ dostaneme vzťah $a_1 = b$, čo je spor. Pre $n = 2$ odvodíme vzťah $a_1 + a_2 = a_1 a_2$, z čoho vyplýva, že $a_1 = \frac{a_2}{a_2 - 1}$. Keďže $\gcd(a_2 - 1, a_2) = 1$, zlomok môže mať celočíselnú hodnotu jedine pre $a_2 = 2$. Z toho odvodíme, že aj $a_1 = 2$, čo je spor. Pre $n \geq 4$ sa dá dokázať indukciou, že $\sum_{k=1}^n a_k < \prod_{k=1}^n a_k$ ak a_1, \dots, a_n sú navzájom rôzne kladné celé čísla. \square

Pre $n = 3$ musí platiť $a_1 + a_2 + a_3 = a_1 a_2 a_3$, čo sa dá prepísať na tvar $a_1 + a_2 = a_3(a_1 a_2 - 1)$. Indukciou sa dá dokázať, že $a_1 + a_2 < a_1 a_2 - 1$ pre $a_1, a_2 \geq 2$. Teda nutne $a_1 = 1, a_2 = 2$, z čoho vyplýva $a_3 = 3, b = 6$.

Lema 3.0.3. (*Posunová*) Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{N}$. Ak $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n b_k$ a $\sum_{k=1}^n a_k^2 = \sum_{k=1}^n b_k^2$, potom pre všetky $x \in \mathbb{Z}$ platí:

$$(i) \sum_{k=1}^n (a_k + x) = \sum_{k=1}^n (b_k + x)$$

$$(ii) \sum_{k=1}^n (a_k + x)^2 = \sum_{k=1}^n (b_k + x)^2$$

$$Dôkaz. (i) \sum_{k=1}^n (a_k + x) = \sum_{k=1}^n a_k + nx = \sum_{k=1}^n b_k + nx = \sum_{k=1}^n (b_k + x)$$

$$(ii) \sum_{k=1}^n (a_k + x)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2x \sum_{k=1}^n a_k + nx^2 = \sum_{k=1}^n b_k^2 + 2x \sum_{k=1}^n b_k + nx^2 = \sum_{k=1}^n (b_k + x)^2 \quad \square$$

Normálne formy bimagických regulárnych útvarov:

Útvar je bimagický ak je magický a umocnením každého jeho prvku na druhú dostaneme opäť magický útvar.

Útvar je regulárny ak všetky jeho priamky s magickou vlastnosťou majú rovnaký počet prvkov.

Bimagické regulárne útvary sú zjavne uzavreté na nenulový násobok a sú uzavreté aj na konštantný posun (to vyplýva z posunovej lemy).

Z toho vyplýva, že ak X je bimagický regulárny útvar, tak $aX + b \mid a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0$ je bimagický regulárny útvar s potenciálne nekladnými prvkami. Tým vieme vytvárať tzv. normálne formy bimagických útvarov. Nech n je veľkosť daného útvaru. Potom:

1) útvar, ktorého najmenší prvok je 0: zvolíme $a = 1, b = -x_{\min}$, kde x_{\min} je najmenší prvok pôvodného útvaru

2) útvar, ktorého najmenší prvok je 1: zvolíme $a = 1, b = 1 - x_{\min}$

3) útvar, ktorého najmenší prvok má opačnú hodnotu ako najväčší prvok: zvolíme $a = -2, b = x_{\min} + x_{\max}$

4) útvar, ktorého magický súčet je 0: zvolíme $a = -n, b = S$, kde S je magický súčet pôvodného útvaru

5) útvar, ktorého magický súčet je rovný danému prvku x : zvolíme $a = 1 - n, b = S - x$

6) útvar, ktorého bimagický súčet je rovný nx^2 pre daný prvok x : za predpokladu $S \neq nx$ zvolíme $a = 2(nx - S), b = T - nx^2$

3.1 Bimagické grafy

3.1.1 Vrcholovo bimagické grafy

Definícia 3.1.1.1. *Nech G je súvislý jednoduchý netriviálny graf. Ak existuje vrcholové ohodnotenie grafu G také, že platí:*

1. *vrcholom sú priradené navzájom rôzne kladné celé čísla*
 2. *súčet susedov každého vrcholu je rovnaký*
 3. *súčet druhých mocnín susedov každého vrcholu je rovnaký*
- tak G nazveme **vrcholovo bimagickým grafom**.*

Veta 3.1.1.1. *Nech G je vrcholovo bimagický graf. Ak G obsahuje dvojicu vrcholov stupňa 1, potom majú spoločného suseda.*

Dôkaz. Sporom. Nech G obsahuje dva vrcholy u, v stupňa 1, ktoré nemajú spoločného suseda. Nech x je hodnota vrcholu u . Nech y je hodnota vrcholu v .

Nech sú vrcholy u, v susedné. Podľa u má graf magický súčet y a podľa v má graf magický súčet x . Z toho vyplýva $x = y$, čo je spor s tým, že vrcholom sú priradené navzájom rôzne čísla.

Nech majú vrcholy u, v rôznych susedov w_1, w_2 . Označme hodnoty týchto vrcholov z_1, z_2 . Podľa u má graf magický súčet z_1 a podľa v má graf magický súčet z_2 . Z toho vyplýva $z_1 = z_2$, čo je opäť spor. \square

Dôsledok 3.1.1.1. *Stromy nie sú vrcholovo bimagické.*

Dôkaz. Z predchádzajúcej vety vyplýva, že jediným stromom, ktorý môže byť vrcholovo bimagickým, je $K_{1,n}$ pre nejaké $n \in \mathbb{N}$. Nech v je koreň tohto stromu a v_1, \dots, v_n sú jeho listy. Nech b je hodnota koreňa a a_1, \dots, a_n sú hodnoty jeho listov. Podľa v má graf magický súčet $\sum_{k=1}^n a_k$ a podľa v_1 má graf magický súčet b . Podľa v má graf bimagický súčet $\sum_{k=1}^n a_k^2$ a podľa v_1 má graf magický súčet b^2 . Z toho vyplýva, že by sústava z mocnínovej lemy mala riešenie, čo je spor. \square

Veta 3.1.1.2. *Nech G je vrcholovo bimagický graf. Potom majú všetky vrcholy stupňa 2 rovnakú množinu susedov.*

Dôkaz. Sporom. Nech G obsahuje dva vrcholy u, v stupňa 2, ktoré nemajú rovnakú množinu susedov. Nech x je hodnota vrcholu u . Nech y je hodnota vrcholu v .

Nech sú vrcholy u, v susedné. Nech w_1 je druhý sused u a z_1 je jeho hodnota. Nech w_2 je druhý sused v a z_2 je jeho hodnota. Podľa u má graf magický súčet $y + z_1$ a

podľa v má graf magický súčet $x + z_2$. Podľa u má graf bimagický súčet $y^2 + z_1^2$ a podľa v má graf bimagický súčet $x^2 + z_2^2$. To znamená, že $x + z_2 = y + z_1$ a zároveň $x^2 + z_2^2 = y^2 + z_1^2$. Z duplikačnej lemy potom vyplýva, že $y = x$ alebo $y = z_2$, čo je spor s tým, že vrcholom sú priradené navzájom rôzne čísla.

Nech majú vrcholy u, v práve jedného spoločného suseda w , jeho hodnotu označíme z . Nech w_1 je druhý sused u a z_1 je jeho hodnota. Nech w_2 je druhý sused v a z_2 je jeho hodnota. Podľa u má graf magický súčet $z + z_1$ a podľa v má graf magický súčet $z + z_2$. Z toho vyplýva $z_1 = z_2$, čo je spor.

Nech majú vrcholy u, v odlišných susedov. Nech w_1, w_2 sú susedia u , pričom ich hodnoty sú z_1, z_2 . Nech w_3, w_4 sú susedia v , pričom ich hodnoty sú z_3, z_4 . Podľa u má graf magický súčet $z_1 + z_2$ a podľa v má graf magický súčet $z_3 + z_4$. Podľa u má graf bimagický súčet $z_1^2 + z_2^2$ a podľa v má graf bimagický súčet $z_3^2 + z_4^2$. To znamená, že $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$ a zároveň $z_1^2 + z_2^2 = z_3^2 + z_4^2$. Z duplikačnej lemy potom vyplýva, že $z_3 = z_1$ alebo $z_3 = z_2$, čo je opäť rovnaký spor. \square

Veta 3.1.1.3. *Nech G je vrcholovo bimagický graf. Potom má každá dvojica nesusedných vrcholov stupňa 3 buď rovnakú množinu susedov, alebo nemá spoločného suseda.*

Dôkaz. Sporom. Nech G obsahuje dva nesusedné vrcholy u, v stupňa 3, ktoré majú práve jedného alebo dvoch spoločných susedov. Nech x je hodnota vrcholu u . Nech y je hodnota vrcholu v .

Nech majú vrcholy u, v práve jedného spoločného suseda w , jeho hodnotu označíme z . Nech w_1, w_2 sú zvyšní susedia u a z_1, z_2 sú ich hodnoty. Nech w_3, w_4 sú zvyšní susedia v a z_3, z_4 sú ich hodnoty. Podľa u má graf magický súčet $z + z_1 + z_2$ a podľa v má graf magický súčet $z + z_3 + z_4$. Podľa u má graf bimagický súčet $z^2 + z_1^2 + z_2^2$ a podľa v má graf magický súčet $z^2 + z_3^2 + z_4^2$. To znamená, že $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$ a zároveň $z_1^2 + z_2^2 = z_3^2 + z_4^2$. Z duplikačnej lemy potom vyplýva, že $z_3 = z_1$ alebo $z_3 = z_2$, čo je spor s tým, že vrcholom sú priradené navzájom rôzne čísla.

Nech majú vrcholy u, v práve dvoch spoločných susedov w_1, w_2 , ich hodnoty označíme z_1, z_2 . Nech w_3 je zvyšný sused u a z_3 je jeho hodnota. Nech w_4 je zvyšný sused v a z_4 je jeho hodnota. Podľa u má graf magický súčet $z_1 + z_2 + z_3$ a podľa v má graf magický súčet $z_1 + z_2 + z_4$. Z toho vyplýva $z_3 = z_4$, čo je opäť spor. \square

Veta 3.1.1.4. *Nech G je vrcholovo bimagický graf a u, v sú nejaké jeho dva vrcholy. Nech x je počet susedov vrcholu u , ktoré nie sú susedmi vrcholu v . Nech y je počet susedov vrcholu v , ktoré nie sú susedmi vrcholu u . Potom platí:*

$$(i) \ x = 0 \iff y = 0$$

$$(ii) \ x, y \neq 1$$

$$(iii) \ (x, y) \neq (2, 2)$$

Dôkaz. Ak pre vrcholy u, v zrátame magický alebo bimagický súčet, ich spoloční susedia budú zarátaní na oboch stranách. Stačí sa preto venovať magickému a bimagickému súčtu vrcholov, ktoré nie sú zároveň susedmi u aj v (tých je x , resp. y). Sporom budeme predpokladať, že G je vrcholovo bimagický a neplatí (i), (ii) alebo (iii). To znamená, že nasledovná sústava má riešenie:

$$\sum_{k=1}^x a_k = \sum_{k=1}^y b_k$$

$$\sum_{k=1}^x a_k^2 = \sum_{k=1}^y b_k^2$$

ak $a_1, \dots, a_x, b_1, \dots, b_y$ sú navzájom rôzne kladné celé čísla.

Ak neplatí (i), tak BUNV nech $x > 0$ a $y = 0$. Druhá rovnica by potom mala tvar $\sum_{k=1}^x a_k^2 = 0$. Jediné riešenie tejto rovnice je zjavne nulové, čo je spor s tým, že vo vrcholovo bimagickom grafe sú vrcholom priradené kladné čísla.

Ak neplatí (ii), tak BUNV nech $y = 1$. Potom dostaneme sústavu z mocninovej lemy, o ktorej vieme, že nemá riešenie (čo je spor).

Ak neplatí (iii), tak musí platiť $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ aj $a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2$. Z duplikačnej lemy potom vyplýva $b_1 = a_1$ alebo $b_1 = a_2$, čo je spor s tým, že vo vrcholovo bimagickom grafe sú vrcholom priradené navzájom rôzne čísla. \square

Veta 3.1.1.5. *Pre každé $i, j \in \mathbb{N}, 2 \leq i \leq j, (i, j) \neq (2, 2)$ platí, že graf $K_{i,j}$ je vrcholovo bimagický.*

Dôkaz. Indukciou vzhľadom na i, j . Najprv ukážeme, že grafy $K_{2,j}, K_{3,j}, K_{4,4}$ a $K_{4,5}$ sú vrcholovo bimagické.

Graf $K_{2,n}$ pre $n \geq 3$ je vrcholovo bimagický - stačí do prvej partície dať prvky $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ a $\frac{n(n-1)(3n^2-7n+14)}{24}$ a do druhej partície prvky 1 až $n-1$ spolu s $\frac{n(n-1)(3n^2-7n+14)}{24} + 1$.

Graf $K_{3,n}$ pre $n \geq 3$ je vrcholovo bimagický - stačí do prvej partície dať prvky 1, $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ a $\frac{n(n+1)(3n^2-n-14)}{24} + 1$ a do druhej partície prvky 2 až n spolu s $\frac{n(n+1)(3n^2-n-14)}{24} + 2$.

Graf $K_{4,4}$ je vrcholovo bimagický - stačí do prvej partície dať prvky 1, 4, 6, 7 a do druhej partície prvky 2, 3, 5, 8.

Graf $K_{4,5}$ je vrcholovo bimagický - stačí do prvej partície dať prvky 2, 12, 13, 15 a do druhej partície prvky 1, 4, 8, 10, 19.

Teraz dokážeme, že ak je $K_{i,j}$ vrcholovo bimagický, tak je aj $K_{i+2,j+3}$. Do jednej partície stačí pridať prvky $4k, 5k$ a do druhej prvky $k, 2k, 6k$, pričom $k \in \mathbb{N}$ zvolíme dostatočne veľké (aby boli prvky navzájom rôzne). \square

Veta 3.1.1.6. *Jediný kubický graf, ktorý je vrcholovo bimagický, je $K_{3,3}$.*

Dôkaz. Nech G je kubický graf, o ktorom vieme, že je vrcholovo bimagický. V grafe G určite existujú dva susedné vrcholy u, v . Nech w_1, w_2 sú zvyšní susedia u . Nech w_3, w_4 sú zvyšní susedia v . Vrcholy u, v sú susedné a majú stupeň 3. Rozoberieme všetky možnosti:

1. Nech sú w_1, w_2, w_3, w_4 navzájom rôzne. Vrcholy w_1 a v majú spoločného suseda u , takže z vety 1.3 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Susedné byť nemôžu, pretože potom by mal v stupeň aspoň 4. Teda v G musí existovať hrana w_1w_3 aj hrana w_1w_4 .

Zároveň, vrcholy w_2 a v majú tiež spoločného suseda u , takže z vety 1.3 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Susedné byť nemôžu, pretože potom by mal v stupeň aspoň 4. Teda v G musí existovať hrana w_2w_3 aj hrana w_2w_4 .

Tým sme dostali graf $K_{3,3}$, ktorý vieme vrcholovo bimagicky ohodnotiť.

2. Nech $w_1 = w_3$ a $w_2 \neq w_4$. Vrcholy w_1 a w_2 majú spoločného suseda u , takže z vety 1.3 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Teda v G musí existovať hrana w_1w_2 alebo hrana w_2v .

Zároveň, vrcholy w_1 a w_4 majú spoločného suseda v , takže z vety 1.3 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Teda v G musí existovať hrana w_1w_4 alebo hrana w_4u .

Lenže ak z každých dvoch potenciálnych hrán pridáme do G aspoň jednu, tak jeden z vrcholov u, v, w_1 bude mať stupeň aspoň 4, čo je spor s tým, že graf je kubický.

3. Nech $w_1 = w_3$ a $w_2 = w_4$. Vrcholy w_1 a w_2 majú spoločných susedov u, v , takže z vety 1.3 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Teda v G musí existovať hrana w_1w_2 alebo dvojice hrán w_1w_5 a w_2w_5 pre nejaký nový vrchol w_5 .

Ak je v G hrana w_1w_2 , dostaneme graf K_4 . O ňom sa môžeme ľahko presvedčiť, že nie je vrcholovo bimagický. Ak priradíme vrcholom hodnoty a, b, c, d , tak musí platiť, že magické súčty $a + b + c, a + b + d, a + c + d, b + c + d$ sú rovnaké. To je možné len v prípade, že $a = b = c = d$, čo je spor s tým, že vrcholom sú priradené navzájom rôzne čísla.

Ak sú v G hrany w_1w_5 aj w_2w_5 pre nejaký nový vrchol w_5 , tiež dôjdeme k sporu. Vrcholy u a w_5 majú spoločných susedov w_1, w_2 , takže z vety 1.3 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Susedné byť nemôžu, pretože potom by mal u stupeň aspoň 4. Teda by v G musela existovať hrana uw_5 , čo tiež nie je možné, pretože potom by mal v stupeň aspoň 4. \square

Veta 3.1.1.7. *Nech G je vrcholovo bimagický regulárny graf. Potom existuje vrcholovo bimagické ohodnotenie grafu G také, že jeho najmenšia hodnota je 1.*

Dôkaz. Zoberme si ľubovoľné vrcholovo bimagické ohodnotenie grafu G . Nech n je najmenšia hodnota z nich. Keďže je regulárny, tak každý magický aj bimagický súčet je zložený z rovnakého počtu členov. Z posunovej lemy potom vyplýva, že ku všetkým ohodnoteniam vrcholov môžeme pripočítať alebo odpočítať nejakú konštantu x . Ak odpočítame $a - 1$, zjavne dostaneme graf, ktorého najmenšia hodnota je 1. \square

Definícia 3.1.1.2. *Nech G je vrcholovo bimagický graf s n vrcholmi. Ak sú vrcholom priradené čísla z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, tak G nazveme **vrcholovo superbimagickým grafom**.*

Existuje vrcholovo superbimagický graf? Keďže zatiaľ vieme vrcholovo bimagicky ohodnotiť len kompletne bipartitné grafy, musíme skúmať tie.

Hrubou silou je dokázané, že existuje vrcholovo superbimagický kompletne bipartitný graf. Pre $n \in \{7, 8, 11, 12\}$ existuje práve jedno ohodnotenie:

$$n = 7 \rightarrow \{1, 2, 4, 7\} \mid \{3, 5, 6\}$$

$$n = 8 \rightarrow \{1, 4, 6, 7\} \mid \{2, 3, 5, 8\}$$

$$n = 11 \rightarrow \{1, 3, 4, 5, 9, 11\} \mid \{2, 6, 7, 8, 10\}$$

$$n = 12 \rightarrow \{1, 3, 7, 8, 9, 11\} \mid \{2, 4, 5, 6, 10, 12\}$$

Pre $n = 15$ existuje 7 perfektných ohodnotení, pre $n = 16$ existuje 12 perfektných ohodnotení a pre väčšie n tieto hodnoty rastú.

Veta 3.1.1.8. *Vrcholovo superbimagický kompletný bipartitný graf s n vrcholmi existuje práve vtedy, keď $n = 4k$ alebo $n = 4k - 1$ pre $k \geq 2$.*

Dôkaz. Najprv dokážeme, že ak $n = 4k$ alebo $n = 4k - 1, k \geq 2$, tak existuje vrcholovo superbimagický kompletný bipartitný graf, ktorý má n vrcholov. Stačí nám dokázať, že dané tvrdenie platí pre všetky n tvaru $8k - 1, 8k, 8k + 3, 8k + 4$. To urobíme matematickou indukciou vzhľadom na k . Pre $k = 1$ existujú vyhovujúce ohodnotenia (uvedené vo vete 1.7).

Indukčný krok je potom jednoduchý. Uvedieme ho pre prípad $n = 8k$, ostatné z nich sú analogické. Predpokladajme, že pre $n = 8k$ existuje superbimagické ohodnotenie. Pre $n = 8(k + 1)$ ho zostrojíme nasledovne:

- 1) vezmeme superbimagické ohodnotenie pre $n = 8k$ (ostanú nám nepriradené čísla $8k + 1, \dots, 8k + 8$)
- 2) na jednu stranu pridáme čísla $8k + 1, 8k + 4, 8k + 6, 8k + 7$ a na druhú stranu $8k + 2, 8k + 3, 8k + 5, 8k + 8$

Na obe strany sme pridali čísla s rovnakým súčtom aj rovnakým súčtom druhých mocnín. Ak bolo pôvodné ohodnotenie superbimagické, tak aj nové ohodnotenie pre $n = 8(k + 1)$ je superbimagické (čbtd).

Ak $n = 4k + 1$ alebo $n = 4k + 2, k \in \mathbb{N}$, tak požadovaný graf neexistuje. Predpokladajme sporom, že taký graf existuje. Potom sa množina $\{1, 2, \dots, n\}$ dá rozdeliť na dve disjunktné podmnožiny s rovnakým súčtom aj súčtom druhých mocnín. Súčet tejto množiny je $\frac{n(n+1)}{2}$. Každá podmnožina by teda musela mať súčet $\frac{n(n+1)}{4}$. Lenže ak $n = 4k + 1$ alebo $n = 4k + 2, k \in \mathbb{N}$, tak výraz $\frac{n(n+1)}{4}$ nie je celé číslo, čo je spor. \square

Veta 3.1.1.9. *Nech G je vrcholovo bimagický graf. Nech e je most v G . Nech G_1, G_2 sú komponenty, ktoré vzniknú odobraním e z G . Potom ???.*

Hypotéza 3.1.1.1. *Existuje graf, ktorý je vrcholovo bimagický a nie je kompletný bipartitný?*

3.1.2 Hranovo bimagické grafy

Definícia 3.1.2.1. *Nech G je súvislý jednoduchý netriviálny graf. Ak existuje hranové ohodnotenie grafu G také, že platí:*

1. hranám sú priradené navzájom rôzne kladné celé čísla
 2. súčet incidentných hrán každého vrcholu je rovnaký
 3. súčet druhých mocnín incidentných hrán každého vrcholu je rovnaký
- tak G nazveme **hranovo bimagickým grafom**.

Jeden z hranovo bimagických grafov je cesta na dvoch vrcholoch (s ľubovoľným kladným ohodnotením). Zaujímavá skupina potenciálne hranovo bimagických grafov je $K_{n,n}$: sú ekvivalentné semibimagickým štvorcom veľkosti $n \times n$. A keďže už poznáme semibimagické štvorce veľkosti 4×4 a väčšie, tak $K_{n,n}$ je hranovo bimagický pre $n \geq 4$.

Veta 3.1.2.1. *Nech G je hranovo bimagický graf, ktorý má aspoň tri vrcholy. Potom G neobsahuje vrchol stupňa 1.*

Dôkaz. Sporom. Nech u je vrchol stupňa 1, v je jeho jediný sused a x je hodnota hrany medzi vrcholmi u, v . Potom podľa u musí platiť, že magický súčet je x . Lenže ak je G súvislý a má aspoň tri vrcholy, tak vrchol v musí mať ešte ďalší susedný vrchol w . Nech y je hodnota hrany medzi vrcholmi v, w . Potom však podľa v musí platiť, že magický súčet je aspoň $x + y > x$, čo je spor. \square

Veta 3.1.2.2. *Nech G je hranovo bimagický graf. Potom G neobsahuje vrchol stupňa 2.*

Dôkaz. Sporom. Nech u je vrchol stupňa 2. Označme jeho susedov v, w . Nech b, c sú ohodnotenia hrán medzi u, v , resp. u, w . Nech a_1, a_2, \dots, a_n sú ohodnotenia hrán, ktoré sú incidentné s w okrem hrany uw . Podľa u musí platiť, že magický súčet je $b + c$ a bimagický súčet je $b^2 + c^2$. Podľa w musí platiť, že magický súčet je $c + \sum_{k=1}^n a_k$ a bimagický súčet je $c^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2$. Z toho vyplýva, že by sústava z mocninovej lemy mala riešenie, čo je spor. \square

Dôsledok 3.1.2.1. *Stromy nie sú hranovo bimagické.*

Veta 3.1.2.3. *Nech G je hranovo bimagický graf, ktorý má aspoň tri vrcholy. Nech u, v sú ľubovoľné dva susedné vrcholy. Potom $\max\{d(u), d(v)\} \geq 4$.*

Dôkaz. Sporom. Predpokladajme, že existuje dvojica susedných vrcholov u, v takých, že $\max\{d(u), d(v)\} < 4$. Z dôsledku 2.2 potom vyplýva, že nutne $d(u) = d(v) = 3$. Označme x hodnotenie hrany medzi u, v . Označme y_1, y_2 zvyšné hodnotenia hrán z u a z_1, z_2 zvyšné hodnotenia hrán z v . Podľa u musí platiť, že magický súčet je $x + y_1 + y_2$ a bimagický súčet je $x^2 + y_1^2 + y_2^2$. Podľa v musí platiť, že magický súčet je $x + z_1 + z_2$ a bimagický súčet je $x^2 + z_1^2 + z_2^2$. Teda musí platiť $y_1 + y_2 = z_1 + z_2$ aj $y_1^2 + y_2^2 = z_1^2 + z_2^2$. Z duplikačnej lemy potom vyplýva, že $z_1 = y_1$ alebo $z_1 = y_2$, čo je spor s tým, že hranám budú priradené navzájom rôzne čísla. \square

Dôsledok 3.1.2.2. *Kubické grafy nie sú hranovo bimagické.*

Veta 3.1.2.4. *Nech G je hranovo bimagický regulárny graf. Potom existuje hranovo bimagické ohodnotenie grafu G také, že jeho najmenšia hodnota je 1.*

Dôkaz. Podobný ako dôkaz vety 1.7, akurát konštantu neodpočítame od ohodnotení vrcholov, ale od ohodnotení hrán. \square

Veta 3.1.2.5. *Existuje graf, ktorý je hranovo bimagický a nie je kompletný bipartitný.*

Dôkaz. Nech G je hranovo bimagický kompletný bipartitný regulárny graf s nejakým ohodnotením. Nech e je hrana, ktorá má najmenšiu hodnotu. Keďže je regulárny, tak podľa posunovej lemy môžeme od všetkých hrán odrátať hodnotu hrany e . Tým dostaneme hranovo bimagický kompletný bipartitný graf, ktorý má práve jednu nulovú hranu e . Zjavne vieme túto hranu z grafu odstrániť a magická aj bimagická podmienka ostane zachovaná. Graf $G - e$ je teda hranovo bimagický a pritom nie je kompletný bipartitný. \square

Definícia 3.1.2.2. *Nech G je hranovo bimagický graf s n vrcholmi. Ak sú hranám priradené čísla z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, tak G nazveme **hranovo superbimagickým grafom**.*

Georges Pfeffermann našiel v 19. storočí bimagický štvorec veľkosti 8×8 , v ktorom použil všetky čísla z množiny $\{1, 2, \dots, 64\}$. Vieme teda, že existuje hranovo superbimagický graf - je ním kompletný bipartitný graf na 8 vrchoch.

Hypotéza 3.1.2.1. *Existuje graf, ktorý je hranovo bimagický a nie je kompletný bipartitný alebo kompletný bipartitný bez jednej hrany?*

3.2 Multiplikatívne magické grafy

3.2.1 Vrcholovo multiplikatívne magické grafy

Definícia 3.2.1.1. *Nech G je súvislý jednoduchý netriviálny graf. Ak existuje vrcholové ohodnotenie grafu G také, že platí:*

1. *vrcholom sú priradené navzájom rôzne kladné celé čísla*
2. *súčet susedov každého vrcholu je rovnaký*
3. *súčin susedov každého vrcholu je rovnaký*

*tak G nazveme **vrcholovo multiplikatívnym magickým grafom**.*

Veta 3.2.1.1. *Nech G je vrcholovo multiplikatívny magický graf. Ak G obsahuje dvojicu vrcholov stupňa 1, potom majú spoločného suseda.*

Dôkaz. rovnaký ako dôkaz vety 1.1 □

Dôsledok 3.2.1.1. *Jediný strom, ktorý je vrcholovo multiplikatívny magický, je $K_{1,3}$.*

Dôkaz. Z vety 3.1 vyplýva, že jediným stromom, ktorý môže byť vrcholovo multiplikatívnym magickým, je $K_{1,n}$ pre nejaké $n \in \mathbb{N}$. Nech v je koreň tohto stromu a v_1, \dots, v_n sú jeho listy. Nech b je hodnota koreňa a a_1, \dots, a_n sú hodnoty jeho listov. Podľa v má graf magický súčet $\sum_{k=1}^n a_k$ a podľa v_1 má graf magický súčet b . Podľa v má graf súčin $\prod_{k=1}^n a_k$ a podľa v_1 má graf súčin b . To odpovedá sústave z mocninovej lemy, ktorá má jediné riešenie ($n = 3, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, b = 6$). Z toho vyplýva, že iba $K_{1,3}$ je multiplikatívny magický. □

Veta 3.2.1.2. *Nech G je vrcholovo multiplikatívny magický graf. Potom majú všetky vrcholy stupňa 2 rovnakú množinu susedov.*

Dôkaz. rovnaký ako dôkaz vety 1.2, akurát použijeme multiplikatívny súčet a nie bi-magický □

Veta 3.2.1.3. *Nech G je vrcholovo multiplikatívny magický graf. Potom má každá dvojica nesusedných vrcholov stupňa 3 buď rovnakú množinu susedov, alebo nemá spoločného suseda.*

Dôkaz. rovnaký ako dôkaz vety 1.3, akurát použijeme multiplikatívny súčet a nie bi-magický □

Veta 3.2.1.4. *Kompletný bipartitný graf nemôže byť vrcholovo multiplikatívny super-magický.*

Dôkaz. Sporom. Nech G je kompletný bipartitný a vrcholovo multiplikatívny super-magický graf s n vrcholmi. Nech p je najväčšie prvočíslo, ktoré neprevyšuje n . Toto prvočíslo sa môže vyskytovať iba v jednej partícii. To však znamená, že súčin oboch partícií nemôže byť rovnaký (jeden súčin bude mať p vo svojom rozklade a druhý nie). □

Veta 3.2.1.5. *Pre každé $i, j \in \mathbb{N}, 2 \leq i \leq j, (i, j) \neq (2, 2)$ platí, že graf $K_{i,j}$ je vrcholovo multiplikatívny magický.*

Dôkaz. Indukciou vzhľadom na i, j . Najprv ukážeme, že grafy $K_{i,j}, i \in \{2, 3\}, K_{4,4}$ a $K_{4,5}$ sú vrcholovo multiplikatívne magické.

Grafy $K_{2,3}, K_{2,4}, K_{4,4}$ a $K_{4,5}$ sú vrcholovo multiplikatívne magické, pretože:
 pre graf $K_{2,3}$ stačí priradiť jednej partícii prvky 5, 12 a druhej partícii prvky 1, 6, 10
 pre graf $K_{2,4}$ stačí priradiť jednej partícii prvky 9, 16 a druhej partícii prvky 1, 2, 4, 18
 pre graf $K_{4,4}$ stačí priradiť jednej partícii prvky 1, 5, 6, 12 a druhej partícii prvky

2, 3, 4, 15

pre graf $K_{4,5}$ stačí priradiť jednej partícii prvky 2, 10, 20, 27 a druhej partícii prvky 1, 3, 6, 24, 25

Graf $K_{2,n}$ pre $n \geq 5$ je vrcholovo multiplikatívny magický - stačí do prvej partície dať prvky $(n-1)! + 1$ a $(n-1)!((n-1)! + 1 - \frac{n(n-1)}{2})$ a do druhej partície prvky $1, 2, \dots, n-2, n-1, ((n-1)! + 1)((n-1)! + 1 - \frac{n(n-1)}{2})$.

Graf $K_{3,n}$ pre $n \geq 3$ je vrcholovo multiplikatívny magický - stačí do prvej partície dať prvky $1, n! + 1$ a $n!(n! + 3 - \frac{n(n+1)}{2})$ a do druhej partície prvky $2, \dots, n-1, n, (n! + 1)(n! + 3 - \frac{n(n+1)}{2})$.

Teraz dokážeme, že ak je $K_{i,j}$ vrcholovo multiplikatívny magický, tak je aj $K_{i+2,j+3}$. Do jednej partície stačí pridať prvky $2xy, 2xy - x - y$ a do druhej prvky $2(2xy - x - y), x, y$, pričom $x, y \in \mathbb{N}$ zvolíme dostatočne veľké (aby boli prvky navzájom rôzne). \square

3.2.2 Hranovo multiplikatívne magické grafy

Definícia 3.2.2.1. *Nech G je súvislý jednoduchý netriviálny graf. Ak existuje hranové ohodnotenie grafu G také, že platí:*

1. *hranám sú priradené navzájom rôzne kladné celé čísla*
2. *súčet incidentných hrán každého vrcholu je rovnaký*
3. *súčin incidentných hrán každého vrcholu je rovnaký*

*tak G nazveme **hranovo multiplikatívnym magickým grafom**.*

Veta 3.2.2.1. *Nech G je hranovo multiplikatívny magický graf, ktorý má aspoň tri vrcholy. Potom G neobsahuje vrchol stupňa 1.*

Dôkaz. rovnaký ako dôkaz vety 2.1 \square

3.3 Magické obdĺžniky

3.3.1 Bimagické obdĺžniky

Definícia 3.3.1.1. *Nech A je matica veľkosti $m \times n$. Ak platí:*

1. *prvky matice sú navzájom rôzne kladné celé čísla*
2. *súčet prvkov v každom riadku je konštantný*
3. *súčet prvkov v každom stĺpci je konštantný*
4. *súčet druhých mocnín prvkov v každom riadku je konštantný*
5. *súčet druhých mocnín prvkov v každom stĺpci je konštantný*

*tak A nazveme **bimagickým obdĺžnikom**.*

Každý hranovo bimagický kompletný bipartitný graf sa dá jednoducho transformovať na bimagický obdĺžnik.

Veta 3.3.1.1. *Nech A je bimagický obdĺžnik. Potom ho vieme transformovať na taký bimagický obdĺžnik B s potenciálne nekladnými prvkami, že magický súčet v jeho riadku aj stĺpci je rovný 0.*

Dôkaz. Nech S_r, S_s sú súčty v riadku a stĺpci v bimagickom obdĺžniku A veľkosti $m \times n$. Keďže A má m riadkov a n stĺpcov, musí platiť $mS_r = nS_s$, z čoho vyplýva $\frac{m}{n} = \frac{S_s}{S_r}$. Teda $S_s = km$ a $S_r = kn$ pre nejaké $k \in \mathbb{N}$. Ak od každého prvku v A odpočítame k , vytvoríme tým nový obdĺžnik B . Zjavne B má súčty v riadku aj stĺpci nulové. Z posunovej lemy zároveň vyplýva, že ak boli predtým magic ké aj bimagické súčty konštantné, tak budú konštantné aj v B . Teda B je bimagický obdĺžnik s potenciálne nekladnými prvkami. \square

Veta 3.3.1.2. *Nech A je bimagický obdĺžnik veľkosti $m \times n$. Potom $m, n \geq 3$ alebo $(m, n) = (1, 1)$.*

Dôkaz. Ak $m = 1$, tak má obdĺžnik len jeden riadok. Ak majú byť jeho súčty v stĺpci rovnaké, musí byť v každom stĺpci rovnaké číslo. Ak $n \geq 2$, obdĺžnik by obsahoval duplicitné prvky, čo je spor. Z toho vyplýva, že nutne $n = 1$.

Ak $m = 2$, tak z predošlého odstavca vieme, že $n \geq 2$. Tým dostaneme pre dva riadky a dva stĺpce rovnicu z duplikačnej lemy, z čoho vyplýva, že obdĺžnik by obsahoval duplicitné prvky, čo je spor. \square

Veta 3.3.1.3. *Nech A je bimagický obdĺžnik veľkosti $3 \times n$. Potom ho vieme transformovať na bimagický obdĺžnik B , pre ktorý platí, že v každom jeho stĺpci je aspoň jedno nepárne číslo.*

Dôkaz. Predpokladajme, že v A existuje stĺpec, ktorého všetky tri prvky sú párne čísla. Z toho vyplýva, že ich bimagický súčet je deliteľný 4. Kedy môže byť súčet $a^2 + b^2 + c^2$ deliteľný 4? Prvky a, b, c musia byť tvaru $4k$ alebo $4k + 2$, lebo ak by boli ľubovoľné z nich tvaru $4k + 1$ alebo $4k + 3$, ich druhá mocnina by dávala zvyšok 1 po delení 4 - výraz $a^2 + b^2 + c^2$ by už nemohol byť deliteľný 4. Z toho vyplýva, že každý stĺpec v A obsahuje iba párne prvky. Vieme ho preto transformovať na bimagický obdĺžnik B jednoducho tak, že každý prvok vydáme 2 (alebo mocninou 2, tak aby B obsahovalo nepárne prvky). \square

3.3.2 Multiplikatívne magické obdĺžniky

Definícia 3.3.2.1. *Nech A je matica veľkosti $m \times n$. Ak platí:*

1. *prvky matice sú navzájom rôzne kladné celé čísla*

2. *súčet prvkov v každom riadku je konštantný*
 3. *súčet prvkov v každom stĺpci je konštantný*
 4. *súčin prvkov v každom riadku je konštantný*
 5. *súčin prvkov v každom stĺpci je konštantný*
- tak A nazveme **multiplikatívnym magickým obdlžnikom**.*

Každý hranovo multiplikatívny magický kompletný bipartitný graf sa dá jednoducho transformovať na multiplikatívny magický obdlžnik.

Veta 3.3.2.1. *Nech A je multiplikatívny magický obdlžnik veľkosti $m \times n$. Potom $m, n \geq 3$ alebo $(m, n) = (1, 1)$.*

Dôkaz. rovnaký ako dôkaz vety 5.2

□

Kapitola 4

Implementácia

V tejto kapitole popíšeme implementáciu algoritmického prehľadávania potenciálnych riešení pre vybrané otvorené problémy.

4.1 Magické štvorce

4.1.1 Magické štvorce druhého stupňa

Algoritmus 4.1.1.1. *Vstupom sú navzájom rôzne kladné celé čísla $u_1, v_1, u_2, v_2 \in \mathbb{N}$. Výstupom je magický štvorec veľkosti 3×3 , ktorého aspoň 7 prvkov sú druhé mocniny prirodzených čísel. Algoritmus využije tri parametrické vzorce z vety 1.2, ktoré generujú vyhovujúce magické štvorce.*

$$p \leftarrow (u_1^2 + v_1^2)(u_2^2 + 2u_2v_2 - v_2^2)$$

$$q \leftarrow (u_1^2 + 2u_1v_1 - v_1^2)(u_2^2 + v_2^2)$$

$$r \leftarrow (-u_1^2 + 2u_1v_1 + v_1^2)(u_2^2 + v_2^2)$$

$$s \leftarrow (u_1^2 + v_1^2)(-u_2^2 + 2u_2v_2 + v_2^2)$$

$$t \leftarrow (u_1^2 + v_1^2)(u_2^2 + v_2^2)$$

if aspoň dva z $3t^2 - p^2 - q^2, 3t^2 - p^2 - r^2, 3t^2 - q^2 - s^2, 3t^2 - r^2 - s^2$ sú štvorce **then**
 return prvý štvorec

if aspoň dva z $2(r^2 + s^2), 2(q^2 + s^2), 2(p^2 + r^2), 2(p^2 + q^2)$ sú štvorce **then**
 return druhý štvorec

if aspoň dva z $3t^2 - p^2 - q^2, r^2 + s^2 - p^2, p^2 + q^2 - s^2, 3t^2 - r^2 - s^2$ sú štvorce **then**
 return tretí štvorec

if aspoň dva z $3t^2 - p^2 - r^2, q^2 + s^2 - p^2, p^2 + r^2 - s^2, 3t^2 - q^2 - s^2$ sú štvorce **then**
 return štvrtý štvorec

Algoritmus 4.1.1.2. *Na vstupe dostaneme kladné celé číslo $x \in \mathbb{N}$. Výstupom je magický štvorec veľkosti 3×3 , ktorého aspoň 7 prvkov sú druhé mocniny prirodzených*

čísel. Algoritmus využije dva parametrické vzorce z vety 1.3, ktoré generujú vyhovujúce magické štvorce.

```

 $x_1 \leftarrow 8x^8 - 49x^6 + 6x^4 - 16x^2 + 2$ 
 $x_2 \leftarrow 8x^8 - x^6 + 30x^4 - 40x^2 + 2$ 
 $x_3 \leftarrow 8x^8 - 25x^6 + 18x^4 - 28x^2 + 2$ 
if  $x_1(x^2 - 2)$  je štvorec then
    return prvý štvorec
if  $x_2(x^2 - 2)$  je štvorec then
    return prvý štvorec
if  $x_3(x^2 - 2)$  je štvorec then
    return prvý štvorec
if  $\frac{4x^{10}-31x^8+76x^6+76x^4-31x^2+4}{2}$  je štvorec then
    return druhý štvorec
if  $\frac{4x^{10}+17x^8+4x^6+4x^4+17x^2+4}{2}$  je štvorec then
    return druhý štvorec
if  $\frac{4x^{10}+65x^8-68x^6-68x^4+65x^2+4}{2}$  je štvorec then
    return druhý štvorec

```

4.1.2 Bimagické štvorce

Algoritmus 4.1.2.1. Na vstupe dostaneme kladné celé číslo $h \in \mathbb{N}$. Výstupom je bimagický štvorec veľkosti 5×5 s potenciálne zápornými prvkami.

Pseudokód 4.1.2.1. *def ohodnot(h):*

pre všetky navzájom rôzne kladné a, b, c také, že $a^2 + b^2 + c^2 < h$

pridám do asociatívneho poľa D trojicu (a, b, c) pre kľúč $a^2 + b^2 + c^2$

po skončení pre každý kľúč k v D

pre každé tri trojice $(a, b, c), (d, e, f), (g, h, i)$ v $D[k]$

zostroj štvorice $(a + b - c, a - b + c, -a + b + c, -a - b - c), (d + e - f, d - e + f, -d + e + f, -d - e - f), (g + h - i, g - h + i, -g + h + i, -g - h - i)$

prejdi všetky možnosti ako z každej štvorice vybrať jeden prvok (dostaneme prvky p, q, r)

rieš $(s + n + p + q + r)(s - n + p + q + r) = 4(pq + pr + qr + p^2 + q^2 + r^2)$ pre celé s, n

pre každé riešenie dopočítaj $x = \frac{s-(p+q+r)+-n}{2}, y = s - x - (p + q + r)$ ak x je celé

ak sú všetky vybraté čísla navzájom rôzne

poznač si x, y, s pre dané p, q, r

po skončení prejdi disjunktné $(p_1, q_1, r_1), (p_2, q_2, r_2), (p_3, q_3, r_3), (p_4, q_4, r_4)$ so spoločným s

na základe magického a bimagického súčtu vyplň postupne celý štvorec

ak si došiel na koniec, vypíš vzniknutý štvorec

```

 $D_1 = dict()$ 
 $D_2 = dict()$ 
for all  $a, b, c \in \mathbb{N}; a < b < c; a^2 + b^2 + c^2 < h$  do
    pridaj  $(a, b, c)$  do  $D_1[a^2 + b^2 + c^2]$ 
for all  $k \in D_1$  do
    for all  $(a, b, c), (d, e, f), (g, h, i) \in D_1[k]$  do
         $diagonala1 \leftarrow \{a + b - c, a - b + c, -a + b + c, -a - b - c\}$ 
         $stred \leftarrow \{d + e - f, d - e + f, -d + e + f, -d - e - f\}$ 
         $diagonala2 \leftarrow \{g + h - i, g - h + i, -g + h + i, -g - h - i\}$ 
        for all  $p \in diagonala1, q \in stred, r \in diagonala2$  do
            faktorizáciou nájdí všetky  $s, n \in \mathbb{Z}$ , pre ktoré platí

$$(s + n + p + q + r)(s - n + p + q + r) = 4(pq + pr + qr + p^2 + q^2 + r^2)$$

            pre každé dopočítaj  $x = \frac{s - (p + q + r) \pm n}{2}, y = s - x - (p + q + r)$ 
            if  $x \in \mathbb{Z}$  and  $diagonala1, stred, diagonala2, \{x, y, s\}$  sú disjunktné then
                pridaj  $(diagonala1.index, stred.index, diagonala2.index, x, y)$  do  $D_2[s]$ 
for all  $k \in D_2$  do
    for all  $(p_1, q_1, r_1), (p_2, q_2, r_2), (p_3, q_3, r_3), (p_4, q_4, r_4) \in D_2[k]$  do

```

Algoritmus 4.1.2.2. Na vstupe dostaneme kladné celé číslo $h \in \mathbb{N}$. Výstupom je bimagický štvorec veľkosti 5×5 .

```

 $D_1 = dict()$ 
 $D_2 = dict()$ 
for  $a \leftarrow 0, h$  do
    for  $b \leftarrow a + 1, h$  do
        for  $c \leftarrow b + 1, h$  do
             $s \leftarrow a + b + c$ 
             $t \leftarrow a^2 + b^2 + c^2$ 
            pridaj  $(a, b, c)$  do  $D_1[t]$ 
            pridaj  $(a, b, c)$  do  $D_2[(s, t)]$ 
for all  $k \in D_1$  do
    for all  $(a, b, c), (d, e, f) \in D_1[k]$  do
         $x = \frac{(a + b + c) - (d + e + f)}{2}$ 
        for  $p \leftarrow 0, h$  do
            for all  $(g, h, i) \in D_2[(a + b + c - x) + p, (a^2 + b^2 + c^2 - x^2) + p^2]$  do
                if  $a, b, c, d, e, f, g, h, i, x, -x, p$  sú navzájom rôzne then
                    for all permutácie  $(a, b, c, -x), (d, e, f, x), (g, h, i)$  do
                        ulož  $p$  na prostredný prvok štvorca

```

```

ulož permutácie  $(a, b, c, -x)$  a  $(d, e, f, x)$  na zvyšné miesta na diagoná-
lach
ulož permutáciu  $(g, h, i)$  na druhé, tretie a štvrté miesto v poslednom
riadku
na základe magického a bimagického súčtu vyplň postupne celý štvorec
if vzniknutý štvorec je bimagický then
    print(stvorec)

```

4.1.3 Multiplikatívne magické štvorce

Algoritmus 4.1.3.1. *Na vstupe dostaneme ????. Výstupom je semimultiplikatívny štvorec veľkosti 5×5 alebo 6×6 , ktorý má čo najbližšie k semimagickej vlastnosti (odchylky súčtov v riadkoch a stĺpcoch sú najmenšie možné).*

Pseudokód 4.1.3.1. ???

Algoritmus 4.1.3.2. *Na vstupe dostaneme kladné celé číslo h . Výstupom je multiplikatívny štvorec veľkosti 6×6 , ktorý má čo najbližšie k magickej vlastnosti (odchylky súčtov v riadkoch, stĺpcoch a diagonálach sú najmenšie možné) a jeho prvky nemajú vyššieho prvočíselného deliteľa ako h .*

Pseudokód 4.1.3.2. *def ohodnot(h):*

```

ulož si všetky vzorky v štvorci veľkosti  $6 \times 6$ 
ulož si všetky kombinácie vzoriek, ktoré disjunktne vyplnia celý štvorec
vygeneruj náhodnú postupnosť prvočíselných vzoriek a vypočítaj ich súčin
ak obsahuje štvorec navzájom rôzne prvky
vymeň dve hodnoty vzoriek ak sa tým zmenší odchylka
ak nie, nahraď jednu hodnotu vzorky inou hodnotou ak sa tým zmenší odchylka
ak nie, posuň hodnoty vzoriek o vzdialenosť neprevyšujúcu rozpätie ak sa tým zmenší
odchylka
ak nie a menšia odchylka doteraz nebola nájdená, vypíš štvorec s odchylkou

```

vzorky = [všetky vzorky v štvorci veľkosti 6×6 ako 6-tice]

S = []

for all $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \in$ vzorky **do**

if $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ vyplňajú celý štvorec **then**

 pridaj $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ do S

H = []

???????

4.2 Magické grafy

4.2.1 Vrcholovo bimagické grafy

Algoritmus 4.2.1.1. Na vstupe dostaneme ľubovoľný súvislý graf. Výstupom je odpoveď, či má graf šancu byť vrcholovo bimagickým. Pre každú dvojicu jeho vrcholov overíme, či spĺňa podmienku z vety 1.4. Ak existuje dvojica vrcholov, pre ktorú graf nevyhovuje niektorej z podmienok (i) - (iii), tak môžeme s istotou povedať, že nie je vrcholovo bimagický.

```

for  $v_1, v_2 \in V(G)$  do
   $x \leftarrow |\{susedia[v_1]\} - \{susedia[v_2]\}|$ 
   $y \leftarrow |\{susedia[v_2]\} - \{susedia[v_1]\}|$ 
  if  $xy = 0$  and  $x + y \geq 0$  then
    return  $G$  nie je vrcholovo bimagický
  if  $x = 1$  or  $y = 1$  then
    return  $G$  nie je vrcholovo bimagický
  if  $x = 2$  and  $y = 2$  then
    return  $G$  nie je vrcholovo bimagický

```

Algoritmus 4.2.1.2. Na vstupe dostaneme čísla $i, j \in \mathbb{N}$. Výstupom má byť vrcholové bimagické ohodnotenie grafu $K_{i,j}$. Algoritmus bude replikovať indukčný dôkaz vety 1.5.

```

if  $i > j$  then
  return ohodnot( $j, i$ )
if  $i \leq 1$  or ( $i = 2$  and  $j = 2$ ) then
  return nedá sa ohodnotiť
if  $i = 2$  then
  return  $(\frac{j(j-1)}{2} + 1, \frac{j(j-1)(3j^2-7j+14)}{24}), (1, \dots, j-1, \frac{j(j-1)(3j^2-7j+14)}{24} + 1)$ 
if  $i = 3$  then
  return  $(1, \frac{j(j+1)}{2} - 1, \frac{j(j+1)(3j^2-j-14)}{24} + 1), (2, \dots, j, \frac{j(j+1)(3j^2-j-14)}{24} + 2)$ 
if  $i = 4$  and  $j = 4$  then
  return  $(1, 4, 6, 7), (2, 3, 5, 8)$ 
if  $i = 4$  and  $j = 5$  then
  return  $(2, 12, 13, 15), (1, 4, 8, 10, 19)$ 
 $H \leftarrow$  ohodnot( $i - 2, j - 3$ )
 $m \leftarrow \max(H) + 1$ 
na ľavú stranu  $H$  pridaj  $4m, 5m$ 
na pravú stranu  $H$  pridaj  $m, 2m, 6m$ 
return  $H$ 

```

Algoritmus 4.2.1.3. Na vstupe dostaneme číslo $n \in \mathbb{N}$. Výstupom algoritmu má byť vrcholové superbimagické ohodnotenie kompletného bipartitného grafu s n vrcholmi. Algoritmus bude replikovať indukčný dôkaz vety 1.9.

```

if  $n < 7$  then
    return nedá sa ohodnotiť
if  $n \bmod 4 = 1$  or  $n \bmod 4 = 2$  then
    return nedá sa ohodnotiť
if  $n = 7$  then
    return  $(1, 2, 4, 7), (3, 5, 6)$ 
if  $n = 8$  then
    return  $(1, 4, 6, 7), (2, 3, 5, 8)$ 
if  $n = 11$  then
    return  $(1, 3, 4, 5, 9, 11), (2, 6, 7, 8, 10)$ 
if  $n = 12$  then
    return  $(1, 3, 7, 8, 9, 11), (2, 4, 5, 6, 10, 12)$ 
 $H \leftarrow \text{ohodnot}(n - 8)$ 
for  $x \leftarrow 1, 8$  do
    if  $x \in \{1, 4, 6, 7\}$  then
        pridaj  $(n - 8) + x$  na ľavú stranu H
    else
        pridaj  $(n - 8) + x$  na pravú stranu H
return H

```

4.2.2 Vrcholovo multiplikatívne magické grafy

Algoritmus 4.2.2.1. Na vstupe dostaneme kompletný bipartitný graf $K_{i,j}$. Výstupom má byť vrcholové multiplikatívne magické ohodnotenie tohto grafu. Algoritmus bude replikovať indukčný dôkaz vety 1.5.

```

if  $i > j$  then
    return ohodnot( $j, i$ )
if  $i \leq 1$  or ( $i = 2$  and  $j = 2$ ) then
    return nedá sa ohodnotiť
if  $i = 2$  and  $j = 3$  then
    return  $(5, 12), (1, 6, 10)$ 
if  $i = 2$  and  $j = 4$  then
    return  $(9, 16), (1, 2, 4, 18)$ 
if  $i = 2$  then

```



```

return  $((j-1)! + 1, (j-1)!((j-1)! + 1 - \frac{j(j-1)}{2}), (1, \dots, j-1, ((j-1)! + 1)((j-1)! + 1 - \frac{j(j-1)}{2})))$ 
if  $i = 3$  then
  return  $(1, j! + 1, j!(j! + 3 - \frac{j(j+1)}{2}), (2, \dots, j, (j! + 1)(j! + 3 - \frac{j(j+1)}{2})))$ 
if  $i = 4$  and  $j = 4$  then
  return  $(1, 5, 6, 12), (2, 3, 4, 15)$ 
if  $i = 4$  and  $j = 5$  then
  return  $(2, 10, 20, 27), (1, 3, 6, 24, 25)$ 
 $H \leftarrow \text{ohodnot}(i - 2, j - 3)$ 
 $x \leftarrow \max(H) + 1$ 
 $y \leftarrow \max(H) + 2$ 
na ľavú stranu H pridaj  $2xy, 2xy - x - y$ 
na pravú stranu H pridaj  $2(2xy - x - y), x, y$ 
return H

```

4.3 Magické obdĺžniky

4.3.1 Bimagické obdĺžniky

Algoritmus 4.3.1.1. Na vstupe dostaneme číslo $n, h \in \mathbb{N}, n \geq 4$. Výstupom má byť bimagický obdĺžnik veľkosti $3 \times n$, ktorého prvky sú kladné celé čísla neprevyšujúce h . Náš algoritmus predpokladá, že najmenší prvok obdĺžnika je 1. Pre každú trojicu rôznych celých čísel a, b, c väčších ako 1 si predpočíta ich magický a bimagický súčet. Ak medzi súčtami platí istý vzťah, potom je možné nájsť celé čísla d, e tak, aby mohli byť trojice (a, b, c) a $(1, d, e)$ použité ako stĺpce v tom istom bimagickom obdĺžniku. Pre každú takú trojicu (a, b, c) si algoritmus uloží hodnoty $(1, d, e)$ ako kľúč do asociatívneho poľa. Potom toto pole prejde a v každom kľúči vyberie $n-1$ rôznych zapamätaných trojíc (ku ktorým pridá trojicu v kľúči).

```

 $D = \text{dict}()$ 
for  $a \leftarrow 2, h$  do
  for  $b \leftarrow a + 1, h$  do
    for  $c \leftarrow b + 1, h$  do
       $s \leftarrow a + b + c$ 
       $t \leftarrow a^2 + b^2 + c^2$ 
      if  $2t - (s - 1)^2 - 2$  je štvorec then
        pridaj  $(a, b, c)$  do  $D[(1, \frac{s-1+\sqrt{2t-(s-1)^2-2}}{2}, \frac{s-1-\sqrt{2t-(s-1)^2-2}}{2})]$ 
for all  $k \in D$  do
  for all  $(a_1, b_1, c_1), \dots, (a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}) \in D[k]$  do

```

```

if  $1, k[1], k[2], a_1, b_1, c_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}$  sú navzájom rôzne then
  for all permutácie  $(a_i, b_i, c_i), i \in \{1, \dots, n-1\}$  do
    vytvor obdĺžnik s prvým stĺpcom  $1, k[1], k[2]$  a  $j$ -tým stĺpcom  $a_{j-1}, b_{j-1}, c_{j-1}$ 
  pre  $j \in \{2, \dots, n\}$ 
    if obdĺžnik má bimagické riadky then
      print(obdĺžnik)

```

Algoritmus 4.3.1.2. Na vstupe dostaneme čísla $n, s \in \mathbb{N}, n \geq 4$. Výstupom má byť bimagický obdĺžnik veľkosti $3 \times n$, ktorého prvky sú kladné celé čísla, pričom ich súčet v každom stĺpci je s . Náš algoritmus predpokladá, že najmenší prvok obdĺžnika je 1. Pre každú trojicu rôznych celých čísel a, b, c ($1 < a < b < c, a + b + c = s$) si predpočíta ich bimagický súčet. Ak platí istý vzťah, potom je možné nájsť celé čísla d, e tak, aby mohli byť trojice (a, b, c) a $(1, d, e)$ použité ako stĺpce v tom istom bimagickom obdĺžniku. Pre každú takú trojicu (a, b, c) si algoritmus uloží hodnoty $(1, d, e)$ ako kľúč do asociatívneho poľa. Potom toto pole prejde a v každom kľúči vyberie $n-1$ rôznych zapamätaných trojíc (ku ktorým pridá trojicu v kľúči).

```

 $D = \text{dict}()$ 
for  $a \leftarrow 2, \lceil \frac{s}{3} \rceil$  do
  for  $b \leftarrow a + 1, \lceil \frac{s-a}{2} \rceil$  do
     $c \leftarrow s - a - b$ 
     $t \leftarrow a^2 + b^2 + c^2$ 
    pokračuj rovnako ako predchádzajúci algoritmus

```

Algoritmus 4.3.1.3. : Na vstupe dostaneme číslo $n \in \mathbb{N}$. Výstupom má byť bimagický obdĺžnik veľkosti $3 \times n$, ktorého prvky sú celé (potenciálne záporné) čísla v absolútnej hodnote neprevyšujúce h . Náš algoritmus predpokladá, že bimagický obdĺžnik má v každom riadku aj stĺpci nulový súčet. Trojica prvkov v každom stĺpci je preto v tvare $a, b, -a - b$. Pre každú dvojicu celých čísel a, b si algoritmus uloží hodnotu výrazu $a^2 + b^2 + (-a - b)^2$ ako kľúč do asociatívneho poľa. Potom toto pole prejde a v každom kľúči vyberie n rôznych zapamätaných dvojíc.

```

 $D = \text{dict}()$ 
for  $a \leftarrow 0, h$  do
  for  $b \leftarrow -a + 1, a - 1$  do
     $t = a^2 + b^2 + (-a - b)^2$ 
    pridaj  $(a, b)$  do  $D[t]$ 
for all  $k \in D$  do
  for all  $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n) \in D[k]$  do
    if  $a_1, b_1, -a_1 - b_1, \dots, a_n, b_n, -a_n - b_n$  sú navzájom rôzne then
      for all permutácie  $(a_i, b_i, -a_i - b_i), i \in \{2, \dots, n\}$  do

```

```

vytvor obdlžnik s j-tym stĺpcom  $a_j, b_j, -a_j - b_j$  pre  $j \in \{1, \dots, n\}$ 
if obdlžnik má bimagické riadky then
    print(obdlžnik)

```

4.3.2 Multiplikatívne magické obdlžníky

Algoritmus 4.3.2.1. : Na vstupe dostaneme čísla $n, h \in \mathbb{N}, n \geq 4$. Výstupom má byť multiplikatívny magický obdlžnik veľkosti $3 \times n$, ktorého prvky sú kladné celé čísla neprevyšujúce h . Vieme, že obdlžnik nemôže obsahovať prvočíslo p , pre ktoré platí $pn > h$ (inak by sme mali nanajvýš $n - 1$ násobkov p , ktoré by sme museli vedieť rozdeliť do n stĺpcov, čo je spor). Náš algoritmus si pre každú trojicu vyhovujúcich rôznych kladných čísel predpočíta ich súčet a súčin a obe hodnoty si uloží ako kľúč do asociatívneho poľa. Potom toto pole prejde a v každom kľúči vyberie n rôznych zapamätaných trojíc.

```

D = dict()
vyhovuju = {x | x ∈ {1, ..., h}, x nie je prvočíslo alebo xn ≤ h}
for all a, b, c ∈ vyhovuju; a < b < c do
    s ← a + b + c
    p ← abc
    pridaj (a, b, c) do D[(s, p)]
for all k ∈ D do
    for all (a1, b1, c1), ..., (an, bn, cn) ∈ D[k] do
        if a1, b1, c1, ..., an, bn, cn sú navzájom rôzne then
            for all permutácie (ai, bi, ci), i ∈ {2, ..., n} do
                vytvor obdlžnik s j-tym stĺpcom aj, bj, cj pre j ∈ {1, ..., n}
                if obdlžnik má multiplikatívne magické riadky then
                    print(obdlžnik)

```

Algoritmus 4.3.2.2. : Na vstupe dostaneme čísla $n, s \in \mathbb{N}, n \geq 4$. Výstupom má byť multiplikatívny magický obdlžnik veľkosti $3 \times n$, ktorého prvky sú kladné celé čísla, pričom ich súčet v každom stĺpci je s . Vieme, že obdlžnik nemôže obsahovať prvočíslo p , pre ktoré platí $pn > s$. Náš algoritmus si pre každú trojicu vyhovujúcich rôznych kladných čísel si ich súčin uloží ako kľúč do asociatívneho poľa. Potom toto pole prejde a v každom kľúči vyberie n rôznych zapamätaných trojíc.

```

D = dict()
vyhovuju = {x | x ∈ {1, ..., s}, x nie je prvočíslo alebo xn ≤ s}
for all a, b ∈ vyhovuju; a < b; a + 2b < s do
    c = s - a - b
    if c ∈ vyhovuju then

```

$p = abc$

pridaj (a, b, c) do $D[p]$

pokračuj rovnako ako predchádzajúci algoritmus

Poznámka 4.3.2.1. *Algoritmy pre multiplikatívne magické obdĺžniky sa dajú obmedziť tak, aby dovoľovali iba konečný počet prvočísel v prvočíselnom rozklade.*

Kapitola 5

Výsledky

V tejto kapitole analyzujeme výsledky algoritmického prehľadávania potenciálnych riešení pre vybrané otvorené problémy.

5.1 Magické štvorce

5.1.1 Magické štvorce druhého stupňa

Výsledok 5.1.1.1. *Pre $u_1, v_1, u_2, v_2 < 1000$ dokážu parametrické vzorce vygenerovať iba jeden magický štvorec veľkosti 3×3 , ktorého aspoň 7 prvkov sú druhé mocniny prirodzených čísel (ten, ktorý poznáme). Dosiahneme ho napr. pre $u_1 = 3, v_1 = 4, u_2 = 2, v_2 = 9$ a vydelením prvkov ich spoločným deliteľom.*

Výsledok 5.1.1.2. *Pre $x = 1$ dostaneme štvorec, ktorého prvky nie sú navzájom rôzne. Pre $1 < x < 10^8$ nedokážu parametrické vzorce vygenerovať magický štvorec veľkosti 3×3 , ktorého aspoň 7 prvkov sú druhé mocniny prirodzených čísel.*

5.1.2 Bimagické štvorce

Výsledok 5.1.2.1. *Pre $h < 12500$ neexistuje bimagický štvorec veľkosti 5×5 . Podarilo sa nájsť štyri magické štvorce veľkosti 5×5 so zápornými prvkami, ktoré majú iba 3 zlé bimagické súčty:*

58	30	−10	−232	−76
−234	−80	44	26	14
160	−18	−230	−74	−68
−198	66	48	−12	−134
−16	−228	−82	62	34

58	30	-10	-232	-76
-234	-80	44	26	14
96	-18	-230	-74	-4
-134	66	48	-12	-198
-16	-228	-82	62	34
58	30	-10	-232	-76
14	-80	44	26	-234
-88	-18	-230	-74	180
-198	66	48	-12	-134
-16	-228	-82	62	34
58	30	-10	-232	-76
14	-80	44	26	-234
-152	-18	-230	-74	244
-134	66	48	-12	-198
-16	-228	-82	62	3

5.1.3 Multiplikatívne magické štvorce

Výsledok 5.1.3.1. *Aproximačná metóda vzorkovaním nenašla žiaden multiplikatívny magický štvorec veľkosti 6×6 pre nízku prvočíselnú hranicu (v našom prípade sme si zvolili $h = 17$). Nasledovný multiplikatívny štvorec mal najmenšie rozpätie súčtov 26:*

150	384	297	78	308	340
352	102	120	220	351	420
330	252	286	450	136	96
459	300	192	336	110	143
156	121	140	306	480	360
112	390	510	176	180	198

5.2 Magické grafy

5.2.1 Vrcholovo bimagické grafy

Výsledok 5.2.1.1. *jediné súvislé grafy s menej ako 10 vrcholmi, ktoré spĺňajú všetky podmienky (a teda môžu byť vrcholovo bimagickými), sú:*

$$K_{2,3}$$

$$K_{2,4}, K_{3,3}$$

$$K_{2,5}, K_{3,4}$$

$$K_{2,6}, K_{3,5}, K_{4,4}, K_{2,3,3}$$

$$K_{2,7}, K_{3,6}, K_{4,5}, K_{2,3,4}, K_{3,3,3}$$

Vieme, že $K_{i,j}$ je vrcholovo bimagický pre $i, j \geq 2, (i, j) \neq (2, 2)$. Môžeme sa ľahko presvedčiť, že aj zvyšné grafy majú vrcholové bimagické ohodnotenie:

$$K_{2,3,3} \rightarrow 11, 13 \mid 1, 8, 15 \mid 3, 5, 16$$

$$K_{2,3,4} \rightarrow 11, 19 \mid 1, 9, 20 \mid 1, 2, 6, 21$$

$$K_{3,3,3} \rightarrow 1, 12, 14 \mid 2, 9, 16 \mid 4, 6, 17$$

5.2.2 Vrcholovo multiplikatívne magické grafy

5.3 Magické obdĺžniky

5.3.1 Bimagické obdĺžniky

Výsledok 5.3.1.1. *Neexistuje bimagický obdĺžnik veľkosti $3 \times n$, ktorého prvky sú kladné celé čísla menšie ako 400.*

Výsledok 5.3.1.2. *Neexistuje bimagický obdĺžnik veľkosti $3 \times n$, ktorého súčet prvkov v riadku je menší ako 384. Podarilo sa nájsť niekoľko magických obdĺžnikov veľkosti 3×6 , 3×8 a 3×10 s bimagickými stĺpcami a jediným nebimagickým riadkom. Najmenší z nich má súčet v stĺpci rovný 144:*

1	3	88	8	93	95
63	56	51	91	11	16
80	85	5	45	40	33

5.3.2 Multiplikatívne magické obdĺžniky

Výsledok 5.3.2.1. *Neexistuje multiplikatívny magický obdĺžnik veľkosti $3 \times n$, ktorého súčet prvkov v riadku je menší ako 4000. Podarilo sa nájsť niekoľko multiplikatívnych obdĺžnikov veľkosti 3×6 a 3×9 s magickými stĺpcami. Najmenší z nich má súčet v stĺpci rovný 485:*

14	294	16	385	60	396
231	15	154	72	392	40
240	176	315	28	33	49

Záver

V tejto kapitole zhrnieme dosiahnuté výsledky z oblasti magických útvarov a vyslovíme hypotézy, ktoré bude možné skúmať v budúcnosti.

Literatúra

- [1] Christian Boyer. Multimagie squares site, 2002. [Citované 2021-01-20] Dostupné z <http://www.multimagie.com>.
- [2] Marián Trenkler. Magic Rectangles. *The Mathematical Gazette*, 83(496):102-105, 1999.
- [3] Michael Doob. Characterization of regular magic graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 25(1):94-104, 1978.
- [4] Samuel Jezný and Marián Trenkler. *Characterization of magic graphs. Czechoslovak Mathematical Journal*, 33(3):435-438, 1983.
- [5] Joseph Gallian. A Dynamic Survey of Graph Labelling. *Electronic Journal of Combinatorics*, 19:1-219, 2009.
- [6] Kejun Chen and Wen Li. Existence of normal bimagic squares. *Discrete Mathematics*, 312(21):3077-3086, 2012.