

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

MAGICKÉ ÚTVARY
BAKALÁRSKA PRÁCA

2021
RICHARD BÍRÓ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

MAGICKÉ ÚTVARY
BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Informatika
Študijný odbor: Informatika
Školiace pracovisko: Katedra informatiky
Školiteľ: doc. RNDr. Ján Mazák, PhD.

Bratislava, 2021
Richard Bíró



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Richard Bíró
Študijný program: informatika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: informatika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Magické útvary
Magic shapes

Anotácia: Magické útvary rôzneho typu zaujímali matematikov odpradáva a mnohé súvisiace problémy sú aj dnes otvorené. Náplňou práce je pozrieť sa na súvislosti medzi magickými útvarmi a magickými ohodnoteniami v diskkrétnej matematike (grafy, konfigurácie z konečných geometrií apod.) a implementovať algoritmické prehľadávanie pre vybrané otvorené problémy.

Cieľ:

1. Zorientovať sa v oblasti klasických magických útvarov a podobných problémov a spraviť aspoň čiastočný prehľad.
2. Formulovať analogické problémy pre iné diskkrétne štruktúry, napr. grafy či konfigurácie vznikajúce z konečných geometrií.
3. Vybrať si niekoľko otvorených problémov (či už nových, alebo známych), implementovať algoritmické prehľadávanie priestoru potenciálnych riešení a skombinovať toto počítačové prehľadávanie s teoretickou analýzou.
4. Vysloviť zaujímavé hypotézy, ktoré bude možné skúmať v budúcnosti.

Vedúci: doc. RNDr. Ján Mazák, PhD.
Katedra: FMFI.KI - Katedra informatiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Martin Škoviera, PhD.
Dátum zadania: 26.10.2020

Dátum schválenia: 31.10.2020

doc. RNDr. Daniel Olejár, PhD.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Pod'akovanie:

Abstrakt

Práca obsahuje prehľad v oblasti klasických magických útvarov. Definujeme pojmy, na základe ktorých preskúmame nové magické vlastnosti jednotlivých útvarov. Súčasťou práce je aj implementácia algoritmov na hľadanie potenciálnych riešení vybraných otvorených problémov.

Kľúčové slová: magický útvar, prvok

Abstract

Obsah

Úvod	1
1 Základné pojmy a definície	3
1.1 Magické útvary	3
1.1.1 Magické štvorce	3
1.1.2 Magické obdĺžniky	4
1.1.3 Magické grafy	5
1.2 Multiplikatívne útvary	5
1.3 Bimagické útvary	6
1.4 Multiplikatívne magické útvary	7
2 Známe otvorené problémy	9
2.1 Magické štvorce	9
2.2 Bimagické štvorce	13
2.3 Multiplikatívne magické štvorce	17
3 Nové otvorené problémy	21
3.1 Bimagické grafy	22
3.1.1 Vrcholovo bimagické grafy	22
3.1.2 Hranovo bimagické grafy	28
3.2 Multiplikatívne magické grafy	30
3.2.1 Vrcholovo multiplikatívne magické grafy	30
3.2.2 Hranovo multiplikatívne magické grafy	32
3.3 Magické obdĺžniky	32
3.3.1 Bimagické obdĺžniky	32
3.3.2 Multiplikatívne magické obdĺžniky	34
4 Implementácia algoritmov	37
4.1 Magické štvorce	37
4.1.1 Magické štvorce druhého stupňa	37
4.1.2 Bimagické štvorce	38

4.1.3	Multiplikatívne magické štvorce	39
4.2	Magické grafy	40
4.2.1	Vrcholovo bimagické grafy	40
4.2.2	Vrcholovo multiplikatívne magické grafy	42
4.3	Magické obdĺžniky	43
4.3.1	Bimagické obdĺžniky	43
4.3.2	Multiplikatívne magické obdĺžniky	44
Záver		47
Príloha		51

Úvod

Magické útvary zaujímali ľudí už odpradáva.

Najznámejším z nich je magický štvorec. Ide o štvorcovú tabuľku veľkosti 3×3 vyplnenú číslami, pričom platí, že súčet čísel v riadku, stĺpci a na oboch diagonálach je konštantný.

Medzi ďalšie známe magické útvary patria obdĺžniky, grafy, kruhy alebo hviezdy.

Existujú však aj iné magické vlastnosti, ktoré môžeme na útvaroch skúmať. V štvorci nás môže zaujímať súčin prvkov a nie ich súčet (v takom prípade ide o multiplikatívny štvorec). Alebo budeme brať do úvahy súčet prvkov aj ich súčet druhých mocnín (vtedy ide o bimagický štvorec).

O niektorých útvaroch s konkrétnymi magickými vlastnosťami stále nevieme povedať, či existujú. Medzi najväčšie otvorené problémy patrí existencia magického štvorca veľkosti 3×3 , ktorého prvky sú navzájom rôzne a sú druhými mocninami kladných celých čísel. Bolo dokázané prepojenie tohto problému s aritmetickými postupnosťami, kongruentnými číslami a eliptickými krivkami.

V kapitole 1 uvedieme základné pojmy a definície pri práci s útvarmi, ako aj súčasný stav danej problematiky.

V kapitole 2 podrobnejšie preskúmame niektoré známe otvorené problémy z oblasti magických útvarov.

Magické vlastnosti niektorých útvarov ešte stále neboli preskúmané. V kapitole 3 sa pozrieme na nové definované problémy z oblasti magických útvarov. Zdefinujeme tieto nové typy útvarov: vrcholovo a hranovo bimagické grafy, vrcholovo a hranovo multiplikatívne magické grafy, bimagické a multiplikatívne magické obdĺžniky. Ku každému z nich uvedieme zistenia a nutné podmienky, ktoré pre daný útvar musia platiť.

Implementáciu algoritmického prehľadávania potenciálnych riešení pre vybrané otvorené problémy popíšeme v kapitole 4.

V kapitole Záver zhrnieme dosiahnuté výsledky z oblasti magických útvarov a vyslovíme hypotézy, ktoré bude možné skúmať v budúcnosti.

Kapitola 1

Základné pojmy a definície

Útvar definujeme ako neprázdnu množinu bodov v konečnej geometrii. *Prvok* je bod útvaru, ktorý má priradenú hodnotu x , kde x je kladné celé číslo. Prvky musia mať priradené navzájom rôzne hodnoty.

Ľubovoľnú neprázdnu podmnožinu bodov nazývame *skupinou*. Každý útvar má priradený nenulový počet skupín. Hovoríme, že útvar má *magickú vlastnosť* ak všetky jeho skupiny majú magickú vlastnosť.

1.1 Magické útvary

Definícia 1.1. *Útvar je magický ak súčet prvkov v každej jeho skupine je konštantný.*

1.1.1 Magické štvorce

Definícia 1.2. *Magický štvorec je matica prvkov veľkosti $n \times n$, pre ktorú platí, že súčet prvkov v každom riadku, stĺpci a na oboch diagonálach je konštantný.*

4	3	8
9	5	1
2	7	6

Skupinami v štvorci sú jeho riadky, stĺpce a diagonály.

Poznámka 1.3. *Ak je súčet prvkov v každom riadku a stĺpci konštantný, daný štvorec nazývame **semimagickým**. Ak je súčet na oboch diagonálach rovnaký, ale iný ako súčet v riadkoch a stĺpcoch, daný štvorec nazývame **panmagickým**.*

Špeciálnu triedu tvoria magické štvorce, ktorých prvky sú k -tymi mocninami kladných celých čísel. Príklad štvorca pre $n = 4, k = 2$:

48^2	23^2	6^2	19^2
21^2	26^2	33^2	32^2
1^2	36^2	13^2	42^2
22^2	27^2	44^2	9^2

Existencia štvorca pre $n = 3, k = 2$ je otvoreným problémom. Je dokázané, že ak by taký štvorec existoval, jeho prvky by museli byť väčšie ako 10^{16} . Nikomu sa nepodarilo nájsť ani magický štvorec, ktorého 8 prvkov sú druhé mocniny prirodzených čísel. A je známe iba jedno základné riešenie so 7 prvkami, ktoré objavil v roku 1999 Andrew Bremner [1].

373^2	289^2	565^2
360721	425^2	23^2
205^2	527^2	222121

Pre $n = k = 3$ je dokázané, že taký magický štvorec neexistuje. Existencia štvorcov pre $4 \leq n \leq 6, k = 3$ je otvoreným problémom. Pre $4 \leq n \leq 10, k \geq 4$ sú známe iba semimagické štvorce [1].

1.1.2 Magické obdĺžniky

Definícia 1.4. *Magický obdĺžnik je matica prvkov veľkosti $m \times n$, pre ktorú platí, že súčet prvkov v každom riadku je konštantný a zároveň súčet prvkov v každom stĺpci je konštantný.*

1	7	6	4
8	2	3	5

Nevyžadujeme, aby boli súčty v riadkoch a stĺpcoch rovnaké, pretože pre $m \neq n$ vieme ľahko odvodiť, že by museli byť rovné 0 (čo je spor s tým, že prvky sú navzájom rôzne kladné celé čísla). Z toho vyplýva, že obdĺžnik má dva druhy skupín: jedna je tvorená riadkami a druhá stĺpcami.

Slovenský matematik Marián Trenkler skúmal obdĺžniky veľkosti $m \times n$, ktoré sú supermagické (ich prvkami sú čísla od 1 po mn) [2]:

Veta 1.5. (Trenkler, 1999) *Pre všetky prirodzené $n > 2$ vieme zostrojiť supermagický obdĺžnik veľkosti $2 \times (2n - 2)$ aj $n \times n^2$.*

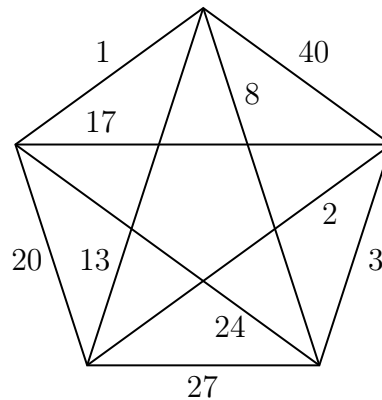
Keďže obdĺžniková matica nemá diagonály, pri definícii ich neuvažujeme. Z toho vyplýva, že v ľubovoľnom magickom obdĺžniku vieme vymeniť dva riadky alebo stĺpce a magická vlastnosť ostane zachovaná.

Semimagické štvorce sú špeciálnym prípadom magických obdĺžnikov pre $m = n$. Preto budeme ďalej predpokladať, že $m < n$.

1.1.3 Magické grafy

Definícia 1.6. *Magický graf je neorientovaný graf s ohodnotenými hranami, v ktorom pre každý vrchol platí, že súčet hrán incidentných s ním je konštantný. Vrcholy sú považované za prvky útvaru.*

Z toho vyplýva, že skupiny v grafe sú hodnoty incidentných hrán s daným vrcholom. Príklad magického grafu so súčtom 62 [3]:



Slovenskí matematici Samuel Jezný a Marián Trenkler dokázali vetu, ktorá hovorí o tom, kedy je graf magický [4]:

Veta 1.7. (Jezný, Trenkler, 1983) *Graf je magický práve vtedy, keď každá hrana G patrí do nejakého $(1 - 2)$ -faktora a zároveň každá dvojica hrán e_1, e_2 je separovateľná $(1 - 2)$ -faktorom grafu G .*

Poznámka 1.8. $(1 - 2)$ -faktor grafu je podgraf, ktorý obsahuje všetky vrcholy a zároveň každý každý jeho komponent je kružnica alebo izolovaná hrana.

Magická vlastnosť grafu sa dá skúmať viacerými spôsobmi. Môžeme napríklad pre každý vrchol zrátať súčet hodnôt jeho susedov (v takom prípade budú v skupine hodnoty susedov daného vrchola). Ešte nikto neskúmal na grafoch bimagické a multiplikatívne magické vlastnosti (ktoré sú definované nižšie).

1.2 Multiplikatívne útvary

Definícia 1.9. *Útvar je multiplikatívny ak súčin prvkov v každej jeho skupine je konštantný.*

Definícia 1.10. *Multiplikatívny štvorec je matica prvkov veľkosti $n \times n$, pre ktorú platí, že súčin prvkov v každom riadku, stĺpci a na oboch diagonálach je konštantný.*

8	256	2
4	16	64
128	1	32

Poznámka 1.11. *Semimultiplikatívne a panmultiplikatívne štvorce sú definované analogicky.*

K ľubovoľnému magickému štvorcu vieme zostrojiť multiplikatívny štvorec napríklad tak, že všetky jeho prvky x nahradíme 2^x .

Tieto typy štvorcov sa dajú hľadať vzorkovou metódou. Vzorku získame tak, že zvolíme niekoľko prvkov štvorca, pričom:

- v každom riadku je zvolený práve jeden prvok
- v každom stĺpci je zvolený práve jeden prvok
- na každej diagonále je zvolený práve jeden prvok

Princíp prehľadávania je potom jednoduchý. Najprv začneme so štvorcom, ktorého všetky prvky majú hodnotu 1. Potom si opakovane vyberieme ľubovoľnú vzorku a všetky jej zvolené prvky vynásobíme nejakou konštantou. Tým generujeme štvorec, ktorý je multiplikatívny (za predpokladu, že výsledné prvky sú navzájom rôzne).

1.3 Bimagické útvary

Definícia 1.12. *Útvar je bimagický ak je magický a umocnením každého jeho prvku na druhú dostaneme opäť magický útvar.*

Je zrejmé, že bimagický štvorec veľkosti 2×2 neexistuje. Edouard Lucas, Luke Pebody a Jean-Claude Rosa dokázali silnejšie tvrdenia [1]:

Veta 1.13. *(Lucas, 1891) Neexistuje bimagický štvorec veľkosti 3×3 .*

Veta 1.14. *(Pebody, Rosa, 2004) Neexistuje bimagický štvorec veľkosti 4×4 .*

Na to, aby bol štvorec veľkosti 5×5 bimagickým, muselo by byť jeho 12 magických a 12 bimagických súčtov rovnakých. V júni 2010 našiel Michael Quist čiastočné riešenie, ktoré obsahovalo 23 správnych súčtov [1]:

25	129	200	295	195
257	165	1	225	196
127	340	171	111	95
267	85	265	176	51
168	125	207	37	307

Existencia riešenia pre 5×5 (ktoré by malo 24 správnych súčtov) je však dodnes otvoreným problémom.

V roku 2006 našiel Jaroslaw Wroblewski riešenie pre 6×6 [1]:

17	36	55	124	62	114
58	40	129	50	111	20
108	135	34	44	38	49
87	98	92	102	1	28
116	25	86	7	96	78
22	74	12	81	100	119

Na tomto štvorci je zaujímavé to, že má asociatívnu vlastnosť - súčet protiľahlých prvkov je konštantný.

Georges Pfeffermann našiel v roku 1890 superbimagický štvorec veľkosti 8×8 . Použil v ňom všetky čísla z množiny $\{1, 2, \dots, 64\}$ [1]:

56	34	8	57	18	47	9	31
33	20	54	48	7	29	59	10
26	43	13	23	64	38	4	49
19	5	35	30	53	12	46	60
15	25	63	2	41	24	50	40
6	55	17	11	36	58	32	45
61	16	42	52	27	1	39	22
44	62	28	37	14	51	21	3

Nasledovná veta dokazuje, že bimagických štvorcov je nekonečne veľa [5]:

Veta 1.15. (Chen, Li, 2004) *Nech m, n sú kladné celé čísla s rovnakou paritou, pričom $m, n \notin \{2, 3, 6\}$. Potom existuje superbimagický štvorec veľkosti $mn \times mn$.*

1.4 Multiplikatívne magické útvary

Definícia 1.16. *Útvar je multiplikatívny magický ak je magický aj multiplikatívny.*

Je zrejmé, že multiplikatívny magický štvorec veľkosti 2×2 neexistuje. Lee Morgenstern dokázal silnejšie tvrdenie [1]:

Veta 1.17. (Morgenstern, 2007) *Neexistuje multiplikatívny magický štvorec veľkosti 3×3 ani 4×4 .*

Morgenstern okrem toho skúmal multiplikatívne magické štvorce veľkosti 5×5 a 6×6 . V roku 2007 našiel nasledovný štvorec s jediným súčtom, ktorý nie je multiplikatívny magický [1]:

105	182	40	198	45
78	216	66	175	35
220	42	65	63	180
140	55	189	30	156
27	75	210	104	154

Podarilo sa mu nájsť aj tento semimultiplikatívny magický štvorec (nemá multiplikatívne diagonály) [1]:

27	25	156	48	84	20
75	144	18	56	52	15
24	12	45	117	50	112
16	65	21	30	108	120
140	72	40	9	60	39
78	42	80	100	6	54

V roku 2016 našiel Sébastien Miquel riešenie pre veľkosť 7×7 [1]:

126	66	50	90	48	1	84
20	70	16	54	189	110	6
100	2	22	98	36	72	135
96	60	81	4	10	49	165
3	63	30	176	120	45	28
99	180	14	25	7	108	32
21	24	252	18	55	80	15

Multiplikatívne štvorce je možné nájsť napríklad vzorkovaním. Ale existencia multiplikatívneho magického štvorca veľkosti 5×5 alebo 6×6 je naďalej otvoreným problémom.

Kapitola 2

Známe otvorené problémy

2.1 Magické štvorce

Hypotéza 2.1. *Existuje jediný magický štvorec veľkosti 3×3 (spolu s jeho násobkami, rotáciami a symetriami), ktorého aspoň 7 prvkov sú druhé mocniny kladných celých čísel.*

Najskôr ukážeme, že prvky v magickom štvorci veľkosti 3×3 spĺňajú isté vzťahy:

Veta 2.2. *Nech e je prostredný prvok magického štvorca veľkosti 3×3 . Potom je jeho magický súčet rovný $3e$.*

Dôkaz. Nech s je magický súčet. Označme a, b, \dots, i prvky štvorca zľava doprava po jednotlivých riadkoch (čiže e je prostredný z nich). Potom platí $3s = (a + e + i) + (b + e + h) + (c + e + g) = (a + b + c) + (g + h + i) + 3e = 2s + 3e$, z čoho vyplýva, že $s = 3e$. \square

Dôsledok 2.3. *Nech e je prostredný prvok magického štvorca veľkosti 3×3 a x, y sú jeho ľubovoľné dva protiľahlé prvky. Potom $x + y = 2e$.*

Dôsledok 2.4. *Nech z je prvok v ľubovoľnom rohu magického štvorca veľkosti 3×3 a x, y sú prvky, ktoré susedia stranou s jeho protiľahlým rohom. Potom $x + y = 2z$.*

Dôkaz. Opäť označme a, b, \dots, i prvky štvorca zľava doprava po jednotlivých riadkoch. Dokážeme iba vzťah $f + h = 2a$, ostatné z nich sú analogické. Platí $c + f + i = g + h + i = 3e$ a zároveň $a + i = c + g = 2e$ (na základe vety 2.3). Z prvého vzťahu vyjadríme $c = 3e - f - i, g = 3e - h - i$ a z druhého $a = 2e - i$. Dosadením do $c + g = 2e$ dostaneme $2(2e - i) = f + h$, čím je rovnosť $2a = f + h$ dokázaná. \square

Nasledovná lema sa nám zíde pri vytváraní parametrických vzorcov [6]:

Lema 2.5. *Všetky celočíselné riešenia rovnice $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ majú parametrické vyjadrenie $a = pr + qs, b = qr - ps, c = ps + qr, d = pr - qs$, kde $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$.*

Z nej dokážeme odvodiť parametrické vyjadrenie pre modifikovanú rovnicu:

Lema 2.6. *Nech a, b, c sú kladné celé čísla, pre ktoré platí $a^2 + b^2 = 2c^2$. Potom existujú $u, v, w \in \mathbb{N}$ také, že $a = w(u^2 + 2uv - v^2), b = w(-u^2 + 2uv + v^2), c = w(u^2 + v^2)$.*

Dôkaz. Aplikovaním lemy 2.5 na rovnicu $a^2 + b^2 = c^2 + c^2$ dostaneme vzťahy $a = pr + qs, b = qr - ps, c = ps + qr = pr - qs$ pre nejaké $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$. Keď vyjadríme $s = r \frac{p-q}{p+q}$ a dosadíme do a, b, c , dostaneme $a = \frac{r}{p+q}(p^2 + 2pq - q^2), b = \frac{r}{p+q}(-p^2 + 2pq + q^2), c = \frac{r}{p+q}(p^2 + q^2)$. Keď použijeme substitúciu $u = p, v = q, w = \frac{r}{p+q}$ (čo môžeme, pretože hodnotu výrazu $\frac{r}{p+q}$ vieme regulovať premennou r), získame hľadanú parametrizáciu. \square

Z parametrického riešenia rovnice $a^2 + b^2 = 2c^2$ vieme odvodiť nasledovný vzorec:

Veta 2.7. *Nech u_1, v_1, u_2, v_2 sú navzájom rôzne kladné celé čísla. Definujme hodnoty p, q, r, s, t nasledovne:*

$$\begin{aligned} p &= (u_1^2 + v_1^2)(u_2^2 + 2u_2v_2 - v_2^2) \\ q &= (u_1^2 + 2u_1v_1 - v_1^2)(u_2^2 + v_2^2) \\ r &= (-u_1^2 + 2u_1v_1 + v_1^2)(u_2^2 + v_2^2) \\ s &= (u_1^2 + v_1^2)(-u_2^2 + 2u_2v_2 + v_2^2) \\ t &= (u_1^2 + v_1^2)(u_2^2 + v_2^2) \end{aligned}$$

Potom vieme zostrojiť nasledovné magické štvorce, ktorých aspoň 5 prvkov sú druhé mocniny kladných celých čísel:

p^2	$3t^2 - p^2 - q^2$	q^2	$2(r^2 + s^2)$	$4p^2$	$2(q^2 + s^2)$
$3t^2 - p^2 - r^2$	t^2	$3t^2 - q^2 - s^2$	$4q^2$	$4t^2$	$4r^2$
r^2	$3t^2 - r^2 - s^2$	s^2	$2(p^2 + r^2)$	$4s^2$	$2(p^2 + q^2)$

p^2	q^2	$3t^2 - p^2 - q^2$	p^2	r^2	$3t^2 - p^2 - r^2$
$r^2 + s^2 - p^2$	t^2	$p^2 + q^2 - s^2$	$q^2 + s^2 - p^2$	t^2	$p^2 + r^2 - s^2$
$3t^2 - r^2 - s^2$	r^2	s^2	$3t^2 - q^2 - s^2$	q^2	s^2

Dôkaz. Na základe vety 2.6 vidíme, že platí $p^2 + s^2 = q^2 + r^2 = 2t^2$. Dokážeme konštrukciu prvého štvorca, zvyšné prípady sú analogické. Uvažujme štvorec v nasledovnom tvare:

p^2	$-$	q^2
$-$	t^2	$-$
r^2	$-$	s^2

Podľa vety 2.3 vidíme, že podmienka $p^2 + s^2 = q^2 + r^2 = 2t^2$ je zachovaná. Do počítaním zvyšných prvkov dostaneme platný magický štvorec veľkosti 3×3 , ktorého aspoň 5 prvkov sú druhé mocniny kladných celých čísel. \square

Na základe objaveného parametrického vzorca sme implementovali algoritmus 4.1.

Výsledok 2.8. *Pre $u_1, v_1, u_2, v_2 < 1000$ dokážu parametrické vzorce vygenerovať iba jeden magický štvorec veľkosti 3×3 , ktorého aspoň 7 prvkov sú druhé mocniny kladných celých čísel (ten, ktorý poznáme). Dosiahneme ho napr. pre $u_1 = 3, v_1 = 4, u_2 = 2, v_2 = 9$ a vydelením prvkov ich spoločným deliteľom.*

Zameriame sa aj na špecifické parametrické vzorce, ktoré generujú magické štvorce veľkosti 3×3 s aspoň 6 druhými mocninami kladných celých čísel. V roku 2019 objavil Arkadiusz Wesolowski nasledovný vzorec pre $n \in \mathbb{N}, w = 6n^2 + 6n + 2, x = 2n + 1, y = 3n^2 + 2n, z = 3n^2 + 4n + 1, k = x^2y^2 + w^2z^2$ [1]:

$(wz + xy)^2$	$(wy - xz)^2$	$(2y^2 - z^2)x^2 + (2z^2 - y^2)w^2$
$2k - (wy + xz)^2$	k	$(wy + xz)^2$
$x^2z^2 + w^2y^2$	$2k - (wy - xz)^2$	$(wz - xy)^2$

Na konštrukciu našich parametrických vzorcov využijeme nasledovnú identitu [6]:

Lema 2.9. *Nech $x \in \mathbb{Z}$. Nech $a = x^5 - 2x, b = x^5 + x, c = -2x^4 + 1, d = x^4 + 1$. Potom $ab(a^2 - b^2) = cd(c^2 - d^2)$.*

Veta 2.10. *Nech x je kladné celé číslo. Nech $x_1 = 8x^8 - 49x^6 + 6x^4 - 16x^2 + 2, x_2 = 8x^8 - x^6 + 30x^4 - 40x^2 + 2, x_3 = 8x^8 - 25x^6 + 18x^4 - 28x^2 + 2$. Potom vieme zostrojiť nasledovné magické štvorce veľkosti 3×3 , ktorých aspoň 6 prvkov sú druhé mocniny kladných celých čísel.*

$(2x^5 + 4x^3 - 7x)^2$	$x_1(x^2 - 2)$	$(5x^4 - 2x^2 + 2)^2$
$(x^4 + 8x^2 - 2)^2$	$(2x^5 - 2x^3 + 5x)^2$	$x_2(x^2 - 2)$
$x_3(x^2 - 2)$	$(7x^4 - 4x^2 - 2)^2$	$(2x^5 - 8x^3 - x)^2$

$(5x^4 - 2x^2 + 2)^2$	$(2x^5 + 4x^3 - 7x)^2$	$\frac{4x^{10} - 31x^8 + 76x^6 + 76x^4 - 31x^2 + 4}{2}$
$(2x^5 - 8x^3 - x)^2$	$\frac{4x^{10} + 17x^8 + 4x^6 + 4x^4 + 17x^2 + 4}{2}$	$(7x^4 - 4x^2 - 2)^2$
$\frac{4x^{10} + 65x^8 - 68x^6 - 68x^4 + 65x^2 + 4}{2}$	$(x^4 + 8x^2 - 2)^2$	$(2x^5 - 2x^3 + 5x)^2$

Dôkaz. Uvažujme nasledovný magický štvorec veľkosti 3×3 , ktorého aspoň 6 prvkov sú druhé mocniny kladných celých čísel:

a^2	$-$	e^2
b^2	f^2	$-$
$-$	c^2	d^2

Z dôsledku 2.4 vyplýva, že $b^2 + c^2 = 2e^2$. Aplikovaním lemy 2.6 zistíme, že $b = w(u^2 + 2uv - v^2)$, $c = w(-u^2 + 2uv + v^2)$, $e = w(u^2 + v^2)$ pre nejaké $u, v, w \in \mathbb{N}$. Označme $N = \frac{b^2 - c^2}{2}$. Potom:

$$N = \frac{w^2(u^2 + 2uv - v^2)^2 - w^2(-u^2 + 2uv + v^2)^2}{2} = 4uv(u^2 - v^2)w^2$$

Z dôsledku 2.4 vyplýva, že $d^2 + a^2 = 2f^2$. Aplikovaním lemy 2.6 zistíme, že $d = w_2(u_2^2 + 2u_2v_2 - v_2^2)$, $a = w_2(-u_2^2 + 2u_2v_2 + v_2^2)$, $f = w_2(u_2^2 + v_2^2)$ pre nejaké $u_2, v_2, w_2 \in \mathbb{N}$. Zároveň platí $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = e^2 + f^2$, z čoho vyplývajú vzťahy $d^2 = a^2 + b^2 - c^2$, $f^2 = a^2 + b^2 - \frac{b^2 + c^2}{2} = a^2 + \frac{b^2 - c^2}{2}$. Potom $a^2 + 2N = d^2$ a $a^2 + N = f^2$. Teda platí $d^2 - f^2 = N$. Po dosadení do d, f, N dostaneme nasledujúcu rovnosť:

$$N = w_2^2(u_2^2 + 2u_2v_2 - v_2^2)^2 - w_2^2(u_2^2 + v_2^2)^2 = 4u_2v_2(u_2^2 - v_2^2)w_2^2$$

$$w_2^2u_2v_2(u_2^2 - v_2^2) = w^2uv(u^2 - v^2)$$

Uvažujme špeciálny prípad $w = w_2$. Potom dostaneme vzťah $u_2v_2(u_2^2 - v_2^2) = uv(u^2 - v^2)$, pričom z vety 2.9 vieme, že jedno z jeho parametrických riešení je $u_2 = p^5 + p$, $v_2 = p^5 - 2p$, $u = -2p^4 + 1$, $v = p^4 + 1$ pre $p \in \mathbb{Z}$. Po spätnom dosadení do a, b, c, d, e, f , substitúcií $x = p^2$ a dopočítaní zvyšných prvkov dostaneme prvý štvorec.

Druhý štvorec získame tak, že prvý

a	b	c
d	e	f
g	h	i

transformujeme na

c	a	$\frac{d+i}{2}$
i	$\frac{c+e}{2}$	h
$\frac{a+h}{2}$	d	e

□

Na základe objaveného parametrického vzorca sme implementovali algoritmus 4.2.

Výsledok 2.11. *Pre $x = 1$ dostaneme štvorec, ktorého prvky nie sú navzájom rôzne. Pre $1 < x < 10^8$ nedokážu parametrické vzorce vygenerovať magický štvorec veľkosti 3×3 , ktorého aspoň 7 prvkov sú druhé mocniny prirodzených čísel.*

2.2 Bimagické štvorce

Hypotéza 2.12. *Neexistuje bimagický štvorec veľkosti 5×5 .*

V predchádzajúcej kapitole sme uviedli, že neexistenciu menších bimagických štvorcov už dokázali Eduard Lucas, Luke Pebody a Jean-Claude Rosa. Lee Morgenstern neskôr dokázal tieto tvrdenia jednoduchšie pomocou duplikačnej lemy [1]:

Lema 2.13. *(Duplikačná) Nech $a, b, c, d \in \mathbb{N}^+$, pre ktoré platí $a + b = c + d$ a buď $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, alebo $ab = cd$. Potom $c = a$ alebo $c = b$.*

Dôkaz. Z prvej rovnice vyjadríme $d = a + b - c$ a dosadíme do rovnice $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ alebo do rovnice $ab = cd$. Po úprave dostaneme vzťah $c^2 - ac - bc + ab = 0$, ktorý sa dá prepísať na tvar $(c - a)(c - b) = 0$. Z toho vyplýva $c = a$ alebo $c = b$. \square

Veta 2.14. *(Morgenstern, 2007) Neexistuje bimagický štvorec veľkosti 3×3 .*

Dôkaz. Sporom. Nech a, b sú prvky v prvom riadku a prvých dvoch stĺpcoch. Nech c, d sú prvky v poslednom stĺpci a posledných dvoch riadkoch. Nech x je prvok v prvom riadku a poslednom stĺpci. Potom musia platiť vzťahy $a + b + x = x + c + d$ aj $a^2 + b^2 + x^2 = x^2 + c^2 + d^2$. Tým dostaneme sústavu z duplikačnej lemy, z čoho vyplýva, že $c = a$ alebo $c = b$, čo je spor. \square

Veta 2.15. *(Morgenstern, 2007) Neexistuje bimagický štvorec veľkosti 4×4 .*

Dôkaz. Sporom. Nech a, b, \dots, o, p sú prvky zľava doprava v jednotlivých riadkoch štvorca. Keďže štvorec je magický, musia platiť nasledovné vzťahy:

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= m + n + o + p \\ a + f + k + p &= b + f + j + n \\ d + g + j + m &= c + g + k + o \end{aligned}$$

Ich sčítaním dostaneme $a + d = n + o$. Keďže štvorec je zároveň aj bimagický, musia platiť nasledovné vzťahy:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &= m^2 + n^2 + o^2 + p^2 \\ a^2 + f^2 + k^2 + p^2 &= b^2 + f^2 + j^2 + n^2 \\ d^2 + g^2 + j^2 + m^2 &= c^2 + g^2 + k^2 + o^2 \end{aligned}$$

Ich sčítaním dostaneme $a^2 + d^2 = n^2 + o^2$. Tým dostaneme sústavu z duplikačnej lemy, z čoho vyplýva, že $n = a$ alebo $n = d$, čo je spor. \square

Morgenstern okrem toho hľadal bimagické štvorce veľkosti 5×5 svojou výpočtovou metódou a prišiel k nasledujúcemu zisteniu [1].

Veta 2.16. (*Morgenstern, 2014*) *Neexistuje bimagický štvorec veľkosti 5×5 , ktorého prvky neprevyšujú 1500.*

Jeho metóda spočívala v nájdení štvoríc navzájom rôznych kladných celých čísel $(A, G, S, Y), (C, H, R, W), (E, I, Q, U)$, pre ktoré platí:

$$\begin{aligned} A + G + S + Y &= C + H + R + W = E + I + Q + U \\ A^2 + G^2 + S^2 + Y^2 &= C^2 + H^2 + R^2 + W^2 = E^2 + I^2 + Q^2 + U^2 \end{aligned}$$

Na základe týchto hodnôt dopočítal zvyšné prvky štvorca:

A	b	C	d	E
f	G	H	I	j
k	l	m	n	o
p	Q	R	S	t
U	v	W	x	Y

Chceli sme zefektívniť Morgensternov algoritmus. Urobili sme niekoľko pozorovaní. Je zrejmé, že magické štvorce sú uzavreté na kladný celočíselný násobok. Z nasledovnej lemy vyplýva, že sú uzavreté aj na konštantný posun:

Lema 2.17. (*Posunová*) *Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{N}$. Ak $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n b_k$ aj $\sum_{k=1}^n a_k^2 = \sum_{k=1}^n b_k^2$, potom pre všetky $x \in \mathbb{Z}$ platí:*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_k + x) &= \sum_{k=1}^n (b_k + x) \\ \sum_{k=1}^n (a_k + x)^2 &= \sum_{k=1}^n (b_k + x)^2 \end{aligned}$$

Dôkaz.

$$\sum_{k=1}^n (a_k + x) = \sum_{k=1}^n a_k + nx = \sum_{k=1}^n b_k + nx = \sum_{k=1}^n (b_k + x)$$

$$\sum_{k=1}^n (a_k + x)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2x \sum_{k=1}^n a_k + nx^2 = \sum_{k=1}^n b_k^2 + 2x \sum_{k=1}^n b_k + nx^2 = \sum_{k=1}^n (b_k + x)^2$$

□

Dôsledok 2.18. *Nech X je bimagický štvorec. Nech $a, b \in \mathbb{Z}$, pričom $a \neq 0$. Potom $aX + b$ je bimagický štvorec s potenciálne zápornými prvkami.*

Vďaka tomu vieme definovať normálne formy bimagických štvorcov. Nech n je veľkosť daného útvaru. Potom:

Veta 2.19. *Nech X je bimagický štvorec, n je jeho veľkosť a x_{\min}, x_{\max} sú jeho najmenším, resp. najväčším prvkom. Nech S je magický a T je bimagický súčet tohto štvorca. Nech $a, b \in \mathbb{Z}$, pričom $a \neq 0$.*

1. *Ak $a = 1, b = 1 - x_{\min}$, tak $aX + b$ je bimagický štvorec, ktorého najmenší prvok je 1.*
2. *Ak $a = -n, b = S$, tak $aX + b$ je bimagický štvorec s potenciálne zápornými prvkami, ktorého magický súčet je 0.*
3. *Ak $a = 1 - n, b = S - x$, tak $aX + b$ je bimagický štvorec s potenciálne zápornými prvkami, ktorého magický súčet je rovný danému prvku x .*

Dôkaz. Výpočtom. □

Budeme predpokladať, že bimagický štvorec má magický súčet rovný prostrednému prvku. To využijeme pri dôkaze nasledovných viet:

Veta 2.20. *Nech A, B, C, D, E, F, G, H sú navzájom rôzne celé čísla, pričom:*

$$\begin{aligned} A + B + C + D &= E + F + G + H = 0 \\ A^2 + B^2 + C^2 + D^2 &= E^2 + F^2 + G^2 + H^2 \end{aligned}$$

Potom existujú $a, b, c, e, f, g \in \mathbb{Z}$ také, že:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= e^2 + f^2 + g^2 \\ (2A, 2B, 2C, 2D) &= (-a + b + c, a - b + c, a + b - c, -a - b - c) \\ (2E, 2F, 2G, 2H) &= (-e + f + g, e - f + g, e + f - g, -e - f - g) \end{aligned}$$

Dôkaz. Dosadením $D = -A - B - C, H = -E - F - G$ do druhej rovnice dostaneme vzťah $A^2 + B^2 + C^2 + (-A - B - C)^2 = E^2 + F^2 + G^2 + (-E - F - G)^2$. Ten sa dá upraviť na tvar $(A + B)^2 + (A + C)^2 + (B + C)^2 = (E + F)^2 + (E + G)^2 + (F + G)^2$. Nech $a = A + B, b = A + C, c = B + C, e = E + F, f = E + G, g = F + G$. Potom $a^2 + b^2 + c^2 = e^2 + f^2 + g^2$. Zároveň si vieme sústavou rovníc odvodiť, že $A = \frac{-a+b+c}{2}, B = \frac{a-b+c}{2}, C = \frac{a+b-c}{2}, E = \frac{-e+f+g}{2}, F = \frac{e-f+g}{2}, G = \frac{e+f-g}{2}$. Spätným dosadením zistíme, že $D = \frac{-a-b-c}{2}, H = \frac{-e-f-g}{2}$, čím je dôkaz ukončený. □

Veta 2.21. *Nech $K \in \mathbb{N}$. Nech $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4, C_1, C_2, C_3, C_4$ sú navzájom rôzne celé čísla, pričom:*

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0$$

$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 + B_4^2 = C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 = K$$

Nech $x, y \in \mathbb{Z}$. Potom existuje iba konečne veľa $s \in \mathbb{Z}$, pre ktoré je nasledujúca časť štvorca veľkosti 5×5 bimagická:

A_1	x	B_1	y	C_1
—	A_2	B_2	C_2	—
—	—	s	—	—
—	C_3	B_3	A_3	—
C_4	—	B_4	—	A_4

Dôkaz. Prvý riadok má magický súčet $A_1 + B_1 + C_1 + x + y$ a bimagický súčet $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 + x^2 + y^2$. Prostredný stĺpec má magický súčet s a bimagický súčet $k + s^2$. Z toho vyplýva, že musia platiť nasledovné vzťahy:

$$A_1 + B_1 + C_1 + x + y = s$$

$$A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 + x^2 + y^2 = s^2 + K$$

Z prvého vyjadríme $y = s - A_1 - B_1 - C_1 - x$. Dosadením vznikne vzťah $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 + x^2 + (s - A_1 - B_1 - C_1 - x)^2 = s^2 + K$, ktorý sa dá upraviť na tvar $x^2 - x[s - (A_1 + B_1 + C_1)] - s(A_1 + B_1 + C_1) + A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 + A_1B_1 + A_1C_1 + B_1C_1 + \frac{K}{2} = 0$. Nech $S' = A_1 + B_1 + C_1$. Riešením tejto kvadratickej rovnice je:

$$x = \frac{s - S' \pm \sqrt{(s + S')^2 - 4(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 + A_1B_1 + A_1C_1 + B_1C_1 + \frac{K}{2})}}{2}$$

Keďže $x \in \mathbb{Z}$, nutne $(s + S')^2 - 4(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 + A_1B_1 + A_1C_1 + B_1C_1 + \frac{K}{2}) = n^2$ pre nejaké $n \in \mathbb{N}$. Po úprave dostaneme nasledovný vzťah:

$$(s + n + S')(s - n + S') = 4(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 + A_1B_1 + A_1C_1 + B_1C_1 + \frac{K}{2})$$

Keďže všetky výrazy sú celé čísla, existuje iba konečný počet rozkladov čísla $4(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 + A_1B_1 + A_1C_1 + B_1C_1 + \frac{K}{2})$ na dva prvočinitele, z čoho vyplýva, že existuje iba konečný počet vyhovujúcich s (ktoré môžeme nájsť faktorizáciou). \square

Podľa predošlých viet vieme implementovať efektívnejší algoritmus 4.3 na hľadanie bimagických štvorcov veľkosti 5×5 .

Výsledok 2.22. Pre $h < 12500$ neexistuje bimagický štvorec veľkosti 5×5 . Našli sme štyri magické štvorce veľkosti 5×5 so zápornými prvkami, ktoré majú iba 3 zlé bimagické súčty:

58	30	-10	-232	-76
-234	-80	44	26	14
160	-18	-230	-74	-68
-198	66	48	-12	-134
-16	-228	-82	62	34

58	30	-10	-232	-76
-234	-80	44	26	14
96	-18	-230	-74	-4
-134	66	48	-12	-198
-16	-228	-82	62	34

58	30	-10	-232	-76
14	-80	44	26	-234
-88	-18	-230	-74	180
-198	66	48	-12	-134
-16	-228	-82	62	34

58	30	-10	-232	-76
14	-80	44	26	-234
-152	-18	-230	-74	244
-134	66	48	-12	-198
-16	-228	-82	62	3

2.3 Multiplikatívne magické štvorce

Hypotéza 2.23. Neexistuje multiplikatívny magický štvorec veľkosti 5×5 alebo 6×6 .

Veta 2.24. (Morgenstern, 2007) Neexistuje multiplikatívny magický štvorec veľkosti 3×3 .

Dôkaz. Sporom. Nech a, b sú prvky v prvom riadku a prvých dvoch stĺpcoch. Nech c, d sú prvky v poslednom stĺpci a posledných dvoch riadkoch. Nech x je prvok v prvom riadku a poslednom stĺpci. Potom musia platiť vzťahy $a + b + x = x + c + d$ aj $abx = xcd$. Tým dostaneme sústavu z duplikačnej lemy, z čoho vyplýva, že $c = a$ alebo $c = b$, čo je spor. \square

Veta 2.25. (Morgenstern, 2007) Neexistuje multiplikatívny magický štvorec veľkosti 4×4 .

Dôkaz. Sporom. Nech a, b, \dots, o, p sú prvky zľava doprava v jednotlivých riadkoch štvorca. Keďže štvorec je magický, musia platiť nasledovné vzťahy:

$$a + b + c + d = m + n + o + p$$

$$a + f + k + p = b + f + j + n$$

$$d + g + j + m = c + g + k + o$$

Ich sčítaním dostaneme $a + d = n + o$. Keďže štvorec je zároveň aj multiplikatívny, musia platiť nasledovné vzťahy:

$$abcd = mnop$$

$$afkp = bfjn$$

$$dgjm = cgko$$

Ich vynásobením dostaneme $ad = no$. Tým dostaneme sústavu z duplikačnej lemy, z čoho vyplýva, že $n = a$ alebo $n = d$, čo je spor. \square

Multiplikatívne magické štvorce veľkosti 5×5 sú už pomerne dobre preskúmané. Christian Boyer dokázal hrubou silou nasledovnú vetu [1]:

Veta 2.26. (Boyer, 2009) *Neeexistuje multiplikatívny magický štvorec veľkosti 5×5 , ktorého prvky sú menšie ako 1000 alebo jeho multiplikatívny súčin je menší ako prostredný prvok vynásobený 10^9 .*

Morgenstern dospel po prehľadávaní štvorcov veľkosti 6×6 hrubou silou k nasledovnému výsledku [1]:

Veta 2.27. (Morgenstern, 2007) *Neeexistuje multiplikatívny magický štvorec veľkosti 6×6 , ktorého prvky sú menšie ako 136.*

Vzhľadom na veľký pokrok pre veľkosti 5×5 sme sa sústredili na hľadanie multiplikatívnych magických štvorcov veľkosti 6×6 . Keďže generovanie všetkých potenciálnych riešení by bolo neefektívne, rozhodli sme sa pre aproximačný prístup. Najskôr si zadefinujeme špeciálny pojem, ktorý využijeme pri neskoršej implementácii:

Definícia 2.28. *Nech S je magický alebo multiplikatívny štvorec. Podmnožinu prvkov V nazývame **vzorkou**, ak sa v každom riadku, stĺpci a diagonále nachádza práve jeden prvok z V . Každý prvok štvorca z V môžeme vynásobiť číslom $n \in \mathbb{N}^+$ - vtedy hovoríme o **prenásobení vzorky V číslom n** .*

Štvorce veľkosti 3×3 nemajú žiadnu vzorku. Pre veľkosť 4×4 existuje celkovo 8 vzoriek:

<table><tr><td>*</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>*</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>*</td></tr><tr><td></td><td>*</td><td></td><td></td></tr></table>	*						*					*		*			<table><tr><td>*</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>*</td></tr><tr><td></td><td>*</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>*</td><td></td></tr></table>	*							*		*					*		<table><tr><td></td><td>*</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>*</td><td></td></tr><tr><td>*</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>*</td></tr></table>		*					*		*							*	<table><tr><td></td><td>*</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>*</td></tr><tr><td></td><td></td><td>*</td><td></td></tr><tr><td>*</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		*						*			*		*			
*																																																																			
		*																																																																	
			*																																																																
	*																																																																		
*																																																																			
			*																																																																
	*																																																																		
		*																																																																	
	*																																																																		
		*																																																																	
*																																																																			
			*																																																																
	*																																																																		
			*																																																																
		*																																																																	
*																																																																			
<table><tr><td></td><td></td><td>*</td><td></td></tr><tr><td>*</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>*</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>*</td></tr></table>			*		*					*						*	<table><tr><td></td><td></td><td>*</td><td></td></tr><tr><td></td><td>*</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>*</td></tr><tr><td>*</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>			*			*						*	*				<table><tr><td></td><td></td><td></td><td>*</td></tr><tr><td>*</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>*</td><td></td></tr><tr><td></td><td>*</td><td></td><td></td></tr></table>				*	*						*			*			<table><tr><td></td><td></td><td></td><td>*</td></tr><tr><td></td><td>*</td><td></td><td></td></tr><tr><td>*</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>*</td><td></td></tr></table>				*		*			*						*	
		*																																																																	
*																																																																			
	*																																																																		
			*																																																																
		*																																																																	
	*																																																																		
			*																																																																
*																																																																			
			*																																																																
*																																																																			
		*																																																																	
	*																																																																		
			*																																																																
	*																																																																		
*																																																																			
		*																																																																	

Vzorkami vieme generovať multiplikatívne štvorce, o čom hovorí nasledovná veta:

Veta 2.29. *Nech A je multiplikatívny štvorec, V je ľubovoľná jeho vzorka a $n \in \mathbb{N}^+$. Nech B je štvorec, ktorý vznikne pre násobením vzorky V číslom n . Potom B je multiplikatívny štvorec.*

Dôkaz. Každý riadok, stĺpec aj diagonála štvorca A je pre násobená tým istým číslom. Z toho vyplýva, že multiplikatívna vlastnosť zostáva zachovaná. \square

Definícia 2.30. *Nech $n \in \mathbb{N}^+$. Nech S je magický alebo multiplikatívny štvorec veľkosti $n \times n$ a v_1, \dots, v_n sú jeho disjunktné vzorky. Potom nazývame skupinu v_1, \dots, v_n štvorcovou vzorkou.*

Na základe tohto zistenia sme vymysleli algoritmus 4.4. Ten niekoľkokrát pre násobil jednotkový štvorec veľkosti 6×6 štvorcovými vzorkami a následne upravoval ich hodnoty tak, aby bola magická odchylka čo najmenšia.

Výsledok 2.31. *Aproximačná metóda vzorkovaním nenašla žiaden multiplikatívny magický štvorec veľkosti 6×6 . Nasledovný multiplikatívny štvorec mal najmenšie rozpätie súčtov 26:*

150	384	297	78	308	340
352	102	120	220	351	420
330	252	286	450	136	96
459	300	192	336	110	143
156	121	140	306	480	360
112	390	510	176	180	198

Kapitola 3

Nové otvorené problémy

Najprv dokážeme nasledovnú lemu, ktorá nám zjednoduší prácu:

Lema 3.1. *(Jednotková) Nech $n \in \mathbb{N}^+$. Nech a_1, \dots, a_n, b sú navzájom rôzne kladné celé čísla. Potom:*

1. *nasledovná sústava nemá riešenie:*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_k &= b \\ \sum_{k=1}^n a_k^2 &= b^2\end{aligned}$$

2. *nasledovná sústava má jediné riešenie pre $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, b = 6$:*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_k &= b \\ \prod_{k=1}^n a_k &= b\end{aligned}$$

Dôkaz. 1. Pre $n = 1$ dostaneme vzťah $a_1 = b$, čo je spor. Ak $n \geq 2$, tak dosadením b do druhej rovnice dostaneme nutný vzťah $\sum_{k=1}^n a_k^2 = (\sum_{k=1}^n a_k)^2$, čo sa dá upraviť na tvar $\sum_{i \neq j} a_i a_j = 0$. To je spor, keďže každé a_i aj a_j je kladné, a teda ich súčet nemôže byť nulový.

2. Pre $n = 1$ dostaneme vzťah $a_1 = b$, čo je spor. Pre $n = 2$ odvodíme vzťah $a_1 + a_2 = a_1 a_2$, z čoho vyplýva, že $a_1 = \frac{a_2}{a_2 - 1}$. Keďže $\gcd(a_2 - 1, a_2) = 1$, zlomok môže mať celočíselnú hodnotu jedine pre $a_2 = 2$. Z toho odvodíme, že aj $a_1 = 2$, čo je spor. Pre $n \geq 4$ sa dá dokázať indukciou, že $\sum_{k=1}^n a_k < \prod_{k=1}^n a_k$ ak a_1, \dots, a_n

sú navzájom rôzne kladné celé čísla. Pre $n = 3$ musí platiť $a_1 + a_2 + a_3 = a_1 a_2 a_3$, čo sa dá prepísať na tvar $a_1 + a_2 = a_3(a_1 a_2 - 1)$. Indukciou sa dá dokázať, že $a_1 + a_2 < a_1 a_2 - 1$ pre $a_1, a_2 \geq 2$. Teda nutne $a_1 = 1, a_2 = 2$, z čoho vyplýva $a_3 = 3, b = 6$.

□

3.1 Bimagické grafy

3.1.1 Vrcholovo bimagické grafy

Definícia 3.2. *Nech G je súvislý jednoduchý netriviálny graf. Ak existuje vrcholové ohodnotenie grafu G také, že platí:*

1. *vrcholom sú priradené navzájom rôzne kladné celé čísla*
2. *súčet susedov každého vrcholu je rovnaký*
3. *súčet druhých mocnín susedov každého vrcholu je rovnaký*

tak G nazývame vrcholovo bimagickým grafom.

Veta 3.3. *Nech G je vrcholovo bimagický graf. Ak G obsahuje dvojicu vrcholov stupňa 1, potom majú spoločného suseda.*

Dôkaz. Sporom. Nech G obsahuje dva vrcholy u, v stupňa 1, ktoré nemajú spoločného suseda. Nech x je hodnota vrcholu u . Nech y je hodnota vrcholu v .

Nech sú vrcholy u, v susedné. Podľa u má graf magický súčet y a podľa v má graf magický súčet x . Z toho vyplýva $x = y$, čo je spor s tým, že vrcholom sú priradené navzájom rôzne čísla.

Nech majú vrcholy u, v rôznych susedov w_1, w_2 . Označme hodnoty týchto vrcholov z_1, z_2 . Podľa u má graf magický súčet z_1 a podľa v má graf magický súčet z_2 . Z toho vyplýva $z_1 = z_2$, čo je opäť spor. □

Dôsledok 3.4. *Stromy nie sú vrcholovo bimagické.*

Dôkaz. Z predchádzajúcej vety vyplýva, že jediným stromom, ktorý môže byť vrcholovo bimagickým, je $K_{1,n}$ pre nejaké $n \in \mathbb{N}$. Nech v je koreň tohto stromu a v_1, \dots, v_n sú jeho listy. Nech b je hodnota koreňa a a_1, \dots, a_n sú hodnoty jeho listov. Podľa v má graf magický súčet $\sum_{k=1}^n a_k$ a podľa v_1 má graf magický súčet b . Podľa v má graf bimagický súčet $\sum_{k=1}^n a_k^2$ a podľa v_1 má graf magický súčet b^2 . Z toho vyplýva, že by sústava z jednotkovej lemy mala riešenie, čo je spor. □

Veta 3.5. *Nech G je vrcholovo bimagický graf. Potom majú všetky vrcholy stupňa 2 rovnakú množinu susedov.*

Dôkaz. Sporom. Nech G obsahuje dva vrcholy u, v stupňa 2, ktoré nemajú rovnakú množinu susedov. Nech x je hodnota vrcholu u . Nech y je hodnota vrcholu v .

Nech sú vrcholy u, v susedné. Nech w_1 je druhý sused u a z_1 je jeho hodnota. Nech w_2 je druhý sused v a z_2 je jeho hodnota. Podľa u má graf magický súčet $y + z_1$ a podľa v má graf magický súčet $x + z_2$. Podľa u má graf bimagický súčet $y^2 + z_1^2$ a podľa v má graf bimagický súčet $x^2 + z_2^2$. To znamená, že $x + z_2 = y + z_1$ a zároveň $x^2 + z_2^2 = y^2 + z_1^2$. Z duplikačnej lemy potom vyplýva, že $y = x$ alebo $y = z_2$, čo je spor s tým, že vrcholom sú priradené navzájom rôzne čísla.

Nech majú vrcholy u, v práve jedného spoločného suseda w , jeho hodnotu označíme z . Nech w_1 je druhý sused u a z_1 je jeho hodnota. Nech w_2 je druhý sused v a z_2 je jeho hodnota. Podľa u má graf magický súčet $z + z_1$ a podľa v má graf magický súčet $z + z_2$. Z toho vyplýva $z_1 = z_2$, čo je spor.

Nech majú vrcholy u, v odlišných susedov. Nech w_1, w_2 sú susedia u , pričom ich hodnoty sú z_1, z_2 . Nech w_3, w_4 sú susedia v , pričom ich hodnoty sú z_3, z_4 . Podľa u má graf magický súčet $z_1 + z_2$ a podľa v má graf magický súčet $z_3 + z_4$. Podľa u má graf bimagický súčet $z_1^2 + z_2^2$ a podľa v má graf bimagický súčet $z_3^2 + z_4^2$. To znamená, že $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$ a zároveň $z_1^2 + z_2^2 = z_3^2 + z_4^2$. Z duplikačnej lemy potom vyplýva, že $z_3 = z_1$ alebo $z_3 = z_2$, čo je opäť rovnaký spor. \square

Veta 3.6. *Nech G je vrcholovo bimagický graf. Potom má každá dvojica nesusedných vrcholov stupňa 3 buď rovnakú množinu susedov, alebo nemá spoločného suseda.*

Dôkaz. Sporom. Nech G obsahuje dva nesusedné vrcholy u, v stupňa 3, ktoré majú práve jedného alebo dvoch spoločných susedov. Nech x je hodnota vrcholu u . Nech y je hodnota vrcholu v .

Nech majú vrcholy u, v práve jedného spoločného suseda w , jeho hodnotu označíme z . Nech w_1, w_2 sú zvyšní susedia u a z_1, z_2 sú ich hodnoty. Nech w_3, w_4 sú zvyšní susedia v a z_3, z_4 sú ich hodnoty. Podľa u má graf magický súčet $z + z_1 + z_2$ a podľa v má graf magický súčet $z + z_3 + z_4$. Podľa u má graf bimagický súčet $z^2 + z_1^2 + z_2^2$ a podľa v má graf bimagický súčet $z^2 + z_3^2 + z_4^2$. To znamená, že $z + z_1 + z_2 = z + z_3 + z_4$ a zároveň $z^2 + z_1^2 + z_2^2 = z^2 + z_3^2 + z_4^2$. Z duplikačnej lemy potom vyplýva, že $z_3 = z_1$ alebo $z_3 = z_2$, čo je spor s tým, že vrcholom sú priradené navzájom rôzne čísla.

Nech majú vrcholy u, v práve dvoch spoločných susedov w_1, w_2 , ich hodnoty označíme z_1, z_2 . Nech w_3 je zvyšný sused u a z_3 je jeho hodnota. Nech w_4 je zvyšný sused v a z_4 je jeho hodnota. Podľa u má graf magický súčet $z_1 + z_2 + z_3$ a podľa v má graf magický súčet $z_1 + z_2 + z_4$. Z toho vyplýva $z_3 = z_4$, čo je opäť spor. \square

Veta 3.7. *Nech G je vrcholovo bimagický graf. Nech e je most v G . Nech G_1, G_2 sú komponenty, ktoré vzniknú odobraním e z G . Potom $G_1 \cup e, G_2 \cup e$ sú vrcholovo bimagické grafy.*

Dôkaz. Zrejmy. \square

Veta 3.8. *Jediný kubický graf, ktorý je vrcholovo bimagický, je $K_{3,3}$.*

Dôkaz. Nech G je kubický graf, o ktorom vieme, že je vrcholovo bimagický. V grafe G určite existujú dva susedné vrcholy u, v . Nech w_1, w_2 sú zvyšní susedia u . Nech w_3, w_4 sú zvyšní susedia v . Vrcholy u, v sú susedné a majú stupeň 3. Rozoberieme všetky možnosti:

1. Nech sú w_1, w_2, w_3, w_4 navzájom rôzne. Vrcholy w_1 a v majú spoločného suseda u , takže z vety 3.6 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Susedné byť nemôžu, pretože potom by mal v stupeň aspoň 4. Teda v G musí existovať hrana w_1w_3 aj hrana w_1w_4 .

Zároveň, vrcholy w_2 a v majú tiež spoločného suseda u , takže z vety 3.6 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Susedné byť nemôžu, pretože potom by mal v stupeň aspoň 4. Teda v G musí existovať hrana w_2w_3 aj hrana w_2w_4 .

Tým sme dostali graf $K_{3,3}$, ktorý vieme vrcholovo bimagicky ohodnotiť.

2. Nech $w_1 = w_3$ a $w_2 \neq w_4$. Vrcholy w_1 a w_2 majú spoločného suseda u , takže z vety 3.6 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Teda v G musí existovať hrana w_1w_2 alebo hrana w_2v .

Zároveň, vrcholy w_1 a w_4 majú spoločného suseda v , takže z vety 3.6 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Teda v G musí existovať hrana w_1w_4 alebo hrana w_4u .

Lenže ak z každých dvoch potenciálnych hrán pridáme do G aspoň jednu, tak jeden z vrcholov u, v, w_1 bude mať stupeň aspoň 4, čo je spor s tým, že graf je kubický.

3. Nech $w_1 = w_3$ a $w_2 = w_4$. Vrcholy w_1 a w_2 majú spoločných susedov u, v , takže z vety 3.6 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Teda v G musí existovať hrana w_1w_2 alebo dvojice hrán w_1w_5 a w_2w_5 pre nejaký nový vrchol w_5 .

Ak je v G hrana w_1w_2 , dostaneme graf K_4 . O ňom sa môžeme ľahko presvedčiť, že nie je vrcholovo bimagický. Ak priradíme vrcholom hodnoty a, b, c, d , tak musí platiť, že magické súčty $a + b + c, a + b + d, a + c + d, b + c + d$ sú rovnaké. To je možné len v prípade, že $a = b = c = d$, čo je spor s tým, že vrcholom sú priradené navzájom rôzne čísla.

Ak sú v G hrany w_1w_5 aj w_2w_5 pre nejaký nový vrchol w_5 , tiež dôjdeme k sporu. Vrcholy u a w_5 majú spoločných susedov w_1, w_2 , takže z vety 3.6 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Susedné byť nemôžu, pretože potom by mal u stupeň aspoň 4. Teda by v G musela existovať hrana vw_5 , čo tiež nie je možné, pretože potom by mal v stupeň aspoň 4.

□

Veta 3.9. *Nech G je vrcholovo bimagický graf a u, v sú nejaké jeho dva vrcholy. Nech x je počet susedov vrcholu u , ktoré nie sú susedmi vrcholu v . Nech y je počet susedov vrcholu v , ktoré nie sú susedmi vrcholu u . Potom platí:*

$$\begin{aligned} x = 0 &\iff y = 0 \\ x, y &\neq 1 \\ (x, y) &\neq (2, 2) \end{aligned}$$

Dôkaz. Ak pre vrcholy u, v zrátame magický alebo bimagický súčet, ich spoloční susedia budú zarátaní na oboch stranách. Stačí sa preto venovať magickému a bimagickému súčtu vrcholov, ktoré nie sú zároveň susedmi u aj v (tých je x , resp. y). Sporom budeme predpokladať, že G je vrcholovo bimagický a jedna z podmienok nie je splnená. To znamená, že nasledovná sústava má riešenie:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^x a_k &= \sum_{k=1}^y b_k \\ \sum_{k=1}^x a_k^2 &= \sum_{k=1}^y b_k^2 \end{aligned}$$

ak $a_1, \dots, a_x, b_1, \dots, b_y$ sú navzájom rôzne kladné celé čísla.

Ak neplatí prvý vzťah, tak BUNV nech $x > 0$ a $y = 0$. Druhá rovnica by potom mala tvar $\sum_{k=1}^x a_k^2 = 0$. Jediné riešenie tejto rovnice je zjavne nulové, čo je spor s tým, že vo vrcholovo bimagickom grafe sú vrcholom priradené kladné čísla.

Ak neplatí druhý vzťah, tak BUNV nech $y = 1$. Potom dostaneme sústavu z jednotkovej lemy, o ktorej vieme, že nemá riešenie (čo je spor).

Ak neplatí tretí vzťah, tak musí platiť $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ aj $a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2$. Z duplikačnej lemy potom vyplýva $b_1 = a_1$ alebo $b_1 = a_2$, čo je spor s tým, že vo vrcholovo bimagickom grafe sú vrcholom priradené navzájom rôzne čísla. \square

Veta 3.10. *Pre každé $i, j \in \mathbb{N}, 2 \leq i \leq j, (i, j) \neq (2, 2)$ platí, že graf $K_{i,j}$ je vrcholovo bimagický.*

Dôkaz. Indukciou vzhľadom na i, j . Najprv ukážeme, že grafy $K_{2,j}, K_{3,j}, K_{4,4}$ a $K_{4,5}$ sú vrcholovo bimagické.

Graf $K_{2,n}$ pre $n \geq 3$ je vrcholovo bimagický - stačí do prvej partície dať prvky $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ a $\frac{n(n-1)(3n^2-7n+14)}{24}$ a do druhej partície prvky 1 až $n-1$ spolu s $\frac{n(n-1)(3n^2-7n+14)}{24} + 1$.

Graf $K_{3,n}$ pre $n \geq 3$ je vrcholovo bimagický - stačí do prvej partície dať prvky 1, $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ a $\frac{n(n+1)(3n^2-n-14)}{24} + 1$ a do druhej partície prvky 2 až n spolu s $\frac{n(n+1)(3n^2-n-14)}{24} + 2$.

Graf $K_{4,4}$ je vrcholovo bimagický - stačí do prvej partície dať prvky 1, 4, 6, 7 a do druhej partície prvky 2, 3, 5, 8.

Graf $K_{4,5}$ je vrcholovo bimagický - stačí do prvej partície dať prvky 2, 12, 13, 15 a do druhej partície prvky 1, 4, 8, 10, 19.

Teraz dokážeme, že ak je $K_{i,j}$ vrcholovo bimagický, tak je aj $K_{i+2,j+3}$. Do jednej partície stačí pridať prvky $4k, 5k$ a do druhej prvky $k, 2k, 6k$, pričom $k \in \mathbb{N}$ zvolíme dostatočne veľké (aby boli prvky navzájom rôzne). \square

Z vety 3.9 sme schopní priamo implementovať algoritmus 4.5, ktorý overí, či zadaný graf môže byť vrcholovo bimagickým.

Výsledok 3.11. *Jediné súvislé grafy s menej ako 10 vrcholmi, ktoré spĺňajú všetky podmienky z vety 3.9 (a teda môžu byť vrcholovo bimagické), sú $K_{2,3}, K_{2,4}, K_{2,5}, K_{2,6}, K_{2,7}, K_{3,3}, K_{3,4}, K_{3,5}, K_{3,6}, K_{4,4}, K_{4,5}, K_{2,3,3}, K_{2,3,4}$ a $K_{3,3,3}$.*

Podľa vety 3.10 vieme, že $K_{i,j}$ je vrcholovo bimagický pre $i, j \geq 2, (i, j) \neq (2, 2)$. Môžeme sa ľahko presvedčiť, že aj zvyšné grafy majú vrcholové bimagické ohodnotenie:

$$K_{2,3,3} \rightarrow 11, 13 \mid 1, 8, 15 \mid 3, 5, 16$$

$$K_{2,3,4} \rightarrow 11, 19 \mid 1, 9, 20 \mid 1, 2, 6, 21$$

$$K_{3,3,3} \rightarrow 1, 12, 14 \mid 2, 9, 16 \mid 4, 6, 17$$

Definícia 3.12. *Nech G je vrcholovo bimagický graf s n vrcholmi. Ak sú vrcholom priradené čísla z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, tak G nazývame **vrcholovo superbimagickým grafom**.*

Existuje vrcholovo superbimagický graf? Keďže zatiaľ vieme vrcholovo bimagicky ohodnotiť len kompletne bipartitné grafy, musíme skúmať tie.

Veta 3.13. *Pre $n \in \{7, 8, 11, 12\}$ existuje práve jeden vrcholovo superbimagický kompletne bipartitný graf.*

Dôkaz. Hrubou silou.

$$n = 7 \rightarrow \{1, 2, 4, 7\} \mid \{3, 5, 6\}$$

$$n = 8 \rightarrow \{1, 4, 6, 7\} \mid \{2, 3, 5, 8\}$$

$$n = 11 \rightarrow \{1, 3, 4, 5, 9, 11\} \mid \{2, 6, 7, 8, 10\}$$

$$n = 12 \rightarrow \{1, 3, 7, 8, 9, 11\} \mid \{2, 4, 5, 6, 10, 12\}$$

□

Veta 3.14. *Vrcholovo superbimagický kompletne bipartitný graf s n vrcholmi existuje práve vtedy, keď $n = 4k$ alebo $n = 4k - 1$ pre $k \geq 2$.*

Dôkaz. Najprv dokážeme, že ak $n = 4k$ alebo $n = 4k - 1, k \geq 2$, tak existuje vrcholovo superbimagický kompletne bipartitný graf, ktorý má n vrcholov. Stačí nám dokázať, že dané tvrdenie platí pre všetky n tvaru $8k - 1, 8k, 8k + 3, 8k + 4$. To urobíme matematickou indukciou vzhľadom na k . Pre $k = 1$ existujú vyhovujúce ohodnotenia (uvedené vo vete 3.13).

Indukčný krok je potom jednoduchý. Uvedieme ho pre prípad $n = 8k$, ostatné z nich sú analogické. Predpokladajme, že pre $n = 8k$ existuje superbimagické ohodnotenie. Pre $n = 8(k + 1)$ ho zostrojíme nasledovne: najprv vezmeme superbimagické ohodnotenie pre $n = 8k$ (ostanú nám nepriradené čísla $8k + 1, \dots, 8k + 8$). Potom na jednu stranu pridáme čísla $8k + 1, 8k + 4, 8k + 6, 8k + 7$ a na druhú stranu $8k + 2, 8k + 3, 8k + 5, 8k + 8$. Na obe strany sme pridali čísla s rovnakým súčtom aj rovnakým súčtom druhých mocnín.

Ak bolo pôvodné ohodnotenie superbimagicke, tak aj nové ohodnotenie pre $n = 8(k+1)$ je superbimagicke.

Ak $n = 4k + 1$ alebo $n = 4k + 2, k \in \mathbb{N}$, tak požadovaný graf neexistuje. Predpokladajme sporom, že taký graf existuje. Potom sa množina $\{1, 2, \dots, n\}$ dá rozdeliť na dve disjunktné podmnožiny s rovnakým súčtom aj súčtom druhých mocnín. Súčet tejto množiny je $\frac{n(n+1)}{2}$. Každá podmnožina by teda musela mať súčet $\frac{n(n+1)}{4}$. Lenže ak $n = 4k + 1$ alebo $n = 4k + 2, k \in \mathbb{N}$, tak výraz $\frac{n(n+1)}{4}$ nie je celé číslo, čo je spor. \square

Hypotéza 3.15. *Každý vrcholovo bimagický graf je kompletný bipartitný.*

3.1.2 Hranovo bimagicke grafy

Definícia 3.16. *Nech G je súvislý jednoduchý netriviálny graf. Ak existuje hranové ohodnotenie grafu G také, že platí:*

1. *hranám sú priradené navzájom rôzne kladné celé čísla*
2. *súčet incidentných hrán každého vrcholu je rovnaký*
3. *súčet druhých mocnín incidentných hrán každého vrcholu je rovnaký*

*tak G nazývame **hranovo bimagickým grafom**.*

Jeden z hranovo bimagických grafov je cesta na dvoch vrchoch (s ľubovoľným kladným ohodnotením). Zaujímavá skupina potenciálne hranovo bimagických grafov je $K_{n,n}$: sú ekvivalentné semibimagickým štvorcami veľkosti $n \times n$. A keďže už poznáme semibimagicke štvorce veľkosti 4×4 a väčšie, tak $K_{n,n}$ je hranovo bimagický pre $n \geq 4$.

Veta 3.17. *Nech G je hranovo bimagický graf, ktorý má aspoň tri vrcholy. Potom G neobsahuje vrchol stupňa 1.*

Dôkaz. Sporom. Nech u je vrchol stupňa 1, v je jeho jediný sused a x je hodnota hrany medzi vrcholmi u, v . Potom podľa u musí platiť, že magický súčet je x . Lenže ak je G súvislý a má aspoň tri vrcholy, tak vrchol v musí mať ešte ďalší susedný vrchol w . Nech y je hodnota hrany medzi vrcholmi v, w . Potom však podľa v musí platiť, že magický súčet je aspoň $x + y > x$, čo je spor. \square

Veta 3.18. *Nech G je hranovo bimagický graf. Potom G neobsahuje vrchol stupňa 2.*

Dôkaz. Sporom. Nech u je vrchol stupňa 2. Označme jeho susedov v, w . Nech b, c sú ohodnotenia hrán medzi u, v , resp. u, w . Nech a_1, a_2, \dots, a_n sú ohodnotenia hrán, ktoré sú incidentné s w okrem hrany uw . Podľa u musí platiť, že magický súčet je $b + c$ a

bimagický súčet je $b^2 + c^2$. Podľa w musí platiť, že magický súčet je $c + \sum_{k=1}^n a_n$ a bimagický súčet je $c^2 + \sum_{k=1}^n a_n^2$. Z toho vyplýva, že by sústava z jednotkovej lemy mala riešenie, čo je spor. \square

Dôsledok 3.19. *Stromy nie sú hranovo bimagické.*

Veta 3.20. *Nech G je hranovo bimagický graf, ktorý má aspoň tri vrcholy. Nech u, v sú ľubovoľné dva susedné vrcholy. Potom $\max\{d(u), d(v)\} \geq 4$.*

Dôkaz. Sporom. Predpokladajme, že existuje dvojica susedných vrcholov u, v takých, že $\max\{d(u), d(v)\} < 4$. Z dôsledku 3.19 potom vyplýva, že nutne $d(u) = d(v) = 3$. Označme x hodnotenie hrany medzi u, v . Označme y_1, y_2 zvyšné hodnotenia hrán z u a z_1, z_2 zvyšné hodnotenia hrán z v . Podľa u musí platiť, že magický súčet je $x + y_1 + y_2$ a bimagický súčet je $x^2 + y_1^2 + y_2^2$. Podľa v musí platiť, že magický súčet je $x + z_1 + z_2$ a bimagický súčet je $x^2 + z_1^2 + z_2^2$. Teda musí platiť $y_1 + y_2 = z_1 + z_2$ aj $y_1^2 + y_2^2 = z_1^2 + z_2^2$. Z duplikačnej lemy potom vyplýva, že $z_1 = y_1$ alebo $z_1 = y_2$, čo je spor s tým, že hranám budú priradené navzájom rôzne čísla. \square

Dôsledok 3.21. *Kubické grafy nie sú hranovo bimagické.*

Dôsledok 3.22. *Nech G je hranovo bimagický graf a $\alpha(G)$ je jeho číslo nezávislosti. Potom má G aspoň $2V(G) - \frac{\alpha(G)}{2}$ hrán.*

Dôkaz. Ak pre ľubovoľné dva susedné vrcholy u, v platí $\max\{d(u), d(v)\} \geq 4$, potom nemôžu v grafe G existovať dva susedné vrcholy stupňa 3. Z toho vyplýva, že počet vrcholov stupňa 3 nemôže byť väčší ako $\alpha(G)$ a ostatné musia byť stupňa aspoň 4. Preto G musí mať aspoň $\frac{3\alpha(G) + 4[V(G) - \alpha(G)]}{2} = \frac{4V(G) - \alpha(G)}{2} = 2V(G) - \frac{\alpha(G)}{2}$ hrán. \square

Poznámka 3.23. *Číslo nezávislosti grafu G je najväčší počet vrcholov G , z ktorých žiadne dva nie sú spojené hranou.*

Veta 3.24. *Existuje graf, ktorý je hranovo bimagický a nie je kompletný bipartitný.*

Dôkaz. Nech G je hranovo bimagický kompletný bipartitný regulárny graf s nejakým ohodnotením. Nech e je hrana, ktorá má najmenšiu hodnotu. Keďže je regulárny, tak podľa posunovej lemy môžeme od všetkých hrán odrátať hodnotu hrany e . Tým dostaneme hranovo bimagický kompletný bipartitný graf, ktorý má práve jednu nulovú hranu e . Zjavne vieme túto hranu z grafu odstrániť a magická aj bimagická podmienka ostane zachovaná. Graf $G - e$ je teda hranovo bimagický a pritom nie je kompletný bipartitný. \square

Definícia 3.25. *Nech G je hranovo bimagický graf s n vrcholmi. Ak sú hranám priradené čísla z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, tak G nazývame **hranovo superbimagickým grafom**.*

Keďže Georges Pfeffermann našiel v 19. storočí superbimagický štvorec veľkosti 8×8 , vieme, že existuje hranovo superbimagický graf - je ním kompletný bipartitný graf na 8 vrchoch.

Hypotéza 3.26. *Každý hranovo bimagický graf je kompletný bipartitný alebo kompletný bipartitný bez jednej hrany.*

3.2 Multiplikatívne magické grafy

3.2.1 Vrcholovo multiplikatívne magické grafy

Definícia 3.27. *Nech G je súvislý jednoduchý netriviálny graf. Ak existuje vrcholové ohodnotenie grafu G také, že platí:*

1. *vrcholom sú priradené navzájom rôzne kladné celé čísla*
2. *súčet susedov každého vrcholu je rovnaký*
3. *súčin susedov každého vrcholu je rovnaký*

*tak G nazývame **vrcholovo multiplikatívnym magickým grafom**.*

Veta 3.28. *Nech G je vrcholovo multiplikatívny magický graf. Ak G obsahuje dvojicu vrcholov stupňa 1, potom majú spoločného suseda.*

Dôkaz. Rovnaký ako dôkaz vety 3.3. □

Dôsledok 3.29. *Jediný strom, ktorý je vrcholovo multiplikatívny magický, je $K_{1,3}$.*

Dôkaz. Z vety vyplýva, že jediným stromom, ktorý môže byť vrcholovo multiplikatívnym magickým, je $K_{1,n}$ pre nejaké $n \in \mathbb{N}$. Nech v je koreň tohto stromu a v_1, \dots, v_n sú jeho listy. Nech b je hodnota koreňa a a_1, \dots, a_n sú hodnoty jeho listov. Podľa v má graf magický súčet $\sum_{k=1}^n a_k$ a podľa v_1 má graf magický súčet b . Podľa v má graf súčin $\prod_{k=1}^n a_k$ a podľa v_1 má graf súčin b . To odpovedá sústave z jednotkovej lemy, ktorá má jediné riešenie ($n = 3, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, b = 6$). Z toho vyplýva, že iba $K_{1,3}$ je multiplikatívny magický. □

Nasledovné vety vieme dokázať rovnakými technikami ako pri vrcholovo bimagických grafoch:

Veta 3.30. *Nech G je vrcholovo multiplikatívny magický graf. Potom majú všetky vrcholy stupňa 2 rovnakú množinu susedov.*

Veta 3.31. *Nech G je vrcholovo multiplikatívny magický graf. Potom má každá dvojica nesusedných vrcholov stupňa 3 buď rovnakú množinu susedov, alebo nemá spoločného suseda.*

Veta 3.32. *Nech G je vrcholovo multiplikatívny magický graf. Nech e je most v G . Nech G_1, G_2 sú komponenty, ktoré vzniknú odobraním e z G . Potom $G_1 \cup e, G_2 \cup e$ sú vrcholovo multiplikatívne magické grafy.*

Veta 3.33. *Jediný kubický graf, ktorý je vrcholovo multiplikatívny magický, je $K_{3,3}$.*

Ako je to s vrcholovo multiplikatívnymi supermagickými grafmi?

Veta 3.34. *Kompletný bipartitný graf nemôže byť vrcholovo multiplikatívny supermagický.*

Dôkaz. Sporom. Nech G je kompletný bipartitný a vrcholovo multiplikatívny supermagický graf s n vrcholmi. Nech p je najväčšie prvočíslo, ktoré neprevyšuje n . Toto prvočíslo sa môže vyskytovať iba v jednej partícii. To však znamená, že súčin oboch partícií nemôže byť rovnaký (jeden súčin bude mať p vo svojom rozklade a druhý nie). \square

Veta 3.35. *Pre každé $i, j \in \mathbb{N}, 2 \leq i \leq j, (i, j) \neq (2, 2)$ platí, že graf $K_{i,j}$ je vrcholovo multiplikatívny magický.*

Dôkaz. Indukciou vzhľadom na i, j . Najprv ukážeme, že grafy $K_{i,j}, i \in \{2, 3\}, K_{4,4}$ a $K_{4,5}$ sú vrcholovo multiplikatívne magické.

Grafy $K_{2,3}, K_{2,4}, K_{4,4}$ a $K_{4,5}$ sú vrcholovo multiplikatívne magické, pretože:

- Pre graf $K_{2,3}$ stačí priradiť jednej partícii prvky 5, 12 a druhej partícii prvky 1, 6, 10.
- Pre graf $K_{2,4}$ stačí priradiť jednej partícii prvky 9, 16 a druhej partícii prvky 1, 2, 4, 18.
- Pre graf $K_{4,4}$ stačí priradiť jednej partícii prvky 1, 5, 6, 12 a druhej partícii prvky 2, 3, 4, 15.
- Pre graf $K_{4,5}$ stačí priradiť jednej partícii prvky 2, 10, 20, 27 a druhej partícii prvky 1, 3, 6, 24, 25.

Graf $K_{2,n}$ pre $n \geq 5$ je vrcholovo multiplikatívny magický - stačí do prvej partície dať prvky $(n-1)! + 1$ a $(n-1)![(n-1)! + 1 - \frac{n(n-1)}{2}]$ a do druhej partície prvky $1, 2, \dots, n-2, n-1, [(n-1)! + 1][(n-1)! + 1 - \frac{n(n-1)}{2}]$.

Graf $K_{3,n}$ pre $n \geq 3$ je vrcholovo multiplikatívny magický - stačí do prvej partície dať prvky $1, n! + 1$ a $n![n! + 3 - \frac{n(n+1)}{2}]$ a do druhej partície prvky $2, \dots, n-1, n, (n! + 1)[n! + 3 - \frac{n(n+1)}{2}]$.

Teraz dokážeme, že ak je $K_{i,j}$ vrcholovo multiplikatívny magický, tak je aj $K_{i+2,j+3}$. Do jednej partície stačí pridať prvky $2xy, 2xy - x - y$ a do druhej prvky $2(2xy - x - y), x, y$, pričom $x, y \in \mathbb{N}$ zvolíme dostatočne veľké (aby boli prvky navzájom rôzne). \square

3.2.2 Hranovo multiplikatívne magické grafy

Definícia 3.36. *Nech G je súvislý jednoduchý netriviálny graf. Ak existuje hranové ohodnotenie grafu G také, že platí:*

1. *hranám sú priradené navzájom rôzne kladné celé čísla*
2. *súčet incidentných hrán každého vrcholu je rovnaký*
3. *súčin incidentných hrán každého vrcholu je rovnaký*

tak G nazývame hranovo multiplikatívnym magickým grafom.

Veta 3.37. *Nech G je hranovo multiplikatívny magický graf, ktorý má aspoň tri vrcholy. Potom G neobsahuje vrchol stupňa 1.*

Dôkaz. Rovnaký ako dôkaz vety 3.17. \square

3.3 Magické obdĺžniky

Veta 3.38. *V každom magickom obdĺžniku platí, že zámenou ľubovoľných dvoch riadkov alebo stĺpcov dostaneme opäť magický obdĺžnik.*

Dôkaz. Zrejmý. \square

Dôsledok 3.39. *Ku každému magickému obdĺžniku A vieme zostrojiť magický obdĺžnik B , v ktorom platí, že jeho prvky v prvom riadku aj prvom stĺpci sú usporiadané vzostupne.*

Dôsledok 3.40. *V každom magickom obdĺžniku si vieme bez ujmy na všeobecnosti určiť poradie stĺpcov aj poradie prvkov v prvom stĺpci.*

3.3.1 Bimagické obdĺžniky

Definícia 3.41. *Nech A je matica veľkosti $m \times n$. Ak platí:*

1. *prvky matice sú navzájom rôzne kladné celé čísla*
2. *súčet prvkov v každom riadku je konštantný*
3. *súčet prvkov v každom stĺpci je konštantný*

4. *súčet druhých mocnín prvkov v každom riadku je konštantný*

5. *súčet druhých mocnín prvkov v každom stĺpci je konštantný*

*tak A nazývame **bimagickým obdĺžnikom**.*

Každý hranovo bimagický kompletný bipartitný graf sa dá jednoducho transformovať na bimagický obdĺžnik.

Veta 3.42. *Nech A je bimagický obdĺžnik veľkosti $m \times n$. Potom $m, n \geq 3$ alebo $(m, n) = (1, 1)$.*

Dôkaz. Ak $m = 1$, tak má obdĺžnik len jeden riadok. Ak majú byť jeho súčty v stĺpci rovnaké, musí byť v každom stĺpci rovnaké číslo. Ak $n \geq 2$, obdĺžnik by obsahoval duplicitné prvky, čo je spor. Z toho vyplýva, že nutne $n = 1$.

Ak $m = 2$, tak z predošlého odstavca vieme, že $n \geq 2$. Tým dostaneme pre dva riadky a dva stĺpce rovnicu z duplikačnej lemy, z čoho vyplýva, že obdĺžnik by obsahoval duplicitné prvky, čo je spor. \square

Veta 3.43. *Nech A je bimagický obdĺžnik. Potom ho vieme transformovať na taký bimagický obdĺžnik B , že jeho najmenší prvok je 1.*

Dôkaz. Nech m_A je najmenší prvok A . Bimagický obdĺžnik B zostrojíme tak, že ku každému prvku A pripočítame $1 - m_A$ (a teda najmenší prvok sa zmení na 1). Z posunovej lemy zároveň vyplýva, že ak boli magické aj bimagické súčty konštantné v A , tak budú aj v B . Teda B je bimagický obdĺžnik. \square

Veta 3.44. *Nech A je bimagický obdĺžnik veľkosti $3 \times n$ pre $n \geq 4$, ktorého najmenší prvok je 1. Nech S je magický a T je bimagický súčet tohto obdĺžnika. Potom je výraz $2T - (S - 1)^2 - 2$ druhou mocninou kladného celého čísla.*

Dôkaz. Nech x, y sú zvyšné prvky v stĺpci, kde sa nachádza 1. Potom musia platiť vzťahy:

$$\begin{aligned} x + y &= S - 1 \\ x^2 + y^2 &= T - 1 \end{aligned}$$

Z prvého vzťahu vyjadríme $y = S - 1 - x$. Dosadením do druhého a následnou úpravou dostaneme kvadratickú rovnicu $2x^2 - 2x(S - 1) + (S - 1)^2 - T + 1 = 0$. Jej diskriminant je $4(2T - (S - 1)^2 - 2)$. Keďže $x \in \mathbb{N}$, nutne musí byť $2T - (S - 1)^2 - 2$ druhou mocninou kladného celého čísla. \square

Na základe viet 3.43 a 3.44 vieme implementovať algoritmy 4.9 a 4.10.

Výsledok 3.45. *Neexistuje bimagický obdlžnik veľkosti $3 \times n$, ktorého súčet prvkov v stĺpci je menší ako 384. Podarilo sa nájsť niekoľko magických obdlžnikov veľkosti 3×6 , 3×8 a 3×10 s bimagickými stĺpcami a jediným nebimagickým riadkom. Najmenší z nich má súčet v stĺpci rovný 144 ????:*

1	3	88	8	93	95
63	56	51	91	11	16
80	85	5	45	40	33

Výsledok 3.46. *Neexistuje bimagický obdlžnik veľkosti $3 \times n$, ktorého prvky sú kladné celé čísla menšie ako 400.*

Spomínané algoritmy vieme ľahko modifikovať tak, aby hľadali aj väčšie bimagické obdlžniky. Tým sme prišli k ďalšiemu zisteniu:

Výsledok 3.47. *Neexistuje bimagický obdlžnik veľkosti $4 \times n$, ktorého súčet prvkov v stĺpci je menší ako 82. Podarilo sa nájsť niekoľko magických obdlžnikov veľkosti 3×6 s bimagickými stĺpcami a len dvomi rôznymi bimagickými súčtami v riadkoch. Najmenší z nich má súčet v stĺpci rovný 68:*

1	30	24	19	22	6
6	2	29	13	31	11
23	21	3	32	5	18
28	15	12	4	10	33

Hypotéza 3.48. *Neexistuje bimagický obdlžnik veľkosti $m \times n$ pre $m \neq n$.*

3.3.2 Multiplikatívne magické obdlžniky

Definícia 3.49. *Nech A je matica veľkosti $m \times n$. Ak platí:*

1. *prvky matice sú navzájom rôzne kladné celé čísla*
2. *súčet prvkov v každom riadku je konštantný*
3. *súčet prvkov v každom stĺpci je konštantný*
4. *súčin prvkov v každom riadku je konštantný*
5. *súčin prvkov v každom stĺpci je konštantný*

*tak A nazývame **multiplikatívnym magickým obdlžnikom**.*

Každý hranovo multiplikatívny magický kompletný bipartitný graf sa dá jednoducho transformovať na multiplikatívny magický obdĺžnik.

Veta 3.50. *Nech A je multiplikatívny magický obdĺžnik veľkosti $m \times n$. Potom $m, n \geq 3$ alebo $(m, n) = (1, 1)$.*

Dôkaz. Rovnaký ako dôkaz vety 3.42. □

Veta 3.51. *Nech A je multiplikatívny magický obdĺžnik veľkosti $m \times n$, $m \leq n$ a M je jeho najväčší prvok. Potom pre všetky $x \in A$ platí, že x je zložené číslo alebo $xn \leq M$.*

Dôkaz. Sporom. Nech existuje $x \in A$ také, že x nie je zložené číslo. Potom nutne platí, že každý súčin v n riadkoch alebo stĺpcoch je deliteľný x . Ak však platí $xn > M$, tak máme k dispozícii najviac $n - 1$ prvkov, ktoré sú deliteľné x a neprevyšujú M . Z Dirichletovho princípu potom vyplýva, že aspoň v dvoch riadkoch alebo stĺpcoch musia byť rovnaké prvky, čo je spor. □

Využitím vety 3.51 vieme implementovať algoritmy 4.11 a ?? a ich modifikácie pre väčšie multiplikatívne magické obdĺžniky.

Výsledok 3.52. *Neexistuje multiplikatívny magický obdĺžnik veľkosti $3 \times n$, ktorého súčet prvkov v stĺpci je menší ako 4000. Podarilo sa nájsť niekoľko multiplikatívnych obdĺžnikov veľkosti 3×6 a 3×9 s magickými stĺpcami. Najmenší z nich má súčet v stĺpci rovný 485:*

14	294	16	385	60	396
231	15	154	72	392	40
240	176	315	28	33	49

Výsledok 3.53. *Neexistuje multiplikatívny magický obdĺžnik veľkosti $4 \times n$, ktorého súčet prvkov v stĺpci je menší ako 160. Podarilo sa nájsť tento magický obdĺžnik veľkosti 4×6 s multiplikatívnymi stĺpcami a dvoma multiplikatívnymi riadkami:*

6	32	64	18	90	24
42	81	20	56	14	21
48	35	9	10	36	96
60	8	63	72	16	15

Hypotéza 3.54. *Neexistuje multiplikatívny magický obdĺžnik veľkosti $m \times n$ pre $m \neq n$.*

Kapitola 4

Implementácia algoritmov

Program sme písali v jazyku Python. Zvolili sme si ho predovšetkým z dôvodu, že má neobmedzené číselné premenné (niektoré algoritmy budú pracovať s hodnotami, ktoré sa nezmestia do bežnej 32-bitovej premennej). Zdrojový kód je uvedený ako príloha k tejto práci.

4.1 Magické štvorce

4.1.1 Magické štvorce druhého stupňa

Algoritmus 4.1. *Vstupom sú navzájom rôzne kladné celé čísla $u_1, v_1, u_2, v_2 \in \mathbb{N}$. Výstupom je magický štvorec veľkosti 3×3 , ktorého aspoň 7 prvkov sú druhé mocniny kladných celých čísel. Algoritmus využije štyri parametrické vzorce z vety 2.7, ktoré generujú vyhovujúce magické štvorce.*

$$p \leftarrow (u_1^2 + v_1^2)(u_2^2 + 2u_2v_2 - v_2^2)$$

$$q \leftarrow (u_1^2 + 2u_1v_1 - v_1^2)(u_2^2 + v_2^2)$$

$$r \leftarrow (-u_1^2 + 2u_1v_1 + v_1^2)(u_2^2 + v_2^2)$$

$$s \leftarrow (u_1^2 + v_1^2)(-u_2^2 + 2u_2v_2 + v_2^2)$$

$$t \leftarrow (u_1^2 + v_1^2)(u_2^2 + v_2^2)$$

if aspoň dva z $3t^2 - p^2 - q^2, 3t^2 - p^2 - r^2, 3t^2 - q^2 - s^2, 3t^2 - r^2 - s^2$ sú štvorce **then**
 return prvý štvorec

if aspoň dva z $2(r^2 + s^2), 2(q^2 + s^2), 2(p^2 + r^2), 2(p^2 + q^2)$ sú štvorce **then**
 return druhý štvorec

if aspoň dva z $3t^2 - p^2 - q^2, r^2 + s^2 - p^2, p^2 + q^2 - s^2, 3t^2 - r^2 - s^2$ sú štvorce **then**
 return tretí štvorec

if aspoň dva z $3t^2 - p^2 - r^2, q^2 + s^2 - p^2, p^2 + r^2 - s^2, 3t^2 - q^2 - s^2$ sú štvorce **then**
 return štvrtý štvorec

Algoritmus 4.2. Na vstupe dostaneme kladné celé číslo $x \in \mathbb{N}$. Výstupom je magický štvorec veľkosti 3×3 , ktorého aspoň 7 prvkov sú druhé mocniny kladných celých čísel. Algoritmus využije dva parametrické vzorce z vety 2.10, ktoré generujú vyhovujúce magické štvorce.

```

 $x_1 \leftarrow 8x^8 - 49x^6 + 6x^4 - 16x^2 + 2$ 
 $x_2 \leftarrow 8x^8 - x^6 + 30x^4 - 40x^2 + 2$ 
 $x_3 \leftarrow 8x^8 - 25x^6 + 18x^4 - 28x^2 + 2$ 
if  $x_1(x^2 - 2)$  je štvorec then
    return prvý štvorec
if  $x_2(x^2 - 2)$  je štvorec then
    return prvý štvorec
if  $x_3(x^2 - 2)$  je štvorec then
    return prvý štvorec
if  $\frac{4x^{10} - 31x^8 + 76x^6 + 76x^4 - 31x^2 + 4}{2}$  je štvorec then
    return druhý štvorec
if  $\frac{4x^{10} + 17x^8 + 4x^6 + 4x^4 + 17x^2 + 4}{2}$  je štvorec then
    return druhý štvorec
if  $\frac{4x^{10} + 65x^8 - 68x^6 - 68x^4 + 65x^2 + 4}{2}$  je štvorec then
    return druhý štvorec

```

4.1.2 Bimagické štvorce

Algoritmus 4.3. Na vstupe dostaneme kladné celé číslo $h \in \mathbb{N}$. Výstupom je bimagický štvorec veľkosti 5×5 s potenciálne zápornými prvkami. Algoritmus predpokladá, že magický súčet je rovný prostrednému pruku s (konštrukciou z vety 2.19. Potom si vygeneruje trojice (a, b, c) , z ktorých podľa vety 2.20 vytvorí štvorice $(-a + b + c, a - b + c, a + b - c, -a - b - c)$. Pokračuje hľadaním všetkých vyhovujúcich s podľa vety 2.21 pre každý riadok štvorca. Na záver sa pokúsi doplniť vyhovujúce čísla do stĺpcov a tým vygenerovať bimagický štvorec veľkosti 5×5 .

```

 $D_1 \leftarrow \text{dict}()$ 
 $D_2 \leftarrow \text{dict}()$ 
for all  $a, b, c \in \mathbb{N}; a < b < c; a^2 + b^2 + c^2 < h$  do
    pridaj  $(a, b, c)$  do  $D_1[a^2 + b^2 + c^2]$ 
for all  $k \in D_1$  do
    for all  $(a, b, c), (d, e, f), (g, h, i) \in D_1[k]$  do
         $\text{diagonala1} \leftarrow \{a + b - c, a - b + c, -a + b + c, -a - b - c\}$ 
         $\text{stred} \leftarrow \{d + e - f, d - e + f, -d + e + f, -d - e - f\}$ 

```

```

diagonala2  $\leftarrow \{g + h - i, g - h + i, -g + h + i, -g - h - i\}$ 
for all  $p \in \text{diagonala1}, q \in \text{stred}, r \in \text{diagonala2}$  do
    faktorizáciou nájdí všetky  $s, n \in \mathbb{Z}$ , pre ktoré platí
        
$$(s + n + p + q + r)(s - n + p + q + r) = 4(pq + pr + qr + p^2 + q^2 + r^2 + \frac{k}{2})$$

    pre každé dopočítaj  $x \leftarrow \frac{s-(p+q+r)\pm n}{2}, y \leftarrow s - x - (p + q + r)$ 
    if  $x \in \mathbb{Z}$  and  $\text{diagonala1}, \text{stred}, \text{diagonala2}, \{x, y, s\}$  sú disjunktné then
        pridaj  $(\text{diagonala1.index}(p), \text{stred.index}(q), \text{diagonala2.index}(r), p, q, r, x, y)$ 
do  $D_2[s]$ 
for all  $k \in D_2$  do
    for all štvorice  $(p_i, q_i, r_i, p_n, q_n, r_n, x_n, y_n) \in D_2[k], n \in \{1, 2, 3, 4\}$  do
        if  $\{p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}, p_{i_4}\} = \{q_{i_1}, q_{i_2}, q_{i_3}, q_{i_4}\} = \{r_{i_1}, r_{i_2}, r_{i_3}, r_{i_4}\} = \{0, 1, 2, 3\}$  then
            skonštruuj nasledovný štvorec  $A$ 

|       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| $p_1$ | $x_1$ | $q_1$ | $y_1$ | $r_1$ |
| $x_2$ | $p_2$ | $q_2$ | $r_2$ | $y_2$ |
| —     | —     | $s$   | —     | —     |
| $x_3$ | $p_3$ | $q_3$ | $r_3$ | $x_4$ |
| $p_4$ | $x_4$ | $q_4$ | $y_4$ | $r_4$ |

for all  $A'; A' = A$  or  $A'$  má vymenené niektoré  $x_n, y_n$  oproti  $A$  do
            doplň čísla do prostredného riadku  $A'$  tak, aby vznikol magický štvorec
            if  $A'$  je bimagický then
                print( $A'$ )

```

4.1.3 Multiplikatívne magické štvorce

Algoritmus 4.4. Na vstupe dostaneme kladné celé čísla p, h . Výstupom je multiplikatívny štvorec veľkosti 6×6 , ktorý má čo najbližšie k magickej vlastnosti (odchylky súčtov v riadkoch, stĺpcoch a diagonálach sú najmenšie možné), používa p štvorcových vzoriek a žiadna z nich nemá na začiatku vyššiu hodnotu ako h . Tento aproximačný algoritmus využíva vetu 2.29. Začneme so štvorcom, ktorého všetky prvky sú 1. Potom ho niekoľkokrát prenásobíme náhodnou štvorcovou vzorkou s náhodnou hodnotou. Nakoniec troma operáciami upravujeme hodnoty tak, aby sme sa čo najviac priblížili k multiplikatívnemu magickému štvorcu: vymeníme navzájom dve hodnoty, zmeníme jednu hodnotu alebo pripočítame k hodnotám jedno z čísel $-1, 0, 1$. Ako primárny indikátor sme si zvolili variačné rozpätie vzniknutého štvorca (rozdiel najväčšieho a najmenšieho magického súčtu) a ako sekundárny indikátor počet jeho rôznych magických súčtov (samozrejme, čím majú oba indikátory menšiu hodnotu, tým je výsledok lepší).

vzorky \leftarrow [všetky vzorky v štvorci veľkosti 6×6 uložené ako šesticel]

```

stvorcove  $\leftarrow$  []
for all  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \in \textit{vzorky}$  do
  if  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$  vyplňajú celý štvorec then
    pridaj  $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$  do stvorcove
while true do
  hodnoty  $\leftarrow$  []
  pouzite  $\leftarrow$  []
  for  $i \leftarrow 0, i < p$  do
    pridaj 6 náhodných hodnôt medzi 1 a  $h$  do hodnoty
    pridaj náhodnú štvorcovú vzorku z stvorcove do pouzite
while true do
  stvorec  $\leftarrow$  štvorec veľkosti  $6 \times 6$ , ktorého prvky sú 1
  counter  $\leftarrow$  0
  for all stvorcovaVzorka  $\in$  pouzite do
    for all  $v \in \textit{stvorcovaVzorka}$  do
      prenásob stvorec vzorkou  $v$  s hodnotou hodnoty[counter]
      counter++
  if štvorec stvorec obsahuje navzájom rôzne prvky then
    stavZaciatok = stav
    stav  $\leftarrow$  (variačné rozpätie stvorec, počet rôznych súčtov stvorec)
    for all hodnotyNove; hodnotyNove dostanem z hodnoty operáciou do
      stvorecNovy  $\leftarrow$  štvorec prenásobený vzorkami s novými hodnotami
      stavNovy  $\leftarrow$  (variačné rozpätie stvorecNovy, počet rôznych súčtov stvorecNovy)
      if stavNovy je lepší ako stav then
        stav  $\leftarrow$  stavNovy
        stvorec  $\leftarrow$  stvorecNovy
  if stav nie je lepší ako stavZaciatok then
    print(stav, stvorec)
    break

```

4.2 Magické grafy

4.2.1 Vrcholovo bimagické grafy

Algoritmy pracujú so súvislými grafmi s daným počtom vrcholov, pričom sú uložené v *graph6* formáte. Na prácu s ním sme využili funkciu *read_graph6* z knižnice *networkx*. Údaje sme získali z webstránky, ktorá obsahuje kolekciu grafov rôzneho druhu [7].

Algoritmus 4.5. Na vstupe dostaneme ľubovoľný súvislý graf. Výstupom je odpoveď, či má graf šancu byť vrcholovo bimagickým. Pre každú dvojicu jeho vrcholov overíme, či spĺňa podmienku z vety 3.9. Ak existuje dvojica vrcholov, pre ktorú graf nevyhovuje niektorej z troch podmienok, tak môžeme s istotou povedať, že nie je vrcholovo bimagický.

```

for  $v_1, v_2 \in V(G)$  do
   $x \leftarrow |\{susedia[v_1]\} - \{susedia[v_2]\}|$ 
   $y \leftarrow |\{susedia[v_2]\} - \{susedia[v_1]\}|$ 
  if  $xy = 0$  and  $x + y > 0$  then
    return  $G$  nie je vrcholovo bimagický
  if  $x = 1$  or  $y = 1$  then
    return  $G$  nie je vrcholovo bimagický
  if  $x = 2$  and  $y = 2$  then
    return  $G$  nie je vrcholovo bimagický

```

Algoritmus 4.6. Na vstupe dostaneme čísla $i, j \in \mathbb{N}$. Výstupom má byť vrcholové bimagické ohodnotenie grafu $K_{i,j}$. Algoritmus bude replikovať indukčný dôkaz vety 3.10.

```

if  $i > j$  then
  return ohodnot( $j, i$ )
if  $i \leq 1$  or ( $i = 2$  and  $j = 2$ ) then
  return nedá sa ohodnotiť
if  $i = 2$  then
  return  $(\frac{j(j-1)}{2} + 1, \frac{j(j-1)(3j^2-7j+14)}{24}), (1, \dots, j-1, \frac{j(j-1)(3j^2-7j+14)}{24} + 1)$ 
if  $i = 3$  then
  return  $(1, \frac{j(j+1)}{2} - 1, \frac{j(j+1)(3j^2-j-14)}{24} + 1), (2, \dots, j, \frac{j(j+1)(3j^2-j-14)}{24} + 2)$ 
if  $i = 4$  and  $j = 4$  then
  return  $(1, 4, 6, 7), (2, 3, 5, 8)$ 
if  $i = 4$  and  $j = 5$  then
  return  $(2, 12, 13, 15), (1, 4, 8, 10, 19)$ 
 $H \leftarrow \text{ohodnot}(i-2, j-3)$ 
 $m \leftarrow \max(H) + 1$ 
na ľavú stranu  $H$  pridaj  $4m, 5m$ 
na pravú stranu  $H$  pridaj  $m, 2m, 6m$ 
return  $H$ 

```

Algoritmus 4.7. Na vstupe dostaneme číslo $n \in \mathbb{N}$. Výstupom algoritmu má byť vrcholové superbimagické ohodnotenie kompletného bipartitného grafu s n vrcholmi. Algoritmus bude replikovať indukčný dôkaz vety 3.14.

```

if  $n < 7$  then
    return nedá sa ohodnotiť
if  $n \bmod 4 = 1$  or  $n \bmod 4 = 2$  then
    return nedá sa ohodnotiť
if  $n = 7$  then
    return  $(1, 2, 4, 7), (3, 5, 6)$ 
if  $n = 8$  then
    return  $(1, 4, 6, 7), (2, 3, 5, 8)$ 
if  $n = 11$  then
    return  $(1, 3, 4, 5, 9, 11), (2, 6, 7, 8, 10)$ 
if  $n = 12$  then
    return  $(1, 3, 7, 8, 9, 11), (2, 4, 5, 6, 10, 12)$ 
 $H \leftarrow \text{ohodnot}(n - 8)$ 
for  $x \leftarrow 1, 8$  do
    if  $x \in \{1, 4, 6, 7\}$  then
        pridaj  $(n - 8) + x$  na ľavú stranu H
    else
        pridaj  $(n - 8) + x$  na pravú stranu H
return H

```

4.2.2 Vrcholovo multiplikatívne magické grafy

Algoritmus 4.8. Na vstupe dostaneme kompletný bipartitný graf $K_{i,j}$. Výstupom má byť vrcholové multiplikatívne magické ohodnotenie tohto grafu. Algoritmus bude replikovať indukčný dôkaz vety 3.35.

```

if  $i > j$  then
    return ohodnot(j,i)
if  $i \leq 1$  or  $(i = 2 \text{ and } j = 2)$  then
    return nedá sa ohodnotiť
if  $i = 2 \text{ and } j = 3$  then
    return  $(5, 12), (1, 6, 10)$ 
if  $i = 2 \text{ and } j = 4$  then
    return  $(9, 16), (1, 2, 4, 18)$ 
if  $i = 2$  then
    return  $((j - 1)! + 1, (j - 1)!((j - 1)! + 1 - \frac{j(j-1)}{2}), (1, \dots, j - 1, ((j - 1)! + 1)((j - 1)! + 1 - \frac{j(j-1)}{2})))$ 
if  $i = 3$  then

```

```

return  $(1, j! + 1, j!(j! + 3 - \frac{j(j+1)}{2}), (2, \dots, j, (j! + 1)(j! + 3 - \frac{j(j+1)}{2})))$ 
if  $i = 4$  and  $j = 4$  then
  return  $(1, 5, 6, 12), (2, 3, 4, 15)$ 
if  $i = 4$  and  $j = 5$  then
  return  $(2, 10, 20, 27), (1, 3, 6, 24, 25)$ 
 $H \leftarrow \text{ohodnot}(i - 2, j - 3)$ 
 $x \leftarrow \max(H) + 1$ 
 $y \leftarrow \max(H) + 2$ 
na ľavú stranu  $H$  pridaj  $2xy, 2xy - x - y$ 
na pravú stranu  $H$  pridaj  $2(2xy - x - y), x, y$ 
return  $H$ 

```

4.3 Magické obdĺžniky

Všetky algoritmy pracujú efektívne s poradím stĺpcov na základe vety 3.40.

4.3.1 Bimagické obdĺžniky

Algoritmus 4.9. Na vstupe dostaneme kladné celé čísla $n, s \in \mathbb{N}, n \geq 4$. Výstupom má byť bimagický obdĺžnik veľkosti $3 \times n$, ktorého prvky sú kladné celé čísla, pričom ich súčet v každom stĺpci je s . Náš algoritmus predpokladá, že najmenší prvok obdĺžnika je 1 (s využitím vety 3.43). Pre každú trojicu rôznych celých čísel a, b, c ($1 < a < b < c, a + b + c = s$) si predpočíta ich bimagický súčet. Keďže platí podmienka 3.44, vieme nájsť celé čísla d, e tak, aby mohli byť trojice (a, b, c) a $(1, d, e)$ použité ako stĺpce v tom istom bimagickom obdĺžniku. Pre každú takú trojicu (a, b, c) si algoritmus uloží hodnoty $(1, d, e)$ ako kľúč do asociatívneho poľa. Potom toto pole prejde a v každom kľúči vyberie $n - 1$ rôznych zapamätaných trojíc (ku ktorým pridá trojicu v kľúči).

```

 $D \leftarrow \text{dict}()$ 
for  $a \leftarrow 2, \lceil \frac{s}{3} \rceil$  do
  for  $b \leftarrow a + 1, \lceil \frac{s-a}{2} \rceil$  do
     $c \leftarrow s - a - b$ 
     $t \leftarrow a^2 + b^2 + c^2$ 
    if  $2t - (s - 1)^2 - 2$  je štvorec then
      pridaj  $(a, b, c)$  do  $D[(1, \frac{s-1+\sqrt{2t-(s-1)^2-2}}{2}, \frac{s-1-\sqrt{2t-(s-1)^2-2}}{2})]$ 
for all  $k \in D$  do
  for all  $(a_1, b_1, c_1), \dots, (a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}) \in D[k]$  do
    if  $1, k[1], k[2], a_1, b_1, c_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}$  sú navzájom rôzne then
      for all permutácie  $(a_i, b_i, c_i), i \in \{1, \dots, n-1\}$  do

```

```

    vytvor obdlžnik s prvým stĺpcom 1, k[1], k[2] a j-tým stĺpcom  $a_{j-1}, b_{j-1}, c_{j-1}$ 
    pre  $j \in \{2, \dots, n\}$ 
    if obdlžnik má bimagické riadky then
        print(obdlžnik)

```

Algoritmus 4.10. Na vstupe dostaneme kladné celé čísla $n, h \in \mathbb{N}, n \geq 4$. Výstupom má byť bimagický obdlžnik veľkosti $3 \times n$, ktorého prvky sú kladné celé čísla neprevyšujúce h . Od predchádzajúceho algoritmu sa líši tým, že si do asociatívneho poľa ukladá trojice čísel od 2 do h a nie trojice s daným súčtom.

```

D ← dict()
for a ← 2, h do
    for b ← a + 1, h do
        for c ← b + 1, h do
            s ← a + b + c
            t ← a2 + b2 + c2
            if 2t − (s − 1)2 − 2 je štvorec then
                pridaj (a, b, c) do D[(1,  $\frac{s-1+\sqrt{2t-(s-1)^2-2}}{2}$ ,  $\frac{s-1-\sqrt{2t-(s-1)^2-2}}{2}$ )]

```

pokračuj rovnako ako predchádzajúci algoritmus

Tento algoritmus je efektívnejší ako algoritmus 4.9, lebo spracováva všetky trojice a nie iba tie s konkrétnym súčtom. Jeho nevýhodou je obmedzená funkcionalita (z pamäťových dôvodov je nepoužiteľný pre $h > 500$) a zlá iterácia (ak poznáme riešenia pre $h = 400$, tak na nájdenie riešení pre $h = 450$ treba spustiť algoritmus úplne od začiatku).

4.3.2 Multiplikatívne magické obdlžníky

Algoritmus 4.11. Na vstupe dostaneme čísla $n, s \in \mathbb{N}, n \geq 4$. Výstupom má byť multiplikatívny magický obdlžnik veľkosti $3 \times n$, ktorého prvky sú kladné celé čísla, pričom ich súčet v každom stĺpci je s . Vieme, že obdlžnik nemôže obsahovať číslo x , pre ktoré neplatí veta 3.51. Náš algoritmus si pre každú trojicu vyhovujúcich rôznych kladných čísel uloží ich súčin ako kľúč do asociatívneho poľa. Potom toto pole prejde a v každom kľúči vyberie n rôznych zapamätaných trojíc.

```

D ← dict()
vyhovuju ← {x | x ∈ {1, ..., s}, x nie je prvočíslo alebo xn ≤ s}
for all a, b ∈ vyhovuju; a < b; a + 2b < s do
    c ← s − a − b
    if c ∈ vyhovuju then
        p ← abc

```



```

    pridaj  $(a, b, c)$  do  $D[p]$ 
for all  $k \in D$  do
    for all  $(a_1, b_1, c_1), \dots, (a_n, b_n, c_n) \in D[k]$  do
        if  $a_1, b_1, c_1, \dots, a_n, b_n, c_n$  sú navzájom rôzne then
            for all permutácie  $(a_i, b_i, c_i), i \in \{2, \dots, n\}$  do
                vytvor obdĺžnik s  $j$ -tým stĺpcom  $a_j, b_j, c_j$  pre  $j \in \{1, \dots, n\}$ 
                if obdĺžnik má multiplikatívne magické riadky then
                    print(obdĺžnik)

```

Poznámka 4.12. Algoritmy pre multiplikatívne magické obdĺžniky sa dajú modifikovať tak, aby dovoľovali iba konečný počet prvočísel v prvočíselnom rozklade.

Záver

Okrem toho sme objavili dve nové parametrické vzorce pre magický štvorec veľkosti 3×3 , ktorého aspoň 6 prvkov sú druhými mocninami kladných celých čísel.

Definovali sme normálne formy bimagických útvarov, ktoré vznikli z ich uzáverových vlastností na konštantný posun a kladný celočíselný násobok. Na základe toho sme popísali implementáciu algoritmického prehľadávania bimagických štvorcov veľkosti 5×5 .

Implementovali sme aproximačný algoritmus na hľadanie multiplikatívnych magických štvorcov veľkosti 6×6 , ktorý fungoval na princípe náhodného vzorkovania a jeho následnom optimalizovaní. Podarilo sa nám zostrojiť multiplikatívny štvorec s nízkym magickým variačným rozpätím 26.

Pre vrcholovo bimagické grafy sme dokázali podmienky pre stupne vrcholov 1, 2 a 3. Objavili sme spôsob, ako takýto graf s mostom rozdeliť na dva podgrafy, ktoré majú tiež vrcholovo bimagické ohodnotenie. Spísali sme tri nutné podmienky, ktoré musí vrcholovo bimagický graf spĺňať. Zistili sme, že jediným kubickým grafom tohto typu je $K_{3,3}$. Podarilo sa nám implementovať algoritmus, ktorý skonštruuje kompletne bipartitné vrcholovo bimagické alebo supermagické grafy s daným počtom vrcholov.

Dokázali sme, že minimálny stupeň vrchola v hranovo bimagickom grafe je 3, ale kubické grafy tohto typu neexistujú. Odvodili sme, že hranovo bimagický graf G s číslom nezávislosti $\alpha(G)$ musí mať aspoň $2V(G) - \frac{\alpha(G)}{2}$ hrán.

Zistili sme, že mnohé vlastnosti vrcholovo bimagických grafov majú aj vrcholovo multiplikatívne magické grafy. Objavili sme jediný strom s touto vlastnosťou. Ukázali sme konštrukciu kompletných bipartitných a neexistenciu superbimagických grafov tohto typu.

Definovali sme hranovo multiplikatívne magické grafy, no podarilo sa nám . Tieto typy grafov ostávajú pomerne nepreskúmané.

Na základe toho sme vyslovili hypotézu, že bimagické ani multiplikatívne magické obdĺžniky veľkosti $m \times n$ pre $m \neq n$ neexistujú. V budúcnosti je možné preskúmať väčšie magické obdĺžniky (predovšetkým veľkosti 5×6) a pokúsiť sa nájsť nejaký s bimagicou alebo multiplikatívnou vlastnosťou.

Literatúra

- [1] Christian Boyer. Multimagie squares site, 2002. [Citované 2021-01-20] Dostupné z <http://www.multimagie.com>.
- [2] Marián Trenkler. Magic Rectangles. *The Mathematical Gazette*, 83(496):102-105, 1999.
- [3] Martin Bača, Mirka Miller, Joe Ryan and Andrea Semaničová-Feňovčíková. *Magic and Antimagic Graphs*. Springer, 2019.
- [4] Samuel Jezný and Marián Trenkler. *Characterization of magic graphs*. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 33(3):435-438, 1983.
- [5] Kejun Chen and Wen Li. Existence of normal bimagic squares. *Discrete Mathematics*, 312(21):3077-3086, 2012.
- [6] Tito Piezas. A Collection of Algebraic Identities, 2010. [Citované 2021-04-30] Dostupné z <https://sites.google.com/site/tpiezas/>.
- [7] Brendan McKay. Combinatorial Data, 2021. [Citované 2021-05-07] Dostupné z <http://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/data/>.

Príloha

V elektronickej prílohe priloženej k práci sa nachádza zdrojový kód programu s jednotlivými algoritmami. Zdrojový kód je zverejnený aj na https://github.com/richardbiro/bakalarska_praca.