Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Magické útvary

Bakalárska práca

2021

Richard Bíró

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Magické útvary

Bakalárska práca

Študijný program:	Informatika
Študijný odbor:	Informatika
Školiace pracovisko:	Katedra informatiky
Školiteľ:	doc. RNDr. Ján Mazák, PhD.

Bratislava, 2021
Richard Bíró

39991241

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta:	Richard Bíró
Študijný program:	informatika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor:	informatika
Typ záverečnej práce:	bakalárska
Jazyk záverečnej práce:	slovenský
Sekundárny jazyk:	anglický

Názov: Magické útvary
Magic shapes

Anotácia: Magické útvary rôzneho typu zaujímali matematikov odpradávna a mnohé súvisiace problémy sú aj dnes otvorené. Náplňou práce je pozrieť sa na súvislosti medzi magickými útvarmi a magickými ohodnoteniami v diskrétnej matematike (grafy, konfigurácie z konečných geometrií apod.) a implementovať algoritmické prehľadávanie pre vybrané otvorené problémy.

Cieľ: 1. Zorientovať sa v oblasti klasických magických útvarov a podobných problémov a spraviť aspoň čiastočný prehľad.
2. Formulovať analogické problémy pre iné diskrétne štruktúry, napr. grafy či konfigurácie vznikajúce z konečných geometrií.
3. Vybrať si niekoľko otvorených problémov (či už nových, alebo známych), implementovať algoritmické prehľadávanie priestoru potenciálnych riešení a skombinovať toto počítačové prehľadávanie s teoretickou analýzou.
4. Vysloviť zaujímavé hypotézy, ktoré bude možné skúmať v budúcnosti.

Vedúci:	doc. RNDr. Ján Mazák, PhD.
Katedra:	FMFI.KI - Katedra informatiky
Vedúci katedry:	prof. RNDr. Martin Škoviera, PhD.
Dátum zadania:	26.10.2020

Dátum schválenia: 31.10.2020

doc. RNDr. Daniel Olejár, PhD.
garant študijného programu

....

študent

....

vedúci práce

Poďakovanie:

Abstrakt

Abstract

Obsah

Zoznam obrázkov

Úvod

V tejto kapitole uvedieme stručný úvod do problematiky magických útvarov, ako aj význam a ciele práce.

Kapitola 1

Základné pojmy a definície

V tejto kapitole uvedieme základné pojmy a definície pri práci s útvarmi, ako aj súčasný stav danej problematiky.

Priamka je objekt v konečnom geometrickom systéme, ktorý prechádza aspoň jedným bodom. *Útvar* je množina bodov, ktoré sú spojené priamkami. *Prvok* je bod útvaru, ktorý má priradenú hodnotu x, kde x je prirodzené číslo. Prvky útvaru majú priradené navzájom rôzne hodnoty. Útvar má *magickú vlastnosť* ak všetky jeho priamky majú magickú vlastnosť.

Ak má útvar pravidelné usporiadanie, môže byť reprezentovaný maticou (priamkami budú riadky, stĺpce a prípadne diagonály danej matice) alebo neorientovaným ohodnoteným grafom.

1.1 Magické útvary

Definícia 1.1.1 *Útvar je magický ak súčet prvkov na každej jeho priamke je konštantný.*

1.1.1 Magické štvorce

Definícia 1.1.1.1 *Magický štvorec je matica prvkov veľkosti $n \times n$, pre ktorú platí, že súčet prvkov v každom riadku, stĺpci a na oboch diagonálach je konštantný.*

Príklad magického štvorca je na obrázku 1.1.

	4	3	8	=15
	9	5	1	=15
	2	7	6	=15
=15	=15	=15	=15	=15

Obr. 1.1: Magický štvorec veľkosti 3×3 [1]

Poznámka 1.1.1.1 *Ak je súčet prvkov v každom riadku a stĺpci konštantný, daný štvorec nazývame semimagickým. Ak je súčet na oboch diagonálach rovnaký, ale iný ako súčet v riadkoch a stĺpcoch, daný štvorec nazývame panmagickým.*

Špeciálnu triedu tvoria magické štvorce, ktorých prvky sú k-tymi mocninami prirodzených čísel. Na obrázku 1.2 je príklad štvorca pre $n = 4, k = 2$.

48^2	23^2	6^2	19^2
21^2	26^2	33^2	32^2
1^2	36^2	13^2	42^2
22^2	27^2	44^2	9^2

Obr. 1.2: Magický štvorec veľkosti 4×4 s druhými mocninami [1]

Existencia štvorca pre $n = 3, k = 2$ je otvoreným problémom. Je dokázané, že ak by taký štvorec existoval, jeho prvky by museli byť väčšie ako 10^16. Nikomu sa nepodarilo nájsť ani magický štvorec, ktorého 8 prvkov sú druhé mocniny prirodzených čísel. A je známe iba jedno základné riešenie so 7 prvkami (obrázok 1.3, [1]), ktoré objavil v roku 1999 Andrew Bremner.

373^2	289^2	565^2
360721	425^2	23^2
205^2	527^2	222121

Obr. 1.3: Jediný známy magický štvorec veľkosti 3×3 so 7 druhými mocninami [1]

Poznámka 1.1.1.2 *Existujú vzorce, ktoré dokážu vygenerovať magický štvorec so* 6 *prvkami, ktoré sú druhými mocninami prirodzených čísel.*

Pre $n = k = 3$ je dokázané, že taký magický štvorec neexistuje. Existencia štvorcov pre $4 \leq n \leq 6, k = 3$ je otvoreným problémom. Sébastien Miquel našiel v roku 2015 riešenie (obrázok 1.4, [1]) pre $n = 7, k = 3$.

24^3	65^3	25^3	58^3	38^3	32^3	31^3
39^3	16^3	49^3	56^3	33^3	60^3	20^3
10^3	54^3	74^3	11^3	37^3	6^3	9^3
15^3	14^3	35^3	55^3	4^3	23^3	73^3
62^3	28^3	17^3	21^3	8^3	64^3	43^3
67^3	53^3	22^3	41^3	3^3	13^3	44^3
2^3	19^3	27^3	1^3	78^3	45^3	29^3

Obr. 1.4: Magický štvorec veľkosti 7×7 s tretími mocninami [1]

Pre $4 \leq n \leq 10, k \geq 4$ sú známe iba semimagické štvorce [1].

1.1.2 Magické obdĺžniky

Definícia 1.1.2.1 *Magický obdĺžnik je matica prvkov veľkosti $m \times n$, pre ktorú platí, že súčet prvkov v každom riadku je konštantný a zároveň súčet prvkov v každom stĺpci je konštantný.*

Príklad magického obdĺžnika je na obrázku 1.5.

1	7	6	4
8	2	3	5

Obr. 1.5: Magický obdĺžnik veľkosti 2×4 [2]

Nevyžadujeme, aby boli súčty v riadkoch a stĺpcoch rovnaké, pretože pre $m \neq n$ vieme ľahko odvodiť, že by museli byť rovné 0 (čo je spor s tým, že prvky sú navzájom rôzne prirodzené čísla).

Slovenský matematik Marián Trenkler skúmal magické obdĺžniky veľkosti $m \times n$, ktoré sú normálne (ich prvkami sú čísla od 1 po mn) [2].

Veta 1.1.2.1 *(Trenkler, 1999) Pre všetky prirodzené $n > 2$ vieme zostrojiť normálny magický obdĺžnik veľkosti $2 \times (2n-2)$ aj $n \times n^2$.*

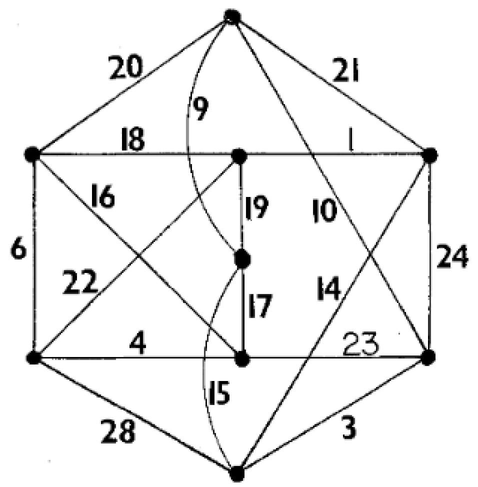
Keďže obdĺžniková matica nemá diagonály, pri definícii ich neuvažujeme. Z toho vyplýva, že v ľubovoľnom magickom obdĺžniku vieme vymeniť dva riadky alebo stĺpce a magická vlastnosť ostane zachovaná.

Semimagické štvorce sú špeciálnym prípadom magických obdĺžnikov pre $m = n$.

1.1.3 Magické grafy

Definícia 1.1.3.1 *Magický graf je neorientovaný graf s ohodnotenými hranami, v ktorom pre každý vrchol platí, že súčet hrán incidentných s ním je konštantný. Vrcholy sú považované za prvky útvaru.*

Príklad magického grafu je na obrázku 1.6.



Obr. 1.6: Magický graf s magickým súčtom 60 [3]

Slovenskí matematici Samuel Jezný a Marián Trenkler dokázali vetu, ktorá hovorí o tom, kedy je graf magický [4].

Veta 1.1.3.1 *(Jezný, Trenkler, 1983) Graf je magický práve vtedy, keď každá hrana G patrí do nejakého* $(1-2)$*-faktora a zároveň každá dvojica hrán* e_1, e_2 *je separovateľná* $(1-2)$*-faktorom grafu G.*

Poznámka 1.1.3.1 $(1-2)$*-faktor grafu je jeho rozklad na izolované hrany a kružnice.*

Na grafoch sa dajú skúmať aj iné magické vlastnosti. Môžeme ohodnotiť vrcholy a pre každú hranu zrátať súčet hodnôt jej koncových vrcholov. Alebo pre každý vrchol zrátať súčet hodnôt jeho susedov. Ku grafom vieme hľadať ich elegantné označenie (*graceful labelling*).

Definícia 1.1.3.2 *Nech G je graf s n vrcholmi. Elegantné označenie grafu G je také priradenie hodnôt* $0, ..., n-1$ *jeho vrcholom, že rozdiely hodnôt susedných vrcholov sú navzájom rôzne.*

Je dokázané, že niektoré špeciálne typy grafov ako kolesá alebo obdĺžnikové mriežky majú vždy elegantné označenie [5]. Rozhodnúť, či k ľubovoľnému stromu existuje elegantné označenie, je dodnes otvoreným problémom.

1.2 Multiplikatívne útvary

Definícia 1.2.1 *Útvar je multiplikatívny ak súčin prvkov na každej jeho priamke je konštantný.*

Príklad multiplikatívneho štvorca je na obrázku 1.7.

Multiplicative			=4096
8	256	2	=4096
4	16	64	=4096
128	1	32	=4096
=4096	=4096	=4096	=4096

Obr. 1.7: Multiplikatívny štvorec veľkosti 3×3 [1]

Poznámka 1.2.1 *Semimultiplikatívne a panmultiplikatívne štvorce sú definované analogicky.*

K ľubovoľnému magickému štvorcu vieme zostrojiť multiplikatívny štvorec napríklad tak, že všetky jeho prvky x nahradíme 2^x.

Tieto typy štvorcov sa dajú hľadať vzorkovou metódou. Vzorku získame tak, že zvolíme niekoľko prvkov štvorca, pričom:

- v každom riadku je zvolený práve jeden prvok
- v každom stĺpci je zvolený práve jeden prvok
- na každej diagonále je zvolený práve jeden prvok

Princíp prehľadávania je potom jednoduchý. Najprv začneme so štvorcom, ktorého všetky prvky majú hodnotu 1. Potom si opakovane vyberieme ľubovoľnú vzorku a všetky jej zvolené prvky vynásobíme nejakou konštantou. Tým generujeme štvorec, ktorý je multiplikatívny (za predpokladu, že výsledné prvky sú navzájom rôzne).

1.3 Bimagické útvary

Definícia 1.3.1 *Útvar je bimagický ak je magický a umocnením každého jeho prvku na druhú dostaneme opäť magický útvar.*

Je zrejmé, že bimagický štvorec veľkosti 2×2 neexistuje. Edouard Lucas, Luke Pebody a Jean-Claude Rosa dokázali silnejšie tvrdenia [1].

Veta 1.3.1 *(Lucas, 1891) Neexistuje bimagický štvorec veľkosti* 3×3*.*

Veta 1.3.2 *(Pebody, Rosa, 2004) Neexistuje bimagický štvorec veľkosti* 4×4*.*

V roku 2006 našiel Jaroslaw Wroblewski riešenie pre 6×6 (obrázok 1.8, [1]).

6x6 magic square...						=408		*...squared*						=36826
17	36	55	124	62	114	=408		17^2	36^2	55^2	124^2	62^2	114^2	=36826
58	40	129	50	111	20	=408		58^2	40^2	129^2	50^2	111^2	20^2	=36826
108	135	34	44	38	49	=408	>>>	108^2	135^2	34^2	44^2	38^2	49^2	=36826
87	98	92	102	1	28	=408		87^2	98^2	92^2	102^2	1^2	28^2	=36826
116	25	86	7	96	78	=408		116^2	25^2	86^2	7^2	96^2	78^2	=36826
22	74	12	81	100	119	=408		22^2	74^2	12^2	81^2	100^2	119^2	=36826
=408	=408	=408	=408	=408	=408	=408		=36826	=36826	=36826	=36826	=36826	=36826	=36826

Obr. 1.8: Bimagický štvorec veľkosti 6×6 [1]

Na tomto štvorci je zaujímavé to, že má asociatívnu vlastnosť - súčet protiľahlých prvkov je konštantný.

Na to, aby bol štvorec veľkosti 5×5 bimagickým, muselo by byť jeho 12 magických a 12 bimagických súčtov rovnakých. Boli nájdené čiastočné riešenia, ktoré obsahovali 23 správnych súčtov [1]. Existencia riešenia pre 5×5 (ktoré by malo 24 správnych súčtov) je však dodnes otvoreným problémom.

Nasledovná veta dokazuje, že bimagických štvorcov je nekonečne veľa [6]:

Veta 1.3.3 *(Chen, Li, 2004) Nech* m, n *sú kladné celé čísla s rovnakou paritou, pričom* $m, n \notin \{2, 3, 6\}$*. Potom existuje normálny bimagický štvorec veľkosti* $mn \times mn$*.*

Bimagické štvorce sú evidentne uzavreté na nenulový násobok. Majú však ďalšiu zaujímavú vlastnosť: sú uzavreté aj na konštantný posun. Z toho vyplýva, že vieme definovať normálne formy bimagických útvarov, ako napríklad:

- útvar, ktorého najmenší prvok je 1
- útvar, ktorého magický súčet je 100
- útvar, ktorého bimagický súčet je päťnásobkom nejakého jeho prvku

Keď predpokladáme, že bimagický štvorec je v nejakej normálnej forme, prehľadávanie sa zjednoduší.

1.4 Multiplikatívne magické útvary

Definícia 1.4.1 *Útvar je multiplikatívny magický ak má magickú aj multiplikatívnu vlastnosť.*

Je zrejmé, že multiplikatívny magický štvorec veľkosti 2×2 neexistuje. Lee Morgenstern dokázal silnejšie tvrdenie [1].

Veta 1.4.1 *(Morgenstern, 2007) Neexistuje multiplikatívny magický štvorec veľkosti* 3×3 *ani* 4×4.

V roku 2016 našiel Sébastien Miquel multiplikatívny magický štvorec veľkosti 7×7 (obrázok 1.9, [1]).

126	66	50	90	48	1	84
20	70	16	54	189	110	6
100	2	22	98	36	72	135
96	60	81	4	10	49	165
3	63	30	176	120	45	28
99	180	14	25	7	108	32
21	24	252	18	55	80	15

Obr. 1.9: Multiplikatívny magický štvorec veľkosti 7×7 [1]

Multiplikatívne štvorce je možné nájsť napríklad vzorkovaním. Ale existencia multiplikatívneho magického štvorca veľkosti 5×5 alebo 6×6 je naďalej otvoreným problémom.

Kapitola 2

Otvorené problémy

V tejto kapitole podrobnejšie preskúmame niektoré známe otvorené problémy z oblasti magických útvarov.

2.1 Magické grafy

2.2 Magické štvorce

2.3 Bimagické štvorce

2.4 Multiplikatívne magické štvorce

Kapitola 3

Nové problémy

V tejto kapitole podrobnejšie preskúmame nové definované problémy z oblasti magických útvarov.

3.1 Bimagické obdĺžniky

3.2 Multiplikatívne magické obdĺžniky

3.3 Bimagické grafy

3.3.1 Vrcholovo bimagické grafy

3.3.2 Hranovo bimagické grafy

3.4 Multiplikatívne magické grafy

3.4.1 Vrcholovo multiplikatívne magické grafy

3.4.2 Hranovo multiplikatívne magické grafy

Kapitola 4

Implementácia

V tejto kapitole popíšeme implementáciu algoritmického prehľadávania potenciálnych riešení pre vybrané otvorené problémy.

Kapitola 5

Výsledky

V tejto kapitole analyzujeme výsledky algoritmického prehľadávania potenciálnych riešení pre vybrané otvorené problémy.

Záver

V tejto kapitole zhrnieme dosiahnuté výsledky z oblasti magických útvarov a vyslovíme hypotézy, ktoré bude možné skúmať v budúcnosti.

Literatúra

[1] Christian Boyer. Multimagic squares site, 2002. [Citované 2021-01-20] Dostupné z http://www.multimagie.com.

[2] Marián Trenkler. Magic Rectangles. *The Mathematical Gazette*, 83(496):102-105, 1999.

[3] Michael Doob. Characterization of regular magic graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 25(1):94-104, 1978.

[4] Samuel Jezný and Marián Trenkler. *Characterization of magic graphs. Czechoslovak Mathematical Journal*, 33(3):435-438, 1983.

[5] Joseph Gallian. A Dynamic Survey of Graph Labelling. *Electronic Journal of Combinatorics*, 19:1-219, 2009.

[6] Kejun Chen and Wen Li. Existence of normal bimagic squares. *Discrete Mathematics*, 312(21):3077-3086, 2012.