Duplikačná lema: Nech $a, b, c, d \in \mathbb{N}^+$, pre ktoré platí $a + b = c + d$ a buď $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, alebo $ab = cd$. Potom $c = a$ alebo $c = b$.

Dôkaz: Z prvej rovnice vyjadríme $d = a + b - c$ a dosadíme do rovnice $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ alebo do rovnice $ab = cd$. Po úprave dostaneme vzťah $c^2 - ac - bc + ab = 0$, ktorý sa dá prepísať na tvar $(c - a)(c - b) = 0$. Z toho vyplýva $c = a$ alebo $c = b$.

Mocninová lema: Nech $n \in \mathbb{N}^+$. Nech $a_1, ..., a_n, b$ sú navzájom rôzne kladné celé čísla. Potom:
(i) nasledovná sústava nemá riešenie:
$\sum_{k=1}^{n} a_k = b$
$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = b^2$
(ii) nasledovná sústava má jediné riešenie pre $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, b = 6$:
$\sum_{k=1}^{n} a_k = b$
$\prod_{k=1}^{n} a_k = b$

Dôkaz: (i) Pre $n = 1$ dostaneme vzťah $a_1 = b$, čo je spor. Ak $n \geq 2$, tak dosadením b do druhej rovnice dostaneme nutný vzťah $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = (\sum_{k=1}^{n} a_k)^2$, čo sa dá upraviť na tvar $\sum_{i \neq j} a_i a_j = 0$. To je spor, keďže každé a_i aj a_j je kladné, a teda ich súčet nemôže byť nulový.

(ii) Pre $n = 1$ dostaneme vzťah $a_1 = b$, čo je spor. Pre $n = 2$ odvodíme vzťah $a_1 + a_2 = a_1 a_2$, z čoho vyplýva, že $a_1 = \frac{a_2}{a_2 - 1}$. Keďže $gcd(a_2 - 1, a_2) = 1$, zlomok môže mať celočíselnú hodnotu jedine pre $a_2 = 2$. Z toho odvodíme, že aj $a_1 = 2$, čo je spor. Pre $n \geq 4$ sa dá dokázať indukciou, že $\sum_{k=1}^{n} a_k < \prod_{k=1}^{n} a_k$ ak $a_1, ..., a_n$ sú navzájom rôzne kladné celé čísla.

Pre $n = 3$ musí platiť $a_1 + a_2 + a_3 = a_1 a_2 a_3$, čo sa dá prepísať na tvar $a_1 + a_2 = a_3(a_1 a_2 - 1)$. Indukciou sa dá dokázať, že $a_1 + a_2 < a_1 a_2 - 1$ pre $a_1, a_2 \geq 2$. Teda nutne $a_1 = 1, a_2 = 2$, z čoho vyplýva $a_3 = 3, b = 6$.

Posunová lema: Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \mathbb{N}$. Ak $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k$ aj $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2$, potom pre všetky $x \in \mathbb{Z}$ platí:
(i) $\sum_{k=1}^{n}(a_k + x) = \sum_{k=1}^{n}(b_k + x)$
(ii) $\sum_{k=1}^{n}(a_k + x)^2 = \sum_{k=1}^{n}(b_k + x)^2$

Dôkaz:
(i) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+x) = \sum_{k=1}^{n} a_k + nx = \sum_{k=1}^{n} b_k + nx = \sum_{k=1}^{n}(b_k+x)$
(ii) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+x)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2x\sum_{k=1}^{n} a_k + nx^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2 + 2x\sum_{k=1}^{n} b_k + nx^2 = \sum_{k=1}^{n}(b_k+x)^2$

Normálne formy bimagických regulárnych útvarov:

Útvar je bimagický ak je magický a umocnením každého jeho prvku na druhú dostaneme opäť magický útvar.

Útvar je regulárny ak všetky jeho priamky s magickou vlastnosťou majú rovnaký počet prvkov.

Bimagické regulárne útvary sú zjavne uzavreté na nenulový násobok a sú uzavreté aj na konštantný posun (to vyplýva z posunovej lemy).

Z toho vyplýva, že ak X je bimagický regulárny útvar, tak $aX + b \mid a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0$ je bimagický regulárny útvar s potenciálne nekladnými prvkami. Tým vieme vytvárať tzv. normálne formy bimagických útvarov. Nech n je veľkosť daného útvaru. Potom:
1) útvar, ktorého najmenší prvok je 0: zvolíme $a = 1, b = -x_{min}$, kde x_{min} je najmenši prvok pôvodného útvaru
2) útvar, ktorého najmenší prvok je 1: zvolíme $a = 1, b = 1 - x_{min}$
3) útvar, ktorého najmenší prvok má opačnú hodnotu ako najväčší prvok: zvolíme $a = -2, b = x_{min} + x_{max}$
4) útvar, ktorého magický súčet je 0: zvolíme $a = -n, b = S$, kde S je magický súčet pôvodného útvaru
5) útvar, ktorého magický súčet je rovný danému prvku x: zvolíme $a = 1 - n, b = S - x$
6) útvar, ktorého bimagický súčet je rovný nx^2 pre daný prvok x: za predpokladu $S \neq nx$ zvolíme $a = 2(nx - S), b = T - nx^2$

Definícia 1: Nech G je súvislý jednoduchý netriviálny graf. Ak existuje

vrcholové ohodnotenie grafu G také, že platí:
1. vrcholom sú priradené navzájom rôzne kladné celé čísla
2. súčet susedov každého vrcholu je rovnaký
3. súčet druhých mocnín susedov každého vrcholu je rovnaký
tak G nazveme **vrcholovo bimagickým grafom**.

Veta 1.1: Nech G je vrcholovo bimagický graf. Ak G obsahuje dvojicu vrcholov stupňa 1, potom majú spoločného suseda.

Dôkaz: Sporom. Nech G obsahuje dva vrcholy u, v stupňa 1, ktoré nemajú spoločného suseda. Nech x je hodnota vrcholu u. Nech y je hodnota vrcholu v.

Nech sú vrcholy u, v susedné. Podľa u má graf magický súčet y a podľa v má graf magický súčet x. Z toho vyplýva $x = y$, čo je spor s tým, že vrcholom sú priradené navzájom rôzne čísla.

Nech majú vrcholy u, v rôznych susedov w_1, w_2. Označme hodnoty týchto vrcholov z_1, z_2. Podľa u má graf magický súčet z_1 a podľa v má graf magický súčet z_2. Z toho vyplýva $z_1 = z_2$, čo je opäť spor.

Dôsledok 1.1: Stromy nie sú vrcholovo bimagické.

Dôkaz: Z vety 1.1 vyplýva, že jediným stromom, ktorý môže byť vrcholovo bimagickým, je $K_{1,n}$ pre nejaké $n \in \mathbb{N}$. Nech v je koreň tohto stromu a $v_1, ..., v_n$ sú jeho listy. Nech b je hodnota koreňa a $a_1, ..., a_n$ sú hodnoty jeho listov. Podľa v má graf magický súčet $\sum_{k=1}^{n} a_k$ a podľa v_1 má graf magický súčet b. Podľa v má graf bimagický súčet $\sum_{k=1}^{n} a_k^2$ a podľa v_1 má graf magický súčet b^2. Z toho vyplýva, že by sústava z mocninovej lemy mala riešenie, čo je spor.

Veta 1.2: Nech G je vrcholovo bimagický graf. Potom majú všetky vrcholy stupňa 2 rovnakú množinu susedov.

Dôkaz: Sporom. Nech G obsahuje dva vrcholy u, v stupňa 2, ktoré nemajú rovnakú množinu susedov. Nech x je hodnota vrcholu u. Nech y je hodnota vrcholu v.

Nech sú vrcholy u, v susedné. Nech w_1 je druhý sused u a z_1 je jeho hodnota. Nech w_2 je druhý sused v a z_2 je jeho hodnota. Podľa u má graf magický súčet $y + z_1$ a podľa v má graf magický súčet $x + z_2$. Podľa u má graf bimagický súčet $y^2 + z_1^2$ a podľa v má graf bimagický súčet $x^2 + z_2^2$. To znamená, že $x + z_2 = y + z_1$ a zároveň $x^2 + z_2^2 = y^2 + z_1^2$. Z duplikačnej lemy potom vyplýva, že $y = x$ alebo $y = z_2$, čo je spor s tým, že vrcholom sú priradené navzájom rôzne čísla.

Nech majú vrcholy u, v práve jedného spoločného suseda w, jeho hodnotu označíme z. Nech w_1 je druhý sused u a z_1 je jeho hodnota. Nech w_2 je druhý sused v a z_2 je jeho hodnota. Podľa u má graf magický súčet $z + z_1$ a podľa v má graf magický súčet $z + z_2$. Z toho vyplýva $z_1 = z_2$, čo je spor.

Nech majú vrcholy u, v odlišných susedov. Nech w_1, w_2 sú susedia u, pričom ich hodnoty sú z_1, z_2. Nech w_3, w_4 sú susedia v, pričom ich hodnoty sú z_3, z_4. Podľa u má graf magický súčet $z_1 + z_2$ a podľa v má graf magický súčet $z_3 + z_4$. Podľa u má graf bimagický súčet $z_1^2 + z_2^2$ a podľa v má graf bimagický súčet $z_3^2 + z_4^2$. To znamená, že $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$ a zároveň $z_1^2 + z_2^2 = z_3^2 + z_4^2$. Z duplikačnej lemy potom vyplýva, že $z_3 = z_1$ alebo $z_3 = z_2$, čo je opäť rovnaký spor.

Veta 1.3: Nech G je vrcholovo bimagický graf. Potom má každá dvojica nesusedných vrcholov stupňa 3 buď rovnakú množinu susedov, alebo nemá spoločného suseda.

Dôkaz: Sporom. Nech G obsahuje dva nesusedné vrcholy u, v stupňa 3, ktoré majú práve jedného alebo dvoch spoločných susedov. Nech x je hodnota vrcholu u. Nech y je hodnota vrcholu v.

Nech majú vrcholy u, v práve jedného spoločného suseda w, jeho hodnotu označíme z. Nech w_1, w_2 sú zvyšní susedia u a z_1, z_2 sú ich hodnoty. Nech w_3, w_4 sú zvyšní susedia v a z_3, z_4 sú ich hodnoty. Podľa u má graf magický súčet $z + z_1 + z_2$ a podľa v má graf magický súčet $z + z_3 + z_4$. Podľa u má graf bimagický súčet $z^2 + z_1^2 + z_2^2$ a podľa v má graf magický súčet $z^2 + z_3^2 + z_4^2$. To znamená, že $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$ a zároveň $z_1^2 + z_2^2 = z_3^2 + z_4^2$. Z duplikačnej lemy potom vyplýva, že $z_3 = z_1$ alebo $z_3 = z_2$, čo je spor s tým, že vrcholom sú priradené navzájom rôzne čísla.

Nech majú vrcholy u, v práve dvoch spoločných susedov w_1, w_2, ich hodnoty označíme z_1, z_2. Nech w_3 je zvyšný sused u a z_3 je jeho hodnota. Nech w_4 je zvyšný sused v a z_4 je jeho hodnota. Podľa u má graf magický súčet $z_1 + z_2 + z_3$ a podľa v má graf magický súčet $z_1 + z_2 + z_4$. Z toho vyplýva $z_3 = z_4$, čo je opäť spor.

Veta 1.4: Nech G je vrcholovo bimagický graf a u, v sú nejaké jeho dva vrcholy. Nech x je počet susedov vrcholu u, ktoré nie sú susedmi vrcholu v. Nech y je počet susedov vrcholu v, ktoré nie sú susedmi vrcholu u. Potom platí:
(i) $x = 0 \iff y = 0$
(ii) $x, y \neq 1$
(iii) $(x, y) \neq (2, 2)$

Dôkaz: Ak pre vrcholy u, v zrátame magický alebo bimagický súčet, ich spoloční susedia budú zarátaní na oboch stranách. Stačí sa preto venovať magickému a bimagickému súčtu vrcholov, ktoré nie sú zároveň susedmi u aj v (tých je x, resp. y). Sporom budeme predpokladať, že G je vrcholovo bimagický a neplatí (i), (ii) alebo (iii). To znamená, že nasledovná sústava má riešenie:
$\sum_{k=1}^{x} a_k = \sum_{k=1}^{y} b_k$
$\sum_{k=1}^{x} a_k^2 = \sum_{k=1}^{y} b_k^2$
ak $a_1, ..., a_x, b_1, ..., b_y$ sú navzájom rôzne kladné celé čísla.

Ak neplatí (i), tak BUNV nech $x > 0$ a $y = 0$. Druhá rovnica by potom mala tvar $\sum_{k=1}^{x} a_k^2 = 0$. Jediné riešenie tejto rovnice je zjavne nulové, čo je spor s tým, že vo vrcholovo bimagickom grafe sú vrcholom priradené kladné čísla.

Ak neplatí (ii), tak BUNV nech $y = 1$. Potom dostaneme sústavu z mocninovej lemy, o ktorej vieme, že nemá riešenie (čo je spor).

Ak neplatí (iii), tak musí platiť $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ aj $a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2$. Z duplikačnej lemy potom vyplýva $b_1 = a_1$ alebo $b_1 = a_2$, čo je spor s tým, že vo vrcholovo bimagickom grafe sú vrcholom priradené navzájom rôzne čísla.

Veta 1.5: Pre každé $i, j \in \mathbb{N}, 2 \leq i \leq j, (i, j) \neq (2, 2)$ platí, že graf $K_{i,j}$ je vrcholovo bimagický.

Dôkaz: Indukciou vzhľadom na i, j. Najprv ukážeme, že grafy $K_{2,j}, K_{3,j}, K_{4,4}$ a $K_{4,5}$ sú vrcholovo bimagické.

Graf $K_{2,n}$ pre $n \geq 3$ je vrcholovo bimagický - stačí do prvej partície dať prvky $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ a $\frac{n(n-1)(3n^2-7n+14)}{24}$ a do druhej partície prvky 1 až $n-1$ spolu s $\frac{n(n-1)(3n^2-7n+14)}{24} + 1$.

Graf $K_{3,n}$ pre $n \geq 3$ je vrcholovo bimagický - stačí do prvej partície dať prvky $1, \frac{n(n+1)}{2} - 1$ a $\frac{n(n+1)(3n^2-n-14)}{24} + 1$ a do druhej partície prvky 2 až n spolu s $\frac{n(n+1)(3n^2-n-14)}{24} + 2$.

Graf $K_{4,4}$ je vrcholovo bimagický - stačí do prvej partície dať prvky $1, 4, 6, 7$ a do druhej partície prvky $2, 3, 5, 8$.

Graf $K_{4,5}$ je vrcholovo bimagický - stačí do prvej partície dať prvky $2, 12, 13, 15$ a do druhej partície prvky $1, 4, 8, 10, 19$.

Teraz dokážeme, že ak je $K_{i,j}$ vrcholovo bimagický, tak je aj $K_{i+2,j+3}$. Do jednej partície stačí pridať prvky $4k, 5k$ a do druhej prvky $k, 2k, 6k$, pričom $k \in \mathbb{N}$ zvolíme dostatočne veľké (aby boli prvky navzájom rôzne).

Veta 1.6: Jediný kubický graf, ktorý je vrcholovo bimagický, je $K_{3,3}$.

Dôkaz: Nech G je kubický graf, o ktorom vieme, že je vrcholovo bimagický. V grafe G určite existujú dva susedné vrcholy u, v. Nech w_1, w_2 sú zvyšní susedia u. Nech w_3, w_4 sú zvyšní susedia v. Vrcholy u, v sú susedné a majú stupeň 3. Rozoberieme všetky možnosti:

1. Nech sú w_1, w_2, w_3, w_4 navzájom rôzne. Vrcholy w_1 a v majú spoločného suseda u, takže z vety 1.3 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Susedné byť nemôžu, pretože potom by mal v

stupeň aspoň 4. Teda v G musí existovať hrana w_1w_3 aj hrana w_1w_4.

Zároveň, vrcholy w_2 a v majú tiež spoločného suseda u, takže z vety 1.3 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Susedné byť nemôžu, pretože potom by mal v stupeň aspoň 4. Teda v G musí existovať hrana w_2w_3 aj hrana w_2w_4.

Tým sme dostali graf $K_{3,3}$, ktorý vieme vrcholovo bimagicky ohodnotiť.

2. Nech $w_1 = w_3$ a $w_2 \neq w_4$. Vrcholy w_1 a w_2 majú spoločného suseda u, takže z vety 1.3 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Teda v G musí existovať hrana w_1w_2 alebo hrana w_2v.

Zároveň, vrcholy w_1 a w_4 majú spoločného suseda v, takže z vety 1.3 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Teda v G musí existovať hrana w_1w_4 alebo hrana w_4u.

Lenže ak z každých dvoch potenciálnych hrán pridáme do G aspoň jednu, tak jeden z vrcholov u, v, w_1 bude mať stupeň aspoň 4, čo je spor s tým, že graf je kubický.

3. Nech $w_1 = w_3$ a $w_2 = w_4$. Vrcholy w_1 a w_2 majú spoločných susedov u, v, takže z vety 1.3 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Teda v G musí existovať hrana w_1w_2 alebo dvojice hrán w_1w_5 a w_2w_5 pre nejaký nový vrchol w_5.

Ak je v G hrana w_1w_2, dostaneme graf K_4. O ňom sa môžeme ľahko presvedčiť, že nie je vrcholovo bimagický. Ak priradíme vrcholom hodnoty a, b, c, d, tak musí platiť, že magické súčty $a+b+c, a+b+d, a+c+d, b+c+d$ sú rovnaké. To je možné len v prípade, že $a = b = c = d$, čo je spor s tým, že vrcholom sú priradené navzájom rôzne čísla.

Ak sú v G hrany w_1w_5 aj w_2w_5 pre nejaký nový vrchol w_5, tiež dôjdeme k sporu. Vrcholy u a w_5 majú spoločných susedov w_1, w_2, takže z vety 1.3 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Susedné byť nemôžu, pretože potom by mal u stupeň aspoň 4. Teda by v G

musela existovať hrana vw_5, čo tiež nie je možné, pretože potom by mal v stupeň aspoň 4.

Veta 1.7: Nech G je vrcholovo bimagický regulárny graf. Potom existuje vrcholovo bimagické ohodnotenie grafu G také, že jeho najmenšia hodnota je 1.

Dôkaz: Zoberme si ľubovoľné vrcholovo bimagické ohodnotenie grafu G. Nech n je najmenšia hodnota z nich. Keďže je regulárny, tak každý magický aj bimagický súčet je zložený z rovnakého počtu členov. Z posunovej lemy potom vyplýva, že ku všetkým ohodnoteniam vrcholov môžeme pripočítať alebo odpočítať nejakú konštantu x. Ak odpočítame $a-1$, zjavne dostaneme graf, ktorého najmenšia hodnota je 1.

Definícia 1.8: Nech G je vrcholovo bimagický graf s n vrcholmi. Ak sú vrcholom priradené čísla z množiny $\{1, 2, ..., n\}$, tak G nazveme **vrcholovo superbimagickým grafom**.

Existuje vrcholovo superbimagický graf? Keďže zatiaľ vieme vrchovo bimagicky ohodnotiť len kompletné bipartitné grafy, musíme skúmať tie.

Hrubou silou je dokázané, že existuje vrcholovo superbimagický kompletný bipartitný graf. Pre $n \in \{7, 8, 11, 12\}$ existuje práve jedno ohodnotenie:
$n = 7 \rightarrow \{1, 2, 4, 7\} \mid \{3, 5, 6\}$
$n = 8 \rightarrow \{1, 4, 6, 7\} \mid \{2, 3, 5, 8\}$
$n = 11 \rightarrow \{1, 3, 4, 5, 9, 11\} \mid \{2, 6, 7, 8, 10\}$
$n = 12 \rightarrow \{1, 3, 7, 8, 9, 11\} \mid \{2, 4, 5, 6, 10, 12\}$

Pre $n = 15$ existuje 7 perfektných ohodnotení, pre $n = 16$ existuje 12 perfektných ohodnotení a pre väčšie n tieto hodnoty rastú.

Veta 1.9: Vrcholovo superbimagický kompletný bipartitný graf s n vrcholmi existuje práve vtedy, keď $n = 4k$ alebo $n = 4k - 1$ pre $k \geq 2$.

Dôkaz: Najprv dokážeme, že ak $n = 4k$ alebo $n = 4k - 1, k \geq 2$, tak existuje vrcholovo superbimagický kompletný bipartitný graf, ktorý má n vrcholov. Stačí nám dokázať, že dané tvrdenie platí pre všetky n tvaru $8k - 1, 8k, 8k + 3, 8k + 4$. To urobíme matematickou indukciou vzhľadom na k. Pre $k = 1$ existujú vyhovujúce ohodnotenia (uvedené vo vete 1.7).

Indukčný krok je potom jednoduchý. Uvedieme ho pre prípad $n = 8k$, ostatné z nich sú analogické. Predpokladajme, že pre $n = 8k$ existuje superbimagické ohodnotenie. Pre $n = 8(k + 1)$ ho zostrojíme nasledovne:
1) vezmeme superbimagické ohodnotenie pre $n = 8k$ (ostanú nám nepriradené čísla $8k + 1, ...8k + 8$)
2) na jednu stranu pridáme čísla $8k + 1, 8k + 4, 8k + 6, 8k + 7$ a na druhú stranu $8k + 2, 8k + 3, 8k + 5, 8k + 8$
Na obe strany sme pridali čísla s rovnakým súčtom aj rovnakým súčtom druhých mocnín. Ak bolo pôvodné ohodnotenie superbimagické, tak aj nové ohodnotenie pre $n = 8(k + 1)$ je superbimagické (čbtd).

Ak $n = 4k + 1$ alebo $n = 4k + 2, k \in \mathbb{N}$, tak požadovaný graf neexistuje. Predpokladajme sporom, že taký graf existuje. Potom sa množina $\{1, 2, ..., n\}$ dá rozdeliť na dve disjunktné podmnožiny s rovnakým súčtom aj súčtom druhých mocnín. Súčet tejto množiny je $\frac{n(n+1)}{2}$. Každá podmnožina by teda musela mať súčet $\frac{n(n+1)}{4}$. Lenže ak $n = 4k + 1$ alebo $n = 4k + 2, k \in \mathbb{N}$, tak výraz $\frac{n(n+1)}{4}$ nie je celé číslo, čo je spor.

Veta 1.10: Nech G je vrcholovo bimagický graf. Nech e je most v G. Nech G_1, G_2 sú komponenty, ktoré vzniknú odobraním e z G. Potom ???.

Hypotézy 1:
- Existuje graf, ktorý je vrcholovo bimagický a nie je kompletný bipartitný?

Definícia 2: Nech G je súvislý jednoduchý netriviálny graf. Ak existuje hranové ohodnotenie grafu G také, že platí:

1. hranám sú priradené navzájom rôzne kladné celé čísla
2. súčet incidentných hrán každého vrcholu je rovnaký
3. súčet druhých mocnín incidentných hrán každého vrcholu je rovnaký
tak G nazveme **hranovo bimagickým grafom**.

Jeden z hranovo bimagických grafov je cesta na dvoch vrcholoch (s ľubovoľným kladným ohodnotením). Zaujímavá skupina potenciálne hranovo bimagických grafov je $K_{n,n}$: sú ekvivalentné semibimagickým štvorcom veľkosti $n \times n$. A keďže už poznáme semibimagické štvorce veľkosti 4×4 a väčšie, tak $K_{n,n}$ je hranovo bimagický pre $n \geq 4$.

Veta 2.1: Nech G je hranovo bimagický graf, ktorý má aspoň tri vrcholy. Potom G neobsahuje vrchol stupňa 1.

Dôkaz: Sporom. Nech u je vrchol stupňa 1, v je jeho jediný sused a x je hodnota hrany medzi vrcholmi u, v. Potom podľa u musí platiť, že magický súčet je x. Lenže ak je G súvislý a má aspoň tri vrcholy, tak vrchol v musí mať ešte ďalší susedný vrchol w. Nech y je hodnota hrany medzi vrcholmi v, w. Potom však podľa v musí platiť, že magický súčet je aspoň $x + y > x$, čo je spor.

Veta 2.2: Nech G je hranovo bimagický graf. Potom G neobsahuje vrchol stupňa 2.

Dôkaz: Sporom. Nech u je vrchol stupňa 2. Označme jeho susedov v, w. Nech b, c sú ohodnotenia hrán medzi u, v, resp. u, w. Nech $a_1, a_2, ..., a_n$ sú ohodnotenia hrán, ktoré sú incidentné s w okrem hrany uw. Podľa u musí platiť, že magický súčet je $b + c$ a bimagický súčet je $b^2 + c^2$. Podľa w musí platiť, že magický súčet je $c + \sum_{k=1}^{n} a_n$ a bimagický súčet je $c^2 + \sum_{k=1}^{n} a_n^2$. Z toho vyplýva, že by sústava z mocninovej lemy mala riešenie, čo je spor.

Dôsledok 2.2: Stromy nie sú hranovo bimagické.

Veta 2.3: Nech G je hranovo bimagický graf, ktorý má aspoň tri vrcholy. Nech u, v sú ľubovoľné dva susedné vrcholy. Potom $max\{d(u), d(v)\} \geq 4$.

Dôkaz: Sporom. Predpokladajme, že existuje dvojica susedných vrcholov u, v takých, že $max\{d(u), d(v)\} < 4$. Z dôsledku 2.2 potom vyplýva, že nutne $d(u) = d(v) = 3$. Označme x hodnotenie hrany medzi u, v. Označme y_1, y_2 zvyšné hodnotenia hrán z u a z_1, z_2 zvyšné hodnotenia hrán z v. Podľa u musí platiť, že magický súčet je $x+y_1+y_2$ a bimagický súčet je $x^2+y_1^2+y_2^2$. Podľa v musí platiť, že magický súčet je $x+z_1+z_2$ a bimagický súčet je $x^2+z_1^2+z_2^2$. Teda musí platiť $y_1+y_2 = z_1+z_2$ aj $y_1^2+y_2^2 = z_1^2+z_2^2$. Z duplikačnej lemy potom vyplýva, že $z_1 = y_1$ alebo $z_1 = y_2$, čo je spor s tým, že hranám budú priradené navzájom rôzne čísla.

Dôsledok 2.3: Kubické grafy nie sú hranovo bimagické.

Veta 2.4: Nech G je hranovo bimagický regulárny graf. Potom existuje hranovo bimagické ohodnotenie grafu G také, že jeho najmenšia hodnota je 1.

Dôkaz: Podobný ako dôkaz vety 1.7, akurát konštantu neodpočítame od ohodnotení vrcholov, ale od ohodnotení hrán.

Veta 2.5: Existuje graf, ktorý je hranovo bimagický a nie je kompletný bipartitný.

Dôkaz: Nech G je hranovo bimagický kompletný bipartitný regulárny graf s nejakým ohodnotením. Nech e je hrana, ktorá má najmenšiu hodnotu. Keďže je regulárny, tak podľa posunovej lemy môžeme od všetkých hrán odrátať hodnotu hrany e. Tým dostaneme hranovo bimagický kompletný bipartitný graf, ktorý má práve jednu nulovú hranu e. Zjavne vieme túto hranu z grafu odstrániť a magická aj bimagická podmienka ostane zachovaná. Graf $G - e$ je teda hranovo bimagický a pritom nie je kompletný bipartitný.

Definícia 2.6: Nech G je hranovo bimagický graf s n vrcholmi. Ak sú hranám priradené čísla z množiny $\{1, 2, ..., n\}$, tak G nazveme **hranovo superbimagickým grafom**.

Georges Pfeffermann našiel v 19. storočí bimagický štvorec veľkosti 8×8, v ktorom použil všetky čísla z množiny $\{1, 2, ..., 64\}$. Vieme teda, že existuje hranovo superbimagický graf - je ním kompletný bipartitný graf na 8 vrcholoch.

Hypotézy 2:
- Existuje graf, ktorý je hranovo bimagický a nie je kompletný bipartitný alebo kompletný bipartitný bez jednej hrany?

Definícia 3: Nech G je súvislý jednoduchý netriviálny graf. Ak existuje vrcholové ohodnotenie grafu G také, že platí:
1. vrcholom sú priradené navzájom rôzne kladné celé čísla
2. súčet susedov každého vrcholu je rovnaký
3. súčin susedov každého vrcholu je rovnaký
tak G nazveme **vrcholovo multiplikatívnym magickým grafom**.

Veta 3.1: Nech G je vrcholovo multiplikatívny magický graf. Ak G obsahuje dvojicu vrcholov stupňa 1, potom majú spoločného suseda.

Dôkaz: rovnaký ako dôkaz vety 1.1

Dôsledok 3.1: Jediný strom, ktorý je vrcholovo multiplikatívny magický, je $K_{1,3}$.

Dôkaz: Z vety 3.1 vyplýva, že jediným stromom, ktorý môže byť vrcholovo multiplikatívnym magickým, je $K_{1,n}$ pre nejaké $n \in \mathbb{N}$. Nech v je koreň tohto stromu a $v_1, ..., v_n$ sú jeho listy. Nech b je hodnota koreňa a $a_1, ..., a_n$ sú hodnoty jeho listov. Podľa v má graf magický súčet $\sum_{k=1}^{n} a_k$ a podľa v_1 má graf magický súčet b. Podľa v má graf súčin $\prod_{k=1}^{n} a_k$ a podľa v_1 má graf súčin b. To odpovedá sústave z mocninovej lemy, ktorá má jediné riešenie $(n = 3, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, b = 6)$. Z toho vyplýva, že iba $K_{1,3}$ je multiplikatívny magický.

Veta 3.2: Nech G je vrcholovo multiplikatívny magický graf. Potom majú všetky vrcholy stupňa 2 rovnakú množinu susedov.

Dôkaz: rovnaký ako dôkaz vety 1.2, akurát použijeme multiplikatívny súčet a nie bimagický

Veta 3.3: Nech G je vrcholovo multiplikatívny magický graf. Potom má každá dvojica nesusedných vrcholov stupňa 3 buď rovnakú množinu susedov, alebo nemá spoločného suseda.

Dôkaz: rovnaký ako dôkaz vety 1.3, akurát použijeme multiplikatívny súčet a nie bimagický

Veta 3.4: Kompletný bipartitný graf nemôže byť vrcholovo multiplikatívny supermagický.

Dôkaz: Sporom. Nech G je kompletný bipartitný a vrcholovo multiplikatívny supermagický graf s n vrcholmi. Nech p je najväčšie prvočíslo, ktoré neprevyšuje n. Toto prvočíslo sa môže vyskytovať iba v jednej partícii. To však znamená, že súčin oboch partícii nemôže byť rovnaký (jeden súčin bude mať p vo svojom rozklade a druhý nie).

Veta 3.5: Pre každé $i, j \in \mathbb{N}, 2 \leq i \leq j, (i, j) \neq (2, 2)$ platí, že graf $K_{i,j}$ je vrcholovo multiplikatívny magický.

Dôkaz: Indukciou vzhľadom na i, j. Najprv ukážeme, že grafy $K_{i,j}, i \in \{2, 3\}, K_{4,4}$ a $K_{4,5}$ sú vrcholovo multiplikatívne magické.

Grafy $K_{2,3}, K_{2,4}, K_{4,4}$ a $K_{4,5}$ sú vrcholovo multiplikatívne magické, pretože:
pre graf $K_{2,3}$ stačí priradiť jednej partícii prvky $5, 12$ a druhej partícii prvky $1, 6, 10$
pre graf $K_{2,4}$ stačí priradiť jednej partícii prvky $9, 16$ a druhej partícii prvky $1, 2, 4, 18$
pre graf $K_{4,4}$ stačí priradiť jednej partícii prvky $1, 5, 6, 12$ a druhej partícii prvky $2, 3, 4, 15$
pre graf $K_{4,5}$ stačí priradiť jednej partícii prvky $2, 10, 20, 27$ a druhej partícii prvky $1, 3, 6, 24, 25$

Graf $K_{2,n}$ pre $n \geq 5$ je vrcholovo multiplikatívny magický - stačí do prvej partície dať prvky $(n-1)!+1$ a $(n-1)!((n-1)!+1-\frac{n(n-1)}{2})$ a do druhej partície prvky $1,2,...,n-2,n-1,((n-1)!+1)((n-1)!+1-\frac{n(n-1)}{2})$.

Graf $K_{3,n}$ pre $n \geq 3$ je vrcholovo multiplikatívny magický - stačí do prvej partície dať prvky $1, n!+1$ a $n!(n!+3-\frac{n(n+1)}{2})$ a do druhej partície prvky $2,...,n-1,n,(n!+1)(n!+3-\frac{n(n+1)}{2})$.

Teraz dokážeme, že ak je $K_{i,j}$ vrcholovo multiplikatívny magický, tak je aj $K_{i+2,j+3}$. Do jednej partície stačí pridať prvky $2xy, 2xy-x-y$ a do druhej prvky $2(2xy-x-y), x, y$, pričom $x, y \in \mathbb{N}$ zvolíme dostatočne veľké (aby boli prvky navzájom rôzne).

Definícia 4: Nech G je súvislý jednoduchý netriviálny graf. Ak existuje hranové ohodnotenie grafu G také, že platí:
1. hranám sú priradené navzájom rôzne kladné celé čísla
2. súčet incidentných hrán každého vrcholu je rovnaký
3. súčin incidentných hrán každého vrcholu je rovnaký
tak G nazveme **hranovo multiplikatívnym magickým grafom**.

Veta 4.1: Nech G je hranovo multiplikatívny magický graf, ktorý má aspoň tri vrcholy. Potom G neobsahuje vrchol stupňa 1.

Dôkaz: rovnaký ako dôkaz vety 2.1

Definícia 5: Nech A je matica veľkosti $m \times n$. Ak platí:
1. prvky matice sú navzájom rôzne kladné celé čísla
2. súčet prvkov v každom riadku je konštantný
3. súčet prvkov v každom stĺpci je konštantný
4. súčet druhých mocnín prvkov v každom riadku je konštantný
5. súčet druhých mocnín prvkov v každom stĺpci je konštantný
tak A nazveme **bimagickým obdĺžnikom**.

Každý hranovo bimagický kompletný bipartitný graf sa dá jednoducho transformovať na bimagický obdĺžnik.

Veta 5.1: Nech A je bimagický obdĺžnik. Potom ho vieme transformovať na taký bimagický obdĺžnik B s potenciálne nekladnými prvkami, že magický súčet v jeho riadku aj stĺpci je rovný 0.

Dôkaz: Nech S_r, S_s sú súčty v riadku a stĺpci v bimagickom obdĺžniku A veľkosti $m \times n$. Keďže A má m riadkov a n stĺpcov, musí platiť $mS_r = nS_s$, z čoho vyplýva $\frac{m}{n} = \frac{S_s}{S_r}$. Teda $S_s = km$ a $S_r = kn$ pre nejaké $k \in \mathbb{N}$. Ak od každého prvku v A odpočítame k, vytvoríme tým nový obdĺžnik B. Zjavne B má súčty v riadku aj stĺpci nulové. Z posunovej lemy zároveň vyplýva, že ak boli predtým magic ké aj bimagické súčty konštantné, tak budú konštantné aj v B. Teda B je bimagický obdĺžnik s potenciálne nekladnými prvkami.

Veta 5.2: Nech A je bimagický obdĺžnik veľkosti $m \times n$. Potom $m, n \geq 3$ alebo $(m, n) = (1, 1)$.

Dôkaz: Ak $m = 1$, tak má obdĺžnik len jeden riadok. Ak majú byť jeho súčty v stĺpci rovnaké, musí byť v každom stĺpci rovnaké číslo. Ak $n \geq 2$, obdĺžnik by obsahoval duplicitné prvky, čo je spor. Z toho vyplýva, že nutne $n = 1$.

Ak $m = 2$, tak z predošlého odstavca vieme, že $n \geq 2$. Tým dostaneme pre dva riadky a dva stĺpce rovnicu z duplikačnej lemy, z čoho vyplýva, že obdĺžnik by obsahoval duplicitné prvky, čo je spor.

Veta 5.3: Nech A je bimagický obdĺžnik veľkosti $3 \times n$. Potom ho vieme transformovať na bimagický obdĺžnik B, pre ktorý platí, že v každom jeho stĺpci je aspoň jedno nepárne číslo.

Dôkaz: Predpokladajme, že v A existuje stĺpec, ktorého všetky tri prvky sú párne čísla. Z toho vyplýva, že ich bimagický súčet je deliteľný 4. Kedy môže byť súčet $a^2+b^2+c^2$ deliteľný 4? Prvky a, b, c musia byť tvaru $4k$ alebo $4k+2$, lebo ak by boli ľubovoľné z nich tvaru $4k+1$ alebo $4k+3$, ich druhá mocnina by dávala zvyšok 1 po delení 4 - výraz $a^2+b^2+c^2$ by už nemohol byť deliteľný 4. Z toho vyplýva, že každý stĺpec v A obsahuje iba párne prvky. Vieme ho preto transformovať na bimagický obdĺžnik B jednoducho tak, že každý prvok vydelíme 2 (alebo mocninou 2, tak aby B obsahovalo nepárne prvky).

Definícia 6: Nech A je matica veľkosti $m \times n$. Ak platí:
1. prvky matice sú navzájom rôzne kladné celé čísla
2. súčet prvkov v každom riadku je konštantný
3. súčet prvkov v každom stĺpci je konštantný
4. súčin prvkov v každom riadku je konštantný
5. súčin prvkov v každom stĺpci je konštantný

tak A nazveme **multiplikatívnym magickým obdĺžnikom**.

Každý hranovo multiplikatívny magický kompletný bipartitný graf sa dá jednoducho transformovať na multiplikatívny magický obdĺžnik.

Veta 6.1: Nech A je multiplikatívny magický obdĺžnik veľkosti $m \times n$. Potom $m, n \geq 3$ alebo $(m, n) = (1, 1)$.

Dôkaz: rovnaký ako dôkaz vety 5.2