Duplikačná lema: Nech $a, b, c, d \in \mathbb{N}^+$, pre ktoré platí $a + b = c + d$ aj $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Potom $c = a$ alebo $c = b$.

Dôkaz: Z prvej rovnice vyjadríme $d = a + b - c$ a dosadíme do druhej. Po úprave dostaneme vzťah $c^2 - ac - bc + ab = 0$, ktorý sa dá prepísať na tvar $(c - a)(c - b) = 0$. Z toho vyplýva $c = a$ alebo $c = b$.

Mocninová lema: Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $a_1, ..., a_n, b$ sú navzájom rôzne kladné celé čísla. Potom nasledovná sústava nemá riešenie:
$\sum_{k=1}^{n} a_k = b$
$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = b^2$

Dôkaz: Rozoberieme tri situácie na základe n.

Ak $n = 0$, tak by platilo $b = 0$, čo je spor s tým, že b je kladné.

Ak $n = 1$, tak by platilo $a_1 = b$, čo je spor s tým, že sú navzájom rôzne.

Ak $n \geq 2$, tak dosadením b do druhej rovnice dostaneme nutný vzťah $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = (\sum_{k=1}^{n} a_k)^2$, čo sa dá upraviť na tvar $\sum_{i \neq j} a_i a_j = 0$. To je spor, keďže každé a_i aj a_j je kladné, a teda ich súčet nemôže byť nulový.

Definícia 1: Nech G je súvislý jednoduchý netriviálny graf. Ak existuje vrcholové ohodnotenie grafu G také, že platí:
1. vrcholom sú priradené navzájom rôzne kladné celé čísla
2. súčet susedov každého vrcholu je rovnaký
3. súčet druhých mocnín susedov každého vrcholu je rovnaký
tak G nazveme **vrcholovo bimagickým grafom**.

Veta 1.1: Nech G je vrcholovo bimagický graf. Ak G obsahuje dvojicu vrcholov stupňa 1, potom majú spoločného suseda.

Dôkaz: Sporom. Nech G obsahuje dva vrcholy u, v stupňa 1, ktoré nemajú spoločného suseda. Nech x je hodnota vrcholu u. Nech y je hodnota vrcholu v.

Nech sú vrcholy u, v susedné. Podľa u má graf magický súčet y a podľa v má graf magický súčet x. Z toho vyplýva $x = y$, čo je spor s tým, že vrcholom sú priradené navzájom rôzne čísla.

Nech majú vrcholy u, v rôznych susedov w_1, w_2. Označme hodnoty týchto vrcholov z_1, z_2. Podľa u má graf magický súčet z_1 a podľa v má graf magický súčet z_2. Z toho vyplýva $z_1 = z_2$, čo je opäť spor.

Veta 1.2: Nech G je vrcholovo bimagický graf. Potom majú všetky vrcholy stupňa 2 rovnakú množinu susedov.

Dôkaz: Sporom. Nech G obsahuje dva vrcholy u, v stupňa 2, ktoré nemajú rovnakú množinu susedov. Nech x je hodnota vrcholu u. Nech y je hodnota vrcholu v.

Nech sú vrcholy u, v susedné. Nech w_1 je druhý sused u a z_1 je jeho hodnota. Nech w_2 je druhý sused v a z_2 je jeho hodnota. Podľa u má graf magický súčet $y + z_1$ a podľa v má graf magický súčet $x + z_2$. Podľa u má graf bimagický súčet $y^2 + z_1^2$ a podľa v má graf bimagický súčet $x^2 + z_2^2$. To znamená, že $x + z_2 = y + z_1$ a zároveň $x^2 + z_2^2 = y^2 + z_1^2$. Z duplikačnej lemy potom vyplýva, že $y = x$ alebo $y = z_2$, čo je spor s tým, že vrcholom sú priradené navzájom rôzne čísla.

Nech majú vrcholy u, v práve jedného spoločného suseda w, jeho hodnotu označíme z. Nech w_1 je druhý sused u a z_1 je jeho hodnota. Nech w_2 je druhý sused v a z_2 je jeho hodnota. Podľa u má graf magický súčet $z + z_1$ a podľa v má graf magický súčet $z + z_2$. Z toho vyplýva $z_1 = z_2$, čo je spor.

Nech majú vrcholy u, v odlišných susedov. Nech w_1, w_2 sú susedia u, pričom ich hodnoty sú z_1, z_2. Nech w_3, w_4 sú susedia v, pričom ich hodnoty sú z_3, z_4. Podľa u má graf magický súčet z_1+z_2 a podľa v má graf magický súčet z_3+z_4. Podľa u má graf bimagický súčet $z_1^2+z_2^2$ a podľa v má graf bimagický súčet $z_3^2 + z_4^2$. To znamená, že $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$ a zároveň $z_1^2 + z_2^2 = z_3^2 + z_4^2$. Z duplikačnej lemy potom vyplýva, že $z_3 = z_1$ alebo $z_3 = z_2$, čo je opäť rovnaký spor.

Veta 1.3: Nech G je vrcholovo bimagický graf. Potom má každá dvojica vrcholov stupňa 3 buď rovnakú množinu susedov, alebo nemá spoločného suseda.

Dôkaz: Veľmi podobný ako v predchádzajúcich dvoch vetách.

Veta 1.4: Nech G je vrcholovo bimagický graf a u, v sú nejaké jeho dva vrcholy. Nech x je počet susedov vrcholu u, ktoré nie sú susedmi vrcholu v. Nech y je počet susedov vrcholu v, ktoré nie sú susedmi vrcholu u. Potom platí:
(i) $x = 0 \iff y = 0$
(ii) $x, y \neq 1$
(iii) $(x, y) \neq (2, 2)$

Dôkaz: Ak pre vrcholy u, v zrátame magický alebo bimagický súčet, ich spoloční susedia budú zarátaní na oboch stranách. Stačí sa preto venovať magickému a bimagickému súčtu vrcholov, ktoré nie sú zároveň susedmi u aj v (tých je x, resp. y). Sporom budeme predpokladať, že G je vrcholovo bimagický a neplatí (i), (ii) alebo (iii). To znamená, že nasledovná sústava má riešenie:
$\sum_{k=1}^{x} a_k = \sum_{k=1}^{y} b_k$
$\sum_{k=1}^{x} a_k^2 = \sum_{k=1}^{y} b_k^2$
ak $a_1, ..., a_x, b_1, ..., b_y$ sú navzájom rôzne kladné celé čísla.

Ak neplatí (i), tak BUNV nech $x > 0$ a $y = 0$. Druhá rovnica by potom mala tvar $\sum_{k=1}^{x} a_k^2 = 0$. Jediné riešenie tejto rovnice je zjavne nulové, čo je spor s tým, že vo vrcholovo bimagickom grafe sú vrcholom priradené kladné čísla.

Ak neplatí (ii), tak BUNV nech $y = 1$. Potom dostaneme sústavu z mocninovej lemy, o ktorej vieme, že nemá riešenie (čo je spor).

Ak neplatí (iii), tak musí platiť $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ aj $a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2$. Z duplikačnej lemy potom vyplýva $b_1 = a_1$ alebo $b_1 = a_2$, čo je spor s tým, že vo vrcholovo bimagickom grafe sú vrcholom priradené navzájom rôzne čísla.

Veta 1.5: Nech $m, n \in \mathbb{N}^+$, pričom $m, n \geq 2$ a $(m, n) \neq (2, 2)$. Nech $A, B \subset \mathbb{N}^+$, pričom $|A| = m - 1$, $|B| = n - 1$. Nech $S_A = \sum_{k=1}^{m-1} A_k$, $S_B = \sum_{k=1}^{n-1} B_k$, $T_A = \sum_{k=1}^{m-1} A_k^2$, $T_B = \sum_{k=1}^{n-1} B_k^2$ a platí:
1. $A \cap B = \emptyset$
2. $S_A < S_B$
3. $(S_A - S_B)^2 < T_B - T_A$
4. $\frac{\frac{T_B - T_A}{S_B - S_A} \pm (S_B - S_A)}{2} \notin A \cup B$

Nech $C = \{A'_1, ..., A'_m, B'_1, ..., B'_n\}$ je množina čísel definovaná takto:
$A'_k = A_k(S_B - S_A)$ pre $k \in \{1, ..., m-1\}$
$A'_m = \frac{T_B - T_A + (S_A - S_B)^2}{2}$
$B'_k = B_k(S_B - S_A)$ pre $k \in \{1, ..., n-1\}$
$B'_n = \frac{T_B - T_A - (S_A - S_B)^2}{2}$

Potom C obsahuje navzájom rôzne kladné celé čísla a platí
(i) $\sum_{k=1}^{m} A'_k = \sum_{k=1}^{n} B'_k$
(ii) $\sum_{k=1}^{m} (A'_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (B'_k)^2$

Dôkaz: Výpočtom.

Dôsledok 1.5: Nech $m, n \in \mathbb{N}^+$, pričom $m, n \geq 2$ a $(m, n) \neq (2, 2)$. Nech vieme zostrojiť množinu C z vety 1.5. Potom $K_{m,n}$ je vrcholovo bimagický.

Dôkaz: Vrcholom v jednej partícii priradím hodnoty A'_1 až A'_m a druhej B'_1 až B'_n. Magické súčty sú iba $\sum_{k=1}^{m} A'_k$ a $\sum_{k=1}^{n} B'_k$, podľa vety 1.5 sú rovnaké. Bimagické súčty sú iba $\sum_{k=1}^{m} (A'_k)^2$ a $\sum_{k=1}^{n} (B'_k)^2$, podľa vety 1.5 sú tiež rovnaké. Podmienky z vety zároveň zaručia, že vrcholom budú priradené navzájom rôzne kladné celé čísla.

Poznámka 1.5: Jedno z riešení je $K_{2,3}$, pričom $A'_1 = 4$, $A'_2 = 5$, $B'_1 = 2$, $B'_2 = 6$, $B'_3 = 1$. Toto riešenie vzniklo algoritmickým použitím vety 1.5 na množiny $A = \{2\}$ a $B = \{1, 3\}$. Je veľký predpoklad, že takéto množiny sa dajú zostrojiť pre všetky prípustné m, n, ale zatiaľ sa mi to nepodarilo dokázať.

Hypotéza 1: Existuje graf, ktorý je vrcholovo bimagický a nie je kompletný bipartitný?

Definícia 2: Nech G je súvislý jednoduchý netriviálny graf. Ak existuje hranové ohodnotenie grafu G také, že platí:
1. hranám sú priradené navzájom rôzne kladné celé čísla
2. súčet incidentných hrán každého vrcholu je rovnaký
3. súčet druhých mocnín incidentných hrán každého vrcholu je rovnaký
tak G nazveme **hranovo bimagickým grafom**.

Jeden z hranovo bimagických grafov je cesta na dvoch vrcholoch (s ľubovoľným kladným ohodnotením). Zaujímavá skupina potenciálne hranovo bimagických grafov je $K_{n,n}$: sú ekvivalentné semibimagickým štvorcom veľkosti $n \times n$. A keďže už poznáme semibimagické štvorce veľkosti 4×4 a väčšie, tak $K_{n,n}$ je hranovo bimagický pre $n \geq 4$.

Veta 2.1: Nech G je hranovo bimagický graf, ktorý má aspoň tri vrcholy. Potom G neobsahuje vrchol stupňa 1.

Dôkaz: Sporom. Nech u je vrchol stupňa 1, v je jeho jediný sused a x je hodnota hrany medzi vrcholmi u, v. Potom podľa u musí platiť, že magický súčet je x. Lenže ak je G súvislý a má aspoň tri vrcholy, tak vrchol v musí mať ešte ďalší susedný vrchol w. Nech y je hodnota hrany medzi vrcholmi v, w. Potom však podľa v musí platiť, že magický súčet je aspoň $x + y > x$, čo je spor.

Veta 2.2: Nech G je hranovo bimagický graf. Potom G neobsahuje vrchol stupňa 2.

Dôkaz: Sporom. Nech u je vrchol stupňa 2. Označme jeho susedov v, w. Nech b, c sú ohodnotenia hrán medzi u, v, resp. u, w. Nech $a_1, a_2, ..., a_n$ sú ohodnotenia hrán, ktoré sú incidentné s w okrem hrany uw. Podľa u musí platiť, že magický súčet je $b + c$ a bimagický súčet je $b^2 + c^2$. Podľa w musí platiť, že magický súčet je $c + \sum_{k=1}^{n} a_n$ a bimagický súčet je $c^2 + \sum_{k=1}^{n} a_n^2$. Z toho vyplýva, že by sústava z mocninovej lemy mala riešenie, čo je spor.

Dôsledok 2.2: Ak má bimagický graf aspoň tri vrcholy, tak všetky jeho vrcholy majú stupeň aspoň 3.

Veta 2.3: Nech G je hranovo bimagický graf, ktorý má aspoň tri vrcholy. Nech u, v sú ľubovoľné dva susedné vrcholy. Potom $max\{d(u), d(v)\} \geq 4$.

Dôkaz: Sporom. Predpokladajme, že existuje dvojica susedných vrcholov u, v takých, že $max\{d(u), d(v)\} < 4$. Z dôsledku 2.2 potom vyplýva, že nutne $d(u) = d(v) = 3$. Označme x hodnotenie hrany medzi u, v. Označme y_1, y_2 zvyšné hodnotenia hrán z u a z_1, z_2 zvyšné hodnotenia hrán z v. Podľa u musí platiť, že magický súčet je $x + y_1 + y_2$ a bimagický súčet je $x^2 + y_1^2 + y_2^2$. Podľa v musí platiť, že magický súčet je $x + z_1 + z_2$ a bimagický súčet je $x^2 + z_1^2 + z_2^2$. Teda musí platiť $y_1 + y_2 = z_1 + z_2$ aj $y_1^2 + y_2^2 = z_1^2 + z_2^2$. Z duplikačnej lemy potom vyplýva, že $z_1 = y_1$ alebo $z_1 = y_2$, čo je spor s tým, že hranám budú priradené navzájom rôzne čísla.

Hypotéza 2: Existuje graf, ktorý je hranovo bimagický a nie je kompletný bipartitný?