**Duplikačná lema**: Nech $a, b, c, d \in \mathbb{N}^+$, pre ktoré platí $a + b = c + d$ aj $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Potom $c = a$ alebo $c = b$.

**Dôkaz**: Z prvej rovnice vyjadríme $d = a + b - c$ a dosadíme do druhej. Po úprave dostaneme vzťah $c^2 - ac - bc + ab = 0$, ktorý sa dá prepísať na tvar $(c - a)(c - b) = 0$. Z toho vyplýva $c = a$ alebo $c = b$.

**Mocninová lema**: Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $a_1, ..., a_n, b$ sú navzájom rôzne kladné celé čísla. Potom nasledovná sústava nemá riešenie:
$\sum_{k=1}^{n} a_k = b$
$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = b^2$

**Dôkaz**: Rozoberieme tri situácie na základe $n$.

Ak $n = 0$, tak by platilo $b = 0$, čo je spor s tým, že $b$ je kladné.

Ak $n = 1$, tak by platilo $a_1 = b$, čo je spor s tým, že sú navzájom rôzne.

Ak $n \geq 2$, tak dosadením $b$ do druhej rovnice dostaneme nutný vzťah $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = (\sum_{k=1}^{n} a_k)^2$, čo sa dá upraviť na tvar $\sum_{i \neq j} a_i a_j = 0$. To je spor, keďže každé $a_i$ aj $a_j$ je kladné, a teda ich súčet nemôže byť nulový.

**Posunová lema**: Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \mathbb{N}$. Ak $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k$ aj $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2$, potom pre všetky $x \in \mathbb{Z}$ platí:
(i) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + x) = \sum_{k=1}^{n} (b_k + x)$
(ii) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + x)^2 = \sum_{k=1}^{n} (b_k + x)^2$

**Dôkaz**:
(i) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + x) = \sum_{k=1}^{n} a_k + nx = \sum_{k=1}^{n} b_k + nx = \sum_{k=1}^{n} (b_k + x)$
(ii) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + x)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2x \sum_{k=1}^{n} a_k + nx^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2 + 2x \sum_{k=1}^{n} b_k + nx^2 = \sum_{k=1}^{n} (b_k + x)^2$

**Definícia 1**: Nech $G$ je súvislý jednoduchý netriviálny graf. Ak existuje vrcholové ohodnotenie grafu $G$ také, že platí:

1. vrcholom sú priradené navzájom rôzne kladné celé čísla
2. súčet susedov každého vrcholu je rovnaký
3. súčet druhých mocnín susedov každého vrcholu je rovnaký
tak $G$ nazveme **vrcholovo bimagickým grafom**.

**Veta 1.1**: Nech $G$ je vrcholovo bimagický graf. Ak $G$ obsahuje dvojicu vrcholov stupňa 1, potom majú spoločného suseda.

**Dôkaz**: Sporom. Nech $G$ obsahuje dva vrcholy $u, v$ stupňa 1, ktoré nemajú spoločného suseda. Nech $x$ je hodnota vrcholu $u$. Nech $y$ je hodnota vrcholu $v$.

Nech sú vrcholy $u, v$ susedné. Podľa $u$ má graf magický súčet $y$ a podľa $v$ má graf magický súčet $x$. Z toho vyplýva $x = y$, čo je spor s tým, že vrcholom sú priradené navzájom rôzne čísla.

Nech majú vrcholy $u, v$ rôznych susedov $w_1, w_2$. Označme hodnoty týchto vrcholov $z_1, z_2$. Podľa $u$ má graf magický súčet $z_1$ a podľa $v$ má graf magický súčet $z_2$. Z toho vyplýva $z_1 = z_2$, čo je opäť spor.

**Veta 1.2**: Nech $G$ je vrcholovo bimagický graf. Potom majú všetky vrcholy stupňa 2 rovnakú množinu susedov.

**Dôkaz**: Sporom. Nech $G$ obsahuje dva vrcholy $u, v$ stupňa 2, ktoré nemajú rovnakú množinu susedov. Nech $x$ je hodnota vrcholu $u$. Nech $y$ je hodnota vrcholu $v$.

Nech sú vrcholy $u, v$ susedné. Nech $w_1$ je druhý sused $u$ a $z_1$ je jeho hodnota. Nech $w_2$ je druhý sused $v$ a $z_2$ je jeho hodnota. Podľa $u$ má graf magický súčet $y + z_1$ a podľa $v$ má graf magický súčet $x + z_2$. Podľa $u$ má graf bimagický súčet $y^2 + z_1^2$ a podľa $v$ má graf bimagický súčet $x^2 + z_2^2$. To znamená, že $x + z_2 = y + z_1$ a zároveň $x^2 + z_2^2 = y^2 + z_1^2$. Z duplikačnej lemy potom vyplýva, že $y = x$ alebo $y = z_2$, čo je spor s tým, že vrcholom sú priradené navzájom rôzne čísla.

Nech majú vrcholy $u, v$ práve jedného spoločného suseda $w$, jeho hodnotu označíme $z$. Nech $w_1$ je druhý sused $u$ a $z_1$ je jeho hodnota. Nech $w_2$ je druhý sused $v$ a $z_2$ je jeho hodnota. Podľa $u$ má graf magický súčet $z + z_1$ a podľa $v$ má graf magický súčet $z + z_2$. Z toho vyplýva $z_1 = z_2$, čo je spor.

Nech majú vrcholy $u, v$ odlišných susedov. Nech $w_1, w_2$ sú susedia $u$, pričom ich hodnoty sú $z_1, z_2$. Nech $w_3, w_4$ sú susedia $v$, pričom ich hodnoty sú $z_3, z_4$. Podľa $u$ má graf magický súčet $z_1 + z_2$ a podľa $v$ má graf magický súčet $z_3 + z_4$. Podľa $u$ má graf bimagický súčet $z_1^2 + z_2^2$ a podľa $v$ má graf bimagický súčet $z_3^2 + z_4^2$. To znamená, že $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$ a zároveň $z_1^2 + z_2^2 = z_3^2 + z_4^2$. Z duplikačnej lemy potom vyplýva, že $z_3 = z_1$ alebo $z_3 = z_2$, čo je opäť rovnaký spor.

**Veta 1.3**: Nech $G$ je vrcholovo bimagický graf. Potom má každá dvojica nesusedných vrcholov stupňa 3 buď rovnakú množinu susedov, alebo nemá spoločného suseda.

**Dôkaz**: Sporom. Nech $G$ obsahuje dva nesusedné vrcholy $u, v$ stupňa 3, ktoré majú práve jedného alebo dvoch spoločných susedov. Nech $x$ je hodnota vrcholu $u$. Nech $y$ je hodnota vrcholu $v$.

Nech majú vrcholy $u, v$ práve jedného spoločného suseda $w$, jeho hodnotu označíme $z$. Nech $w_1, w_2$ sú zvyšní susedia $u$ a $z_1, z_2$ sú ich hodnoty. Nech $w_3, w_4$ sú zvyšní susedia $v$ a $z_3, z_4$ sú ich hodnoty. Podľa $u$ má graf magický súčet $z + z_1 + z_2$ a podľa $v$ má graf magický súčet $z + z_3 + z_4$. Podľa $u$ má graf bimagický súčet $z^2 + z_1^2 + z_2^2$ a podľa $v$ má graf magický súčet $z^2 + z_3^2 + z_4^2$. To znamená, že $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$ a zároveň $z_1^2 + z_2^2 = z_3^2 + z_4^2$. Z duplikačnej lemy potom vyplýva, že $z_3 = z_1$ alebo $z_3 = z_2$, čo je spor s tým, že vrcholom sú priradené navzájom rôzne čísla.

Nech majú vrcholy $u, v$ práve dvoch spoločných susedov $w_1, w_2$, ich hodnoty označíme $z_1, z_2$. Nech $w_3$ je zvyšný sused $u$ a $z_3$ je jeho hodnota. Nech $w_4$ je zvyšný sused $v$ a $z_4$ je jeho hodnota. Podľa $u$ má graf magický súčet $z_1 + z_2 + z_3$ a podľa $v$ má graf magický súčet $z_1 + z_2 + z_4$. Z toho vyplýva $z_3 = z_4$, čo je opäť spor.

**Veta 1.4**: Nech $G$ je vrcholovo bimagický graf a $u, v$ sú nejaké jeho dva vrcholy. Nech $x$ je počet susedov vrcholu $u$, ktoré nie sú susedmi vrcholu $v$.

Nech $y$ je počet susedov vrcholu $v$, ktoré nie sú susedmi vrcholu $u$. Potom platí:
(i) $x = 0 \iff y = 0$
(ii) $x, y \neq 1$
(iii) $(x, y) \neq (2, 2)$

**Dôkaz**: Ak pre vrcholy $u, v$ zrátame magický alebo bimagický súčet, ich spoloční susedia budú zarátaní na oboch stranách. Stačí sa preto venovať magickému a bimagickému súčtu vrcholov, ktoré nie sú zároveň susedmi $u$ aj $v$ (tých je $x$, resp. $y$). Sporom budeme predpokladať, že $G$ je vrcholovo bimagický a neplatí (i), (ii) alebo (iii). To znamená, že nasledovná sústava má riešenie:
$\sum_{k=1}^{x} a_k = \sum_{k=1}^{y} b_k$
$\sum_{k=1}^{x} a_k^2 = \sum_{k=1}^{y} b_k^2$
ak $a_1, ..., a_x, b_1, ..., b_y$ sú navzájom rôzne kladné celé čísla.

Ak neplatí (i), tak BUNV nech $x > 0$ a $y = 0$. Druhá rovnica by potom mala tvar $\sum_{k=1}^{x} a_k^2 = 0$. Jediné riešenie tejto rovnice je zjavne nulové, čo je spor s tým, že vo vrcholovo bimagickom grafe sú vrcholom priradené kladné čísla.

Ak neplatí (ii), tak BUNV nech $y = 1$. Potom dostaneme sústavu z mocninovej lemy, o ktorej vieme, že nemá riešenie (čo je spor).

Ak neplatí (iii), tak musí platiť $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ aj $a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2$. Z duplikačnej lemy potom vyplýva $b_1 = a_1$ alebo $b_1 = a_2$, čo je spor s tým, že vo vrcholovo bimagickom grafe sú vrcholom priradené navzájom rôzne čísla.

**Veta 1.5**: Nech $m, n \in \mathbb{N}^+$, pričom $m, n \geq 2$ a $(m, n) \neq (2, 2)$. Nech $A, B \subset \mathbb{N}^+$, pričom $|A| = m - 1$, $|B| = n - 1$. Nech $S_A = \sum_{k=1}^{m-1} A_k$, $S_B = \sum_{k=1}^{n-1} B_k$, $T_A = \sum_{k=1}^{m-1} A_k^2$, $T_B = \sum_{k=1}^{n-1} B_k^2$ a platí:
1. $A \cap B = \emptyset$
2. $S_A < S_B$
3. $(S_A - S_B)^2 < T_B - T_A$
4. $\frac{\frac{T_B - T_A}{S_B - S_A} \pm (S_B - S_A)}{2} \notin A \cup B$

Nech $C = \{A'_1, ..., A'_m, B'_1, ..., B'_n\}$ je množina čísel definovaná takto:
$A'_k = A_k(S_B - S_A)$ pre $k \in \{1, ..., m-1\}$
$A'_m = \frac{T_B - T_A + (S_A - S_B)^2}{2}$
$B'_k = B_k(S_B - S_A)$ pre $k \in \{1, ..., n-1\}$
$B'_n = \frac{T_B - T_A - (S_A - S_B)^2}{2}$

Potom $C$ obsahuje navzájom rôzne kladné celé čísla a platí
(i) $\sum_{k=1}^{m} A'_k = \sum_{k=1}^{n} B'_k$
(ii) $\sum_{k=1}^{m} (A'_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (B'_k)^2$

**Dôkaz**: Výpočtom.

**Dôsledok 1.5**: Nech $m, n \in \mathbb{N}^+$, pričom $m, n \geq 2$ a $(m, n) \neq (2, 2)$. Nech vieme zostrojiť množinu $C$ z vety 1.5. Potom $K_{m,n}$ je vrcholovo bimagický.

**Dôkaz**: Vrcholom v jednej partícii priradím hodnoty $A'_1$ až $A'_m$ a druhej $B'_1$ až $B'_n$. Magické súčty sú iba $\sum_{k=1}^{m} A'_k$ a $\sum_{k=1}^{n} B'_k$, podľa vety 1.5 sú rovnaké. Bimagické súčty sú iba $\sum_{k=1}^{m} (A'_k)^2$ a $\sum_{k=1}^{n} (B'_k)^2$, podľa vety 1.5 sú tiež rovnaké. Podmienky z vety zároveň zaručia, že vrcholom budú priradené navzájom rôzne kladné celé čísla.

**Poznámka 1.5**: Jedno z riešení je $K_{2,3}$, pričom $A'_1 = 4$, $A'_2 = 5$, $B'_1 = 2$, $B'_2 = 6$, $B'_3 = 1$. Toto riešenie vzniklo algoritmickým použitím vety 1.5 na množiny $A = \{2\}$ a $B = \{1, 3\}$. Je veľký predpoklad, že takéto množiny sa dajú zostrojiť pre všetky prípustné $m, n$, ale zatiaľ sa mi to nepodarilo dokázať.

**Veta 1.6**: Jediný kubický graf, ktorý je vrcholovo bimagický, je $K_{3,3}$.

**Dôkaz**: Nech $G$ je kubický graf, o ktorom vieme, že je vrcholovo bimagický. V grafe $G$ určite existujú dva susedné vrcholy $u, v$. Nech $w_1, w_2$ sú zvyšní susedia $u$. Nech $w_3, w_4$ sú zvyšní susedia $v$. Vrcholy $u, v$ sú susedné a majú stupeň 3. Rozoberieme všetky možnosti:

1. Nech sú $w_1, w_2, w_3, w_4$ navzájom rôzne. Vrcholy $w_1$ a $v$ majú spoločného suseda $u$, takže z vety 1.3 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať

všetkých susedov spoločných. Susedné byť nemôžu, pretože potom by mal $v$ stupeň aspoň 4. Teda v $G$ musí existovať hrana $w_1w_3$ aj hrana $w_1w_4$.

Zároveň, vrcholy $w_2$ a $v$ majú tiež spoločného suseda $u$, takže z vety 1.3 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Susedné byť nemôžu, pretože potom by mal $v$ stupeň aspoň 4. Teda v $G$ musí existovať hrana $w_2w_3$ aj hrana $w_2w_4$.

Tým sme dostali graf $K_{3,3}$, ktorý vieme vrcholovo bimagicky ohodnotiť napríklad tak, že jednej partícií priradím hodnoty $1, 5, 6$ a druhej $2, 3, 7$. (Vieme použiť aj vetu 1.5 pre $m = n = 3$)

2. Nech $w_1 = w_3$ a $w_2 \neq w_4$. Vrcholy $w_1$ a $w_2$ majú spoločného suseda $u$, takže z vety 1.3 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Teda v $G$ musí existovať hrana $w_1w_2$ alebo hrana $w_2v$.

Zároveň, vrcholy $w_1$ a $w_4$ majú spoločného suseda $v$, takže z vety 1.3 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Teda v $G$ musí existovať hrana $w_1w_4$ alebo hrana $w_4u$.

Lenže ak z každých dvoch potenciálnych hrán pridáme do $G$ aspoň jednu, tak jeden z vrcholov $u, v, w_1$ bude mať stupeň aspoň 4, čo je spor s tým, že graf je kubický.

3. Nech $w_1 = w_3$ a $w_2 = w_4$. Vrcholy $w_1$ a $w_2$ majú spoločných susedov $u, v$, takže z vety 1.3 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Teda v $G$ musí existovať hrana $w_1w_2$ alebo dvojice hrán $w_1w_5$ a $w_2w_5$ pre nejaký nový vrchol $w_5$.

Ak je v $G$ hrana $w_1w_2$, dostaneme graf $K_4$. O ňom sa môžeme ľahko presvedčiť, že nie je vrcholovo bimagický. Ak priradíme vrcholom hodnoty $a, b, c, d$, tak musí platiť, že magické súčty $a+b+c, a+b+d, a+c+d, b+c+d$ sú rovnaké. To je možné len v prípade, že $a = b = c = d$, čo je spor s tým, že vrcholom sú priradené navzájom rôzne čísla.

Ak sú v $G$ hrany $w_1w_5$ aj $w_2w_5$ pre nejaký nový vrchol $w_5$, tiež dôjdeme k sporu. Vrcholy $u$ a $w_5$ majú spoločných susedov $w_1, w_2$, takže z vety 1.3 vyplýva, že sú buď susedné, alebo musia mať všetkých susedov spoločných. Susedné byť nemôžu, pretože potom by mal $u$ stupeň aspoň 4. Teda by v $G$ musela existovať hrana $vw_5$, čo tiež nie je možné, pretože potom by mal $v$ stupeň aspoň 4.

**Veta 1.7**: Nech $G$ je vrcholovo bimagický regulárny graf. Potom existuje vrcholovo bimagické ohodnotenie grafu $G$ také, že jeho najmenšia hodnota je 1.

**Dôkaz**: Zoberme si ľubovoľné vrcholovo bimagické ohodnotenie grafu $G$. Nech $n$ je najmenšia hodnota z nich. Keďže je regulárny, tak každý magický aj bimagický súčet je zložený z rovnakého počtu členov. Z posunovej lemy potom vyplýva, že ku všetkým ohodnoteniam vrcholov môžeme pripočítať alebo odpočítať nejakú konštantu $x$. Ak odpočítame $a-1$, zjavne dostaneme graf, ktorého najmenšia hodnota je 1.

**Definícia 1.8**: Nech $G$ je vrcholovo bimagický graf s $n$ vrcholmi. Ak sú vrcholom priradené čísla z množiny $\{1, 2, ..., n\}$, tak $G$ nazveme **perfektne vrcholovo bimagickým grafom**.

Existuje perfektne vrchovo bimagický graf? Keďže zatiaľ vieme vrchovo bimagicky ohodnotiť len kompletné bipartitné grafy, musíme skúmať tie.

**Veta 1.9**: Neexistuje perfektne vrcholovo bimagický kompletný bipartitný graf s $n$ vrcholmi ak $n = 4k+1$ alebo $n = 4k+2, k \in \mathbb{N}$.

**Dôkaz**: Sporom. Predpokladajme, že taký graf existuje. Potom sa množina $\{1, 2, ..., n\}$ dá rozdeliť na dve disjunktné podmnožiny s rovnakým súčtom aj súčtom druhých mocnín. Súčet tejto množiny je $\frac{n(n+1)}{2}$. Každá podmnožina by teda musela mať súčet $\frac{n(n+1)}{4}$. Lenže ak $n = 4k+1$ alebo $n = 4k+2, k \in \mathbb{N}$, tak výraz $\frac{n(n+1)}{4}$ nie je celé číslo, čo je spor.

Hrubou silou je dokázané, že existuje perfektne vrcholovo bimagický kompletný bipartitný graf. Pre $n \in \{7, 8, 11, 12\}$ existuje práve jedno perfektné ohodnotenie:
$n = 7 \rightarrow \{1, 2, 4, 7\} \mid \{3, 5, 6\}$
$n = 8 \rightarrow \{1, 4, 6, 7\} \mid \{2, 3, 5\}$
$n = 11 \rightarrow \{1, 3, 4, 5, 9, 11\} \mid \{2, 6, 7, 8, 10\}$
$n = 12 \rightarrow \{1, 3, 7, 8, 9, 11\} \mid \{2, 4, 5, 6, 10, 12\}$

Pre $n = 15$ existuje 7 perfektných ohodnotení, pre $n = 16$ existuje 12 perfektných ohodnotení a pre väčšie $n$ tieto hodnoty rastú.

**Hypotézy 1**:
- Existuje graf, ktorý je vrcholovo bimagický a nie je kompletný bipartitný?
- Platí pre všetky $n$ v tvare $4k$ alebo $4k - 1, k \in \mathbb{N}^+, k \geq 2$, že existuje perfektný vrcholovo bimagický kompletný bipartitný graf, ktorý ma dokopy $n$ vrcholov?

**Definícia 2**: Nech $G$ je súvislý jednoduchý netriviálny graf. Ak existuje hranové ohodnotenie grafu $G$ také, že platí:
1. hranám sú priradené navzájom rôzne kladné celé čísla
2. súčet incidentných hrán každého vrcholu je rovnaký
3. súčet druhých mocnín incidentných hrán každého vrcholu je rovnaký
tak $G$ nazveme **hranovo bimagickým grafom**.

Jeden z hranovo bimagických grafov je cesta na dvoch vrcholoch (s ľubovoľným kladným ohodnotením). Zaujímavá skupina potenciálne hranovo bimagických grafov je $K_{n,n}$: sú ekvivalentné semibimagickým štvorcom veľkosti $n \times n$. A keďže už poznáme semibimagické štvorce veľkosti $4 \times 4$ a väčšie, tak $K_{n,n}$ je hranovo bimagický pre $n \geq 4$.

**Veta 2.1**: Nech $G$ je hranovo bimagický graf, ktorý má aspoň tri vrcholy. Potom $G$ neobsahuje vrchol stupňa 1.

**Dôkaz**: Sporom. Nech $u$ je vrchol stupňa 1, $v$ je jeho jediný sused a $x$ je hodnota hrany medzi vrcholmi $u, v$. Potom podľa $u$ musí platiť, že magický súčet je $x$. Lenže ak je $G$ súvislý a má aspoň tri vrcholy, tak vrchol $v$ musí mať ešte ďalší susedný vrchol $w$. Nech $y$ je hodnota hrany medzi vrcholmi $v, w$. Potom však podľa $v$ musí platiť, že magický súčet je aspoň $x + y > x$, čo je spor.

**Veta 2.2**: Nech $G$ je hranovo bimagický graf. Potom $G$ neobsahuje vrchol stupňa 2.

**Dôkaz**: Sporom. Nech $u$ je vrchol stupňa 2. Označme jeho susedov $v, w$. Nech $b, c$ sú ohodnotenia hrán medzi $u, v$, resp. $u, w$. Nech $a_1, a_2, ..., a_n$ sú ohodnotenia hrán, ktoré sú incidentné s $w$ okrem hrany $uw$. Podľa $u$ musí platiť, že magický súčet je $b + c$ a bimagický súčet je $b^2 + c^2$. Podľa $w$ musí platiť, že magický súčet je $c + \sum_{k=1}^{n} a_n$ a bimagický súčet je $c^2 + \sum_{k=1}^{n} a_n^2$. Z toho vyplýva, že by sústava z mocninovej lemy mala riešenie, čo je spor.

**Dôsledok 2.2**: Ak má hranovo bimagický graf aspoň tri vrcholy, tak všetky jeho vrcholy majú stupeň aspoň 3.

**Veta 2.3**: Nech $G$ je hranovo bimagický graf, ktorý má aspoň tri vrcholy. Nech $u, v$ sú ľubovoľné dva susedné vrcholy. Potom $max\{d(u), d(v)\} \geq 4$.

**Dôkaz**: Sporom. Predpokladajme, že existuje dvojica susedných vrcholov $u, v$ takých, že $max\{d(u), d(v)\} < 4$. Z dôsledku 2.2 potom vyplýva, že nutne $d(u) = d(v) = 3$. Označme $x$ hodnotenie hrany medzi $u, v$. Označme $y_1, y_2$ zvyšné hodnotenia hrán z $u$ a $z_1, z_2$ zvyšné hodnotenia hrán z $v$. Podľa $u$ musí platiť, že magický súčet je $x + y_1 + y_2$ a bimagický súčet je $x^2 + y_1^2 + y_2^2$. Podľa $v$ musí platiť, že magický súčet je $x + z_1 + z_2$ a bimagický súčet je $x^2 + z_1^2 + z_2^2$. Teda musí platiť $y_1 + y_2 = z_1 + z_2$ aj $y_1^2 + y_2^2 = z_1^2 + z_2^2$. Z duplikačnej lemy potom vyplýva, že $z_1 = y_1$ alebo $z_1 = y_2$, čo je spor s tým, že hranám budú priradené navzájom rôzne čísla.

**Dôsledok 2.3**: Kubické grafy nie sú hranovo bimagické.

**Veta 2.4**: Nech $G$ je hranovo bimagický regulárny graf. Potom existuje hranovo bimagické ohodnotenie grafu $G$ také, že jeho najmenšia hodnota je 1.

**Dôkaz**: Podobný ako dôkaz vety 1.7, akurát konštantu neodpočítame od ohodnotení vrcholov, ale od ohodnotení hrán.

**Veta 2.5**: Existuje graf, ktorý je hranovo bimagický a nie je kompletný bipartitný.

**Dôkaz**: Nech $G$ je hranovo bimagický kompletný bipartitný regulárny graf s nejakým ohodnotením. Nech $e$ je hrana, ktorá má najmenšiu hodnotu. Keďže je regulárny, tak podľa posunovej lemy môžeme od všetkých hrán odrátať hodnotu hrany $e$. Tým dostaneme hranovo bimagický kompletný bipartitný graf, ktorý má práve jednu nulovú hranu $e$. Zjavne vieme túto hranu z grafu odstrániť a magická aj bimagická podmienka ostane zachovaná. Graf $G - e$ je teda hranovo bimagický a pritom nie je kompletný bipartitný.

**Definícia 2.6**: Nech $G$ je hranovo bimagický graf s $n$ vrcholmi. Ak sú hranám priradené čísla z množiny $\{1, 2, ..., n\}$, tak $G$ nazveme **perfektne hranovo bimagickým grafom**.

Georges Pfeffermann našiel v 19. storočí bimagický štvorec veľkosti $8 \times 8$, v ktorom použil všetky čísla z množiny $\{1, 2, ..., 64\}$. Vieme teda, že existuje perfektne hranovo bimagický graf - je ním kompletný bipartitný graf na 8 vrcholoch.

**Hypotézy 2**:
- Existuje graf, ktorý je hranovo bimagický a nie je kompletný bipartitný alebo kompletný bipartitný bez jednej hrany?