ČASŤ 1: MAGICKÉ ŠTVORCE A ŠTVORCE

Definícia 1.1: Maticu veľkosti 3x3

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix}$$

nazývame **magickým štvorcom**, ak obsahuje navzájom rôzne kladné celé čísla a zároveň majú výrazy

$$A+B+C, D+E+F, G+H+I, A+D+G, B+E+H, C+F+I, A+E+I, C+E+G$$

rovnakú hodnotu rovnú S. Hodnotu S nazývame **súčet magického štvorca**.

Veta 1.2: Pre každý magický štvorec platí $S = 3E$.

Dôkaz: Vyplýva priamo zo vzťahu $3S = (A+E+I)+(B+E+H)+(C+E+G) = (A+B+C)+(G+H+I)+3E = 2S+3E$.

Dôsledok 1.2: Pre každý magický štvorec platí $A+I = B+H = C+G = D+F = 2E$.

Veta 1.3: Pre každý magický štvorec platí

(i) $2A = F+H$
(ii) $2C = D+H$
(iii) $2G = B+F$
(iv) $2I = B+D$

Dôkaz: Dokážeme iba (i), postup dôkazu pri (ii), (iii) a (iv) je analogický.

Platí $C+F+I = G+H+I = 3E$ a zároveň $A+I = C+G = 2E$. Z prvého vzťahu postupne vyjadríme $C = 3E-F-I$ a $G = 3E-H-I$. Z druhého vzťahu najprv vyjadríme $A = 2E-I$. Dosadím do rovnice $C+G = 2E$ dostaneme

$$3E-F-I+3E-H-I = 2E$$

čo po úprave vyjde

$$2(2E-I) = F+H$$

Keďže $A = 2E-I$, platí aj $2A = F+H$ (čo bolo treba dokázať).

Definícia 1.4: Celé číslo n sa nazýva **štvorec** ak sa dá napísať v tvare $n = k^2$, kde k je celé číslo.

ČASŤ 2: ALGEBRAICKÉ IDENTITY

Lema 2.1: Celé čísla A, B sa dajú zapísať ako $x + y, x - y$ (kde x, y sú tiež celé čísla) práve vtedy, keď sú čísla A, B obe párne alebo obe nepárne.

Dôkaz: Sústava rovníc

$$A = x + y$$

$$B = x - y$$

má riešenie $x = \frac{A+B}{2}, y = \frac{A-B}{2}$. Ak sú čísla A, B obe párne alebo obe nepárne, tak ich súčet aj rozdiel je deliteľný dvomi, teda x, y sú celé čísla. Ak je číslo A párne a číslo B nepárne (opačný prípad je analogický), ich súčet aj rozdiel je nepárny, teda x, y nemôžu byť celé čísla.

Lema 2.2: Nech n je štvorec. Potom

(i) Ak n je párne, tak n je deliteľné 4.
(ii) Ak n je nepárne, tak n dáva po delení 4 zvyšok 1.

Dôkaz: Ak n je štvorec, tak sa z definície dá napísať ako k^2, kde k je celé číslo.

(i) Ak n je párne, tak aj k je párne. To znamená, že existuje celé číslo l také, že $k = 2l$. Tým dostávame $n = k^2 = 4l^2$, takže n je deliteľné 4.
(ii) Ak n je nepárne, tak aj k je nepárne. To znamená, že existuje celé číslo l také, že $k = 2l - 1$. Tým dostávame $n = k^2 = 4l^2 - 4l + 1$, takže n dáva po delení 4 zvyšok 1.

Veta 2.3: Množina všetkých celočíselných riešení rovnice $A^2 + B^2 + C^2 = D^2 + E^2 + F^2$ je daná parametricky:

$$A = a + b \qquad C = e + f \qquad E = c - d$$

$$B = c + d \qquad D = a - b \qquad F = e - f$$

kde a, b, c, d, e, f sú celé čísla, pre ktoré platí vzťah $ab + cd + ef = 0$.

Dôkaz: Je zrejmé, že daná parametrizácia vygeneruje vždy správne riešenie – dosadením dostaneme

$$(a + b)^2 + (c + d)^2 + (e + f)^2 = (a - b)^2 + (c - d)^2 + (e - f)^2$$

z čoho automaticky vyplýva $ab + cd + ef = 0$.

Ukážeme aj to, že každé riešenie sa dá takto parametricky vyjadriť. Vidíme, že členy na ľavej a pravej strane rovnice vieme popárovať do dvojíc $x + y, x - y$, kde x, y sú celé čísla. Podľa Lemy 2.1 je to možné práve vtedy, keď sú oba členy párne alebo nepárne.

Stačí preto dokázať, že v danej rovnici musí byť na ľavej aj pravej strane rovnaký počet párnych (a teda aj nepárnych) členov. Postupujme sporom. Predpokladajme, že počet párnych členov a nepárnych členov na jednej strane rovnice je iný ako na druhej strane. Máme dve možnosti:

- Na jednej strane rovnice sú len nepárne členy a na druhej strane sú dva párne a jeden nepárny. Potom však z Lemy 2.2 vyplýva, že jedna strana rovnice dáva po delení 4 zvyšok 3, zatiaľ čo druhá strana dáva po delení 4 zvyšok 1, čo je spor.
- Na jednej strane rovnice sú len párne členy a na druhej strane sú dva nepárne a jeden párny. Potom však z Lemy 2.2 vyplýva, že jedna strana rovnice je deliteľná 4, zatiaľ čo druhá strana dáva po delení 4 zvyšok 2, čo je spor.

Veta 2.4: Množina všetkých celočíselných riešení rovnice $A^2 + B^2 + C^2 = 3D^2$ je daná parametricky:

$$A = 2x - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x + y + z} \qquad C = 2z - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x + y + z}$$

$$B = 2y - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x + y + z} \qquad D = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x + y + z}$$

kde x, y, z sú celé čísla, pre ktoré platí $x + y + z \neq 0$ a zároveň hodnota $\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}$ je celé číslo.

Dôkaz: Použitím vety 2.3 na rovnicu $A^2 + B^2 + C^2 = D^2 + D^2 + D^2$ dostaneme parametrizáciu:

$$A = a + b$$

$$B = c + d$$

$$C = e + f$$

$$D = a - b = c - d = e - f$$

Z posledného vzťahu vyjadríme $d = -a + b + c,\ f = -a + b + e$. Keďže z vety 2.3 musí platiť aj vzťah $ab + cd + ef = 0$, dostaneme:

$$ab + c(-a + b + c) + e(-a + b + e) = 0$$

$$b(a + c + e) - ac + c^2 - ae + e^2 = 0$$

$$\to b = \frac{ac - c^2 + ae - e^2}{a + c + e} = \frac{a^2 + ac + ae}{a + c + e} + \frac{-a^2 - c^2 - e^2}{a + c + e} = a - \frac{a^2 + c^2 + e^2}{a + c + e}$$

Premennú b môžeme takto vyjadriť len za podmienky $a + c + e \neq 0$ a zlomok $\frac{a^2+c^2+e^2}{a+c+e}$ musí byť celé číslo - k tomu sa vrátime na konci dôkazu. Z toho zároveň vyplýva, že:

$$d = -a + b + c = -a + a - \frac{a^2 + c^2 + e^2}{a + c + e} + c = c - \frac{a^2 + c^2 + e^2}{a + c + e}$$

$$f = -a + b + e = -a + a - \frac{a^2 + c^2 + e^2}{a + c + e} + e = e - \frac{a^2 + c^2 + e^2}{a + c + e}$$

Dosadíme do pôvodných premenných A, B, C, D:

$$A = a + b = 2a - \frac{a^2 + c^2 + e^2}{a + c + e} \qquad C = e + f = 2e - \frac{a^2 + c^2 + e^2}{a + c + e}$$

$$B = c + d = 2c - \frac{a^2 + c^2 + e^2}{a + c + e} \qquad D = a - b = \frac{a^2 + c^2 + e^2}{a + c + e}$$

Substitúciou $x = a, y = c, z = e$ dostaneme hľadaný vzťah. Skontrolujeme ešte podmienky pri vyjadrení b.

- Podmienka $a + c + e \neq 0$ je ekvivalentná s $x + y + z \neq 0$ - to platí zo zadania.
- $\frac{a^2+c^2+e^2}{a+c+e}$ je celé číslo je ekvivalentné s tým, že $\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}$ je celé číslo - to tiež platí zo zadania.

<u>Veta 2.5</u>: Množina všetkých celočíselných riešení rovnice $A^2 + B^2 = C^2 + D^2$ je daná parametricky:

$$A = pr + qs \qquad C = ps + qr$$

$$B = qr - ps \qquad D = pr - qs$$

kde $p, q, r, s \in Z$.

<u>Veta 2.6</u>: Množina všetkých celočíselných riešení rovnice $A^2 + B^2 = 2C^2$ je daná parametricky:

$$A = w(u^2 + 2uv - v^2)$$

$$B = w(-u^2 + 2uv + v^2)$$

$$C = w(u^2 + v^2)$$

kde $u, v, w \in Z$.

<u>Dôkaz</u>: Použitím vety 2.5 na rovnicu $A^2 + B^2 = C^2 + C^2$ dostaneme parametrizáciu:

$$A = pr + qs$$

$$B = qr - ps$$

$$C = ps + qr = pr - qs$$

Z posledného vzťahu vyjadríme $s = r\frac{p-q}{p+q}$. To dosadíme za A, B, C:

$$A = pr + qs = pr + qr\frac{p-q}{p+q} = \frac{p^2r + pqr + pqr - q^2r}{p+q} = \frac{r}{p+q}(p^2 + 2pq - q^2)$$

$$B = qr - ps = qr - pr\frac{p-q}{p+q} = \frac{pqr + q^2r - p^2r + pqr}{p+q} = \frac{r}{p+q}(-p^2 + 2pq + q^2)$$

$$C = ps + qr = pr\frac{p-q}{p+q} + qr = \frac{p^2r - pqr + pqr + q^2r}{p+q} = \frac{r}{p+q}(p^2 + q^2)$$

Výraz $w = \frac{r}{p+q}$ môžeme beztrestne považovať ako násobok nejakého riešenia (vieme ho regulovať premennou r). Ak vo zvyšku použijeme substitúciu $u = p, v = q$, dostaneme hľadaný výraz.

Veta 2.7: Množina všetkých celočíselných riešení rovnice $A^2 + B^2 = C(A + B)$ je daná parametricky:

$$A \in \{ki(i + j), k\,j(j - i)\}$$

$$B \in \{kj(i + j), k\,i(i - j)\}$$

$$C = k(i^2 + j^2)$$

kde $i, j, k \in Z$.

Dôkaz: Rovnicu $A^2 - CA + B^2 - CB = 0$ riešime ako kvadratickú s premennou A:

$$A = \frac{C \pm \sqrt{C^2 + 4CB - 4B^2}}{2}$$

Keďže $A, B, C \in Z$, aj $\sqrt{C^2 + 4CB - 4B^2} \in Z$. Preto nutne $C^2 + 4CB - 4B^2 = D^2$ pre nejaké $D \in Z$. To znamená, že:

$$A = \frac{C \pm D}{2}$$

Rovnicu $4B^2 - 4CB - C^2 + D^2 = 0$ riešime ako kvadratickú s premennou B:

$$B = \frac{4C \pm \sqrt{16C^2 + 16C^2 - 16D^2}}{8} = \frac{C \pm \sqrt{2C^2 - D^2}}{2}$$

Keďže $B, C \in Z$, aj $\sqrt{2C^2 - D^2} \in Z$. Preto nutne $2C^2 - D^2 = E^2$ pre nejaké $E \in Z$. To znamená, že

$$B = \frac{C \pm E}{2}$$

Dostali sme sa k rovnici $D^2 + E^2 = 2C^2$, ktorá má podľa vety 2.2 parametrizáciu:

$$D = w(u^2 + 2uv - v^2)$$

$$E = w(-u^2 + 2uv + v^2)$$

$$C = w(u^2 + v^2)$$

Podľa toho platí:

$$A = \frac{C \pm D}{2} = w\frac{u^2 + v^2 \pm (u^2 + 2uv - v^2)}{2} \to A_1 = wu(u + v),\ A_2 = wv(v - u)$$

$$B = \frac{C \pm E}{2} = w\frac{u^2 + v^2 \pm (-u^2 + 2uv + v^2)}{2} \to B_1 = wv(u + v),\ B_2 = wu(u - v)$$

To znamená, že:

$$A \in \{wu(u + v), wv(v - u)\}$$

$$B \in \{wv(u + v), wu(u - v)\}$$

Substitúciou $i = u, j = v, k = w$ dostaneme hľadaný vzťah.

ČASŤ 3: CIEĽ ROČNÍKOVÉHO PROJEKTU

Hypotéza 7: Jediný magický štvorec, pre ktorý platí, že 7 z jeho 9 prvkov sú štvorce, je

$$\begin{pmatrix} 373^2 & 289^2 & 565^2 \\ 360721 & 425^2 & 23^2 \\ 205^2 & 527^2 & 221121 \end{pmatrix}$$

a všetky jeho rotácie, symetrie, alebo k^2 násobky.

Hypotéza 8: Neexistuje magický štvorec, pre ktorý platí, že 8 z jeho 9 prvkov sú štvorce.

Hypotéza 9: Neexistuje magický štvorec, pre ktorý platí, že každý jeho prvok je štvorec.

Našou úlohou bude vytvoriť kolekciu algoritmov, ktoré budú efektívne preverovať hypotézu 7. Použijeme na to jazyk Python,

ČASŤ 4: VETY PRE HYPOTÉZU 7

Veta 4.1: Ak existuje magický štvorec v tvare

$$\begin{pmatrix} - & B^2 & C^2 \\ D^2 & - & F^2 \\ G^2 & H^2 & - \end{pmatrix}$$

tak musia existovať $p, q, r, s, u_1, v_1, u_2, v_2 \in Z$ také, že:

$$u_1v_1(u_1+v_1)(u_1-v_1) = u_2v_2(u_2+v_2)(u_2-v_2)$$

$$s = r\frac{{u_2}^2 - {v_2}^2}{2u_1v_1}$$

$$q = \frac{2u_1v_1}{r}$$

$$p = \frac{2u_2v_2}{r}$$

Dôkaz: Z definície magického štvorca a vety 1.3 musia platiť nasledovné vzťahy:

(i) $B^2 + H^2 = D^2 + F^2$
(ii) $D^2 + H^2 = 2C^2$
(iii) $B^2 + F^2 = 2G^2$

Aplikovaním vety 2.5 na (i) a vety 2.6 na (ii) a (iii) dostaneme:

$$B = pr + qs = {u_2}^2 + 2u_2v_2 - {v_2}^2 \qquad F = pr - qs = -{u_2}^2 + 2u_2v_2 + {v_2}^2$$

$$C = {u_1}^2 + {v_1}^2 \qquad G = {u_2}^2 + {v_2}^2$$

$$D = ps + qr = {u_1}^2 + 2u_1v_1 - {v_1}^2 \qquad H = qr - ps = -{u_1}^2 + 2u_1v_1 + {v_1}^2$$

Sčítaním vzťahov pre B, F dostaneme $pr = 2u_2v_2$, ich odčítaním zase $qs = {u_2}^2 - {v_2}^2$.

Sčítaním vzťahov pre D, H dostaneme $qr = 2u_1v_1$, ich odčítaním zase $ps = {u_1}^2 - {v_1}^2$.

Zo vzťahu $pr = 2u_2v_2$ vyjadríme $p = \frac{2u_2v_2}{r}$ a zo vzťahu $qr = 2u_1v_1$ vyjadríme $q = \frac{2u_1v_1}{r}$.

Dosadením do vzťahu $qs = {u_2}^2 - {v_2}^2$ dostaneme $\frac{2u_1v_1}{r}s = {u_2}^2 - {v_2}^2$, z čoho $s = r\frac{{u_2}^2 - {v_2}^2}{2u_1v_1}$.

Dosadením do posledného vzťahu $ps = {u_1}^2 - {v_1}^2$ dostaneme:

$$\frac{2u_2v_2}{r} r \frac{{u_2}^2 - {v_2}^2}{2u_1v_1} = {u_1}^2 - {v_1}^2$$

z čoho vieme odvodiť $u_1v_1({u_1}^2 - {v_1}^2) = u_2v_2({u_2}^2 - {v_2}^2)$. To je ekvivalentné s

$$u_1v_1(u_1+v_1)(u_1-v_1) = u_2v_2(u_2+v_2)(u_2-v_2)$$

Veta 4.2: Ak existuje magický štvorec v tvare

$$\begin{pmatrix} A^2 & B^2 & C^2 \\ - & E^2 & - \\ G^2 & H^2 & I^2 \end{pmatrix}$$

tak musia existovať navzájom rôzne celé čísla $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ a celé číslo K také, že platí:

(i) ani jeden z výrazov $x_1 + y_1 + z_1$, $x_2 + y_2 + z_2$, $x_1 + x_2$, $y_1 + y_2$, $z_1 + z_2$ nie je rovný nule
(ii) $\frac{{x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2}{x_1+y_1+z_1} = \frac{{x_2}^2+{y_2}^2+{z_2}^2}{x_2+y_2+z_2} = \frac{{x_1}^2+{x_2}^2}{x_1+x_2} = \frac{{y_1}^2+{y_2}^2}{y_1+y_2} = \frac{{z_1}^2+{z_2}^2}{z_1+z_2} = K$

__Dôkaz__: Pre daný magický štvorec musí platiť:

$$A^2 + B^2 + C^2 = I^2 + H^2 + G^2 = 3E^2$$

$$A^2 + I^2 = B^2 + H^2 = C^2 + G^2 = 2E^2$$

Na prvú sústavu rovníc dvakrát uplatníme vetu 2.4. Tým dostaneme:

$$A = 2x_1 - \frac{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}{x_1 + y_1 + z_1} \qquad G = 2z_2 - \frac{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}{x_2 + y_2 + z_2}$$

$$B = 2y_1 - \frac{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}{x_1 + y_1 + z_1} \qquad H = 2y_2 - \frac{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}{x_2 + y_2 + z_2}$$

$$C = 2z_1 - \frac{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}{x_1 + y_1 + z_1} \qquad I = 2x_2 - \frac{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}{x_2 + y_2 + z_2}$$

$$E = \frac{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}{x_1 + y_1 + z_1} = \frac{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}{x_2 + y_2 + z_2}$$

Túto parametrizáciu na tri krát dosadíme do druhej sústavy rovníc:

$$A^2 + I^2 = 2E^2$$

$$\left(2x_1 - \frac{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}{x_1 + y_1 + z_1}\right)^2 + \left(2x_2 - \frac{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}{x_2 + y_2 + z_2}\right)^2 = \left(\frac{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}{x_1 + y_1 + z_1}\right)^2 + \left(\frac{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}{x_2 + y_2 + z_2}\right)^2$$

$$4{x_1}^2 - 4x_1\frac{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}{x_1 + y_1 + z_1} + 4{x_2}^2 - 4x_2\frac{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}{x_2 + y_2 + z_2} = 0$$

Keď z parametrizácie E využijeme, že $\frac{{x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2}{x_1+y_1+z_1} = \frac{{x_2}^2+{y_2}^2+{z_2}^2}{x_2+y_2+z_2}$, dostaneme po úprave rovnosť

$$\frac{{x_1}^2 + {x_2}^2}{x_1 + x_2} = \frac{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}{x_1 + y_1 + z_1}$$

Analogickým postupom dostaneme po dosadení do rovníc $B^2 + H^2 = 2E^2$, resp. $C^2 + G^2 = 2E^2$ rovnosti $\frac{{y_1}^2+{y_2}^2}{y_1+y_2} = \frac{{x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2}{x_1+y_1+z_1}$, resp. $\frac{{z_1}^2+{z_2}^2}{z_1+z_2} = \frac{{x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2}{x_1+y_1+z_1}$. Po spojení všetkých troch rovností s parametrizáciou E získame hľadanú rovnosť. Vzhľadom na vetu 2.4 sú jednak menovatele nenulové, jednak musia byť všetky zlomky celé čísla, takže musí existovať celé číslo K také, že

$$\frac{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}{x_1 + y_1 + z_1} = \frac{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}{x_2 + y_2 + z_2} = \frac{{x_1}^2 + {x_2}^2}{x_1 + x_2} = \frac{{y_1}^2 + {y_2}^2}{y_1 + y_2} = \frac{{z_1}^2 + {z_2}^2}{z_1 + z_2} = K$$

Tým je dôkaz ukončený. Nie je však ťažké rozmyslieť si, že existenciu celého čísla K nemusíme overovať. Číslo K bude za každých okolností racionálne a ak každé z čísel $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ vynásobíme konštantou, aj zlomky budú vynásobené konštantou. Tým vieme z racionálneho čísla K ľahko skonštruovať celé.

Veta 4.3: Ak existuje magický štvorec v tvare

$$\begin{pmatrix} A^2 & B^2 & - \\ D^2 & E^2 & F^2 \\ - & H^2 & I^2 \end{pmatrix}$$

tak musia existovať $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3 \in Z$ také, že:

$$2u_1v_1({u_1}^2 - {v_1}^2)({u_2}^2 + {v_2}^2)^2({u_3}^2 + {v_3}^2)^2 - u_2v_2({u_1}^2 + {v_1}^2)^2({u_2}^2 - {v_2}^2)({u_3}^2 + {v_3}^2)^2 + u_3v_3({u_1}^2 + {v_1}^2)^2({u_2}^2 + {v_2}^2)^2({u_3}^2 - {v_3}^2) = 0$$

Dôkaz: Pre daný magický štvorec musí platiť:

$$A^2 + I^2 = H^2 + B^2 = D^2 + F^2 = 2E^2$$

$$A^2 + B^2 = F^2 + I^2$$

Aplikovaním vety 2.6 na prvú sústavu rovníc dostaneme vzťahy:

$$A = w_1(u_1^2 + 2u_1v_1 - v_1^2) \qquad I = w_1(-u_1^2 + 2u_1v_1 + v_1^2)$$

$$H = w_2(u_2^2 + 2u_2v_2 - v_2^2) \qquad B = w_2(-u_2^2 + 2u_2v_2 + v_2^2)$$

$$D = w_3(u_3^2 + 2u_3v_3 - v_3^2) \qquad F = w_3(-u_3^2 + 2u_3v_3 + v_3^2)$$

$$E = w_1({u_1}^2 + {v_1}^2) = w_2({u_2}^2 + {v_2}^2) = w_3({u_3}^2 + {v_3}^2)$$

Zo vzťahu pre E si vyjadríme $w_2 = \frac{w_1({u_1}^2+{v_1}^2)}{({u_2}^2+{v_2}^2)}$ a $w_3 = \frac{w_1({u_1}^2+{v_1}^2)}{({u_3}^2+{v_3}^2)}$.

Dosadením do druhej rovnice dostaneme:

$$A^2 + B^2 = F^2 + I^2$$

$${w_1}^2(u_1^2 + 2u_1v_1 - v_1^2)^2 + {w_2}^2(-u_2^2 + 2u_2v_2 + v_2^2)^2 = {w_3}^2(-u_3^2 + 2u_3v_3 + v_3^2)^2 + {w_1}^2(-u_1^2 + 2u_1v_1 + v_1^2)^2$$

To vieme ekvivalentnými úpravami upraviť na tvar:

$$2u_1v_1{w_1}^2({u_1}^2 - {v_1}^2) + u_2v_2{w_2}^2({v_2}^2 - {u_2}^2) = u_3v_3{w_3}^2({v_3}^2 - {u_3}^2)$$

Keď v tomto tvare dosadíme $w_2 = \frac{w_1({u_1}^2+{v_1}^2)}{({u_2}^2+{v_2}^2)}$ a $w_3 = \frac{w_1({u_1}^2+{v_1}^2)}{({u_3}^2+{v_3}^2)}$ a potom sa zbavíme menovateľov, dostaneme rovnosť zo zadania.

Veta 4.4: Ak existuje magický štvorec v tvare

$$\begin{pmatrix} A^2 & B^2 & C^2 \\ D^2 & E^2 & F^2 \\ - & H^2 & - \end{pmatrix}$$

tak musia existovať $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4 \in Z$ také, že výrazy

$$(-u_1^2 + 2u_1v_1 + v_1^2)({u_2}^2 + {v_2}^2)(u_3^2 + 2u_3v_3 - v_3^2)(u_4^2 + 2u_4v_4 - v_4^2)$$

$$({u_1}^2 + {v_1}^2)(-u_2^2 + 2u_2v_2 + v_2^2)(-u_3^2 + 2u_3v_3 + v_3^2)(u_4^2 + 2u_4v_4 - v_4^2)$$

$$({u_1}^2 + {v_1}^2)(u_2^2 + 2u_2v_2 - v_2^2)(u_3^2 + 2u_3v_3 - v_3^2)(-u_4^2 + 2u_4v_4 + v_4^2)$$

majú rovnakú hodnotu.

Dôkaz: Pre daný magický štvorec musí platiť:

$$B^2 + H^2 = D^2 + F^2 = 2E^2$$

$$F^2 + H^2 = 2A^2$$

$$D^2 + H^2 = 2C^2$$

Aplikovaním vety 2.6 na všetky sústavy rovníc dostaneme vzťahy:

$$A = w_3({u_3}^2 + {v_3}^2)$$

$$B = w_1(u_1^2 + 2u_1v_1 - v_1^2)$$

$$C = w_3({u_4}^2 + {v_4}^2)$$

$$D = w_2(u_2^2 + 2u_2v_2 - v_2^2) = w_4(u_4^2 + 2u_4v_4 - v_4^2)$$

$$E = w_1({u_1}^2 + {v_1}^2) = w_2({u_2}^2 + {v_2}^2)$$

$$F = w_2(-u_2^2 + 2u_2v_2 + v_2^2) = w_3(u_3^2 + 2u_3v_3 - v_3^2)$$

$$H = w_1(-u_1^2 + 2u_1v_1 + v_1^2) = w_3(-u_3^2 + 2u_3v_3 + v_3^2) = w_4(-u_4^2 + 2u_4v_4 + v_4^2)$$

Zo vzťahov pre E, F, D vyjadríme $w_1 = \frac{w_2({u_2}^2+{v_2}^2)}{({u_1}^2+{v_1}^2)}$, $w_3 = \frac{w_2(-u_2^2+2u_2v_2+v_2^2)}{(u_3^2+2u_3v_3-v_3^2)}$, $w_4 = \frac{w_2(u_2^2+2u_2v_2-v_2^2)}{(u_4^2+2u_4v_4-v_4^2)}$. Po dosadení týchto vyjadrení do vzťahu pre H a ekvivalentných úpravách dostaneme vzťah zo zadania.

Veta 4.5: Magické štvorce v jednom z nasledovných tvarov

$$\begin{pmatrix} A^2 & - & C^2 \\ - & E^2 & - \\ G^2 & - & I^2 \end{pmatrix} \text{ alebo } \begin{pmatrix} - & B^2 & - \\ D^2 & E^2 & F^2 \\ - & H^2 & - \end{pmatrix} \text{ alebo } \begin{pmatrix} A^2 & B^2 & - \\ - & E^2 & - \\ - & H^2 & I^2 \end{pmatrix}$$

vieme parametrizovať tak, že $E = x({u_1}^2 + {v_1}^2)({u_2}^2 + {v_2}^2)$ a zvyšné štyri členy sú v tvare:

$$x({u_1}^2 + {v_1}^2)(u_2^2 + 2u_2v_2 - v_2^2) \qquad x(u_1^2 + 2u_1v_1 - v_1^2)({u_2}^2 + {v_2}^2)$$

$$x({u_1}^2 + {v_1}^2)(-u_2^2 + 2u_2v_2 + v_2^2) \qquad x(-u_1^2 + 2u_1v_1 + v_1^2)({u_2}^2 + {v_2}^2)$$

Dôkaz: Dôkaz urobíme len pre prvý tvar magického štvorca, ostatné tvary sa dokazujú analogicky.

Musí platiť $A^2 + I^2 = C^2 + G^2 = 2E^2$. Použitím vety 2.6 dostaneme vzťahy:

$$A = w_1(u_1^2 + 2u_1v_1 - v_1^2) \qquad G = w_2(-u_2^2 + 2u_2v_2 + v_2^2)$$

$$C = w_2(u_2^2 + 2u_2v_2 - v_2^2) \qquad I = w_1(-u_1^2 + 2u_1v_1 + v_1^2)$$

$$E = w_1({u_1}^2 + {v_1}^2) = w_2({u_2}^2 + {v_2}^2)$$

Zo vzťahu pre E vyjadríme $w_2 = \frac{w_1({u_1}^2+{v_1}^2)}{({u_2}^2+{v_2}^2)}$. Potom zvolíme substitúciu $x = \frac{w_1}{({u_2}^2+{v_2}^2)}$ (môžeme, lebo všetky premenné teraz vieme regulovať pomocou w_1. Tým dostaneme parametrizáciu zo zadania.

5. ALGORITMY NA HYPOTÉZU 7

Algoritmy pre vetu 4.1:

- Nájdeme celé u_1, v_1, u_2, v_2 také, že $u_1 v_1 (u_1 + v_1)(u_1 - v_1) = u_2 v_2 (u_2 + v_2)(u_2 - v_2)$. Potom nájdeme také celé r, aby boli zlomky $r\frac{{u_2}^2 - {v_2}^2}{2u_1 v_1}, \frac{2u_1 v_1}{r}, \frac{2u_2 v_2}{r}$ celé čísla. To urobíme tak, že vypočítame $lcm(2u_1 v_1, 2u_2 v_2)$ a ak je deliteľný výrazom $\frac{2u_1 v_1}{\gcd(2u_1 v_1, {u_2}^2 - {v_2}^2)}$, tak definujeme $r = \frac{2u_1 v_1}{\gcd(2u_1 v_1, {u_2}^2 - {v_2}^2)}$. Z neho vypočítame $s = r\frac{{u_2}^2 - {v_2}^2}{2u_1 v_1}, q = \frac{2u_1 v_1}{r}, p = \frac{2u_2 v_2}{r}$. Potom vypočítame členy potenciálneho magického štvorca:

$$B = (pr + qs)^2$$
$$D = (ps + qr)^2$$
$$F = (pr - qs)^2$$
$$H = (qr - ps)^2$$
$$C = ({u_1}^2 + {v_1}^2)^2$$
$$G = ({u_2}^2 + {v_2}^2)^2$$
$$E = \frac{B + H}{2}$$
$$A = D + E + F - B - C$$
$$I = D + E + F - G - H$$

  Šesť členov sú určite štvorce, ostáva overiť magickosť a to, či nejaké z A, E, I sú štvorce.

Algoritmy pre vetu 4.2:

- Generujeme všetky možné $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ podľa vety 4.1 a overujeme (i) a (ii).
- Generujeme všetky možné i, j, k podľa vety 2.7. Potom $K = k(i^2 + j^2)$. Snažíme sa pre rôzne i, j, k získať rovnaké K, čím získame odlišné A, B, pre ktoré platí $A^2 + B^2 = K(A + B)$. Tieto dvojice (A, B) budú postupne dvojicami $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2)$. Tým máme z vety 4.2 splnených viac rovníc a musíme overovať len podmienku $\frac{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}{x_1 + y_1 + z_1} = \frac{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}{x_2 + y_2 + z_2} = K$.
- Pred generovaním urobíme šikovné pozorovanie. Všimnime si, že ak platí z vety 4.2 $\frac{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}{x_1 + y_1 + z_1} = \frac{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}{x_2 + y_2 + z_2} = \frac{{x_1}^2 + {x_2}^2}{x_1 + x_2} = \frac{{y_1}^2 + {y_2}^2}{y_1 + y_2} = K$, tak platí aj $\frac{{z_1}^2 + {z_2}^2}{z_1 + z_2} = K$ (to nie je ťažké dokázať). Preto generujeme len rôzne dvojice $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ pre dané K. Potom stačí nájsť také z_1, z_2, že platí $\frac{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}{x_1 + y_1 + z_1} = \frac{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}{x_2 + y_2 + z_2} = K$.
- Ešte šikovnejší trik je prepísať si sústavu z vety 4.2 nasledovne:

$$\left(\frac{x_1}{K}\right)^2 - \frac{x_1}{K} + \left(\frac{y_1}{K}\right)^2 - \frac{y_1}{K} + \left(\frac{z_1}{K}\right)^2 - \frac{z_1}{K} = 0$$

$$\left(\frac{x_2}{K}\right)^2 - \frac{x_2}{K} + \left(\frac{y_2}{K}\right)^2 - \frac{y_2}{K} + \left(\frac{z_2}{K}\right)^2 - \frac{z_2}{K} = 0$$

$$\left(\frac{x_1}{K}\right)^2 - \frac{x_1}{K} + \left(\frac{x_2}{K}\right)^2 - \frac{x_2}{K} = 0$$

$$\left(\frac{y_1}{K}\right)^2 - \frac{y_1}{K} + \left(\frac{y_2}{K}\right)^2 - \frac{y_2}{K} = 0$$

  Potom po vhodnej substitúcii riešime sústavu rovníc v obore racionálnych čísel.

Algoritmy pre vetu 4.3: Generujeme všetky možné $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3$ podľa vety 4.3.

Algoritmy pre vetu 4.4: Generujeme všetky možné $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4$ podľa vety 4.4.

Algoritmy pre vetu 4.5: Generujeme všetky možné x, u_1, v_1, u_2, v_2 podľa vety 4.5.

6. PROGRAMOVANIE ALGORITMOV NA HYPOTÉZU 7

V zimnom semestri sme sa zamerali na vetu 4.5. Konkrétne sme generovali všetky magické štvorce, ktoré obsahovali aspoň 5 štvorcov. Využili sme všetky tri konfigurácie z vety 4.5:

$$\begin{pmatrix} A^2 & - & C^2 \\ - & E^2 & - \\ G^2 & - & I^2 \end{pmatrix} \text{alebo} \begin{pmatrix} - & B^2 & - \\ D^2 & E^2 & F^2 \\ - & H^2 & - \end{pmatrix} \text{alebo} \begin{pmatrix} A^2 & B^2 & - \\ - & E^2 & - \\ - & H^2 & I^2 \end{pmatrix}$$

V programe je možné generovať riešenia náhodne alebo hrubou silou. Na konci výpočtu hrubou silou sa objaví graf. Ten popisuje, koľko rôznych magických štvorcov s aspoň šiestimi štvorcami existuje pre dané maximum zo štvorice u_1, v_1, u_2, v_2.

Graf riešení pre $u_1, v_1, u_2, v_2 \leq 70$: