Mydel

Karolina Czebula

22.05.2025

15 a)

$$\sin 2x = \frac{2a-3}{4-a}$$

Rozwiazanie:

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x = \frac{2a-3}{4-a}, \quad -1 \leq \frac{2a-3}{4-a} \leq 1$$

Rozwiazujac nierówności:

$$\frac{3a-7}{4-a} \leq 0, \quad \frac{a+1}{4-a} \geq 0,$$

co daje:

$$a \in [-1, 73].$$

Nastepnie:

$$\sin x \cos x = \frac{2a-3}{2(4-a)},$$

skad można wyznaczyć $\sin x$ i $\cos x$.

15 e)

$$\cos 2x + 3\cos x = a, \quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1,$$

wiec

$$2\cos^2 x + 3\cos x - (1+a) = 0, \quad y = \cos x.$$

Równanie kwadratowe:

$$2y^2 + 3y - (1+a) = 0, \quad \Delta = 9 + 8(1+a) = 8a + 17.$$

Warunek istnienia pierwiastków rzeczywistych:

$$a \geq -\frac{17}{8}.$$

Rozwiazania:

$$y = \frac{-3 \pm \sqrt{8a+17}}{4}.$$

Warunek, że $y = \cos x \in [-1, 1]$ wymusza dodatkowe ograniczenia:

$$\{ -1 \leq \frac{-3 - \sqrt{8a+17}}{4} \leq 1, \; -1 \leq \frac{-3 + \sqrt{8a+17}}{4} \leq 1$$

Po analizie nierówności wychodzi, że:

$$a \in \left[-\frac{17}{8}, 4 \right].$$

Zatem rozwiazania istnieja dokładnie dla a z tego przedziału.

8 e)

$$\sin^4 x + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{4}.$$

Korzystajac z tożsamości:

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x),$$

mamy

$$\sin^4 x + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x) \right)^4 = \frac{1}{4}.$$

Po uproszczeniu i zastosowaniu wzorów redukcyjnych dochodzimy do równania

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} (\cos 2x - \sin 2x) = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos 2x - \sin 2x = 1.$$

Podnoszac do kwadratu:

$$(\cos 2x - \sin 2x)^2 = 1 \Rightarrow 1 - 2 \cos 2x \sin 2x = 1 \Rightarrow \cos 2x \sin 2x = 0,$$

co daje

$$\cos 2x = 0 \quad lub \quad \sin 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, \quad k \in Z.$$

4.12 d)

$$5 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x + 6 \cos^2 x = 5$$

Rozwiazanie: Podstawiamy $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$:
$5(1 - \cos^2 x) + \sqrt{3} \sin x \cos x + 6 \cos^2 x = 5$
$5 - 5 \cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x + 6 \cos^2 x = 5$
$\Rightarrow \cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x = 0$ Dzielac przez $\cos x$ (jeśli $\cos x \neq 0$):

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = 0 \Rightarrow \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

4.7 e)

$$\sqrt{5\sin 2x - 2} = \sin x - \cos x$$

Rozwiazanie:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x \Rightarrow \sqrt{10\sin x\cos x - 2} = \sin x - \cos x$$

Podnoszac obie strony do kwadratu:

$$10\sin x\cos x - 2 = (\sin x - \cos x)^2$$

$$10\sin x\cos x - 2 = \sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x$$

$$10\sin x\cos x - 2 = 1 - 2\sin x\cos x \quad (bo \sin^2 x + \cos^2 x = 1)$$

$$10\sin x\cos x + 2\sin x\cos x = 1 + 2 \Rightarrow 12\sin x\cos x = 3 \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{1}{4}$$

Ostatecznie:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x = 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$$

4.8 i)

$$\frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan x\tan\frac{\pi}{4}} = \sqrt{3}$$

Rozwiazanie:

$$\tan\frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \sqrt{3}$$

Rozwiazujemy równanie wymierne:

$$1 - \tan x = \sqrt{3}(1 + \tan x) \Rightarrow 1 - \tan x = \sqrt{3} + \sqrt{3}\tan x$$

$$(1 - \sqrt{3}) = (\tan x)(\sqrt{3} + 1) \Rightarrow \tan x = \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}$$

Ułamki usuwamy przez podstawienie liczby sprzeżonej:

$$\tan x = \frac{(1 - \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{(1 - \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)}{3 - 1} = \frac{(1 - \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)}{2}$$

$$= \frac{1 \cdot \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1 - 3 + \sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3} - 4}{2} = \sqrt{3} - 2$$

4.17) **Udowodnij:** jeśli $\cos x = \cos y$ i $\sin x = -\sin y$, to dla każdej liczby całkowitej m zachodzi równość $\sin mx + \sin my = 0$.
Rozwiazanie: Zauważmy, że $x = -y + 2k\pi$ (dla pewnego k), wiec $mx = -my + 2mk\pi$, a wiec:

$$\sin(mx) = \sin(-my) = -\sin(my) \Rightarrow \sin(mx) + \sin(my) = 0$$