HIT CS&E

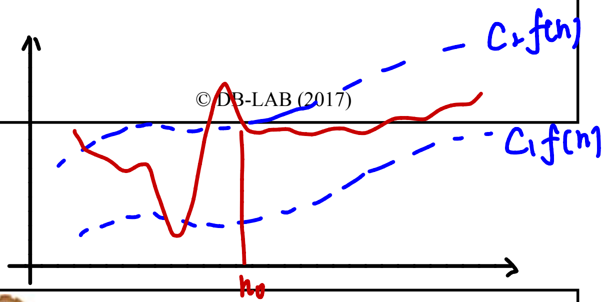
第二章 数学基础

骆吉洲
计算机科学与技术学院

HIT CS&E

提纲

2.1 计算复杂性函数的阶
2.2 递归方程



HIT CS&E

2.1 计算复杂性函数的阶

2.1.1 同阶函数集合 =
2.1.2 低阶函数集合 ≤
2.1.3 高阶函数集合 ≥
2.1.4 严格低阶函数集合 <
2.1.5 严格高阶函数集合 >
2.1.6 函数阶的性质

HIT CS&E

2.1.1 同阶函数集合

定义2.1.1 (同阶函数集合) $\theta(f(n))=\{g(n) \mid \exists c_1, c_2>0, n_0, \forall n>n_0, c_1 f(n) \le g(n) \le c_2 f(n)\}$ 称为与$f(n)$同阶的函数集合。

*如果 $g(n) \in \theta(f(n))$，我们称 $g(n)$ 与 $f(n)$ 同阶。

*$g(n) \in \theta(f(n))$ 常记作 $g(n)=\theta(f(n))$。

*$f(n)$必须是极限非负的，即当 n 充分大以后，$f(n)$是非负的，否则$\theta(f(n))$=空集。 $\lim_{n\to\infty} f(n) \geq 0$

$c_1 n^2 \le an^2+bn+c \le c_2 n^2$ 在$n \geq n_0$之后恒成立.
令 $c_2 = c_{20}+c_{21}+c_{22}$

$\geq 0 \Leftrightarrow c_{20}>0;\ n \geq \sqrt{\left|\frac{c}{c_{20}}\right|}$

$(c_{22}-a)n^2+(c_{21}n^2-bn)+(c_{20}n^2-c) \geq 0$

≥ 0时 $c_{22} \geq a$

$(c_{21}n-b)n \geq 0 \Leftrightarrow c_{21} \geq 0\ n \geq \frac{b}{c_{21}}$

HIT CS&E

Example

取 $c_{22}=a$ $c_{21}=\frac{a}{4}$ $c_{20}=\frac{a}{2}$,有 $c_2=\frac{7a}{4}$

例 1 证明 $f(n)=an^2+bn+c=\theta(n^2)$

证. 设 $c_1 n^2 \le an^2+bn+c \le c_2 n^2$，令 $c_1=a/4$，$c_2=7a/4$，则

$$\frac{a}{4}n^2 \le an^2+bn+c \le \frac{7}{4}an^2,$$

令 $n_0 = 2\cdot\max\left(|b|/a, \sqrt{|c|/a}\right)$。当 $n>n_0$时 $c_1 n^2 \le an^2+bn+c \le c_2 n^2$成立。

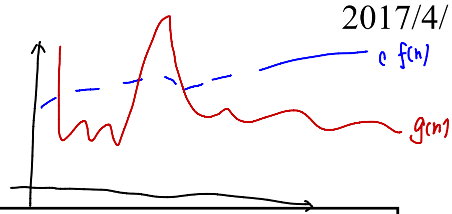
$c_1 n^2 \le 6n^3 \le c_2 n^2$
$\Leftrightarrow$ $c_1 \le 6n \le c_2$ 对 $n \geq n_0$ 显然不恒成立

HIT CS&E

Example

例2 证明 $6n^3 \neq \theta(n^2)$

证. 如果存在c_1、$c_2>0$，n_0使得当$n \ge n_0$时，$c_1 \le 6n^3 \le c_2 n^2$。于是，当$n>c_2/6$时，$n \le c_2/6$，矛盾。



HIT CS&E

Example

例 3 $p(n)=\sum_{i=0}^{d} a_i n^i = \theta(n^d)$

例 4 因任何常数 $c=\theta(n^0)=\theta(1)$，$c_1 \le c \le c_2$，如果令 $c_1=\frac{1}{2}c, c_2=\frac{3}{2}c, n_0=1$ 。

HIT CS&E

2.1.2 低阶函数集合

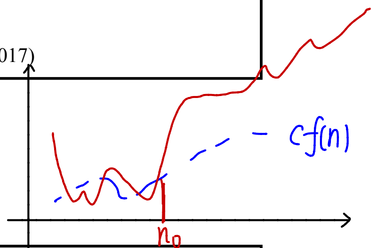
定义 2.1.2(低阶函数集合)．$O(f(n))=\{g(n) \mid \exists c>0, n_0$，当 $n \ge n_0$，$0 \le g(n) \le cf(n)\}$称为比 $f(n)$低阶的函数集合。

*如果 $g(n) \in O(f(n))$，称 $f(n)$是 $g(n)$的上界。

*$g(n) \in O(f(n))$常记作 $g(n)=O(f(n))$。

$f(n) = \theta(g(n)) \Leftrightarrow \exists c_1, c_2 > 0, n_0$ 使 $n \ge n_0$ 后 $c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n)$

$\therefore$ 使 $n \ge n_0$ 后 $0 \le f(n) \le c_2 g(n)$ $\therefore f(n) = O(g(n))$



HIT CS&E

Example

例 1 $\theta(g(n)) = f(n) \Rightarrow f(n) = O(g(n))$

$\theta(g(n)) \subseteq O(g(n))$

例 2 证明 $n=O(n^2)$. → $n \le cn^2$ 在 $c=1$ $n \ge 1$ 后恒成立

证．令 $c=1$, $n_0=1$，则当 $n \ge n_0$ 时，$0 \le n \le cn^2$ 。

HIT CS&E

2.1.3 高阶函数集合

定义 2.1.3(高阶函数集合)．$\Omega(f(n))=\{g(n) \mid \exists c>0, n_0$，当 $n \ge n_0$，$0 \le cf(n) \le g(n)\}$称为比 $f(n)$高阶的函数集合。

*如果 $g(n) \in \Omega(f(n))$，称 $f(n)$是 $g(n)$的下界。

*$g(n) \in \Omega(f(n))$常记作 $g(n)=\Omega(f(n))$。

$\Rightarrow$ $f(n) = \theta(g(n)) \Leftrightarrow \exists c_1, c_2 > 0, n_0$ 使 $n \ge n_0$ 后 $c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n)$

$\therefore n \ge n_0$ 后，有 $0 \le f(n) \le c_2 g(n)$，$0 \le c_1 g(n) \le f(n)$ $\therefore f(n) = O(g(n))$ 且 $f(n) = \Omega(g(n))$

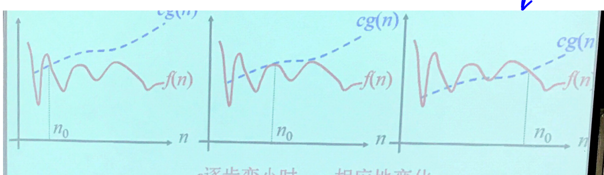
$\Leftarrow$ $\because f(n) = O(g(n))$ $\therefore \exists c_2 > 0$ n_2，使 $n \ge n_2$ 后 $0 \le f(n) \le c_2 g(n)$

$\because f(n) = \Omega(g(n))$ $\therefore \exists c_1 > 0, n_1$，使 $n \ge n_1$ 后 $0 \le c_1 g(n) \le f(n)$

那么取 $n_0 = \max(n_1, n_2)$，有 $c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n)$

即 $f(n) = \theta(g(n))$

C变小时，n_0相应变化



→ 动态变化

HIT CS&E

定理 2.1. 对于任意 f(n)和 g(n)，$f(n)=\theta(g(n))$ iff $f(n)=O(g(n))$ 而且 $f(n)=\Omega(g(n))$.

证．$\Rightarrow$ 如果 $f(n)=\theta(g(n))$，则$\exists c_1, c_2>0, n_0>0$，当 $n \ge n_0$ 时，$c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n)$.

显然 $f(n)=\Omega(g(n))$ and $f(n)=O(g(n))$.

$\Leftarrow$ 如果 $f(n)=O(g(n))$ 且 $f(n)=\Omega(g(n))$，则由 $f(n)=O(g(n))$ 可知，存在$c_1, n_1 \ge 0$，使得，当$n \ge n_1$，$f(n) \le c_1 g(n)$。由 $f(n)=\Omega(g(n))$可知，$\exists c_2, n_2 \ge 0$，使得当$n \ge n_1$，$f(n) \le c_2 g(n)$

令 $n_0 \ge \max\{n_1, n_2\}$，则当 $n \ge n_0$，$c_2 f(n) \le f(n) \le c_1 g(n)$。

定义 2.1.4(严格低阶函数集合)．$o(g(n))=\{f(n) \mid \forall c>0, \exists n_0>0$，$0 \le f(n) < cg(n)$ for all $n \ge n_0\}$称为严格比 $g(n)$低阶的函数集合。

*如果 $f(n) \in o(g(n))$，称 $g(n)$是 $f(n)$的严格上界。

*$f(n) \in o(g(n))$常记作 $f(n)=o(g(n))$。

$\theta(f(n)) + \theta(g(n)) = \theta(f(n) + g(n))$

$\forall h_1(n) = \theta(f(n))$ $h_2(n) = \theta(g(n))$ 往证

$\exists c_1, c_2 > 0, n_1$，使得 $n \ge n_1$ 后 $c_1 f(n) \le h_1(n) \le c_2 f(n)$

$\exists c_3, c_4 > 0, n_2$，使得 $n \ge n_2$ 后 $c_3 g(n) \le h_2(n) \le c_4 g(n)$

$\Rightarrow$ $c_1 f(n) + c_3 g(n) \le h_1(n) + h_2(n) \le c_2 f(n) + c_4 g(n)$

取 $c_6 = \max(c_2, c_4)$ $c_5 = \min(c_1, c_3)$，有

$c_5(f(n) + g(n)) \le h_1(n) + h_2(n) \le c_6(f(n) + g(n))$

对 $n_0 = \max(n_1, n_2)$ 时 $n \ge n_0$ 时成立

$\therefore h_1(n) + h_2(n) = \theta(f(n) + g(n))$

对于严格低阶函数集，有

$$0 \le f(n) \le c\,g(n)$$

$\because f(n), g(n) \geqslant 0 \quad \therefore$ 上式 $\Leftrightarrow \quad 0 \le \dfrac{f(n)}{g(n)} \le C$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \le \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| \le C$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \le \left|\frac{f(n)}{g(n)} - 0\right| \le C$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

$\therefore f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

对于严格高阶函数集，有

对于严格低阶函数集，有 $0 \le f(n) \le c\,g(n)$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \le \frac{1}{c} f(n) \le g(n)$$

$\therefore$ 有 $\quad f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \omega(f(n))$

HIT CS&E

$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n}=0$

例 1．证明 $2n=o(n^2)$

证．对 $\forall c>0$，欲 $2n<cn^2$，必 $2<cn$，即 $\frac{2}{c}<n$。所以，当 $n_0=\frac{2}{c}$ 时，$2n<cn^2$ 对 $\forall c>0$，$n\geq n_0$。

$2n^2=\theta(n^2)$

$\therefore 2n^2=O(n^2)$

而 $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2}{n^2}=2\neq0$ $\therefore 2n^2\neq o(n^2)$

例 2．证明 $2n^2\neq o(n^2)$

证．当 $c=1>0$ 时，对于任何 n_0，当 $n\geq n_0$，$2n^2<cn^2$ 都不成立

对于折半查找：$\log_2 n$

对于线性查找：n

$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log_2 n}{n}=0$

HIT CS&E

命题 2.1．$f(n)=o(g(n))\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=0$

证．由于 $f(n)=o(g(n))$，对任意 $\varepsilon>0$，存在 n_0，当 $n\geq n_0$ 时，$0\leq f(n)<\varepsilon g(n)$，即 $0\leq\frac{f(n)}{g(n)}\leq\varepsilon$．于是，$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=0$．

HIT CS&E

2.1.5 严格高阶函数集合

定义 2.1.4(严格高阶函数集合)．$w(g(n))=\{f(n)|\forall c>0,\exists n_0>0,$ $0\leq cg(n)<f(n)$ for all $n\geq n_0\}$ 称为严格比 $g(n)$ 高阶的函数集合。

命题 2.2．$f(n)\in w(g(n))$ iff $g(n)\in o(f(n))$．

证：

$\Rightarrow$ 对 $\forall c>0$，$1/c>0$．由 $f(n)\in w(g(n))$ 知，对 $1/c>0$，$\exists n_0$，当 $n\geq n_0$ 时，$(1/c)g(n)<f(n)$，即 $g(n)<cf(n)$．于是，$g(n)\in o(f(n))$．

$\Leftarrow$ 对于任意 $c>0$，$1/c>0$．由 $g(n)\in o(f(n))$ 可知，$\exists n_0\geq0$，当 $n>n_0$ 时，$g(n)<(1/c)f(n)$，即 $cg(n)<f(n)$．于是，$f(n)\in w(g(n))$。

$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\frac{n^2}{2}}=0$ $\therefore n=o(n^2/2)$

HIT CS&E

Example

$\because \frac{n^2}{2}=w(n)$

例 1．证明 $n^2/2=w(n)$．

证．对 $\forall c>0$，$cn<n^2/2$，只需 $n>2c$．令 $n_0=2c+1$，则当 $n\geq n_0$，$cn<n^2/2$．

例 2．证明 $n^2/2\neq w(n^2)$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{\frac{n^2}{2}}=2\neq0$ $\because n^2\neq o(n^2/2)$ $\therefore n^2/2\neq w(n^2)$

证．若 $n^2/2=w(n^2)$，则对于 $c=1/2$，存在 n_0，当 $n\geq n_0$ 时，$cn^2<n^2/2$，即 $c<1/2$，矛盾．

HIT CS&E

☆命题 2.3．$f(n)=w(g(n))\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\infty$

证：对 $\forall c>0$，由于 $f(n)=w(g(n))$，必存在 n_0，使得当 $n\geq n_0$ 时，$f(n)>cg(n)$，即当 $n\geq n_0$ 时，$f(n)/g(n)>c$．于是，$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\infty$．

HIT CS&E

2.1.6 函数阶的性质

A 传递性：$\wedge$：而且．

(a) $f(n)=\theta(g(n))\wedge g(n)=\theta(h(n))\Rightarrow f(n)=\theta(h(n))$

(b) $f(n)=O(g(n))\wedge g(n)=O(h(n))\Rightarrow f(n)=O(h(n))$

(c) $f(n)=\Omega(g(n))\wedge g(n)=\Omega(h(n))\Rightarrow f(n)=\Omega(h(n))$

(d) $f(n)=o(g(n))\wedge g(n)=o(h(n))\Rightarrow f(n)=o(h(n))$

(e) $f(n)=w(g(n))\wedge g(n)=w(h(n))\Rightarrow f(n)=w(h(n))$．

HIT CS&E

2.1.6 函数阶的性质(续)

B 自反性：

（a） $f(n)=\theta(f(n))$，

（b） $f(n)=O(f(n))$，

（c） $f(n)=\Omega(f(n))$．

C 对称性

$f(n)=\theta(g(n))$ iff $g(n)=\theta(f(n))$．

D 反对称性：

$f(n)=O(g(n))$ iff $g(n)=\Omega(f(n))$

$f(n)=o(g(n))$ iff $g(n)=w(f(n))$

HIT CS&E

注意

!

* 并非所有函数都是可比的，即对于函数 $f(n)$ 和 $g(n)$，可能 $f(n)\neq O(g(n)), f(n)\neq\Omega(g(n))$．例如，$n$ 和 $n^{1+\sin n}$．

HIT CS&E

2.2 递归方程

• 递归方程：递归方程是使用小的输入值来描述一个函数的方程或不等式.

• 递归方程例：Merge-sort排序算法的复杂性方程

T(n)=θ(1) **if n=1**

T(n)=2T(n/2)+θ(n) **if n>1.**

cn

T(n)的解是θ($n$log$n$)

$= 2^2T(\frac{n}{2^2})+cn+cn$

$= 2^3T(\frac{n}{2^3})+cn+cn+cn$

$= \cdots$

$= 2^kT(\frac{n}{2^k})+k\cdot cn$

$\overset{n=2^k}{=\!=} n\theta(1)+c\cdot n\cdot\log n$

$c=c_2$时 $T_n \le n\theta(1)+c_2 n\cdot\log n$

$c=c_1$时 $T_n \ge n\theta(1)+c_1 n\log n$

$= \theta(n\log n)$

HIT CS&E

求解递归方程的三个主要方法

• 迭代方法：
  – 把方程转化为一个和式
  – 然后用估计和的方法来求解.

• 替换方法：
  – 先猜测方程的解,
  – 然后用数学归纳法证明.

• **Master方法:**
  – 求解型为**T(n)=aT(n/b)+f(n)**的递归方程

$\lfloor \lfloor n/a\rfloor /b\rfloor = \lfloor n/ab\rfloor$

$T(\lfloor\frac{n}{4}\rfloor) = \lfloor\frac{n}{4}\rfloor+3T(\lfloor\lfloor n/4\rfloor/4\rfloor) = \lfloor\frac{n}{4}\rfloor+3T(\lfloor\frac{n}{16}\rfloor)$

HIT CS&E

2.2.1 迭代方法

迭代 方法：

循环地展开递归方程，

把递归方程转化为和式，

然后可使用求和技术解之

例 1. $T(n)=n+3T(\lfloor n/4\rfloor)$

$$= n+3(\lfloor n/4\rfloor+3T(\lfloor n/16\rfloor))$$

$$= n+3(\lfloor n/4\rfloor+3(\lfloor \frac{n}{16}\rfloor+3T(\lfloor n/64\rfloor)))$$

$$= n+3\lfloor n/4\rfloor+9\lfloor \frac{n}{16}\rfloor+27T(\lfloor n/64\rfloor)$$

$$= n+3\lfloor n/4\rfloor+3^2\lfloor \frac{n}{4^2}\rfloor+3^3(\lfloor \frac{n}{4^3}\rfloor)+\ldots\ldots+3^iT(\lfloor n/4^i\rfloor)$$

$\boxed{令\ \frac{n}{4^i}=1\Rightarrow 4^i=n\Rightarrow i=\log_4 n}$

$$= n+3\lfloor n/4\rfloor+3^2\lfloor \frac{n}{4^2}\rfloor+3^3(\lfloor \frac{n}{4^3}\rfloor)+\ldots\ldots+3^{\log_4 n}T(\lfloor 1\rfloor)$$

$$\le \sum_{i=0}^{\log_4 n}3^i\, n/4^i+O(n)\le n\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^i = n\times\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=4n=O(n$$

HIT CS&E

例2. $T(n)=2T(n/2)+cn$

$=2^2T(n/2^2)+cn+cn$

$=2^3T(n/2^3)+cn+cn+cn$

$=\ldots$

$=2^kT(n/2^k)+knc$

$=2^kT(1)+knc$ 令 $n=2^k$

$=nT(1)+cn\log n$

$=\Theta(n\log n)$

HIT CS&E

2.2.2 替换法

方法：

1. 变量代换，将方程转换成已知方程
2. 先根据方程的形式猜测解
   然后用数学归纳法证明

HIT CS&E

变量代换

例1. $T(n)=2T(n/2+17)+n$

令 $n=m+34$，则

$T(m+34)=2T(m/2+34)+m+34$

令 $T(m+34)=S(m)$，则

$S(m)=2S(m/2)+m+34$

$S(m)=\Theta(m\log m)$

$T(n)=\Theta(n\log n)$

HIT CS&E

例2. $T(n)=2T(n^{1/2})+\log n$

令 $n=2^m$，则

$T(2^m)=2T(2^{m/2})+m$

令 $T(2^m)=S(m)$，则

$S(m)=2S(m/2)+m$

$S(m)=\Theta(m\log m)$

$T(n)=\Theta(\log n\ \log\log n)$

由于n/2 与n/2+17 在n充分大之后接近，
故猜 $T(m) \approx T(\frac{m}{2})+m$.

HIT CS&E

先猜后证

例1. $T(n)=2T(n/2+17)+n$

令 $n=m+34$，则

$T(m+34)=2T(m/2+34)+m+34$

令 $T(m+34)=S(m)$，则

$S(m)=2S(m/2)+m+34$

$S(m)=\Theta(m\log m)$

$T(n)=\Theta(n\log n)$

HIT CS&E

猜测方法 I：

猜测上下界，减少不确定性范围

例 3. 求解 $T(n)=2T\left(\frac{n}{2}\right)+n$.

解：首先证明 $T(n)=\Omega(n)$，$T(n)=O(n^2)$

然后逐阶地降低上界、提高下界。

$\Omega(n)$的上一个阶是$\Omega(n\log n)$，

$O(n^2)$的下一个阶是 $O(n\log n)$。

HIT CS&E

细微差别的处理

- 问题：猜测正确，数学归纳法的归纳步似乎证不出来
- 解决方法：从猜测结论中减去一个低阶项，可能方法就能用了

HIT CS&E

例 4. 求解 $T(n)=T(\lfloor n/2 \rfloor)+T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)+1$

解：(1) 我们猜 $T(n)=O(n)$

证：$T(n)\le c\lfloor n/2 \rfloor + c\lceil n/2 \rceil + 1 = cn+1 \ne cn$

证不出 $T(n)=O(cn)$

(2) 减去一个低阶项，猜 $T(n)\le cn-b$，$b\ge 0$ 是常数

证：设当 $\le n-1$ 时成立

$T(n)=T(\lfloor n/2 \rfloor)+T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)+1 \le c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - b + c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - b + 1$

$= cn-2b+1 = cn-b-b+1 \le cn-b$（只要 $b\ge 1$）。

HIT CS&E

避免陷阱

例 5. 求解 $T(n)=2T(\lfloor n/2 \rfloor)+n$。

解：猜 $T(n)=O(n)$

证：用数学归纳法证明 $T(n)\le cn$。 $\boxed{\text{--错!!}}$

常数发生变化.

$T(n)\le 2(c\lfloor n/2 \rfloor)+n \le cn+n = O(n)$

错在那里：过早地使用了 $O(n)$ 而陷入了陷阱应该在证明了 $T(n)\le cn$ 才可用。从 $T(n)\le cn+n$ 不可能得到 $T(n)\le cn$ 因为对于任何 c>0，我们都得不到 $cn+n\le cn$.

HIT CS&E

2.2.3 Master method

目的：求解 $T(n)=aT(n/b)+f(n)$ 型方程，$a\ge 1, b>0$ 是常数，$f(n)$ 是正函数

方法：记住三种情况，则不用笔纸即可求解上述方程.

HIT CS&E

Master 定理

定理 2.4.1 设 $a\ge 1$ 和 $b>1$ 是常数，$f(n)$ 是一个函数，$T(n)$ 是定义在非负整数集上的函数 $T(n)=aT(n/b)+f(n)$. $T(n)$ 可以如下求解：

(1). 若 $f(n)=O(n^{\log_b a-\varepsilon})$, $\varepsilon>0$ 是常数，则 $T(n)=\theta(n^{\log_b a})$.

(2). 若 $f(n)=\theta(n^{\log_b a})$，则 $T(n)=\theta(n^{\log_b a}\lg n)$.

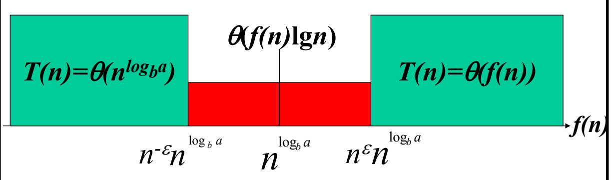
(3). 若 $f(n)=\Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$, $\varepsilon>0$ 是常数，且对于所有充分大的 n $af(n/b)\le cf(n)$, C<1 是常数，则 $T(n)=\theta(f(n))$.

*直观地：我们用 $f(n)$ 与 $n^{\log_b a}$ 比较

(1). 若 $n^{\log_b a}$ 大，则 $T(n)=\theta(n^{\log_b a})$

(2). 若 $f(n)$ 大，则 $T(n)=\theta(f(n))$

(3). 若 $f(n)$ 与 $n^{\log_b a}$ 同阶，则 $T(n)=\theta(n^{\log_b a}\lg n)=\theta(f(n)\lg n)$.



对于红色部分，Master定理无能为力

HIT CS&E

更进一步:

(1). 在第一种情况, $f(n)$不仅小于$n^{\log_b a}$，必须多项式地小于,即对于一个常数$\varepsilon>0$，$f(n)=O(\frac{n^{\log_b a}}{n^{\varepsilon}})$.

(2). 在第三种情况, $f(n)$不仅大于$n^{\log_b a}$，必须多项式地大于，即对一个常数$\varepsilon>0$，$f(n)=\Omega(n^{\log_b a}\cdot n^{\varepsilon})$.

HIT CS&E

Master定理的使用

例 1. 求解 $T(n)=9T(n/3)+n$.

解： $a=9$，$b=3$，$f(n)=n$， $n^{\log_b a}=\theta(n^2)$

$\because f(n)=n=O(n^{\log_b a-\varepsilon})$， $\varepsilon=1$

$\therefore T(n)=\theta(n^{\log_b a})=\theta(n^2)$

例 2. 求解 $T(n)=T(2n/3)+1$.

解： $a=1$，$b=(3/2)$，$f(n)=1$， $n^{\log_b a}=n^{\log_{3/2}1}=n^0=1$，

$f(n)=1=\theta(1)=\theta(n^{\log_b a})$， $T(n)=\theta(n^{\log_b a}\lg n)=\theta(\lg n)$

HIT CS&E

Master定理的使用（续）

例 3. 求解 $T(n)=3T(n/4)+n\lg n$

解： $a=3$，$b=4$，$f(n)=n\lg n$，$n^{\log_b a}=n^{\log_4 3}=O(n^{0.793})$

(1) $f(n)=n\lg n\geq n=n^{\log_b a+\varepsilon}$, $\varepsilon\approx 0.2$

(2) 对所有 n, $af(n/b)=3\times\frac{n}{4}\lg\frac{n}{4}=\frac{3}{4}n\lg\frac{n}{4}\leq\frac{3}{4}n\lg n=cf(n)$, $c=\frac{3}{4}$.

于是， $T(n)=\theta(f(n))=\theta(n\lg n)$

例 4. 求解 $T(n)=2T(n/2)+n\lg n$.

解： $a=2$，$b=2$，$f(n)=n\lg n$， $n^{\log_b a}=n$. $f(n)=n\lg n$ 大于 $n^{\log_b a}=n$，但不是多项式地大于，Master 定理不适用于该$T(n)$.