哈工大各学院 2007　/2008　学年　秋季学期

概率试　题

考试时间	120 分钟
考试形式	闭
班（学）号	
姓　名	

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分	
分　数												

注意行为规范　遵守考场纪律！

（注：需要用到的标准正态分布表，t-分布表见末页末尾处。）

一、填空题（每题 3 分，共计 15 分）

1.　设事件 A、B 满足 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.6$，$P(B|\bar{A})=0.6$，

则 $P\left(A\cup B\right)=$_________.

解：$P(\bar{A})=1-P(A)=0.5$，

$P(B\bar{A})=P(\bar{A})P(B|\bar{A})=0.5\times0.6=0.3$，

$P(BA)=P(B)-P(B\bar{A})=0.6-0.3=0.3$，

$P\left(A\cup B\right)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.6-0.3=0.8$。

2.　设事件 A,B,C 两两独立，且 $ABC=\varnothing$，

$P(A)=P(B)=P(C)<\dfrac{1}{2}$，$P\left(A\cup B\cup C\right)=\dfrac{9}{16}$，则

$P(A)=$_________.

解：

$$\begin{aligned}\frac{9}{16}&=P\left(A\cup B\cup C\right)\\&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC),\\&=3P(A)-3\left[P(A)\right]^2\end{aligned}$$

$\left[P(A)\right]^2-P(A)+\dfrac{3}{16}=0$，

$P(A)=\frac{1}{4}$，或 $P(A)=\frac{3}{4}$（舍去）。

3. 设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}2x, 0<x<1,\\ 0, \quad 其它\end{cases}$，对 X 进行三次独立重复观察，用 Y 表示事件“$X\le\frac{1}{2}$”出现的次数，则 $P(Y=1)=$ _________.

解：$P\left(X\le\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}2xdx=x^2\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$，$Y\sim B(3,\frac{1}{4})$，

$P(Y=1)=C_3^1(\frac{1}{4})^1(\frac{3}{4})^2=\frac{27}{64}$。

4. 已知一批零件的长度 $X\sim N(\mu,4)$，μ 未知，从中随机地抽取 16 个零件，得样本均值 $\bar{x}=30$，则 μ 的置信度 0.95 的置信区间是 _________.

解：

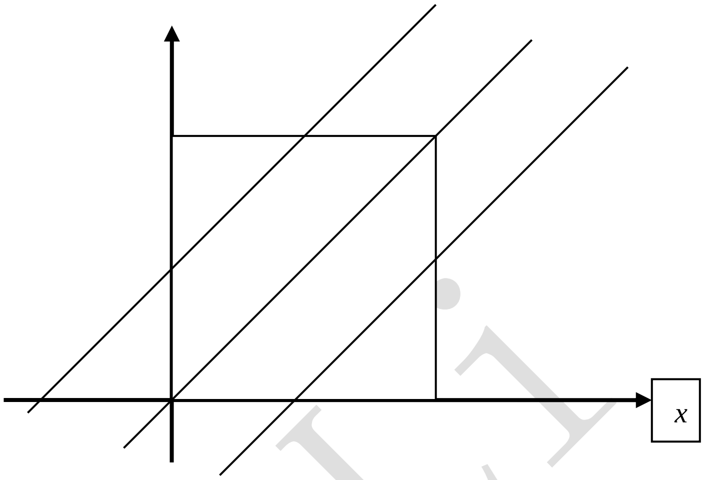
$$\begin{aligned}\left(\overline{X}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)&=\left(30-u_{0.05/2}\frac{2}{\sqrt{16}},30+u_{0.05/2}\frac{2}{\sqrt{16}}\right)\\&=\left(30-u_{0.025}\frac{2}{\sqrt{16}},30+u_{0.025}\frac{2}{\sqrt{16}}\right)\\&=\left(30-1.96\times\frac{1}{2},30+1.96\times\frac{1}{2}\right)\\&=(29.02,30.98)\end{aligned}$$

。

5. 在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数，则事件“两数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$”的概率为 _________.

解：$|y-x|<\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}<y-x<\frac{1}{2}$，$y-x=\pm\frac{1}{2}$，

概率为$1-2\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$。



二、单项选择题（每题 3 分，共计 15 分）

1. 设 A,B 是两个事件，$P(A)\neq P(B)>0$，且 $B\subset A$，则一定成立的是__________.

（A） $P(B|A)=1$；　　　　（B） $P(A|B)=1$；

（C） $P(B|\overline{A})=1$；　　　　（D） $P(A|\overline{B})=0$.

解：因 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(B)}{P(B)}=1$，故选(B)。

2. 设 A,B,C 三个事件两两独立，则 A,B,C 相互独立的充分必要条件是__________.

（A） A 与 BC 独立；　　　　（B） AB 与 $A\cup C$ 独立；

（C） AB 与 AC 独立；　　　　（D） $A\cup B$ 与 $A\cup C$ 独立.

解：因 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=P(A)P(BC)$，

$P(ABC)=P(A)P(BC)=P(A)P(B)P(C)$，故选(A)。

3. 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{-|x|}$，则对随机变量 $|X|$ 与 X，下列结论成立的是__________.

(A)相互独立；　（B）分布相同；

(C)不相关；　　（D）同期望.

解：因 $P\left(X\leq -2,|X|\leq 1\right)=0\neq P(X\leq -2)P(|X|\leq 1)$，故 $|X|$ 与 X 不相互独立。

又 $Cov\left(|X|,X\right)=E|X|X-E|X|EX=E|X|X=0$，故选(C)。

4. 设随机变量 X 服从参数为 $\dfrac{1}{3}$ 的指数分布，$Y\sim U\left(0,6\right)$，且 $\rho_{XY}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，根据切比晓夫不等式有：

$P(-4 \le X - Y \le 4) \ge$_________.

（A）$\frac{1}{8}$；　　　　（B）$\frac{5}{8}$；

（C）$\frac{1}{4}$；　　　　（D）$\frac{2}{9}$.

解：$E(X-Y) = EX - EY = 3 - \frac{6}{2} = 0$，

$$\begin{aligned} D(X-Y) &= DX + DY - 2Cov(X,Y) \\ &= DX + DY - 2\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY} \\ &= 9 + \frac{6^2}{12} - 2\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times\sqrt{9}\sqrt{\frac{6^2}{12}} = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(-4 \le X - Y \le 4) &\ge P\left(\left|X - Y\right| \le 4\right) \\ &= P\left(\left|X - Y - E(X-Y)\right| \le 4\right) \\ &\ge 1 - \frac{D(X-Y)}{4^2} = 1 - \frac{6}{16} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$。

5．设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，$EX = \mu$，$DX = \sigma^2$，$\bar{X}$ 是样本均值，S^2 为样本方差，S^{*2} 为样本二阶中心矩，则_________.

（A）$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$；　（B）$\frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$；

（C）$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$ 是 σ^2 的无偏估计；　（D）$\overline{X}$ 与 S^2 相互独立.

解：

$$\begin{aligned} E\left[\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2\right] &= \frac{n-1}{\sigma^2}E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2\right] \\ &= \frac{n-1}{\sigma^2}\times\sigma^2 = n-1 \end{aligned}$$。

三、（10 分）今从装有白球 3 个，黑球 3 个的甲箱子中任取 2 个，然后将这 2 个球放入装 2 个白球 3 个黑球的乙箱中，再从乙箱中任取 1 个球，求(1)从乙箱中取到 1 个白球的概率;(2)已知从乙箱中取到 1 个白球，求从甲箱子中取出的两个球是白球的概率.

解：设B=“乙箱中取到 1 个白球”，　A_i=“从甲箱子中取出的两个球中含有i个白球”，$i=0,1,2$，则$B\subset A_0+A_1+A_2$。

(1)由全概率公式有

$$P(B)=\sum_{i=0}^{2}P(A_i)P(B|A_i)$$
$$=\frac{C_3^2}{C_6^2}\times\frac{C_2^1}{C_7^1}+\frac{C_3^1\times C_3^1}{C_6^2}\times\frac{C_3^1}{C_7^1}+\frac{C_3^2}{C_6^2}\times\frac{C_4^1}{C_7^1}=\frac{3}{7};$$

(2)

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}$$
$$=\frac{\frac{C_3^2}{C_6^2}\times\frac{C_4^1}{C_7^1}}{\frac{3}{7}}=\frac{4}{15}\text{。}$$

四、（10 分）设(X,Y)有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0<x<1,0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases},$$

求$Z=X+Y$的概率密度$f_Z(z)$.

解：由题意

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx,$$

而

$$f(x,z-x)=\begin{cases}4x(z-x), & 0<x<1,0<z-x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases},$$

故

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_0^z 4x(z-x)dx, & 0<z\le 1,\\ \int_{z-1}^1 4x(z-x)dx, & 1<z<2,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{2}{3}z^3, & 0<z\le 1\\ 2z-\frac{4}{3}-\frac{2}{3}(z-1)^3-2(z-1)^2, & 1<z\le 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

。

五、（10 分）已知随机变量 X 和 Y 分别服从 $N\left(1,3^2\right)$ 和 $N\left(0,4^2\right)$，且 X 和 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=-\dfrac{1}{2}$，设 $Z=\dfrac{X}{3}+\dfrac{Y}{2}$ 求（1）EZ 和 DZ；（2）ρ_{XZ}.

解：（1）$EZ=E\left(\dfrac{X}{3}+\dfrac{Y}{2}\right)=\dfrac{1}{3}EX+\dfrac{1}{2}EY=\dfrac{1}{3}$，

$$
\begin{aligned}
DZ&=D\left(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=D\left(\frac{X}{3}\right)+D\left(\frac{Y}{2}\right)+2Cov\left(\frac{X}{3},\frac{Y}{2}\right)\\
&=\frac{1}{9}DX+\frac{1}{4}DY+\frac{1}{3}Cov\left(X,Y\right)\\
&=\frac{1}{9}DX+\frac{1}{4}DY+\frac{1}{3}\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}\\
&=\frac{1}{9}\times 9+\frac{1}{4}\times 16+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{9}\sqrt{16}\\
&=3
\end{aligned}
$$

。

（2）因 $\rho_{XZ}=\dfrac{Cov(X,Z)}{\sqrt{DX}\sqrt{DZ}}$，而

$$
\begin{aligned}
Cov(X,Z)&=Cov(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})\\
&=Cov(X,\frac{X}{3})+Cov(X,\frac{Y}{2})\\
&=\frac{1}{3}DX+\frac{1}{2}Cov(X,Y)\\
&=\frac{1}{3}DX+\frac{1}{2}\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}\\
&=\frac{1}{3}\times 9+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{9}\sqrt{16}\\
&=3-3=0
\end{aligned}
$$

，

故 $\rho_{XZ}=0$。

六、（14 分）设总体 X 的分布函数为

$$F(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{\alpha}{x}\right)^{x}, & x>\alpha \\ 0, & x\le\alpha\end{cases},$$

其中未知参数 $\alpha>0,\beta>1$. 而 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

（1）当 $\alpha=1$ 时，求未知参数 β 的矩估计和极大似然估计；

（2）当 $\beta=2$ 时，求未知参数 α 的极大似然估计.

解：（1）由题意知 $\alpha=1$ 时 X 的概率密度为

$$f(x;\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x>1 \\ 0, & x\le 1\end{cases},$$

故参数 β 的矩估计：

$$\mu_1=EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\beta)dx=\int_{1}^{+\infty}x\frac{\beta}{x^{\beta+1}}dx=\frac{\beta}{\beta-1},$$

$$\beta=\frac{\mu_1}{\mu_1-1},$$

$$\hat{\beta}=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-1}。$$

参数 β 的极大似然估计：

似然函数为

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\beta}{x_i^{\beta+1}}=\frac{\beta^n}{\left(x_1x_2\cdots x_n\right)^{\beta+1}},$$

$$\ln L(\beta)=n\ln\beta-\left(\beta+1\right)\ln\left(x_1x_2\cdots x_n\right)=n\ln\beta-\left(\beta+1\right)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$$\frac{d\ln L(\beta)}{d\beta}=\frac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i \triangleq 0$$

$$\hat{\beta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}。$$

（2）由题意知当$\beta=2$时 X 的概率密度为

$$f(x;\alpha)=\begin{cases}\dfrac{2\alpha^2}{x^3}, & x>\alpha\\ 0, & x\le\alpha\end{cases},$$

似然函数为

$$L(\alpha)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\alpha)=\begin{cases}\dfrac{2^n\alpha^{2n}}{\left(x_1x_2\cdots x_n\right)^3}, & x_i>\alpha, i=1,2,\cdots,n\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2^n\alpha^{2n}}{\left(x_1x_2\cdots x_n\right)^3}, & x_{(1)}>\alpha\\ 0, & 其它\end{cases}$$

由极大似然估计的定义知

$$\hat{\alpha}=X_{(1)}=\min\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)。$$

七、（6 分）设(X,Y)在$G=\{(x,y)\,|\,1\le x\le 3, 1\le y\le 3\}$服从均匀分布，

求：（1）随机变量$U=|X-Y|$的概率密度$f(u)$；（2）EU.

解：（1）由题意知(X,Y)的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 1\le x,y\le 3\\ 0, & \text{其它}\end{cases},$$

故

$$\begin{aligned}F_U(u)&=P(U\le u)=P(|X-Y|\le u)\\&=\begin{cases}P(\Phi)=0, & u\le 0\\ P(|X-Y|\le u), & u>0\end{cases},\\&=\begin{cases}1, & u\ge 2\\ 1-\dfrac{2\times\frac{1}{2}(3-u-1)^2}{4}=1-\dfrac{(2-u)^2}{4}, & 0<u<2\end{cases}\end{aligned}$$

从而

$$f_U(u)=\begin{cases}\frac{2-u}{2}, & 0<u<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}。$$

（2）

$$\begin{aligned}EU&=\int_{-\infty}^{+\infty}uf_U(u)du=\int_0^2 u\left(1-\frac{u}{2}\right)du\\&=\left(\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{6}\right)\Bigg|_0^2=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}\end{aligned}。$$