概率论与数理统计试题答案

一、填空题（每小题 3 分，共 5 小题，满分 15 分）

1. 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4},\ P(AB)=0,\ P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}$，则 A,B,C 都不发生概率为___________.

$\frac{3}{8}$

2. 设相互独立的三个事件 A,B,C 满足条件：$P(A)=0.4,\ P(B)=0.5,\ P(C)=0.5$，则 $P(A-C\mid AB\cup C)=$___________.

$\frac{1}{6}$

3．随机变量 $X\sim P(\lambda),\ EX^2=12$，则 $P(X\geq 1)=$_________.

$1-e^{-3}$

4．随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<1\\ \frac{1}{4}, & 1<x<3\\ 0, & 其他\end{cases}$，则 $Y=1-2X$ 的密度函数 $f_Y(y)=$_________.

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{8},-5<y<-1\\ \frac{1}{4},-1<y<1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$$

5．设随机变量 X 的密度为 $f_X(x)=\begin{cases}2x^3e^{-x^2} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$，求 $Y=2X+3$ 的概率密度______.

$$f_Y(y)=\begin{cases}0 & y<3\\ (\frac{y-3}{2})^3e^{-(\frac{y-3}{2})^2} & y\geq 3\end{cases}$$

6．设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\le x<0,\\ 1-x, & 0<x\le 1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

则方差 $DX=$______.

$\frac{1}{6}$

7．已知一批零件的长度 $X\sim N(\mu,1)$，从中随机地抽取 16 个零件，得样本均值 $\bar{x}=40$，则 μ 的置信度 0.95 的置信区间为______.

（39.51，40.49）

8．**设二维随机变量** $(X,Y)\sim N(1,3,4,9,0)$，**则** $E|2X+Y-5|=$______.

$\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$

二、选择题（每小题 3 分，共 5 小题，满分 15 分）

（每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项的字母填在题后的括号内）

9．设 A,B,C 三个事件两两独立，则 A,B,C 相互独立的充分必要条件是（　　）

（A） A 与 BC 独立；　　（B） AB 与 $A\cup C$ 独立；

（C） AB 与 AC 独立；　　（D） $A\cup B$ 与 $A\cup C$ 独立.

A

10．下列四个函数中，能成为随机变量密度函数的是

（A） $f(x)=e^{-|x|}$　　（B） $f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$

（C） $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, & x\ge 0\\ 0\quad, & x<0\end{cases}$　　（D） $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$

B

11. 下列函数中可以作为分布函数的是（　　）

（A）$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{2} & 0\le x\le 1\\ \frac{3}{4} & 1<x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$　　（B）$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \sin x & 0\le x<\frac{\pi}{4}\\ x & \frac{\pi}{4}\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$

（C）$F(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x)}{1+x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$　　（D）$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ \frac{x^2}{2} & 0<x\le 1\\ -\frac{3}{2}+2x-\frac{x^2}{2} & 1<x\le 2\\ 2 & x>2\end{cases}$

B

12. 假设随机变量 X 服从指数分布，$Y=\begin{cases}X, & 2<X<5\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ 的分布函数（　　）.

（A）是连续函数；　　（B）至少有两个间断点；

（C）是阶梯函数；　　（D）恰好有一个间断点.

D

13. 随机变量 X,Y 独立同分布，$X\sim N(\mu,\frac{1}{2}),\ P(X+Y\le 1)=\frac{1}{2}$，则 $\mu=$________.

（A）-1　　（B）0　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）1

C

14. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则随着 σ 的增大，概率 $P(|X-\mu|<\sigma)$ 将（　　）.

（A）单调增大；　　（B）单调减少；

（C）保持不变；　　（D）增减不定.

C

15. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自具有 $\chi^2(n)$ 分布的总体的样本，$\bar{X}$ 为样本均值，则 $E\bar{X}$ 和 $D\bar{X}$ 的值为（　　）

（A）$E\bar{X}=n$，$D\bar{X}=2$；　　（B）$E\bar{X}=n,\ D\bar{X}=2n$；

（C）$E\bar{X}=1,\ D\bar{X}=2$；　　（D）$E\bar{X}=\frac{1}{n},\ D\bar{X}=n$.

A

16. 设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布， $\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差，下列不是无偏估计的是（　　）

（A）$\overline{X}$；　（B）$\frac{2}{3}\overline{X}-\frac{1}{3}S^2$；　（C）$\frac{1}{2}\overline{X}+\frac{1}{2}S^2$；　（D）$\frac{4}{3}\overline{X}-\frac{1}{3}S^2$.

B

17. 设随机变量 $X\sim B(8,0.5),Y\sim N(2,4),\rho=1/\sqrt{2}$，则由切比雪夫不等式有：

$P(|X-2Y|\le 4)\ge$　　　[　　]

A. 3/8　　B. 5/8　　C. 1/8　　D. 7/8

A

三、

18.（10 分）有甲、乙、丙三个袋子，甲袋中有 2 个黑球，3 个白球；乙袋中有 1 个黑球，3 个白球；丙袋中有 3 个黑球，1 个白球. 从甲袋中任取一个球放入乙袋中，再从乙袋中任取一个球放入丙袋中，最后从丙袋中任取一球. 求最后取到白球的概率.

解： 设 A,B,C 分别表示从甲、乙、丙袋中取到白球.

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=\frac{18}{25}\qquad P(\bar{B})=\frac{7}{25}$$

$$P(C)=P(B)P(C|B)+P(\bar{B})P(C|\bar{B})=\frac{43}{125}$$

四、**19.**（10 分）设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{12}e^{-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}} & x\ge 0,\ y\ge 0\\ 0 & 其他\end{cases}$，

求：（1）X,Y 的边缘概率密度，问 X,Y 是否相互独立？　（2）$Z=X+Y$ 的概率密度.

解：（1）当 $x\ge 0$ 时， $f_X(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{12}e^{-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}}dy=\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}$，所以

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}} & x\ge 0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

当 $y\ge 0$ 时 $f_Y(y)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{12}e^{-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}}dx=\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}$，所以

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}e^{-\frac{y}{4}} & y\ge 0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

由于 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，故 X 与 Y 相互独立.

（2）由于 X 与 Y 相互独立，故可利用卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=\begin{cases}\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}\dfrac{1}{4}e^{-\frac{z-x}{4}}dx, & z\ge 0\\ 0 & z<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}e^{-\frac{z}{4}}-e^{-\frac{z}{3}} & z\ge 0\\ 0 & z<0\end{cases}$$

20.（10 分）(X,Y) 的密度 $f(x,y)=\begin{cases}\lambda^2e^{-\lambda x}, & 0<y<x\\ 0 & ,其他\end{cases}$ $(\lambda>0)$

求 $Z=X+Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$.

解： $f(x,z-x)=\begin{cases}\lambda^2e^{-\lambda x}, & x<z<2x\\ 0 & , \quad 其它\end{cases}$

当 $z<0,\ f_Z(z)=0$

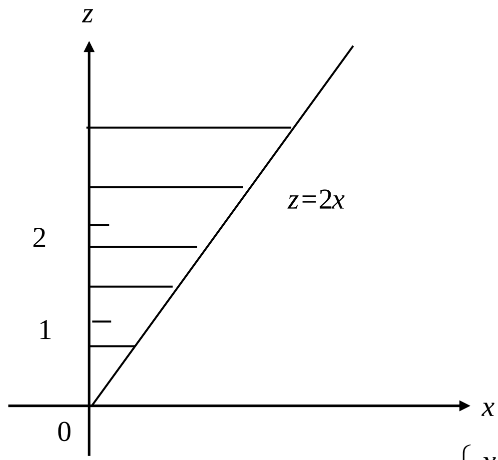
当 $z\ge 0,\ f_Z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^{z}\lambda^2e^{-\lambda x}dx=\lambda(e^{-\frac{\lambda z}{2}}-e^{-\lambda z})$

21.（8 分）设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}xe^{-y}, & 0<x<y,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求（1）$Z=X+Y$ 的概率密度；（2）$N=\min(X,Y)$ 的概率密度；(3) EZ 和 EN .

解：（1）Z pdf 为： $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$



使 $f(x,z-x)$ 不为 0 区域为：$0<x<z-x \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ z<2x \end{cases}$

当 $z\le 0$ 时 $f_Z(z)=0$

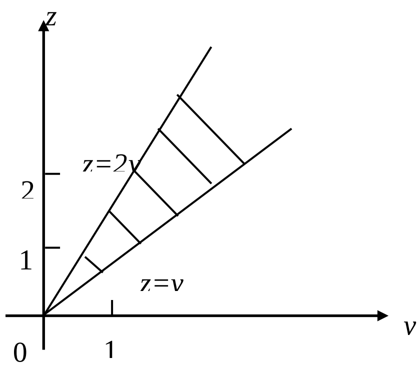
当 $z>0$ 时 $f_Z(z)=\int_0^{z/2} xe^{-(z-x)}dx = e^{-z}\int_0^{z/2} xe^{x}dx$

$$=e^{-z}\left[xe^{x}\Big|_0^{z/2}-e^{x}\Big|_0^{z/2}\right]=e^{-z}\left[\frac{z}{2}\cdot e^{+\frac{z}{2}}+1-e^{\frac{z}{2}}\right]=e^{-z}+\frac{z}{2}e^{-\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}}$$

$$\therefore\ f_Z(z)=\begin{cases} e^{-z}+(\frac{z}{2}-1)e^{-\frac{z}{2}}, & z>0 \\ 0, & z\le 0 \end{cases}$$

or 另解：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy$ 　　不为 0 区域：$0<z-y<y \begin{cases} z>y \\ z<2y \end{cases}$

$$f_Z(z)=\begin{cases} 0, & z\le 0 \\ (\frac{z}{2}-1)e^{-\frac{z}{2}}+e^{-z}, & z>0 \end{cases}$$



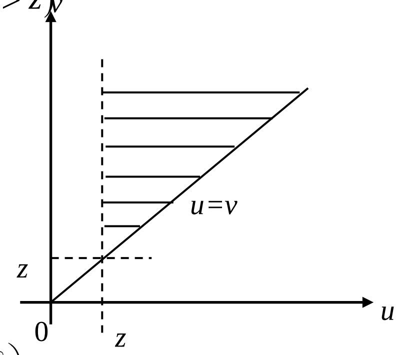
（2）令 N之$d \cdot f$ $F_N(z)$ $F_N(z)=P(\min(X,Y)\le z)$

当 $z\le 0$时，$F_N(z)=0$

当 $z>0$时

$F_N(z)=1-P(\min(X,Y)>z)=1-P(X>z,Y>z)$

$=1-P(x,y)\in D \quad D=\left\{(u,v)\middle|\begin{matrix}u>z,v>z\\0<u<v\end{matrix}\right\}$



$=1-\int_z^{+\infty}du\int_u^{+\infty}ue^{-V}dv$

$=1-\int_z^{+\infty}u\left(-e^{-V}\Big|_u^{+\infty}\right)du=1-\int_z^{+\infty}ue^{-u}du$

$=1-\left(-ue^{-u}\Big|_z^{+\infty}+\int_z^{+\infty}e^{-u}du\right)=1-\left(ze^{-z}-e^{-u}\Big|_u^{\infty}\right)$

$=1-(z+1)e^{-z}$

$\therefore f_N(z)=F_N^{'}(z)=\begin{cases}ze^{-z}, & z>0\\0, & z\le 0\end{cases}$

$f_N(z)=\begin{cases}0 & , z\le 0\\ze^{-z} & , z>0\end{cases}$

（3） $f_X(x)=\begin{cases}0 & , x\le 0\\xe^{-x}, & x>0\end{cases}$， $f_Y(y)=\begin{cases}0 & , y\le 0\\\frac{1}{2}y^2e^{-y}, & y>0\end{cases}$

$EZ=E(X+Y)=EX+EY=2+\frac{3}{2}\times 2=5$， $EN=\int_0^{+\infty}z\cdot ze^{-z}dz=2$

22.（8 分）设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\ 0<y<2(1-x),\\ 0, & 其他.\end{cases}$

求$Z=X-Y$的概率密度$f_Z(z)$.

解： $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,x-z)dx$

若$f(x,x-z)>0$必有$\begin{cases}0<x<1\\ 0<x-z<2-2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<x<1\\ z<x\\ z>3x-2\end{cases}$

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{z+2}{3}, & -2<z<0\\ \dfrac{2(1-z)}{3}, & 0\le z<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

23. 设二维随机变量(X,Y)在区域$D=\{(x,y)|0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\}$上服从均匀分

布，令$U=\begin{cases}1, & X\le Y,\\ 0, & X>Y.\end{cases}$

（Ⅰ）写出(X,Y)的概率密度；

（Ⅱ）问U与X是否相互独立？并说明理由；

（Ⅲ）求$Z=U+X$的分布函数$F(z)$.

解：（1）$f(x,y)=\begin{cases}3, & (x,y)\in D,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

（2）$P(U=0,X\le\frac{1}{2})=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_{x^2}^{x}3dy=\frac{1}{4}$，$P(U=0)=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}3dy=\frac{1}{2}$

$P(X\le\frac{1}{2})=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}3dy=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{8}$，$P(U=0,X\le\frac{1}{2})\ne P(U=0)P(X\le\frac{1}{2})$

所以，U与X不相互独立。

（3）

$F(Z)=P(Z\le z)=P(U=0)P(U+Z\le z|U=0)+P(U=1)P(U+Z\le z|U=1)$

$$=\frac{1}{2}P(X\le z)+\frac{1}{2}P(X\le z-1)$$

$$=\begin{cases}0, & z\le 0\\ \frac{3}{2}z^2-z^3, & 0<z<1\\ \frac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2, & 1\le z<2\\ 1, & z\ge 2\end{cases}$$

24. 设随机变量 X,Y 相互独立，且 X 的概率分布为 $p\{X=0\}=p\{X=2\}=\frac{1}{2}$，

Y 的概率密度为 $f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

（Ⅰ）求 $p\{Y\le EY\}$；

（Ⅱ）求 $Z=X+Y$ 的概率密度

解：（1） $EY=\frac{2}{3}$ ， $P(Y\le EY)=\frac{4}{9}$

（2） Z 的分布函数为 $F(z)$，

$$F(Z)=P(Z\le z)=P(X=0)P(X+Y\le z\mid X=0)+P(X=2)P(X+Y\le z\mid X=2)$$

$$=\frac{1}{2}P(Y\le z)+\frac{1}{2}P(Y\le z-2)$$

$$=\frac{1}{2}F_Y(z)+\frac{1}{2}F_Y(z-2)$$

Z 的概率密度函数为 $f(z)$，

$$f(z)=\frac{1}{2}f_Y(z)+\frac{1}{2}f_Y(z-2)$$

$$=\begin{cases}z, & 0<z<1\\ z-2, & 2<z<3\\ 0, & 其他\end{cases}$$

25. 设 (X,Y) 是二维随机变量，X 的边缘概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}4xe^{-2x}, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$，在给定 $X=x(x>0)$ 的条件下，随机变量 Y 在（0，x)上服从均匀分布。

求（1）(X,Y) 的概率密度，（2）Y 的边缘概率密度，（3）在 Y=1 时，随机变量 X 的条件概率密度，（4） $P(0<X<2\mid Y=1)$。

解：

（1） $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x\\ 0, & 其它\end{cases}$， $f(x,y)=\begin{cases}4e^{-2x}, & 0<y<x\\ 0, & 其它\end{cases}$

（2） $f_Y(y)=\int_y^{+\infty}4e^{-2x}dx=\begin{cases}2e^{-2y}, & y>0\\ 0, & 其它\end{cases}$

（3） $f_{X|Y}(x|1)=\dfrac{f(x,1)}{f_Y(1)}==\begin{cases}2e^{-2(x-1)}, & x>1\\ 0, & 其它\end{cases}$；

（4） $P(0<X<2\,|\,Y=1)=\int_1^2 2e^{-2(x-1)}dx=1-e^{-2}$

26.设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=2\}=\dfrac{1}{2}$．在给定 $X=i$ 的条件下，随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i)\,(i=1,2)$．

（Ⅰ）求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$；

（Ⅱ）求 EY．

解：

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X=1)P(Y\le y|X=1)+P(X=2)P(Y\le y|X=2)$

$$=\begin{cases}0, & y<0\\ \dfrac{3}{4}y, & 0\le y<1\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{y}{4}, & 1\le y<2\\ 1, & y\ge 2\end{cases}$$

（2） $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}, & 0<y<1\\ \dfrac{1}{4}, & 1<y<2\\ 0, & 其他\end{cases}$ $EY=\dfrac{3}{4}$

27.（6 分）设 (X,Y) 在 $G=\{(x,y)\,|\,1\le x\le 3,1\le y\le 3\}$ 服从均匀分布，求：（1）随机变量 $U=|X-Y|$ 的概率密度 $f(u)$；（2） EU．

解：（1）由题意知 (X,Y) 的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 1\le x,y\le 3\\ 0, & \text{其它}\end{cases},$$

故

$$\begin{aligned}F_U(u)&=P(U\le u)=P\left(|X-Y|\le u\right)\\ &=\begin{cases}P(\Phi)=0, & u\le 0\\ P\left(|X-Y|\le u\right), & u>0\end{cases},\\ &=\begin{cases}1, & u\ge 2\\ 1-\dfrac{2\times\frac{1}{2}(3-u-1)^2}{4}=1-\dfrac{(2-u)^2}{4}, & 0<u<2\end{cases}\end{aligned}$$

从而

$$f_U(u)=\begin{cases}\frac{2-u}{2}, & 0<u<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}。$$

（2）

$$EU=\int_{-\infty}^{+\infty}uf_U(u)du=\int_0^2 u\left(1-\frac{u}{2}\right)du$$

$$=\left(\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{6}\right)\Bigg|_0^2=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$$

五、

28.（10 分）随机变量 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$，$Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$，$EXY=\frac{5}{8}$

求（1）$P(X+Y\le 1)$；（2）$E\max(X,Y)$.

解： $EXY=P(X=1,\ Y=1)=\frac{5}{8}$

（1）$P(X+Y\le 1)=1-P(X+Y>1)$

$$=1-P(X=1,\ Y=1)$$

$$=\frac{3}{8}.$$

（2） $E\max(X,Y)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{5}{8}=\frac{7}{8}$.

29（10 分）设随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y), & 0\le x,\ y\le 2,\\ 0\quad, & \text{其它}\end{cases}$$

求EX，EY，$\mathrm{Cov}(X,Y)$，ρ_{XY}，$D(X+Y)$.

解： $EX=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^2 dx\int_0^2 x\frac{1}{8}(x+y)dy=\frac{7}{6}$

由密度函数中x,y对称性知$EY=EX=\frac{7}{6}$

$$E(XY)=\int_0^2 dx\int_0^2\frac{1}{8}xy(x+y)dy=\frac{4}{3}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EXEY=\frac{4}{3}-\frac{49}{36}=-\frac{1}{36}$$

$$EX^2=\int_0^2 dx\int_0^2\frac{1}{8}x^2(x+y)dy=\frac{5}{3}$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{5}{3}-\frac{49}{36}=\frac{11}{36}$$

$$DY=DX=\frac{11}{36}$$

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX\cdot DY}}=\frac{-1/36}{11/36}=-\frac{1}{11}$$

$$D(X+Y)=DX+DY+2\mathrm{Cov}(X,Y)$$
$$=\frac{11}{36}+\frac{11}{36}-\frac{2}{36}=\frac{5}{9}$$

30.（10 分）已知随机变量X和Y分别服从$N(1,\ 3^2)$和$N(0,\ 4^2)$，且X和Y的相关系数$\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$，设$Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$，（1）求$EZ$和$DZ$ （2）求ρ_{XZ}

解：（1） $EZ=\frac{1}{3}EX+\frac{1}{2}EY=\frac{1}{3}$

$$EZ=\frac{1}{9}DX+\frac{1}{4}DY+2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{Cov}(X,Y)=3$$

（2）$E(EZ)=E(\frac{X^2}{3}+\frac{XY}{2})$

$$=\frac{1}{3}[DX+(EX)^2]+\frac{1}{2}[\mathrm{Cov}(X,Y)+EXEY]$$

$$=\frac{1}{3}(9+1)+\frac{1}{2}(\rho_{XY}\sqrt{DX\cdot DY}+0)$$

$$=\frac{10}{3}+\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot 3\cdot 4$$

$$=\frac{1}{3}$$

于是 $\mathrm{Cov}(X,Z)=E(XZ)-EXEZ=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$

故 $\rho_{XZ}=0$

六、

31.

设总体 X 的分布函数为 $F(x,\theta)=\begin{cases}0, & x<0\\ \theta, & 0\le x<1\\ 1-\theta, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$（$0<\theta<\frac{1}{2}$ 为未知参数），$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 X 的样本，（1）求 θ 的矩估计 $\hat{\theta}_1$；（2）若样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 中有 k 个 1，m 个 2，求 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}_2$；（3）$\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 是否为 θ 的无偏估计.

解：

总体 X 分布列为

X	0	1	2
P	θ	$1-2\theta$	θ

（1）$EX=1,\ EX^2=1+2\theta$

$$\theta=\frac{1}{2}(EX^2-1)$$

$$\hat{\theta}_1=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\frac{1}{2}$$

（2）$L=P(X=0)^{n-k-m}\cdot P(X=1)^k\cdot P(X=2)^m$

$$=\theta^{n-k}(1-2\theta)^k$$

$$\ln L=(n-k)\ln\theta+k\ln(1-2\theta)$$

$$(\ln L)'_\theta=\frac{n-k}{\theta}+\frac{k}{1-2\theta}=0.\ \hat{\theta}_2=\frac{n-k}{2n}.$$

(3) $E\hat{\theta}_1=\theta$，所以$\hat{\theta}_1$ 是θ 的无偏估计，$E\hat{\theta}_2\neq\theta$，$\hat{\theta}_2$ 不是θ 的无偏估计.

32. 设总体X 的分布函数为

$$F(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{\alpha}{x}\right)^{\beta}, & x>\alpha\\ 0, & x\le\alpha\end{cases},$$

其中未知参数$\alpha>0,\beta>1$. 而$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X 的简单随机样本.

（1）当$\alpha=1$时，求未知参数β的矩估计和极大似然估计；

（2）当$\beta=2$时，求未知参数α 的极大似然估计.

解：（1）由题意知$\alpha=1$时X 的概率密度为

$$f(x;\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x>1\\ 0, & x\le1\end{cases},$$

故参数β的矩估计：

$$\mu_1=EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\beta)dx=\int_1^{+\infty}x\frac{\beta}{x^{\beta+1}}dx=\frac{\beta}{\beta-1},$$

$$\beta=\frac{\mu_1}{\mu_1-1},$$

$$\hat{\beta}=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-1}。$$

参数β的极大似然估计：

似然函数为

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\beta}{x_i^{\beta+1}}=\frac{\beta^n}{\left(x_1x_2\cdots x_n\right)^{\beta+1}},$$

$$\ln L(\beta)=n\ln\beta-(\beta+1)\ln\left(x_1x_2\cdots x_n\right)=n\ln\beta-(\beta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$$\frac{d\ln L(\beta)}{d\beta}=\frac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\triangleq 0$$

$$\hat{\beta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}。$$

（2）由题意知当$\beta=2$时X的概率密度为

$$f(x;\alpha)=\begin{cases}\dfrac{2\alpha^2}{x^3}, & x>\alpha\\ 0, & x\le\alpha\end{cases},$$

似然函数为

$$L(\alpha)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\alpha)=\begin{cases}\dfrac{2^n\alpha^{2n}}{\left(x_1x_2\cdots x_n\right)^3}, & x_i>\alpha,i=1,2,\cdots,n\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2^n\alpha^{2n}}{\left(x_1x_2\cdots x_n\right)^3}, & x_{(1)}>\alpha\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

由极大似然估计的定义知

$$\hat{\alpha}=X_{(1)}=\min\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)。$$

33.（12分）设总体的概率密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}3e^{-3(x-\theta)}, & x>\theta;\\ 0, & x\le\theta,\end{cases}$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自此总体的样本，求（1）θ的矩估计$\widehat{\theta}_1$与最大似然估计$\widehat{\theta}_2$；（2）判断$\widehat{\theta}_1$与$\widehat{\theta}_2$是否为无偏估计，如果不是请分别相应给出修正后的无偏估计；（3）比较（2）中无偏估计的有效性.

解：

（1）矩估计：由 $E(X)=\int_{\theta}^{+\infty} x\cdot 3e^{-3(x-\theta)}dx=\frac{1}{3}+\theta=\bar{X}$，故 $\hat{\theta}_1=\bar{X}-\frac{1}{3}$.

MLE：似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)=3^n e^{-3\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}$，　　$x_{(1)}\ge\theta.$

故 MLE 为 $\hat{\theta}_2=X_{(1)}$.

（2）矩估计：$E(\hat{\theta}_1)=E(\bar{X})-\frac{1}{3}=E(X)-\frac{1}{3}=\theta$，故 $\hat{\theta}_1$ 为无偏估计.

MLE：$x_{(1)}$ 的概率密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases}3ne^{-3n(x-\theta)}, & x>\theta;\\ 0, & x\le\theta,\end{cases}$

$E(\hat{\theta}_2)=E(X_{(1)})=\theta+\frac{1}{3n}$，$\hat{\theta}_2$ 不是无偏估计，而 $\hat{\theta}_3=\hat{\theta}_2-\frac{1}{3n}=X_{(1)}-\frac{1}{3n}$ 为无偏估计.

（3）$D(\hat{\theta}_1)=\frac{1}{9n}, D(\hat{\theta}_3)=\frac{1}{9n^2}$，后者更有效.

七、

34.（4 分）实验室器皿中产生甲、乙两类细菌的机会是相等的，且产生 k 个细菌的概率为 $p_k=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\cdots$ 试求产生了甲类细菌但没有乙类细菌的概率。

解：令 A.表示器皿产生了甲类细菌而没有产生乙类细菌事件，而 A_i 表示产生了 i 个细菌的事件（$i=1,2,3,\ldots$）。

于是有：

$$A=\sum_{i=1}^{\infty}A_iA$$

$$P(A)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)P(A|A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\left(\frac{1}{2}\right)^i$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^i}{i!}=e^{-\lambda}(e^{\frac{\lambda}{2}}-1)=e^{-\frac{\lambda}{2}}-e^{-\lambda}$$

35.（4 分）某射手的射击命中率为 3/4，　现对一目标连续射击，直到第二次命中为止，令 X 表示第二次为止所用的射击次数，求 X 的概率分布，并计算 X 的期望.

解：$P(X=k)=C_{k-1}^{1}(1/4)^{k-2}(3/4)^{2}=(\text{k-1})(1/4)^{k-2}(3/4)^{2}$，$k=2,3,\cdots$

方法一：

$$E(X)=\sum_{k=2}^{+\infty}kP(X=k)$$

$$=\sum_{k=2}^{+\infty}k(\text{k-1})(1/4)^{k-2}(3/4)^{2},$$

$$=\sum_{k=2}^{+\infty}k(\text{k-1})q^{k-2}p^{2}\quad(\text{令}p=3/4)$$

$$=p^{2}\left(\sum_{k=2}^{+\infty}q^{k}\right)''=\frac{2}{p}=\frac{8}{3}$$

方法二：分解随机变量的方法

$X_1=$直到第一次成功为止所需试验次数；

$X_2=$第一次成功开始直到第二次成功为止所需试验次数

$X=X_1+X_2$

$X_i\sim G(p),i=1,2$

$EX_i=\dfrac{1}{p}=\dfrac{4}{3},i=1,2$

$EX=EX_1+EX_2=\dfrac{8}{3}$