《自动控制原理》课程内容

- 第二章　　系统的数学模型

- 第三章　　控制系统的时域分析法
- 第四章　　根轨迹法
- 第五章　　频率特性法

- 第八章　　现代控制理论基础

第二章 系统的数学模型

- **1. 核心观点**：数学模型——经典控制与现代控制理论的基础
  描述系统中各变量关系的数学形式与方法。
- **2a. 静态关系**：由输入变量可确定输出变量
  对时间的导数可忽略不计
- **2b. 动态关系**：由输入变量和初始条件共同确定输出变量
  对时间的导数不可忽略

此外，动态系统数学模型的基础是（常）微分方程。

- **3a. 集总参数系统**：物理参数不随空间位置变化。
- **3b. 定常系统**：物理参数不随时间变化。
- **4. 数学模型**：分析法（理论建模）和实验法（系统辨识）；
  不同的系统可能有相同的数学模型。

2.1控制系统微分方程的建立

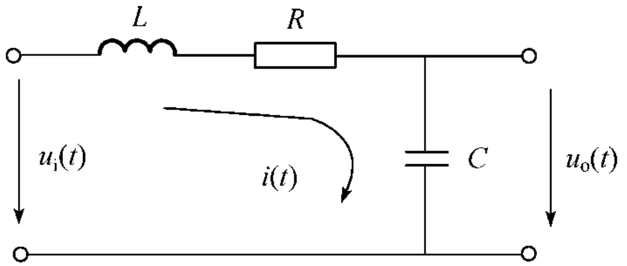
- 单变量线性定常系统

$$c^{(n)}(t)+a_1c^{(n-1)}(t)+a_2c^{(n-2)}(t)+\cdots+a_{n-1}\dot{c}(t)+a_nc(t)$$
$$=b_0r^{(n)}(t)+b_1r^{(n-1)}(t)+b_2r^{(n-2)}(t)+\cdots+b_{n-1}\dot{r}(t)+b_nr(t)$$

输出(c)在左，输入(r)在右，降阶排列

- 列写步骤：
  - 1）确定输出与输入量。
  - 2）列写原始方程组，方程个数比中间变量多1。
  - 3）消去中间变量。
  - 4）标准化整理。

- *简单的电气系统与机械系统举例。*
- 1.电气系统
- 常用关系式　$\sum i = 0$ ，$\sum u = 0$ ，$u = Ri$ ，$u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ ，$i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$
- 例2-1-1　列写微分方程式。
- 解　设回路电流为中间变量。



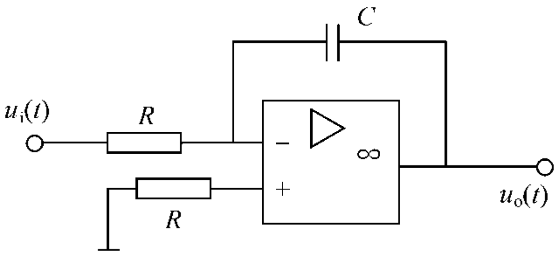
$$L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + Ri(t) + u_o(t) = u_i(t) \quad , \quad i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_o(t)}{\mathrm{d}t}$$

消去中间变量 $i(t)$ 可得 $$LC\frac{\mathrm{d}^2 u_o(t)}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_o(t)}{\mathrm{d}t} + u_o(t) = u_i(t)$$

$$\Rightarrow \quad T_1 T_2\frac{\mathrm{d}^2 u_o(t)}{\mathrm{d}t^2} + T_2\frac{\mathrm{d}u_o(t)}{\mathrm{d}t} + u_o(t) = u_i(t)$$

其中 $T_1 = L/R$ ，$T_2 = RC$

- 例 2-1-2　列写微分方程式。
- 解　运算放大器的正、反相输入端电位相同（虚短），输入电流为零（虚断）。



$$\frac{u_i(t)}{R}+C\frac{\mathrm{d}u_o(t)}{\mathrm{d}t}=0$$

$$\Rightarrow \quad RC\frac{\mathrm{d}u_o(t)}{\mathrm{d}t}=-u_i(t)$$

$$\Rightarrow \quad T\frac{\mathrm{d}u_o(t)}{\mathrm{d}t}=-u_i(t) \quad , \quad T=RC$$

- 2.机械系统
- 遵循力学定律

$$\sum F = m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \sum T = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$F_c = F_B + F_f = f\frac{dx}{dt} + F_f, \quad T_c = T_B + T_f = K_c\frac{d\theta}{dt} + T_f$$

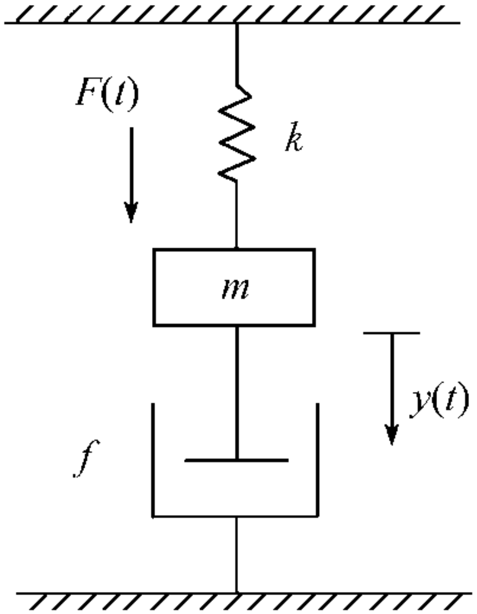
- 例 2-1-3 列写系统的运动方程式。
- 解

$$F(t) - F_k - F_B + mg = m\frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

$$F_B = f\frac{dy(t)}{dt}, \quad F_k = k[y(t) + y_0], \quad mg = ky_0$$

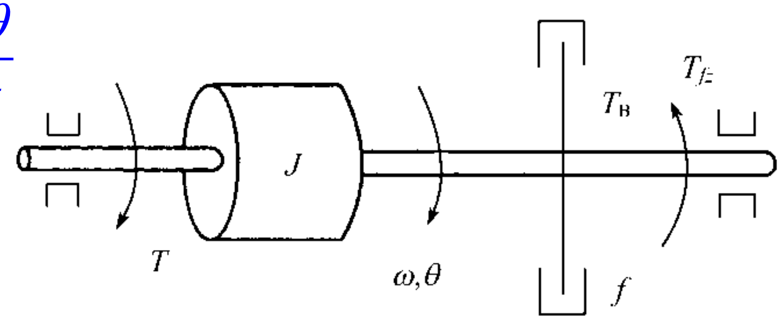
$$\Rightarrow \quad m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + f\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = F(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m}{k}\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{f}{k}\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{1}{k}F(t)$$

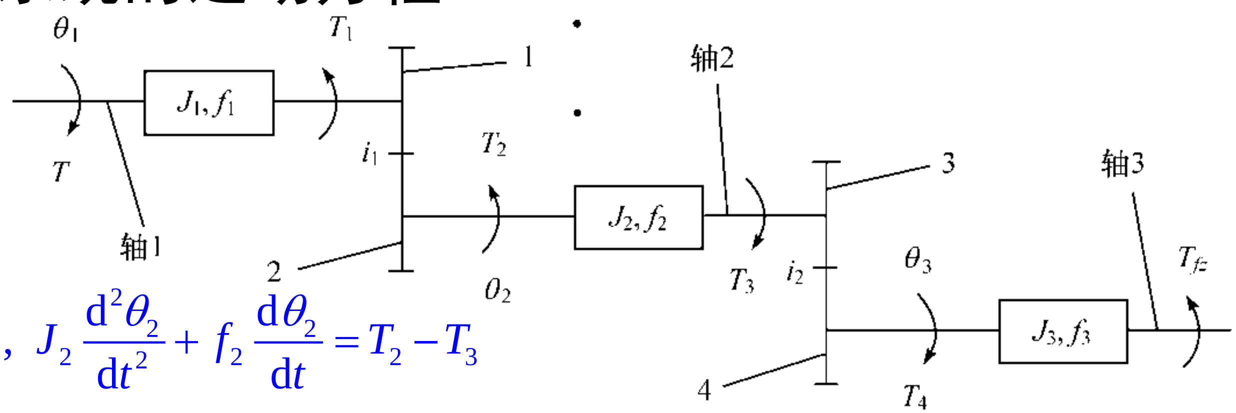


- 例 2-1-4 列写系统的运动方程式。【不做要求】
- 解 $J\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=T-T_B-T_{fz}$ ，$T_B=f\omega$ ，$\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

$$\Rightarrow\ J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+f\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=T-T_{fz}$$



- 例 2-1-5 列写系统的运动方程。【不做要求】
- 解



$$J_1\frac{\mathrm{d}^2\theta_1}{\mathrm{d}t^2}+f_1\frac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}t}=T-T_1\ ,\ J_2\frac{\mathrm{d}^2\theta_2}{\mathrm{d}t^2}+f_2\frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}t}=T_2-T_3$$

$$J_3\frac{\mathrm{d}^2\theta_3}{\mathrm{d}t^2}+f_3\frac{\mathrm{d}\theta_3}{\mathrm{d}t}=T_4-T_{fz}$$

$$\theta_2=\frac{\theta_1}{i_1}\ ,\ \theta_3=\frac{\theta_2}{i_2}\ ,\ T_1\theta_1=T_2\theta_2\ ,\ \mathrm{T}_3\theta_2=T_4\theta_3$$

$$\Rightarrow\ (J_1+\frac{J_2}{i_1^2}+\frac{J_3}{i_1^2i_2^2})\frac{\mathrm{d}^2\theta_1}{\mathrm{d}t^2}+(f_1+\frac{f_2}{i_1^2}+\frac{f_3}{i_1^2i_2^2})\frac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}t}=T-\frac{T_{fz}}{i_1i_2}$$

经典控制理论部分体系结构

分 析 (3 4 5)

1 一般概念 → 2 系统模型 → 3,4,5 性能指标

名称	对象模型	方法
时域法[3]	微分方程	[解方程]
复域法[4]	传递函数	[开环零极点]
频域法[5]	[频率特性函数]	[幅频特性、相频特性]

设 计（校正） (5)

微分方程 > 传递函数

$$\mathrm{L}\{f(t)\}=\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

微分方程 > 频率特性函数

$$\mathrm{F}\{f(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

图中数字表示章节号，录音发到zm1840@163.com

2.2 传递函数

2.2.1传递函数的定义

- 传递函数把输出和输入的关系表示得简单明了。

$$c^{(n)}(t)+a_1c^{(n-1)}(t)+a_2c^{(n-2)}(t)+\cdots+a_{(n-1)}\dot{c}(t)+a_nc(t)$$

$$=b_0r^{(n)}(t)+b_1r^{(n-1)}(t)+b_2r^{(n-2)}(t)+\cdots+b_{n-1}\dot{r}(t)+b_nr(t)$$

令初始条件为零：

$$r^{(i)}(0)=0\ ,\ (i=0,1,2,\cdots,n-1)\ \ ,\ \ c^{(i)}(0)=0\ ,\ (i=0,1,2,\cdots,n-1)$$

取拉氏变换得：

$$（s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n）C(s)=(b_0s^n+b_1s^{n-1}+\cdots+b_{n-1}s+b_n)R(s)$$

$$\Rightarrow\ \frac{C(s)}{R(s)}=\frac{b_0s^n+b_1s^{n-1}+\cdots+b_{n-1}s+b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}=\frac{N(s)}{D(s)}$$

式中 $N(s)=b_0s^n+b_1s^{n-1}+\cdots+b_{n-1}s+b_n$

$$D(s)=s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n$$

- 传递函数的定义：初始条件为零时，输出信号的拉氏变换式与输入信号的拉氏变换式之比。

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)} \quad \Leftrightarrow \quad C(s)=G(s)R(s)$$

- 例 2-2-1　　求例2-1-1的传递函数。
- 解

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_\mathrm{o}(t)}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{o}(t)}{\mathrm{d}t}+u_\mathrm{o}(t)=u_\mathrm{i}(t)$$

$$\Rightarrow \quad (LCs^2+RCs+1)U_\mathrm{o}(s)=U_\mathrm{i}(s)$$

$$\Rightarrow \quad G(s)=\frac{U_\mathrm{o}(s)}{U_\mathrm{i}(s)}=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}$$

- 例 2-2-2 求例2-1-2的传递函数。
- 解

$$RC\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t}=-u_{\mathrm{i}}(t)$$

$$\Rightarrow\quad RCsU_{\mathrm{o}}(s)=-U_{\mathrm{i}}(s)\qquad\Rightarrow\quad G(s)=\frac{U_{\mathrm{o}}(s)}{U_{\mathrm{i}}(s)}=-\frac{1}{RCs}$$

- 例 2-2-3 求例2-1-3的传递函数。
- 解

$$m\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+f\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+ky(t)=F(t)$$

$$\Rightarrow\quad (ms^2+fs+k)Y(s)=F(s)$$

$$\Rightarrow\quad G(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{1}{ms^2+fs+k}=\frac{\frac{1}{k}}{\frac{m}{k}s^2+\frac{f}{k}s+1}$$