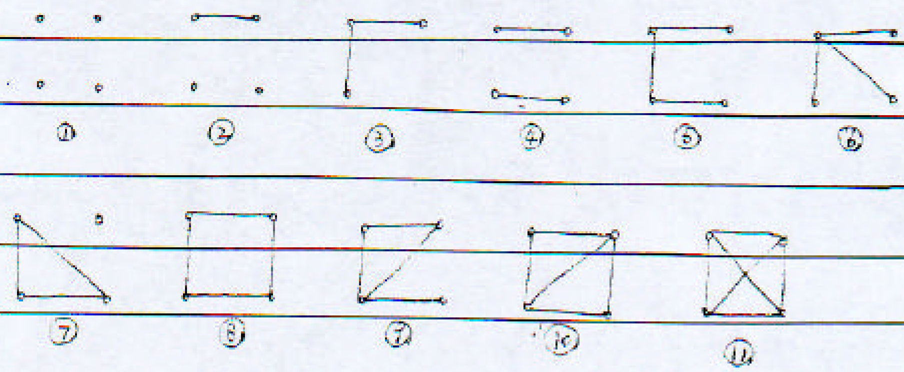
第六章 图的基本概念

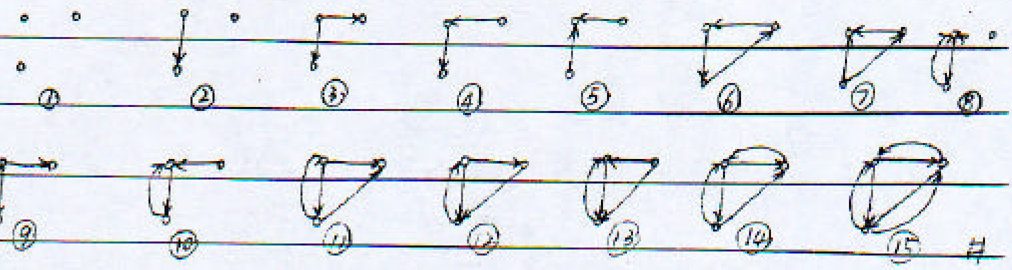
§6.2

1. 解.



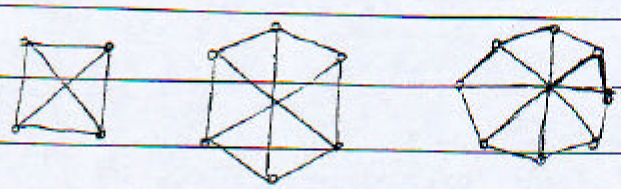
#

2. 解.



#

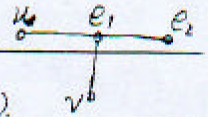
3. 解.



#

§6.3

1. 解：若 u 与 v 间有两条不同的通道，则 G 中不一定有圈.(如.



u 与 v 间有2条不同的通道：$l_1: ue_1v$；$l_2: ue_1e_2e_1v$，但没有圈)

若 u 与 v 间有两条不同的迹，则 G 中一定有圈.

#.

2. [证] 施归纳于 p，只须证明如若 $q<p-1$ 则 G 不连通即可。

(i) $p=2$ 时 显然结论成立 (ii) 假设对 p 个顶点的图若 $q<p-1$ 则结论成立，往证

G有$p+1$个顶点且$q<p$时G不连通. 这时G中必有一个顶点u使$\deg u=1$. 考虑$G-u$. 它有p个顶点, 边数$q<p-1$. 由归纳假设$G-u$不连通, 从而至少有2个支. 而$\deg u=1$. 不可能连接2个支 $\Rightarrow$ G不连通. 综合(i)(ii), 结论得证. [证毕]

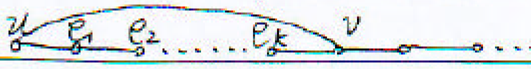
3. [证] 若G不连通, 则G^c连通, 但G^c边数 $=\frac{1}{2}p(p-1)-q<\frac{1}{2}p(p-1)-\frac{1}{2}(p-1)(p-2)=p-$
由第2题结论知G^c不连通, 与假设矛盾, 故G连通. [证毕]

4. [证]. 假设G不连通, 则G至少有2个支, 设$G_1=(V_1,E_1)$是其中一个支, 其他各支构成的子图为$G_2=(V_2,E_2)$. $|V_1|=n_1$, $|V_2|=p-n_1$, 则$\forall u\in V_1$, $v\in V_2$, 有

$$\left.\begin{aligned}&\left[\frac{p}{2}\right]\le \deg u\le n_1-1 \quad ①\\ &\left[\frac{p}{2}\right]\le \deg v\le (p-n_1)-1 \quad ②\end{aligned}\right\}\quad ①+②:\ p-1\le \deg u+\deg v\le p-2 \text{ 矛盾}$$

$\therefore$ G是连通的 [证毕]

6. [证] 建立图论模型. 每个人作为1个顶点, 并在每个人与他的朋友之间连一条边, 则对$\forall$顶点v, $\deg v\ge m\ge 2$. 往证存在长度至少为$(m+1)$的圈.
由n个人及其朋友关系构成的图G. 考虑G中的最长路. 设路的起点为u, 则所有与u邻接的顶点均在最长路上(否则将出现更长的路). 设与u邻接的最远的顶点为v. (如图)



依题意, 在最长路上, 由u至v至少有$m+1$个顶点($\because \deg u\ge m$) 则 $ue_1e_2\cdots e_kvu$ 构成一个至少含$m+1$个顶点的圈, 即: 有不少于$m+1$个人, 使得他们按某种方法坐在一张圆桌旁, 每人的左右均是他的朋友。 [证毕]

§6.4

1.[证]：对于 G 中的任意顶点 u, v，若 u, v 在 G 中不邻接，则必在 G^c 中邻接；若 u, v 在 G 中邻接，因为 G 不连通，则 G 至少有两个支。设 $G_1=(V_1, E_1)$，$G_2=(V_2, E_2)$，则边 uv 必在其中某一个支上，不妨设 $uv \in E_1$。于是对 $\forall w \in V_2$，在 G 中均不与 u 和 v 邻接，因此在 G^c 中有边 uw，wv。所以在 G^c 中，u, v 之间有路 uwv。综上所述，对 G^c 中任意两个不同的顶点间至少有一条路，即 G^c 是连通图。[证毕]

3.[证]：因为在自补图 (p, q) 中，$\frac{1}{2}p(p-1)$ 必为偶数，所以 $p=4n$ 或 $p-1=4n$ $(n \in Z)$，即 $p=4n$ 或 $p=4n+1$。 [证毕]

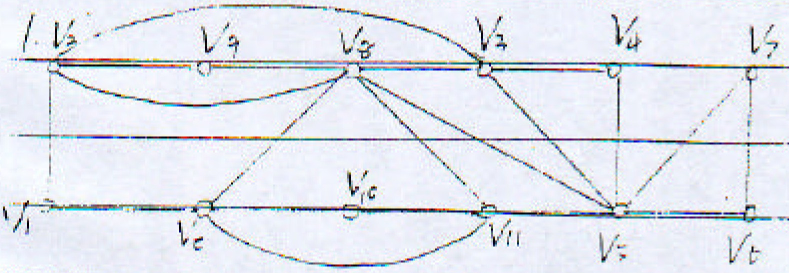
4.解：将 $2n$ 个顶点记为 $u_1, u_2, \cdots u_{2n}$，并依次连成一个圈，再使 u_i 与 u_{i+n} 邻接 $(1 \leq i \leq n)$，即得到一个三次图。因为在此图中 $\forall u_{i-1}$，u_{i+1}，u_{i+n} 互不邻接，所以此图中没有三角形。于是该图便是满足条件的没有三角形的三次图。

8.

	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	

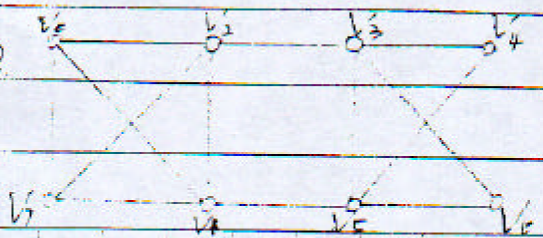
[证]：按图示方法给棋盘的每个格标上 0 或 1，则每张骨牌只能盖住两个标有不同数码的方格。要使 15 张骨牌不重叠地盖住这张剪了两个对角的棋盘，则标有 0 的格数与标有 1 的格数应相等。但由图可得标有 0 的格数比标有 1 的格数少 2，因此不能盖住。

§6.5

1. 

一条欧拉闭迹为

$v_0v_1v_2v_3v_4v_5v_6$
$v_7v_5v_3v_8v_9v_2v_8$
$v_6v_{10}v_{11}v_3v_5v_{11}v_0$

2. 

一条欧拉迹为

$v_6v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_3v_5v_1$
$v_5v_6v_2v_5$

3.

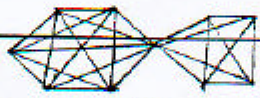
0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0

出口

入口

解：按图示方法给所有展室标上0或1，若要使每个展室参观一次且仅一次，则这样的参观路线是一个0，1的交错序列，且该序列的首尾均是1。显然，在该序列中"1"的个数比"0"多1个。但在图中"0"，"1"的个数相等，所以不存在这样的参观路线。

1. 给出一个10个顶点的非哈密顿图的例子，使得每一对不邻接的顶点 u 和 v，均有 $\deg u + \deg v \geq 9$

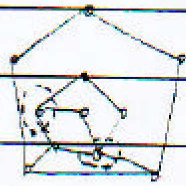
例： 或 

2. 试求 K_p 中不同的哈密顿圈的个数

P 个顶点的全排列为 $P!$ 把序列首尾相连，即获得哈密顿圈

但由于这个圈上任一顶点都可视为序列的起始元素，即 $P!$ 中把同一哈密顿圈重复计算了 P 次，同样 $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, \cdots, v_p$ 与 $v_1\ v_p\ v_{p-1} \cdots$ 这两个序列首尾连结所得的也是同一个圈，因而 P 个顶点可获得的哈密顿圈的个数为 $\frac{P!}{P\times 2} = \frac{(P-1)!}{2}$

3. 试证 图6.6.5中的图不是哈密顿图



证：去掉虚线圈住的顶点，可获得3个支

故它不是哈密顿图

4. 完全偶图 $K_{m,n}$ 为哈密顿图的充分必要条件是什么？

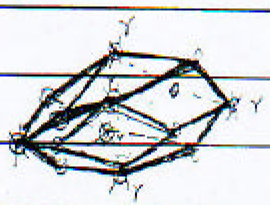
充分必要条件是 $m=n$

充分性：当 $m=n$ 时 $K_{m,n}$ 中任意顶点 v，$\deg v = m = \frac{P}{2}$ 故 $K_{m,n}$ 为哈氏图

必要性：把 $K_{m,n}$ 用红黑两色着色，m 个顶点着红色，n 个顶点着黑色，哈密顿圈上应为"红黑、红黑……红黑"，因为 $m+n$ 个顶点都在这个圈上，故红顶点数＝黑顶点数，即等价于 $m=n$

5. 菱形12面体的表面上无哈氏圈

证 菱形12面体如右图



采用双着色，由于着不同颜色的顶点数目不等，故无哈氏圈	14个顶点中 六个红色的 8个黑色的

6. 设G是一个p（$p\geq 3$）个顶点的图。u和v是G的两个不邻接的顶点，并且 $\deg u+\deg v\geq p$.

证明：G是哈密顿图当且仅当 $G+uv$ 是哈氏图

证：必要性显然

充分性 若 $G+uv$ 中有不包含uv边的哈氏圈 结论自然成立

反之 若 $G+uv$ 中的哈氏圈必包含uv边，去掉uv边即得哈氏路

$u\ v_1\ v_2\cdots v_{p-2}\ v$ 设 $\deg u=k$ 则 $v_{i_1},v_{i_2}\cdots v_{i_k}$（$i_k\leq p-2$）为与u邻接的顶点，由于无哈氏圈，那么v不能与 $v_{i_1-1}\ v_{i_2-1}\cdots v_{i_k-1}$ 邻接，否则若v与这k的顶点中 v_{i_p-1} 邻接就存在哈氏圈

$u\ v_1\ v_2\cdots v_{i_p-1}\ v\ v_{p-2}\cdots v_{i_p}\ u$。也就是说 $\deg v\leq p-k-1$

则 $\deg u+\deg v\leq p-k-1+k=p-1$ 与已知矛盾 因而G中必含有哈氏圈

即G为哈密顿图。

7. 设G是一个有p个顶点的连通图。证明：如果 $p>2\delta(G)$ 则有长至少为 $2\delta(G)$ 的路

证 设G中最长路为 $2\delta(G)-1$ 即G的最长路上为 $2\delta(G)$ 个顶点，如果以这个最长路的顶点为顶点集的G的子图 G' 有哈氏圈，那么由于G是连通图则最长路至少为 $2\delta(G)$。假设 G' 中无哈氏圈 往证这~~是不成立~~种情况是不成立的。$2\delta(G)-1$ 长的最长路为 $v_1\ v_2\cdots v_{2\delta(G)}$

$\deg v_1=k\geq\delta(G)$ 则设与 v_1 邻接的顶点为 $v_{i_1}\ v_{i_2}\cdots v_{i_k}$（$i_k<2\delta(G)$）

由于不存在哈氏圈 $v_{2\delta(G)}$ 只能与 $2\delta(G)-k-1$ 个顶点相邻接 即 $\deg v_{2\delta(G)}\leq$
$2\delta(G)-k-1<\delta(G)$ 这与已知最小度为 $\delta(G)$ 相矛盾。故 $2\delta(G)-1$ 的路必可形成一个圈，那么最长路是 $2\delta(G)-1$ 的假设就被推翻；

所以p顶点连通图G，$p>2\delta(G)$ 有长至少为 $2\delta(G)$ 的路。

8. 设G是一个有p个顶点q条边的图，试证：如果 $q=\frac{1}{2}(p-1)(p-2)+2$，则G哈密顿图。

邱立杰翻译

证 $G(P,q)$ ~~如果~~与 k_p 比较共缺少 $\frac{P(P-1)}{2}-[\frac{(P-1)(P-2)}{2}+2]=P-3$ 条边

找G中度数最小的两个顶点，若两者度数之和满足大于等于P，则结论必然成立

事实上当这P-3条边均与V连接 则 $\deg v=(P-1)-(P-3)=2$

另一顶点 u 与 v 之间的边也在缺少的这 P-3 条边构成的集合中，

即 $\deg u=(P-1)-1=P-2$　　$\deg v+\deg u=P$ 在相对 K P-3 条边的 G 中 $\deg u+\deg v=P$ 为最小值 因此 G 中任何不邻接顶点的度数之和均大于等于P，故G中含哈氏圈，G为哈氏圈。

9. 给出一个非哈密顿图G的例子，使得G有P个顶点和 $\frac{1}{2}(P-1)(P-2)$ 条边。 作 K_{P-1}，顶点 v 与 K_{P-1} 中任一顶点相连接，即得满条件的图

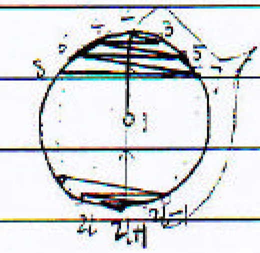
12. 证明：如果P为奇数，则 K_P 中有 $(P-1)/2$ 个两两无公共边的哈密顿

证 ∵ K_P 中共有 $\frac{P(P-1)}{2}$ 条边　每个哈密顿圈上有 P条边，故无公共边的哈氏圈至多为 $\frac{P(P-1)}{2P}=\frac{P-1}{2}$

下面证明恰有 $\frac{P-1}{2}$ 个哈氏圈

设 $P=2l+1$ 把 $2l$ 个顶点均分在一个圈上，一个顶点处于圈内

按图中标号顺序即构造了一个哈氏圈



当把圆每旋转一个角度时，仍按这种位置关系排列，便得到一个新的哈氏圈，故共可得到无公共边的哈氏圈 l 个 $l=\frac{P-1}{2}$