哈工大　2009　年 秋 季学期

概率论与数理统计　　试　题

（注：需用到的标准正态分布表，$t-$分布表见第四页末尾处。）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
分数											

一、填空题（每题 3 分，共计 15 分）

1．若事件 A,B 满足 $P(B|A)=P(\overline{B}|A)$，则 $P(B|A)=$_________.

2. 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4},\ P(AB)=0,\ P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{16}$，则 A,B,C 都不发生概率为___________.

3．设 r. v X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x,0<x<1\\0,\quad 其他\end{cases}$，对 X 进行三次独立重复观察，用 Y 表示事件

$(X\le\dfrac{1}{2})$ 出现的次数，则 $P(Y=2)=$______.

4．已知一批零件长度 $X\sim N(\mu,16),\mu$未知，从中随机地抽取 9 个零件，得样本均值 $\overline{X}=30$，则

μ 的置信度为 0.95 的置信区间是_________________.

5．设随机变量 X,Y 相互独立，且都服从区间 [0, 1] 的均匀分布，则 $P(X+Y\le 1)=$__________..

二、单项选择题（每题 3 分，共计 15 分）

1．设 A,B 为两个事件，$P(A)\ne P(B)>0$，且 $B\subset A$，则一定成立【　　】

（A）$P(B|A)=1$；　（B）$P(A|B)=1$；（C）$P(B|\overline{A})=1$；　（D）$P(A|\overline{B})=0$.

2．设 A,B,C 三个事件两两独立，则 A,B,C 相互独立的充分必要条件是【　　】

（A）AB 与 AC 独立;（B）AB 与 $A\cup C$ 独立;（C）A 与 BC 独立;（D）$A\cup B$ 与 $A\cup C$ 独立.

3．设 r. v X,Y 独立同分布，$X\sim U[0,1]$，则下列 r. v 中服从均匀分布的是【　　】.

（A）(X,Y)；　　（B）$X+Y$；　　（C）X^2；　　（D）$X-Y$.

4．设随机变量 X 服从参数为 3 的泊松分布，$Y\sim N(-3,9)$，且 $\rho_{XY}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，

根据切比晓夫不等式有：$P(|X+Y|\le 6)\ \ge$【　　】

（A）$\dfrac{1}{8}$.　　（B）$\dfrac{1}{2}$.　　（C）$\dfrac{1}{4}$.　　（D）$\dfrac{2}{9}$.

5．设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$EX=\mu,\ DX=\sigma^2,\ \bar{X}$ 是样本均值，S^2 是样本方差，S^{*2} 为样本的二阶中心矩，则【　　】

（A）$\overline{X}\sim N(\mu,\sigma^2)$.　　（B）$\dfrac{(n-1)S^{*2}}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$.

（C）$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 是 σ^2 的无偏估计.（D）$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n}\sim t(n-1)$.

三.（10 分）三个箱子，第一个箱子中有 4 个黑球，1 个白球；第二个箱子中有 3 个黑球，3 个白球；第三个箱子中有 3 个黑球，5 个白球. 现随机地取一个箱子，再从这个箱子中取出一个球，求该球是白球的概率？

四、（10 分）设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)} & x>0, y>0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

试求随机变量 $Z=X-Y$ 的分布函数与概率密度.

五、（10 分）已知随机变量 X 和 Y 分别服从 $N(1,\ 3^2)$ 和 $N(0,\ 4^2)$，且 X 和 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=-\dfrac{1}{2}$，设 $Z=\dfrac{X}{3}+\dfrac{Y}{2}$，（1）求 EZ 和 DZ （2）求 ρ_{XZ}

六、（14 分）. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\lambda)=\begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}, \lambda>0,$$

而 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.求：

（1）未知参数 λ 的矩估计和极大似然估计;

（2）讨论上述估计的无偏性。

七（6 分）设 $X\sim N(0,1)$, 且 $P(Y=0)=P(Y=1)=\dfrac{1}{2}$, X与Y 独立，$Z=XY$

求⑴ 随机变量$Z=XY$的分布函数$F_Z(z)$；（2）讨论$F_Z(z)$的连续性。

（$t_{0.025}(8)=2\cdot 3060,\ t_{0.05}(8)=1\cdot 8595,\ t_{0.05}(9)=1.8331,\ t_{0.025}(9)=2.2622$
$\Phi(1.96)=0.975$，$\Phi(1.645)=0.95$）

2009 概率统计考试题答案

一、 填空题

1. $\frac{1}{2}$;2. $\frac{3}{8}$;3. $\frac{9}{64}$;4. $(\bar{x}-\frac{4}{\sqrt{9}}u_{0.025},\bar{x}+\frac{4}{\sqrt{9}}u_{0.025})=(30-\frac{4}{3}\times1.96,30+\frac{4}{3}\times1.96)$;5. $\frac{1}{2}$

二、选择题

1.B;　　2.C;　　3.A;　　4.B;　　5.D

三、**解**：设 $B=$ “取出的一个球是白球”，再设 A_i = “取到了第 i 箱”，$i=1,2,3$.　3 分

则由全概率公式有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=\frac{1}{3}(\frac{1}{5}+\frac{3}{6}+\frac{5}{8})=\frac{53}{120}$$　7 分

四、**解**：（1） $f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)} & x>0,y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}e^{-x}.e^{-y}, x>0,y>0\\ 0, \quad \text{其它}\end{cases}=f_X(x)f_Y(y)$，

$\forall x,y\in R$

所以，X,Y 相互独立同分布，$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, x>0\\ 0, \quad x\le 0\end{cases}$

利用卷积公式有：Z 的概率密度为

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(x-z)dx$，使被积函数不为 0 的积分区域：$\begin{cases}x>0\\ x-z>0\end{cases}$

$$\text{当}z\le 0\text{时，}f_Z(z)=\int_0^{\infty}e^{-x}\cdot e^{-(x-z)}dx=e^z(-\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^{\infty})=\frac{1}{2}e^z;$$

$$\text{当}z>0\text{时，}f_Z(z)=\int_z^{\infty}e^{-x}\cdot e^{-(x-z)}dx=e^z(-\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_z^{\infty})=\frac{1}{2}e^{-z}.$$

6 分

$$F_z(z)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{z}f_Z(x)dx=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{2}e^xdx=\frac{1}{2}e^x\Big|_{-\infty}^{z}=\frac{1}{2}e^z, z\le 0\\ \int_{-\infty}^{z}f_z(x)dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^xdx+\int_0^z\frac{1}{2}e^{-x}dx=1-\frac{1}{2}e^{-z}, z>0\end{cases}$$

4 分

（2）利用分布函数方法

$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X-Y\le z)$

当 $z>0$ 时 $F_Z(z)=\int_0^z dx\int_0^{+\infty} e^{-(x+y)}dy+\int_z^{\infty} dx\int_{x-z}^{+\infty} e^{-(x+y)}dy$

$$=\int_0^z e^{-x}dx\int_0^{+\infty} e^{-y}dy+\int_z^{+\infty} e^{-x}dx\int_{x-z}^{+\infty} e^{-y}dy$$

$$=1-e^{-z}+e^{z}\int_z^{+\infty} e^{-2x}dx=1-e^{-z}+\frac{1}{2}e^{-z}$$

$$=1-\frac{1}{2}e^{-z}$$

当 $z\le 0$ 时 $F_Z(z)=\int_0^{+\infty} dx\int_{x-z}^{+\infty} e^{-(x+y)}dy=e^{z}\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx$

$$=\frac{1}{2}e^{z}$$ 6 分

$$\therefore F_Z(z)=\begin{cases}1-\frac{1}{2}e^{-z} & z>0\\ \frac{1}{2}e^{z} & z\le 0\end{cases} \qquad \therefore f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-z} & z>0\\ \frac{1}{2}e^{z} & z\le 0\end{cases} \quad -\infty<z<+\infty$$

4 分

五、解：（1）$EZ=\frac{1}{3}EX+\frac{1}{2}EY=\frac{1}{3}$

$$DZ=D(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=\frac{1}{9}DX+\frac{1}{4}DY+2COV(\frac{X}{3},\frac{Y}{2}) =$$

$$\frac{1}{9}\times 9+\frac{1}{4}\times 16+2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}$$

$$=1+4+2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})\times 3\times 4=3$$ 5 分

（2）$EXZ=EX(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=\frac{1}{3}EX^{2}+\frac{1}{2}EXY$

$$=\frac{1}{3}[DX+(EX)^2]+\frac{1}{2}[\mathrm{Cov}(X,Y)+EXEY]$$

$$=\frac{1}{3}(9+1)+\frac{1}{2}(\rho_{XY}\sqrt{DX\cdot DY}+0)$$

$$=\frac{10}{3}+\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot 3\cdot 4=\frac{1}{3}$$

于是 $\mathrm{Cov}(X,Z)=E(XZ)-EXEZ=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$

故 $\rho_{XZ}=0$ 5 分

六、解：(1)参数λ的矩估计:

$$\mu_1 = EX = \int_0^{+\infty} x\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}x}dx = -\int_0^{+\infty} xd\left(e^{-\frac{1}{\lambda}x}\right)$$
$$= \left[-xe^{-\frac{1}{\lambda}x}\Big|_0^{+\infty} + (-\lambda)e^{-\frac{1}{\lambda}x}\Big|_0^{+\infty}\right] = \lambda,$$

所以参数λ的矩估计$\hat{\lambda} = \overline{X}$。 4 分

参数λ的极大似然估计:似然函数为

$$L(x_1,\cdots,x_n;\lambda) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}x_i}\right) = \frac{1}{\lambda^n}\exp\left\{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i\right\}$$

求对数

$$\ln L(\lambda) = -n\ln\lambda - \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

求导数，令其为零，得似然方程：$\dfrac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda} = -\dfrac{n}{\lambda} + \dfrac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}x_i \triangleq 0$

解似然方程得：$\lambda = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i = \bar{x}$

故参数λ的极大似然估计为$\hat{\lambda} = \overline{X}$。 8 分

(2)因为$E\overline{X} = EX = \lambda$，所以$\hat{\lambda} = \overline{X}$是$\lambda$的无偏估计。 2 分

七．解：（1）

$\forall z \in R, F_Z(z) = P(Z \le z) = P(XY \le z)$

又X,Y是定义于同一个样本空间之上的随机变数

$\therefore S = (Y=0) + (Y=1)$

利用全概率公式：

$$F_Z(z) = P(Y=0)P(XY \le z|Y=0) + P(Y=1)P(XY \le z|Y=1)$$
$$= \frac{1}{2}P(0 \le z|Y=0) + \frac{1}{2}P(X \le z|Y=1) = \frac{1}{2}P(0 \le z) + \frac{1}{2}P(X \le z)$$

(利用0与Y独立，X与Y独立）

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{2}\times\Phi(z), z \ge 0 \\ \frac{1}{2}\times 0 + \frac{1}{2}\times\Phi(z), z < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(z), z \ge 0 \\ \frac{1}{2}\Phi(z), z < 0 \end{cases}$$ 4 分

（2） $F_Z(z)$有一个间断点（$z=0$）

（$\because \lim\limits_{z\to 0+}F_Z(z) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\Phi(0) = \dfrac{3}{4} \ne \lim\limits_{z\to 0-}\dfrac{1}{2}\Phi(z) = \dfrac{1}{4}$） 2 分