東北大學
Northeastern University

数值分析

理学院　　数学系

计算数学教研室

2017年12月13日

知识点1 迭代法的基本思想

考虑线性方程组

$$Ax = b, \tag{3.1}$$

其中A为非奇异矩阵，当A为低阶稠密矩阵时，前面讨论的选主元消去法是解(3.1)的有效方法．但是，对于由工程技术中产生的大型稀疏矩阵方程组(A的阶数n很大，但零元素较多),利用迭代法求解是合适的．在计算机内存和计算两方面，迭代法都可利用A中有大量零元素的特点．

例1　求解线性方程组

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20, \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33, \\ 6x_1 + 3x_2 + 12x_3 = 36. \end{cases} \tag{3.2}$$

记为$Ax = b$，

方程组的精确解为$x^* = (3,2,1)^T$．现将(3.2)改写为

$$\boxed{x = B_0 x + f}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{8}(3x_2 - 2x_3 + 20), \\ x_2 = \dfrac{1}{11}(-4x_1 + x_3 + 33), \\ x_3 = \dfrac{1}{12}(-6x_1 - 3x_2 + 36). \end{cases} \tag{3.3}$$

或写为$x = B_0 x + f$，其中

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{8} & -\frac{2}{8} \\ -\frac{4}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ -\frac{6}{12} & -\frac{3}{12} & 0 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} \frac{20}{8} \\ \frac{33}{11} \\ \frac{36}{12} \end{pmatrix}.$$

任取初始值，不妨取$x^{(0)} = (0,0,0)^T$，将这些值代入(3.3)式右边(若等号成立，即得方程组解，但一般不满足)，得到新的值$x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})^T = (2.5,3,3)^T$，再将$x^{(1)}$代入(3.3)式右边得到$x^{(2)}$，反复利用这个计算程序，得到一个向量序列和一般的计算公式(迭代公式)

知识点1　迭代法的基本思想

$$x^{(0)}=\begin{pmatrix}x_1^{(0)}\\x_2^{(0)}\\x_3^{(0)}\end{pmatrix},\quad x^{(1)}=\begin{pmatrix}x_1^{(1)}\\x_2^{(1)}\\x_3^{(1)}\end{pmatrix},\quad\cdots,\quad x^{(k)}=\begin{pmatrix}x_1^{(k)}\\x_2^{(k)}\\x_3^{(k)}\end{pmatrix},\quad\cdots$$

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\dfrac{1}{8}(3x_2^{(k)}-2x_2^{(k)}+20),\\x_2^{(k+1)}=\dfrac{1}{11}(-4x_1^{(k)}+x_3^{(k)}+33),\\x_3^{(k+1)}=\dfrac{1}{12}(-6x_1^{(k)}-3x_2^{(k)}+36).\end{cases}\tag{3.4}$$

简记为 $x^{(k+1)}=B_0x^{(k)}+f$，其中k表示迭代次数$(k=0,1,2,\cdots)$.

迭代到第10次有$x^{(10)}=(3.000032,1.999888,0.9998813)^T$；

$$\left\|\varepsilon^{(10)}\right\|_\infty=0.000187(\varepsilon^{(10)}=x^{(10)}-x).$$

从此例看出，由迭代法产生的向量序列$x^{(k)}$逐步逼近方程组的精确解x^*.

知识点1　迭代法的基本思想

对于任何一个方程组$x=Bx+f$(由$Ax=b$变形得到的等价方程组)，由迭代法产生的向量序列$x^{(k)}$是否一定逐步逼近方程组的解x^*呢？回答是不一定.

对于给定的方程组$x=Bx+f$，设有唯一解x^*，则

$$x^{*}=Bx^{*}+f. \tag{3.5}$$

又设$x^{(0)}$为任取的初始向量，按下述公式构造向量序列

$$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f,\quad (k=0,1,2,\cdots) \tag{3.6}$$

k表示迭代次数.

知识点1　迭代法的基本思想

定义1　(1)　对于给定的方程组$x = Bx + f$，用公式$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$，逐步代入求近似解的方法称为迭代法(或称为一阶定常迭代法，这里B与k无关).

(2)　如果$\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$，则称此迭代法收敛，显然$x^*$就是方程组的解，否则称此迭代法发散.

由上述讨论，需要研究$\{x^{(k)}\}$的收敛性. 引进误差向量

$$\varepsilon^{(k+1)} = x^{(k+1)} - x^*,$$

由(3.6)减去(3.5)式，得$\varepsilon^{(k+1)} = B\varepsilon^{(k)}\quad(k = 0,1,2,\cdots)$，递推得

$$\varepsilon^{(k)} = B\varepsilon^{(k-1)} = \cdots = B^k\varepsilon^{(0)}.$$

$$x^* = Bx^* + f.$$

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f,\quad(k = 0,1,2,\cdots)$$

么条件下有$\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon^{(k)} = 0$，

亦 阵)$(k\to\infty)$.

知识点2 Jacobi与Gauss-Seidel迭代法

设有

$$Ax=b, \tag{3.7}$$

其中，$A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$为非奇异矩阵. 下面研究如何建立解$Ax=b$的各种迭代法.

将A分裂为

$$A=M-N, \tag{3.8}$$

其中，M为可选择的非奇异矩阵，且使$Mx=d$容易求解，一般选择为A的某种近似，称M为分裂矩阵.

于是，求解$Ax=b$转化为求解$Mx=Nx+b$，即求解

$$Ax=b \Leftrightarrow x=M^{-1}Nx+M^{-1}b.$$

可构造一阶定常迭代法

$$\begin{cases} x^{(0)}(\text{初始向量}), \\ x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f \quad (k=0,1,\cdots,), \end{cases} \tag{3.9}$$

其中$B=M^{-1}N=M^{-1}(M-A)=I-M^{-1}A, f=M^{-1}b$. 称$B=I-M^{-1}A$为迭代法的迭代矩阵，选取$M$阵，就得到解$Ax=b$的各种迭代法.

知识点2 Jacobi与Gauss-Seidel迭代法

设$a_{ii} \neq 0 (i=1,2,\cdots,n)$，并将$A$写成三部分

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ -a_{21} & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ -a_{n-1,1} & -a_{n-1,2} & \cdots & 0 & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
- \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1,n-1} & -a_{1n} \\ & 0 & \cdots & -a_{2,n-1} & -a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & -a_{n-1,n} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\equiv D - L - U
$$

3.2.1 Jacobi迭代法

$B = I - M^{-1}A,\quad f = M^{-1}b$

由$a_{ii} \neq 0 (i = 1,2,\cdots,n)$，选取$M$为$A$的对角元素部分，即选取$M = D$(对角阵)，$A = D - N$，由(3.8)式得到解$Ax = b$的雅可比($Jacobi$)迭代法

$$\begin{cases} x^{(0)} & (\text{初始向量}), \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f & (k = 0,1,\cdots,), \end{cases} \tag{3.10}$$

其中$B = I - D^{-1}A = I - D^{-1}(D - L - U) = D^{-1}(L + U) \equiv J, f = D^{-1}b$. 称$J$为解$Ax = b$的雅可比迭代法的迭代矩阵.

下面给出雅可比迭代法的分量计算公式，记

$$x^{(k)} = (x_1^{(k)},\ x_i^{(k)}, \cdots,\ x_n^{(k)})^T,$$

由雅可比迭代公式(3.10)有

$$Dx^{(k+1)} = (L + U)x^{(k)} + b,$$

或$a_{ii}x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + b_i \quad (i = 1,2,\cdots,n).$

于是，解$Ax=b$的雅可比迭代法的计算公式为

$$\begin{cases} x^{(0)}=(x_1^{(0)},\cdots,\ x_i^{(0)},\cdots,\ x_n^{(0)})^T, \\ x_i^{(k+1)}=(b_i-\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}a_{ij}x_j^{(k)})/a_{ii} \\ (i=1,2,\cdots,n) \quad (k=0,1,\cdots\text{表示迭代次数}). \end{cases} \tag{3.11}$$

由(3.11)式可知，雅可比迭代法计算公式简单，每迭代一次只需计算一次矩阵和向量的乘法且计算过程中原始矩阵A始终不变.

知识点2 Jacobi与Gauss-Seidel迭代法

$$Ax=b \Leftrightarrow (D-L-U)x=b \Leftrightarrow Dx=(L+U)x+b$$

$$Dx=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1,n-1} & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & \cdots & -a_{2,n-1} & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1,1} & -a_{n-1,2} & \cdots & 0 & -a_{n-1,n} \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}+b$$

$$=(L+U)x+b.$$

知识点2 Jacobi与Gauss-Seidel迭代法

取$x^{(0)}=(x_1^{(0)},\cdots,\ x_i^{(0)},\cdots,\ x_n^{(0)})^T$

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)}=-\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{(k)}-\dfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{(k)}-\cdots-\dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n^{(k)}+\dfrac{b_1}{a_{11}} \\
x_2^{(k+1)}=-\dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(k)}-\dfrac{a_{23}}{a_{22}}x_3^{(k)}-\cdots-\dfrac{a_{2n}}{a_{22}}x_n^{(k)}+\dfrac{b_2}{a_{22}} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n^{(k+1)}=-\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1^{(k)}-\dfrac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2^{(k)}-\cdots-\dfrac{a_{n,n-1}}{a_{nn}}x_{n-1}^{(k)}+\dfrac{b_n}{a_{nn}}
\end{cases}
\qquad k=0,1,2,\cdots
$$

知识点2 Jacobi与Gauss-Seidel迭代法

例2 用雅可比迭代法求解线性方程组

$$\begin{cases} 10x_1+3x_2+x_3=14 \\ 2x_1-10x_2+3x_3=-5 \\ x_1+3x_2+10x_3=14 \end{cases}$$

方程组的精确解为$x^*=(1,1,1)^T$.

解 雅可比迭代法计算公式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=-\dfrac{3}{10}x_2^{(k)}-\dfrac{1}{10}x_3^{(k)}+\dfrac{7}{5} \\ x_2^{(k+1)}=\dfrac{1}{5}x_1^{(k)}+\dfrac{3}{10}x_3^{(k)}+\dfrac{1}{2} \\ x_3^{(k+1)}=-\dfrac{1}{10}x_1^{(k)}-\dfrac{3}{10}x_2^{(k)}+\dfrac{7}{5} \end{cases}$$

取初始向量为$x^{(0)}=(0,0,0)^T$，迭代可得

$$x_1^{(1)}=1.4, x_2^{(1)}=0.5, x_3^{(1)}=1.4;\quad x_1^{(2)}=1.11, x_2^{(2)}=1.2, x_3^{(2)}=1.11$$

计算结果如下表：

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\|x^{(k)}-x^*\|_\infty$
0	0	0	0	1
1	1.4	0.5	1.4	0.5
2	1.11	1.20	1.11	0.2
3	0.929	1.055	0.929	0.071
4	0.9906	0.9645	0.9906	0.0355
5	1.01159	0.9953	1.01159	0.01159
6	1.000251	1.005795	1.000251	0.005795
7	0.9982364	1.0001255	0.9982364	0.0017636

可见，迭代序列逐次收敛于方程组的解，而且迭代7次得到精确到小数点后两位的近似解

3.2.2 Gauss-Seidel迭代法

$B = I - M^{-1}A, \quad f = M^{-1}b$

选取分裂矩阵M为A的下三角部分，记选取$M = D - L$(下三角阵)，$A = M - U$，于是得到解$Ax = b$的高斯—塞德尔($Gauss-Seidel$)迭代法

$$\begin{cases} x^{(0)} & (\text{初始向量}), \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f & (k = 0,1,\cdots,), \end{cases} \tag{3.12}$$

其中，$B = I - (D-L)^{-1}A = (D-L)^{-1}U \equiv G$，$f = (D-L)^{-1}b$. 称$G$为解$Ax = b$的高斯—塞德尔迭代法的迭代阵.

下面给出高斯—塞德尔迭代法的分量计算公式，记

$$Dx^{(k+1)} = Dx^{(k)} - (Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} - Dx^{(k)} + b)$$

由(3.12)式有 $(D-L)x^{(k+1)} = Ux^{(k)} + b$, 或 $Dx^{(k+1)} = Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} + b$,

即$a_{ii}x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$.

于是解$Ax=b$的高斯一塞德尔迭代法计算公式为

$$\begin{cases} x^{(0)}=(x_1^{(0)},\cdots,\ x_i^{(0)},\cdots,\ x_n^{(0)})^T, \\ x_i^{(k+1)}=(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)})/a_{ii} \\ (i=1,2,\cdots,n)\quad (k=0,1,\cdots). \end{cases} \tag{3.13}$$

或

$$\begin{cases} x^{(0)}=(x_1^{(0)},\ x_i^{(0)},\cdots,\ x_n^{(0)})^T, \\ x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}+\Delta x_i \\ \Delta x_i=(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i}^{n}a_{ij}x_j^{(k)})/a_{ii} \\ (i=1,2,\cdots,n)\quad (k=0,1,\cdots). \end{cases} \tag{3.14}$$

$$Dx^{(k+1)}=Dx^{(k)}-(Lx^{(k+1)}+Ux^{(k)}-Dx^{(k)}+b)$$

取$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \cdots, \ x_i^{(0)}, \cdots, \ x_n^{(0)})^T$

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(k)} - \dfrac{a_{13}}{a_{11}} x_3^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n^{(k)} + \dfrac{b_1}{a_{11}} \\
x_2^{(k+1)} = -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(k+1)} - \dfrac{a_{23}}{a_{22}} x_3^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}} x_n^{(k)} + \dfrac{b_2}{a_{22}} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n^{(k+1)} = -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1^{(k+1)} - \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2^{(k+1)} - \cdots - \dfrac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} x_{n-1}^{(k+1)} + \dfrac{b_n}{a_{nn}} \qquad k = 0,1,2,\cdots
\end{cases}
$$

例3 用高斯—塞德尔迭代法求解线性方程组

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + x_3 = 14 \\ 2x_1 - 10x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$$

方程组的精确解为$x^* = (1,1,1)^T$.

解 雅可比迭代法计算公式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{3}{10}x_2^{(k)} - \frac{1}{10}x_3^{(k)} + \frac{7}{5} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{5}x_1^{(k+1)} + \frac{3}{10}x_3^{(k)} + \frac{1}{2} \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{10}x_1^{(k+1)} - \frac{3}{10}x_2^{(k+1)} + \frac{7}{5} \end{cases}$$

取初始向量为$x^{(0)} = (0,0,0)^T$，迭代可得

$$x_1^{(1)} = 1.4, x_2^{(1)} = 0.78, x_3^{(1)} = 1.026;$$

$$x_1^{(2)} = 1.0643, x_2^{(2)} = 1.02048, x_3^{(2)} = 0.987516$$

知识点2 Jacobi与Gauss-Seidel迭代法

计算结果如下表：

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\|x^{(k)}-x^*\|_\infty$
0	0	0	0	1
1	1.4	0.78	1.026	0.4
2	1.0634	1.02048	0.987516	0.0634
3	0.9951044	0.99527568	1.00190686	0.0048956

由此可见，高斯—塞德尔迭代法收敛较快. 取精确到小数点后两位的近似解, 高斯—塞德尔迭代法只需迭代3次，而雅可比迭代法则需要迭代7次.

知识点3 逐次超松弛迭代法-SOR方法

选取分裂矩阵M为带参数的下三角阵

$$M=\frac{1}{\omega}(D-\omega L),\quad B=I-M^{-1}A,\quad f=M^{-1}b$$

其中，$\omega>0$为可选择的松弛因子.

于是，由(2.3)可在构造一个迭代法，其迭代矩阵为

$$L_{\omega}\equiv I-\omega(D-\omega L)^{-1}A=(D-\omega L)^{-1}((1-\omega)D+\omega U).$$

从而得到解$Ax=b$的逐次超松弛迭代法(*Successive Over Relaxation Method*，简称*SOR*方法).

解$Ax=b$的*SOR*方法为

$$\begin{cases} x^{(0)} & (\text{初始向量}), \\ x^{(k+1)}=L_{\omega}x^{(k)}+f & (k=0,1,\cdots,), \end{cases} \tag{3.15}$$

其中$L_{\omega}=(D-\omega L)^{-1}((1-\omega)D+\omega U)$，$f=\omega(D-\omega L)^{-1}b.$

知识点3 逐次超松弛迭代法-SOR方法

下面给出解$Ax=b$的SOR迭代法的分量计算公式

$$\boxed{Dx^{(k+1)}=Dx^{(k)}-(Lx^{(k+1)}+Ux^{(k)}-Dx^{(k)}+b)}$$

由(3.15)式可得$(D-\omega L)x^{(k+1)}=((1-\omega)D+\omega U)x^{(k)}+\omega b$，或

$$Dx^{(k+1)}=Dx^{(k)}+\omega(b+Lx^{(k+1)}+Ux^{(k)}-Dx^{(k)}).$$

由此，得到解$Ax=b$的SOR方法的计算公式

$$\begin{cases} x^{(0)}=(x_1^{(0)},\cdots,\ x_i^{(0)},\cdots,\ x_n^{(0)})^T, \\ x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}+\omega(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i}^{n}a_{ij}x_j^{(k)})/a_{ii} \\ (i=1,2,\cdots,n)\quad (k=0,1,\cdots). \\ \omega\text{为松弛因子}. \end{cases} \tag{3.16}$$

或

$$\begin{cases} x^{(0)}=(x_1^{(0)},\ x_i^{(0)},\cdots,\ x_n^{(0)})^T, \\ x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}+\Delta x_i \\ \Delta x_i=\omega(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i}^{n}a_{ij}x_j^{(k)})/a_{ii} \\ (i=1,2,\cdots,n)\quad (k=0,1,\cdots). \\ \omega\text{为松弛因子}. \end{cases} \tag{3.17}$$

知识点3 逐次超松弛迭代法-SOR方法

取$x^{(0)}=(x_1^{(0)},\cdots,\ x_i^{(0)},\cdots,\ x_n^{(0)})^T$

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)}=x_1^{(k)}+\omega(-x_1^{(k)}-\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{(k)}-\dfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{(k)}-\cdots-\dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n^{(k)}+\dfrac{b_1}{a_{11}}) \\
x_2^{(k+1)}=x_2^{(k)}+\omega(-\dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(k+1)}-x_2^{(k)}-\dfrac{a_{23}}{a_{22}}x_3^{(k)}-\cdots-\dfrac{a_{2n}}{a_{22}}x_n^{(k)}+\dfrac{b_2}{a_{22}}) \\
\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n^{(k+1)}=x_n^{(k)}+\omega(-\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1^{(k+1)}-\dfrac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2^{(k+1)}-\cdots-\dfrac{a_{n,n-1}}{a_{nn}}x_{n-1}^{(k+1)}-x_n^{(k)}+\dfrac{b_n}{a_{nn}}) \\
k=0,1,2,\cdots
\end{cases}
$$

知识点3 逐次超松弛迭代法-SOR方法

(1) 显然，当$\omega=1$时，SOR方法即为高斯－塞德尔迭代法.

(2) SOR方法没迭代一次主要运算量是计算一次矩阵与向量的乘法

(3) 当$\omega>1$时，称为超松弛法；

当$\omega<1$时，称为低松弛法

(4) 在计算机实现时可用

$$\max_{1\le i\le n}\left|\Delta x_i\right|=\max_{1\le i\le n}\left|x_i^{k+1}-x_i^{k}\right|<\varepsilon$$

控制迭代终止，或用$\left\|r^{(k)}\right\|_\infty=\left\|b-Ax^{(k)}\right\|_\infty<\varepsilon$控制迭代终止

例4 用超松弛迭代法求解线性方程组(取$\omega=1.46$)

$$\begin{cases}4x_1-2x_2-4x_3=10\\-2x_1+17x_2+10x_3=3\\-4x_1+10x_2+9x_3=-7\end{cases}$$

方程组的精确解为$x^*=(2,1,-1)^T$.

解 超松弛迭代法计算公式为

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=x_1^{(k)}+\dfrac{\omega}{4}(10-4x_1^{(k)}+2x_2^{(k)}+4x_3^{(k)})\\[2ex]x_2^{(k+1)}=x_2^{(k)}+\dfrac{\omega}{17}(3+2x_1^{(k+1)}-17x_2^{(k)}-10x_3^{(k)})\\[2ex]x_3^{(k+1)}=x_3^{(k)}+\dfrac{\omega}{9}(-7+4x_1^{(k+1)}-10x_2^{(k+1)}-9x_3^{(k)})\end{cases}$$

取初始向量为$x^{(0)}=(0,0,0)^T$，$\omega=1.46$，迭代即得近似结果

知识点3 逐次超松弛迭代法-SOR方法

计算结果如下表：

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	3.65	0.8845882	-0.2021098
2	2.32166910	0.4230939	-0.22243214
3	2.5661399	0.6948261	-0.4952594
…	……	……	……
20	1.9999987	1.0000013	-1.0000034

从结果可见，迭代20次时已获得精确到小数点后5位的近似解. 如果取$\omega=1.25$，则需要迭代56次才能得到具有同样精度的近似解；如果取$\omega=1$，则需迭代110次以上.

3.4.1迭代法收敛基本定理

设

$$Ax=b, \tag{3.18}$$

其中$A\in R^{n\times n}$为非奇异矩阵，记x^*为(3.1)精确解，且设有等价的方程组

$$Ax=b \Leftrightarrow x=Bx+f.$$

于是

$$x^*=Bx^*+f. \tag{3.19}$$

设有解$Ax=b$的一阶定常迭代法

$$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f. \tag{3.20}$$

有意义的问题是：迭代矩阵B满足什么条件时，由迭代法产生的向量序列$\{x^{(k)}\}$收敛到x^*.

引进误差向量

$$\varepsilon^{(k)} = x^{(k)} - x^{*} \qquad (k = 0,1,2,\cdots)$$

由(3.20)式减去(3.19)式得到误差向量的递推公式

$$\varepsilon^{(k+1)} = B\varepsilon^{(k)},$$

$$\varepsilon^{(k)} = B^{k}\varepsilon^{(0)}, \qquad (k = 0,1,2,\cdots)$$

由前面一节所致，研究迭代法(3.20)收敛性的问题就是要研究迭代矩阵B满足什么条件时，有$B^{k} \to 0$(零矩阵)$(k \to \infty)$.

定义2　设有矩阵序列$A_k = (a_{ij}^{(k)}) \in R^{n\times n}$及$A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$，如果$n^2$个数列极限存在且有

$$\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij} \qquad (i, j = 1,2,\cdots,n),$$

则称$\{A_k\}$收敛于A，记为$\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$.

矩阵序列极限概念可以用矩阵算子范数来描述

定理1 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\|A_k - A\| = 0$，其中$\|\bullet\|$为矩阵的任一一种算子范数

证明　显然有

$$\lim_{k\to\infty} A_k = A \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}\|A_k - A\|_\infty = 0.$$

再利用矩阵范数的等价性，可证定理对其他算子范数亦成立.

矩阵序列极限概念可以用矩阵算子范数来描述

定理1 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\|A_k - A\| = 0$，其中$\|\bullet\|$为矩阵的任一一种算子范数

定理2 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A \Leftrightarrow$ 是对任何向量$x \in R^n$都有$\lim\limits_{k\to\infty} A_k x = Ax$.

定理3 设$B=(b_{ij}) \in R^{n\times n}$，则有$\lim\limits_{k\to\infty} B^k = 0$(零矩阵)的充分必要条件是矩阵$B$的谱半径$\rho(B) < 1$.

定理4 (迭代法收敛基本定理)

设有方程组

$$x = Bx + f, \tag{3.21}$$

及一阶定常迭代法

$$x^{(k+1)} = B^{(k)}x + f. \tag{3.22}$$

对任意选取初始向量$x^{(0)}$，迭代法(3.22)收敛的充要条件是矩阵B的谱半径$\rho(B) < 1$.

证明 充分性. 设$\rho(B)<1$，易知$Ax=f$(其中$A=I-B$)

有唯一解，记为x^*，则

$$x^*=Bx^*+f,$$

误差向量 $\varepsilon^{(k)}=x^{(k)}-x^*=B^{(k)}\varepsilon^{(0)}$，$\varepsilon^{(0)}=x^{(0)}-x^*$.

由设$\rho(B)<1$，应用定理3，有$\lim\limits_{k\to\infty}B^k=0$. 于是对任意$x^{(0)}$有

$\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon^{(k)}=0$，即$\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k)}=x^*$.

必要性. 设对任意$x^{(0)}$有

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*,$$

其中$x^{(k+1)} = B^{(k)}x + f$. 显然，极限x^*是方程组(3.21)的解，且对任意$x^{(0)}$有

$$\varepsilon^{(k)} = x^{(k)} - x^* = B^{(k)}\varepsilon^{(0)} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

由定理2知

$$\lim_{k\to\infty} B^k = 0,$$

再由定理3，即得$\rho(B) < 1$.

推论　设$Ax=b$，其中$A=D-L-U$为非奇异矩阵且D非奇异，则

(1)　解方程组的雅可比迭代法收敛的充要条件是$\rho(J)<1$，其中$J=D^{-1}(L+U)$.

(2)　解方程组的高斯－塞德尔迭代法收敛的充要条件是$\rho(G)<1$，其中$G=(D-L)^{-1}U$.

(3)　解方程组的SOR方法收敛的充要条件是$\rho(L_\omega)<1$，其中$L_\omega=(D-\omega L)^{-1}((1-\omega)D+\omega U)$.

例5 考察用雅可比方法解方程组 $\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 6x_1 + 3x_2 + 12x_3 = 36 \end{cases}$ 的收敛性

迭代矩阵J的特征方程为

$$\det(\lambda I - J) = \lambda^2 + 0.034090909\lambda + 0.039772727 = 0,$$

解得

$$\lambda_1 = -0.3082,$$
$$\lambda_2 = 0.1541 + i0.3245,$$
$$\lambda_3 = 0.1541 - i0.3245,$$
$$|\lambda_2| = |\lambda_3| = 0.3592 < 1, |\lambda_1| < 1,$$

即$\rho(J) < 1$. 所以用雅可比迭代法解方程组是收敛的

例6 考察用迭代法解方程组

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$$

的收敛性，其中$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

解 特征方程为$\det(\lambda I - B) = \lambda^2 - 6 = 0$，特征根

$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{6}$,即$\rho(B) > 1$. 这说明用迭代法解此方程组

不收敛

知识点5 例题及迭代法收敛的充分条件

迭代法的基本定理在理论上是重要的，由于$\rho(B)\le\|B\|$，下面利用矩阵B的范数建立判别迭代法收敛的充分条件.

定理5 (迭代法收敛的充分条件)

设有方程组$x=Bx+f,\ B\in R^{n\times n}$,及一阶定常迭代法$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$.如果有$B$的某种算子范数$\|B\|=q<1$，则

(1) 迭代法收敛，即对任取$x^{(0)}$有

$$\lim_{k\to\infty}x^{(k)}=x^*\text{且}x^*=Bx^*+f.$$

(2) $\|x^*-x^{(k)}\|\le q^k\|x^*-x^{(0)}\|$.

(3) $\|x^*-x^{(k)}\|\le\dfrac{q}{1-q}\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|$.

(4) $\|x^*-x^{(k)}\|\le\dfrac{q^k}{1-q}\|x^{(1)}-x^{(0)}\|$.

证明 (1) 由基本定理4结论(1)是显然的

(2) 显然有关系式 $x^* - x^{(k+1)} = B(x^* - x^{(k)})$ 及

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = B(x^{(k)} - x^{(k-1)}).$$

于是有 (a) $\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| \le q\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|$;

(b) $\left\|x^* - x^{(k+1)}\right\| \le q\left\|x^* - x^{(k)}\right\|$.

反复利用(b)即得(2).

(3) 考查

$$\begin{aligned}\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| &= \left\|x^* - x^{(k)} - (x^* - x^{(k+1)})\right\| \\ &\ge \left\|x^* - x^{(k)}\right\| - \left\|x^* - x^{(k+1)}\right\| \\ &\ge (1-q)\left\|x^* - x^{(k)}\right\|,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\left\|x^* - x^{(k)}\right\| &\le \frac{1}{1-q}\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| \\ &\le \frac{q}{1-q}\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|.\end{aligned}$$

(4) 反复利用(a)即得(4).

在科学即工程计算中，要求解方程组$Ax=b$，其矩阵A常常具有某些特性例如，A具有对角占优性质或A为不可约阵，或A是对称正定阵等下面讨论用基本迭代法解这些方程组的收敛性

定义3 (对角占优阵)　设$A=(a_{ij})_{n\times n}$.

(1) 如果A的元素满足

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

称A为严格对角占优阵

(2) 如果A的元素满足

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

且上式至少有一个不等式严格成立，称A为弱对角占优阵

知识点6 特殊方程组迭代法的收敛性

定理6 (对角占优定理) 如果$A=(a_{ij})_{n\times n}$为严格对角占优矩阵，则A为非奇异矩阵.

证明 反证法，如果$\det(A)=0$，则$Ax=0$有非零解，记为$x=(x_1,\cdots,x_n)^T$，则$|x_k|=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i|\ne 0$.

由齐次方程组第k个方程 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{kj}x_j=0$,

则有

$$|a_{kk}x_k|=\left|\sum_{\substack{j=1\\j\ne k}}^{n}a_{kj}x_j\right|\le\sum_{\substack{j=1\\j\ne k}}^{n}|a_{kj}|\ |x_j|\le|x_k|\ \sum_{\substack{j=1\\j\ne k}}^{n}|a_{kj}|,$$

即 $|a_{kk}|\le\sum\limits_{\substack{j=1\\j\ne k}}^{n}|a_{kj}|$, 与假设矛盾，故$\det(A)\ne 0$.

定理7　设$Ax=b$,如果：

A为严格对角占优阵，则解$Ax=b$的雅可比迭代法，高斯—塞德尔迭代法均收敛.

知识点6　特殊方程组迭代法的收敛性

证明　由设可知，$a_{ii} \neq 0(i=1,\cdots,n)$，解$Ax=b$的高斯—塞德尔迭代法的迭代矩阵为$G=(D-L)^{-1}U \quad (A=D-L-U)$．下面考查$G$的特征值情况.

$$\begin{aligned}\det(\lambda I-G)&=\det(\lambda I-(D-L)^{-1}U)\\&=\det((D-L)^{-1})\bullet\det(\lambda(D-L)-U).\end{aligned}$$

由于$\det((D-L)^{-1})\neq 0$，于是G特征值即为$\det(\lambda(D-L)-U)=0$的根，记

$$C\equiv\lambda(D-L)-U=\begin{pmatrix}\lambda a_{11} & a_{12} & & a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & & \\ & & & \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & & \lambda a_{nn}\end{pmatrix},$$

下面证明，当$\|\lambda\|\geq 1$时，则$\det(C)\neq 0$，即G的特征值均满足$|\lambda|<1$，由基本定理，则有高斯—塞德尔迭代法收敛.

知识点6　特殊方程组迭代法的收敛性

G的特征值即为 $\det(\lambda(D-L)-U)=0$的根，即 $\det(C)=0$的根是G的特征值.

要证明只有$|\lambda|<1$的时候 $\det(C)$才能等于0，就能得到高斯 $-$赛德尔迭代收敛.

反正法，当$|\lambda|\geq 1$时，若C为严格对角占优阵，则 $\det(C)\neq 0$即可

事实上，当$|\lambda|\geq 1$时，由A为严格对角占优阵，则有

$$|c_{ii}|=|\lambda a_{ii}|>|\lambda|(\sum_{j=1}^{i-1}|a_{ij}|+\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|)$$

$$\geq \sum_{j=1}^{i-1}|\lambda a_{ij}|+\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|c_{ij}| \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

这说明，当$|\lambda|\geq 1$时，矩阵C为严格对角占优阵，再由对角占优定理有$\det(C)\neq 0.$

这与我们要求的满足$\det(C)=0$条件矛盾，故$|\lambda|$不能大于等于1，即$|\lambda|<1.$

定理8　(SOR方法收敛的必要条件)

设解方程组$Ax=b$的SOR迭代法收敛，则$0<\omega<2$.

证明　由设SOR迭代法收敛，则由定理4的推论中的(3)有$\rho(L_\omega)<1$, 设L_ω的特征值为λ_1，$\lambda_2,\cdots$，λ_n，则

$$|\det(L_\omega)|=|\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n|\le\rho(L_\omega)<1.$$

或　　$|\det(L_\omega)|^{1/n}\le\rho(L$

下三角阵　　上三角阵

另一方面　$\det(L_\omega)=\det[(D-\omega L)^{-1}]\det((1-\omega)D+\omega U)$

注：定理8说明解$Ax=b$的SOR迭代法，只有在(0,2)范围内取松弛因子ω，才可能收敛.

但是定理8并不是说$0<\omega<2$，SOR迭代就收敛，而是说如果SOR迭代收敛，那么$0<\omega<2$.

定理9　设$Ax=b$，如果：

(1)　A为对称正定矩阵，　$A=D-L-U$；

(2)　$0<\omega<2$.

则解$Ax=b$的SOR迭代法收敛.

定理10　设$Ax=b$，如果：

(1)　A为严格对角占优矩阵（或A为弱对角占优不可约矩阵）；　$\omega=1$即为高斯–赛德尔迭代收敛

(2)　$0<\omega\le 1$.

则解$Ax=b$的SOR迭代法收敛.