第一章 集合及其运算（1）

例1 设A, B, C是三个任意集合，则

(1) 若$A\in B$, $B\in C$, 则$A\in C$可能吗?

$A\in C$常真吗?举例说明。

(2) 设A, B是任意两个集合, $A\subseteq B$与$A\in B$同时成立

这可能吗?证明你的断言。

例2 设A, B, C是任意三个集合，则

(1) 若$A\cup B=A\cup C$，则有$B=C$吗？

(2) 若$A\cap B=A\cap C$，则有$B=C$吗？

(3) 若$A\cup B=A\cup C$且$A\cap B=A\cap C$，则有$B=C$吗？

例3若A, B, C是三个任意集合, 当$A\cap B=A\cap C$且$A^c\cap B=A^c\cap C$,

是否有$B=C$？

例4 设A, B是两个任意集合，证明:

(1) $A\subseteq B \Rightarrow 2^A \subseteq 2^B \Rightarrow A\subseteq B$；

(2) $2^A=2^B \Leftrightarrow A=B$；

(3) $2^A\cup 2^B\subseteq 2^{A\cup B}$；

(4) 举例说明：$2^A\cup 2^B\subseteq 2^{A\cup B}$ ；

(5) $2^{A\cap B}=2^A\cap 2^B$。

例5 (多项选择)集合A是以空集为唯一元素的集合, 集合 B=P(P(A))，则有：（ ）。

(1) $\emptyset\in B$； (2) $\emptyset\subseteq B$ (3) $\{\emptyset\}\subseteq B$；

(4) $\{\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}\}\subseteq B$ ； (5) $\{\emptyset,\{\{\emptyset\}\}\}\in B$。

例6 设A, B, C是集合, 求下列各式成立的充分必要条件:

(1) $(A\setminus B)\cup(A\setminus C)=A$； (2) $(A\setminus B)\cup(A\setminus C)=\emptyset$；

(3) $(A\setminus B)\cap(A\setminus C)=\emptyset$； (4) $(A\setminus B)\Delta(A\setminus C)=\emptyset$。

例7 设A, B是任意集合，则

(1) 若$A\setminus B=B$，则A与B有何关系？

(2) 若$A\setminus B=B\setminus A$，则A与B又有何关系。

例8 设A, B, C是三个任意的集合，则

(1) 证明：$(A\setminus B)\setminus C\subseteq A\setminus(B\setminus C)$ ；

(2) 举例说明$(A\setminus B)\setminus C\neq A\setminus(B\setminus C)$。

例9 设A, B是集合，证明：

(1) $A=\phi\Leftrightarrow B=A\Delta B$；

(2) $(A\setminus B)\cup B=(A\cup B)\setminus B\Leftrightarrow B=\phi$。

例10 设A, B, C是任意三个集合，则

$(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)\Leftrightarrow C\subseteq A$。

例11 设V是任一集合，证明：

$\forall S, T, W\in 2^V$有$S\subseteq T\subseteq W$当且仅当$S\Delta T\subseteq S\Delta W$且$S\subseteq W$。

习题课（2）

例1在1000名大学生的调查中,有804人掌握了英语,205人掌握了日语,190人掌握了俄语,125人既掌握了英语又掌握了日语,57人既掌握了日语又掌握了俄语,85人既掌握了英语又掌握了俄语。试求这1000名大学生中,英语、日语、俄语全掌握的有多少人?

(23人)

例2 某班30名学生中学英语有7人，学日语有5人，这两科都选有3人，问两科都不选的有多少人?

（$|A^C \cap B^C|+|A \cup B|=30$，$|A^C \cap B^C|=21$人）

例3 某校学生数学、物理、英语三科竞赛，某班30人，学生中有15人参加了数学竞赛，8人参加了物理竞赛，6人参加了英语竞赛，并且其中3人三科竞赛都参加了，问至少有多少人一科竞赛都没有参加。

(7人)

例4 甲每5秒放一个爆竹，乙每6秒放一个，丙每7秒放一个，每人都放21个爆竹，共能听见多少声响。

(54响)

习题课（3）

例1 设A, B, C是三个任意集合，证明:

$$A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C。$$

[左边=$(A\cap B^c\cap C^c)\cup(B\cap A^c\cap C^c)\cup(C\cap B^c\cap A^c)\cup(A\cap B\cap C)$]

例2设A, B, C是三个任意集合，化简

$$(A\cap B\cap C)\cup(A^C\cap B\cap C)\cup(A\cap B^C\cap C)\cup(A\cap B\cap C^C)\cup$$
$$(A^C\cap B^C\cap C)\cup(A\cap B^C\cap C^C)\cup(A^C\cap B\cap C^C)$$

例3设A, B是两个集合, B≠¢, 试证:若A×B=B×B, 则A=B。

例4设A, B为集合，试证：A×B＝B×A的充要条件是下列三个条件至少有一个成立:

(1) A=¢；(2) B=¢; (3) A=B。

例5 马大哈写n封信，n个信封，把n封信放入到n个信封中，求全部装错的概率是多少？

〔n个人，n顶帽子，全部戴错的概率是多少？〕

[当n≥10时,概率都近似等于0.3679]

例6 毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞，已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有姑娘跳过舞。同样地，每个姑娘也至少与一个小伙子跳舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子和两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙中的一个跳过舞。

例7 设$M_1, M_2, \ldots$和$N_1, N_2, \ldots$是集合S的子集的两个序列，对$i \neq j$，$i, j=1, 2, \ldots$，有$N_i \cap N_j=\phi$。令

$$Q_1 = M_1, Q_n = M_n \bigcap (\bigcup_{k=1}^{n-1} M_k)^C, n = 2, 3, \cdots$$

试证：

$$N_n \Delta Q_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (N_i \Delta M_i)$$

第二章 映射习题(1)

讨论下列映射的性质

例1 $X=\{1,2,3,4\}$, $Y=\{a,b,c,d,e\}$, $f(1)=a$, $f(2)=a$, $f(3)=c$, $f(4)=d$。

例2 令$N=\{1,2,3,\ldots\}$，$S:N\to N$，则

(1) $\forall n\in \mathbf{N}$, $S(n)=n+1$，S称为自然数集N上的后继函数。

(2) $S(1)=1$, $\forall n\in \mathbf{N}$, $S(n)=n-1$, $n\geqslant 2$，S称为自然数集N上的前仆函数。

例3 令E为全体偶自然数之集，$f:E\to N$，$\forall 2m\in E$，$f(2m)=m$。

例4设X为整数的有限集，定义集合$X-X=\{x-x' \mid x,x'\in X\}$。试证：若$A,B\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$且$|A|\cdot|B|\geqslant 2n-1$，$n>1$，则$(A-A)\cap(B-B)$中有一个正整数。

第二章　映射

§2 抽屉原理

例1 (1)一年365天，今有366个人，则至少有两个人生日相同。

(2)抽屉里有10双手套，从中取11只出来，则其中至少有两只是完整配对的。

(3) 某次会议有n位代表参加，每一位代表至少认识其余n-1位中的一位，则在这n位代表中，至少有两位认识的人数相等。

例2 在一个边为1的正方形内（包括边界），任意地画七个点，则其中必有三个点，以它们为顶点所组成的三角形面积小于1/6。

例3 证明，从1,2,…,2n中，任选n+1个数，则在这n+1个数中必有两个数，使得其中一个能整除另一个。

例4 坐标上有五个整数点，则存在有两个点的连线的中点一定是整数点。

例5 证明：在52个正整数中，必有两个整数，使得这两个整数之和或差能被100整除。

抽屉原理也称为鸽巢原理、重叠原理。这个原理十分简单，但若用得好却会得到意想不到的有趣结论。

但也应当注意，抽屉原理并未告诉我们怎样实际地去寻找含有两个或更多个物体的那个抽屉，而只是肯定了确有这样的抽屉。

例6 已知m个整数a_1，a_2，…，a_m，试证：存在两个整数k, l, $0\le k<j\le m$，使得$a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots+a_l$能被m整除。

例7证明：对任意正整数N，存在N的一个倍数，使得它仅由数字0和7组成。（例如N＝3, 有259×3＝777；N＝4, 有1925×4＝7700；N＝5, 有14×5＝70；N＝6, 有1295×6＝7770等）。

例8 证明：在任意６个人中，或有3个人相互认识，或有3个人相互不认识。

例9 5个整数中必有3个整数其和能被3整除。

例10 设$a_1, a_2, \ldots, a_n$为1，2，3，…，n的任一排列, 若n是奇数且$(a_1-1)(a_2-2)\ldots(a_n-n)\neq 0$，则乘积为偶数。

上面的例2、例8使用的鸽巢原理实际上是鸽巢原理的一种推广形式，称为“平均值原理”，即

若把m只物体放到n个抽屉里，则一定存在某一个抽屉，它里面至少有[(m-1)/n]+1个物体。

这里[x]表示不大于x的最大整数。

2.2 抽屉原理强形式

抽屉原理强形式：设$m_1, m_2, \cdots, m_n$都是正整数，若把$m_1+m_2+\cdots+m_n-n+1$个物体放到n个抽屉里，则或第一个抽屉里至少有m_1个物体，或第二个抽屉里至少有m_2个物体，…，或第n个抽屉里至少有m_n个物体。

说明：当$m_1=m_2=\cdots=m_n=2$时，$m_1+m_2+\cdots+m_n-n+1=n+1$。抽屉原理是强形式的一种特殊情况。

推论1 若有m个物体放到n个抽屉里，则一定存在某一个抽屉，它里面至少有$[(m-1)/n]+1$个物体。

推论2 若把$n(m-1)+1$个物体放进n个抽屉里，则一定存在某一个抽屉，它里面至少有m个物体。

此推论是强形式中，当$m_1=m_2=\cdots=m_n=m$ 时的特殊情况。

推论3 若 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 是 n 个正整数，且$(m_1+m_2+\cdots+m_n)/n>r-1$，则$m_1, m_2, \cdots, m_n$中至少有一个大于或等于 r 。

鸽巢原理强形式例题

例1 一个人步行了十小时，共走45公里，已知他第一个小时走了6公里，而最后一小时只走了3公里，证明一定存在连续的两个小时，在这两个小时之内至少走了9公里。

例2 一个园环等分36段，将36个数字1, 2, …, 36任意地写在每一段上，使每一段上恰有一个数字，证明：一定存在连续的三段，在这三段上的数字之和至少为56。

例1 设A, B, C是任意三个集合，则

$(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)\Leftrightarrow C\subseteq A$。

例2 设V是任一集合，证明：

$\forall S,T,W\in 2^V$有$S\subseteq T\subseteq W$当且仅当$S\Delta T\subseteq S\Delta W$且$S\subseteq W$。

例3 设A, B, C是三个任意集合，化简

$$(A\cap B\cap C)\cup(A^C\cap B\cap C)\cup(A\cap B^C\cap C)\cup(A\cap B\cap C^C)\cup$$

$$(A^C\cap B^C\cap C)\cup(A\cap B^C\cap C^C)\cup(A^C\cap B\cap C^C)$$

例4 设A, B是两个集合, $B\neq\phi$, 试证：若$A\times B=B\times B$, 则$A=B$。

例5 设X为整数的有限集，定义集合

$X-X=\{x-x' \mid x,x'\in X\}$。试证：若$A,B\subseteq\{1,2,\cdots,n\}$且$|A|\cdot|B|\geqslant 2n-1$, $n>1$，则$(A-A)\cap(B-B)$中有一个正整数。

第二章 映射习题课（2）

例1 令$X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，$Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$，问：

(1) 有多少个不同的由X到Y的关系？

(2) 有多少个不同的由X到Y的映射？

(3) 有多少个不同的由X到Y的双射？

(4) 有多少个不同的从X到Y的单射？

例2 设$f:X\rightarrow Y$，$A, B\subseteq X$，证明：

(1) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$； (2) $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$；

(3) $f(A)\setminus f(B)\subseteq f(A\setminus B)$；(4) $f(A)\Delta f(B)\subseteq f(A\Delta B)$。

例3设X是一个有限集合，从X到X的部分映射有多少？

例4 设$u_1, u_2, \ldots, u_{mn+1}$是一个两两不相同的整数构成的数列，则必有长至少为n＋1的递增子序列或有长至少为m＋1的递减子序列。

例5设N={1, 2, 3, ...}，试构造两个映射f, g: N→N，使得$fg=I_N$，但$gf\neq I_N$。

例6设N={1, 2, 3, ...}，试构造两个映射f, g: N→N，使得$gf=I_N$，但$fg\neq I_N$。

例9 设$f:X\to Y$，证明：

(1) f是单射$\Leftrightarrow \forall F\in 2^X$，$f^{-1}(f(F))=F$；

(2) f是满射$\Leftrightarrow \forall E\in 2^Y$，$f(f^{-1}(E))=E$。

例10 设$f:X\to Y$，$|X|=m$，$|Y|=n$，则

(1)若f是左可逆的，则f有多少个左逆映射？

(2)若f是右可逆的，则f有多少个右逆映射？

例11 设$f:X\to Y$，则

(1)若存在唯一的一个映射$g:Y\to X$，使得$gf=I_X$，则f是可逆的吗？

(2)若存在唯一的一个映射$g:Y\to X$，使得$fg=I_Y$，则f是可逆的吗？

习题（2）

例1 设$f:X\rightarrow Y$，$A\subseteq X$，$B\subseteq Y$，证明：

$$f(f^{-1}(B)\cap A)=B\cap f(A)。$$

例2 设$f:A\rightarrow B$，证明：$\forall T\subseteq B$，有$f(f^{-1}(T))=T\cap f(A)$。

例3 设$f:X\rightarrow Y$，证明：

(1) f是单射$\Leftrightarrow\forall F\in 2^X$，$f^{-1}(f(F))=F$；

(2) f是满射$\Leftrightarrow\forall E\in 2^Y$，$f(f^{-1}(E))=E$。

例4 设有映射$f:A\rightarrow B$，$H\subseteq A$，令H^C是H对A中的余集，当f分别是单射和满射时，给出$f(H^C)$和$(f(H))^C$之间的关系，并给予证明。

例5 设$f:N\times N\rightarrow N$，$f((x,y))=xy$。求$f(N\times\{1\})$，$f^{-1}(\{0\})$，并说明是否是单射、满射或双射？

例6 设X是一个无穷集合，$f:X\rightarrow X$。证明：存在X的一个真子集E，使得$f(E)\subseteq E$。

例7 (1) 设$X=\{1,2\}$, $Y=\{a,b\}$, 求X到Y满射的个数;
(2) 设$X=\{1,2,3,4,5\}$, $Y=\{a,b\}$, 求X到Y的满射的个数;
(3) 设$X=\{1,2,\ldots,m\}$, $Y=\{a,b\}$, 求X到Y的满射的个数;
(4) 设$X=\{1,2,\ldots,m\}$, $Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$, $m\geq n$, 若$f:X\to Y$, 求X到Y的满射的个数。

例8 设X, Y, Z是三个非空集合, $|Z|\geq 2$。证明:$f:X\to Y$ 是满射当且仅当不存在从Y到Z的映射g_1和g_2, 使得 $g_1\neq g_2$, 但$g_1f=g_2f$。

例9 设X, Y, Z是三个非空集合, $|X|\geq 2$。证明:$f:X\to Y$ 是单射当且仅当不存在从Z到X的映射g_1和g_2, 使得 $g_1\neq g_2$, 但$fg_1=fg_2$。

例 6（1）若$f:T\to U$, f是单射，$g,h:S\to T$，满足$f\circ g=f\circ h$，证明：$g=h$。

（2）给出映射f,g,h的实例，$f:T\to U$, $g,h:S\to T$，$f\circ g=f\circ h$，但$g\neq h$。

（3）$f:A\to B$，$g,h:B\to C$。给出f的条件，使得由$g\circ f=h\circ f$可以得出$g=h$。

例 7 设$f:X\to Y$, $g:Y\to Z$是两个映射，$g\circ f$是一个满射，若g是单射，证明f是满射。

第三章 习 题 课1

例1 设$A=\{a,b,c\}$，给出A上的一个二元关系，使其同时不满足自反性、反自反性、对称性、反对称和传递性的二元关系，并画出R的关系图。

例2 设X是一个集合，$|X|=n$，求：

1. X上的二元关系有多少？$\left(2^{n^2}\right)$

2. X上的自反的二元关系有多少？

3. X上的反自反的二元关系有多少？

4. X上的对称的二元关系有多少？

5. X上的反对称的二元关系有多少？$(3^{\frac{n^2-n}{2}}\bullet 2^n)$

6. X 上既是自反的也是反自反的二元关系的个数：（0个）

7. X 上既不是自反的也不是反自反的二元关系有多少？（$2^{n^2-n}\cdot(2^n-2)$）

8. 自反的且对称的关系有多少？[此结果与“反自反的且对称的关系有多少？”是一样多]即有 $2^{\frac{n^2-n}{2}}$（对角线上全去掉）

9. 自反的或对称的关系有多少？

10. X 上既是反自反的也是反对称的二元关系的个数为：$3^{\frac{n^2-n}{2}}$；

11. X 上既是对称的也是反对称的关系个数；

12. X 上既不是对称的也不是反对称的关系个数：（$2^{n^2}-2^{\frac{n^2+n}{2}}-2^n\cdot 3^{\frac{n^2-n}{2}}+2^n$）

例 3 设有集合 A，$|A|=3$，求 A 上具有反自反且反对称性的二元关系的数目，并写出计算过程。

例 4 设$A=\{1,2,3\}$，R是 A 的幂集 $2^A=\{\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$上的二元关系且$R=\{(a,b)|a\cap b\neq\phi\}$，则 R不满足下列哪些性质？为什么？

（1）自反性；（2）反自反性；（3）对称性；（4）反对称性；（5）传递性。

例 5 设 R 是复数集合 C 上的一个二元关系且满足$xRy\Leftrightarrow x-y=a+bi$，a，b 为非负整数，试确定 R 的性质。

例 6 设$|A|=4$，则在A上可以定义多少个不同的反自反和反对称的二元关系？

习 题 课 2

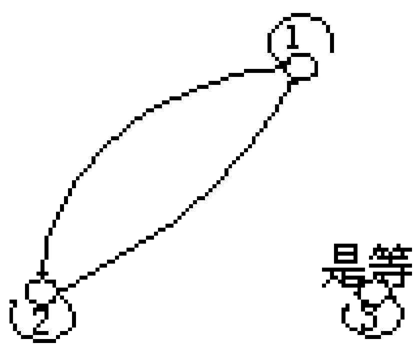
例 1 设 R 是整数集 I 上的关系，mRn 定义为 $m^2=n^2$，则

（1）证明：R 是等价关系；

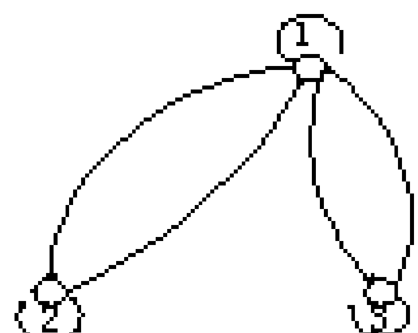
（2）确定 R 的等价类。

例 2 设 R 是 A 上的一个自反关系，证明：R 是等价关系 $\Leftrightarrow$ 若 $(a,b)\in R$ 且 $(a,c)\in R$，则 $(b,c)\in R$。

例 3. 令 $A=\{1,2,3\}$，A 上的两个关系如图所示，它们是否是等价关系？



是等价关系



例 4 设R_1，R_2是A上的等价关系，则$R_1 \cup R_2$也是A上的等价关系吗?

例 5 设$X=\{1,2,\cdots,n\}$,$S\subseteq X\times X$。“$\cong$”是S上如下的二元关系：$\forall(i,j),(k,l)\in S$，

$$(i,j)\cong(k,l)\text{当且仅当}i+j=k+l\text{。}$$

证明：(1) $\cong$等价关系；(2)求等价类数。

例 6 设R是A上的对称和传递的关系。若对A中每个a，$\exists b\in A$，使得$(a,b)\in R$，

证明：R是A上的等价关系。

例 7 设R是集合A上的一个传递的和自反的关系；T是A上的一个关系，使得

$(a,b)\in T\Leftrightarrow(a,b)\in R$且$(b,a)\in R$。证明：T是A上的等价关系。

例 8 设 R 是 A 上的一个二元关系，设 $S=\{(a,b)\mid \exists c\in A$，使得 $(a,c)\in R$ 且 $(c,b)\in R\}$。证明：

（1）若 R 是 A 上的等价关系，则 S 也是 A 上的等价关系；

（2）证明：$R=S$。

例 9 给定 X 上的相容关系 R，证明 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 为 X 上的等价关系。

例 11 设 R_1 和 R_2 是集合 S 上的等价关系，C_1 和 C_2 是由 R_1 和 R_2 所诱导产生的划分，证明：当且仅当 C_1 的每个划分块都包含在 C_2 的某个划分块中，$R_1\subseteq R_2$。

例 12$\left(P_{113}^{1,2,3}\right)$设$X=\{1,2,3\}$，$Y=\{1,2\}$，$S=\{f\mid f:X\to Y\}$。$\cong$是 S 上的二元关系，则

（1）若$\forall f,g\in S,f\cong g\Leftrightarrow I_m(f)=I_m(g)$，证明：$\cong$是$S$上的等价关系；求等价类的集合。

（2）若$\forall f,g\in S,f\cong g\Leftrightarrow f(1)+f(2)+f(3)=g(1)+g(2)+g(3)$，证明：$\cong$是$S$上的等价关系；求等价类的集合。

（3）若$\forall f,g\in S,f\cong g\Leftrightarrow\left\{f^{-1}(y)\mid y\in Y\right\}=\left\{g^{-1}(y)\mid y\in Y\right\}$，证明：$\cong$是$S$上的等价关系；求等价类的集合。

例 13 由置换$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&6&5&8&1&2&7&4\end{pmatrix}$确定了$X=\{1,2,\cdots,8\}$上的一个关系

$\cong$：$\forall i,j\in X, i\cong j$当且仅当$i$与$j$在$\sigma$的循环分解式中的同一循环置换中，证明：

（1）$\cong$是X上的等价关系；（2）求$X/\cong$。

例 14 设$S=\{1,2,3,4\}$，并设$A=S\times S$，在A上定义关系R为：

$$(a,b)R(c,d)\in R\Leftrightarrow a+b=c+d。$$

证明：(1)R 是等价关系；(2)计算出 A/R。

例 15 设R_1是A上的等价关系，R_2是B上的等价关系。关系R满足：

$$(x_1,y_1)R(x_2,y_2)\Leftrightarrow(x_1,x_2)\in R_1\text{且}(y_1,y_2)\in R_2$$

证明：R是$A\times B$上的等价关系。

例 16 设 N 是自然数集合，定义 N 上的二元关系 R：

$$R=\{(x,y)\mid x\in N,y\in N,x+y\text{是偶数}\}，\text{则}$$

（1）证明 R 是一个等价关系；

（2）求关系 R 的等价类；

例 17 设 $A=\{1,2,3,4\}\times\{1,2,3,4\}$，A 上的二元关系 R 定义为：

$$(x,y)R(u,v)\Leftrightarrow|x-y|=|u-v|,$$

证明：1. R 是 A 上的等价关系；

2. 确定由 R 对集合 A 的划分。

第三章 习题课3

例1 非空集合A上存在二元关系R，使得R既是A上的等价关系又是A上的偏序关系吗?

例2 在A={1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}和B={2, 3, 4, 8, 9, 10, 11}上定义的整除关系“|”，画出Hasse图，指出最大（小）元，极大（小）元。

例3 设偏序集$(A,\leq)$的关系图如图所示。

(1)画出$(A,\leq)$的Hasse图。

(2)设B={b, c}，求B的上界集合C和上确界；下界集合D和下确界。

例 4 设集合 $A=\{a,b,c,d,e\}$， A上的关系定义如下：

$$R=\{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,b),(b,c),$$

$$(b,e),(c,c),(c,e),(d,d),(d,e),(e,e)\}$$ 。则

（1）写出R的关系矩阵；

（2）验证(A,R)是偏序集；

（3）并画出Hasse图。

(4) 若A上的关系如下：$R=\{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,b),(b,c),(b,e),$

$$(c,c),(c,d),(c,e),(d,d),(d,e),(e,e)\}$$，则又如何？

例 5 证明：每个由n^2+1个实数组成的数列$a_1,a_2,\cdots,a_{n^2+1}$中必有一个长至少为$n+1$的不减子序列，或有一个长至少为$n+1$的不增子序列。

例 6 设R是实数集，令X为$[0,1]$到R的所有映射所构成的集合。若$f,g\in X$，定义：$(f,g)\in S\Leftrightarrow\forall x\in[0,1],f(x)-g(x)\geq 0$，证明：

（1）S是偏序关系；（2）S是全序关系吗？

例 7 设$(A,\leq)$是偏序集，$\forall a\in A$，$f(a)=\{x|x\in A,x\leq a\}$，证明：$f:A\to 2^A$是一个单射，且当$a\leq b$时，有$f(a)\subseteq f(b)$。

书上习题

例 10(P_{123}^{1})设$[a,b]$是一个有限区间。令S是区间$[a,b]$上的有限划分的集合，$[a,b]$的一个划分π是形如$a=x_1<x_2<\cdots<x_n=b,n\in N$的点的集合。在$S$上定义二元关系$R$如下：

$$\forall \pi_1,\pi_2\in S,\pi_1 R\pi_2 \Leftrightarrow \pi_2\text{的每个分点也是}\pi_1\text{的分点。}$$

证明：R是S上的偏序关系（注意，这里的划分与等价关系中的划分不同）。

例 11（P_{123}^{2}）设$(S,\leq_1),(T,\leq_2)$是偏序集。在$S\times T$上定义二元关系$T,\leq_3$如下：

$$\forall (s,t),(s',t')\in S\times T,\ (s,t)\leq_3(s',t')\Leftrightarrow(s\leq_1 s',t\leq_2 t')。$$

证明：（1）$\leq_3$是$S\times T$上的偏序关系；

（2）若$(s,t)\leq_3(s',t')\Leftrightarrow s\leq_1 s'$或$t\leq_2 t'$，则$\leq_3$是$S\times T$上的偏序关系吗?

例 12 (P_{125}^{3})存在一个偏序关系$\le$，使得$(X,\le)$中有唯一的极大元素，但没有最大元素？若有请给出一个具体例子；若没有，请证明之。

例 13 (P_{124}^{4})设R是X的自反且传递的二元关系，则

（1）给出R的一个实例；

（2）在X上定义二元关系$\sim$是：$x\sim y\Leftrightarrow xRy,yRx$。

证明：$\sim$是X上的等价关系。

（3）在商集$X/\sim$上定义二元关系$\le$是：$[a]\le[b]\Leftrightarrow aRb$。

证明：$\le$是$X/\sim$上的偏序关系。

例 14(P_{124}^{7})设R是X上的偏序关系，证明：

$$R\text{是}X\text{上的全序关系}\Leftrightarrow X\times X=R\cup R^{-1}。$$

图论部分

第五章 图的基本概念

难解问题

难解问题并不是说没有算法，而是说没有好的算法，计算机运行时间太长。

1．旅行商（货郎担）问题：

Kp边带权图，若p=60，则有60!个哈密顿回路。需要几百年的时间才能找到最小哈密顿回路。

一般情况下所给的图不一定是Kp，需要两步：（1）有回路否？（2）有最小回路否？

2．最小覆盖问题：

3．最大独立集：

4．最大团问题：

5．判断图是否有哈密顿（回）路问题.

总 结

(1) 有算法，但没有好的，即没有找到快速算法；
(2) 这样的问题有几百个，稍微一变就有几千个；
(3) 这些问题都是等价的。
若有一个有好的算法，则都有好的算法；
若证明有一个没有好的算法，则都没有好的算法.

易解问题

6. 最短路(径)问题：

1959年迪克斯特拉(E.W.Dijkstra)给出了求边带权图的最短路算法。这个算法能求出从给定顶点到图中其他每个顶点的最短路。这就是求边带权无向图中两个给定顶点间的最短路问题。

习题课1

例1 设d=(d1, d2, ..., dn)，其中di为非负整数，i=1, 2, ..., n。若存在n个顶点的(简单)无向图，使得顶点vi的度为di，则称d是可图解的。下面给出的各序列中哪些是可图解的？哪些不是，为什么？

（1）（1, 1, 1, 2, 3）；

（2）（0, 1, 1, 2, 3, 3）；

（3）（3, 3, 3, 3）；

（4）（2, 3, 3, 4, 4, 5）；

（5）（2, 3, 4, 4, 5）；

（6）（1, 3, 3, 3）；

（7）（2, 3, 3, 4, 5, 6）；

（8）（1, 3, 3, 4, 5, 6, 6）；

（9）（2, 2, 4）；

（10）（1, 2, 2, 3, 4, 5）。

例2 有n个药箱，若每两个药箱里有一种相同的药，而每种药恰好放在两个药箱中，问药箱里共有多少种药？

例3 设G是有个p顶点，q条边的无向图，各顶点的度数均为3。则

(1)若$q=3p-6$,证明:G在同构意义下唯一，并求p,q。

(2)若$p=6$，证明:G在同构的意义下不唯一。

例4 已知p阶(简单)无向图中有q条边，各顶点的度数均为3，又$2p=q+3$，试画出满足条件的所有不同构的G。

例5 9个学生，每个学生向其他学生中的3个学生各送一张贺年卡。确定能否使每个学生收到的卡均来自其送过卡的相同人？为什么？

解:否，不存在9（奇数）个顶点的3－正则图。

习题课 2

例1 若G是一个恰有两个奇度顶点u和v的无向图，则G连通⇔G+uv连通。

例2 设$V=\{v_1, v_2, ..., v_p\}$，计算以V为顶点集的无向图的个数是多少？（K_p有多少个生成子图）

例3 设$V=\{v_1, v_2, ..., v_p\}$，$q\leqslant p(p-1)/2$，计算以V为顶点集具有q条边的无向图的个数是多少？

例4 设G是（p,q）图，$r\leqslant q$，则具有r条边的G的生成子图有多少？

答案： $2^{p(p-1)/2}$ ，$C^q_{p(p-1)/2}$ ，C^r_q。

例5 证明：若无向图G是不连通的，则G的补图G^c是连通的。

书上例题

例1 某工厂生产由6种不同颜色的纱织成的双色布。双色布中，每一种颜色至少和其他3种颜色搭配。证明:可以挑出3种不同的双色布,它们含有所有6种颜色。

与例8等价的例题:

例2 今要将6个人分成3组（每组2个人）去完成3项任务，已知每个人至少与其余5个人中的3个人能相互合作，问:

(1)能否使得每组2个人都能相互合作?

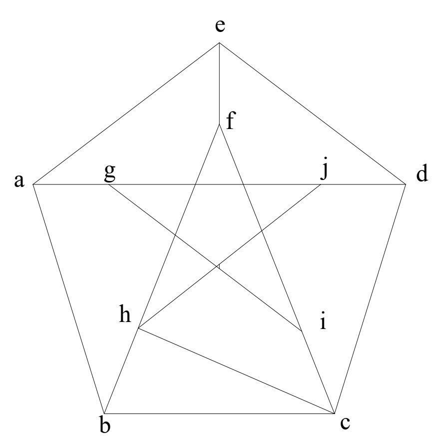
(2)你能给出几中方案？（两种）

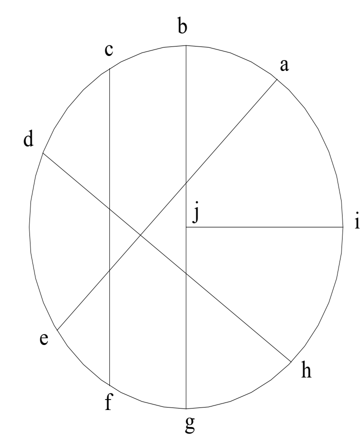
习题3

例1 设G是一个有p(p≥3)个顶点的连通图。u和v是G的两个不邻接的顶点，并且degu+degv≥p。证明：G是哈密顿图⇔G+uv是哈密顿图。

例2 证明：完全图K_9中至少存在彼此无公共边的两条哈密顿圈和一条哈密顿路?

例3 判断如图所示的图是否为哈密顿图，若是写出哈密顿圈，否则证明其不是哈密顿图。





例4（1）证明具有奇数顶点的偶图不是哈密顿图；用此结论证明如图所示的图不是哈密顿图。

（2）完全偶图$K_{m,n}$为哈密顿图的充要条件是什么？

例5 试求Kp中不同的哈密顿圈的个数。

例6 给出一个10个顶点的非哈密顿图的例子，使得每一对不邻接的顶点u和v，均有degu+degv≥9。

例7证明：彼德森图不是哈密顿图。

例8 图G是哈密顿图。试证明：若图中的哈密顿回路中含边e_1，则它一定同时也含e_2。

例9菱形12面体的表面上有无哈密顿回路？

例10设G=(V,E)是连通图且顶点数为p,最小度数为δ,若p>2δ,则G中有一长至少为2δ的路。

例11 设G=(V, E)是p(p>3)个顶点的简单无向图，设G中最长路L的长度为l(l≥2)，起点与终点分别为u, v，而且degu+degv≥p。证明：G中必有与L不完全相同但长度也为L的路。

例12 已知a, b, c, d, e, f, g7个人中，a会讲英语；b会讲英语和汉语；c会讲英语、意大利语和俄语；d会讲汉语和日语；e会讲意大利语和德语；f会讲俄语、日语和法语；g会讲德语和法语。能否将他们的座位安排在圆桌旁，使得每个人都能与他身边的人交谈？

例13 设G为p个顶点的简单无向图。则

（1）若G的边数$q=(p-1)\cdot(p-2)/2+2$，证明G为哈密顿图。

（2）若G的边数$q=(p-1)\cdot(p-2)/2+1$，则G是否一定为哈密顿图？

例14 已知9个人$v_1, v_2, \ldots, v_9$，其中v_1和两个人握过手，v_2, v_3, v_4, v_5各和3个人握过手，v_6和4个人握过手，v_7, v_8各和5个人握过手，v_9和6个人握过手。证明:这9个人中一定可以找出3个人互相握过手。

第六章 树和割集(习题课1)

例1 若无向图G中有个p顶点，p-1条边，则G为树。这个命题正确吗？为什么？

例2画出具有4、5、6、7个顶点的所有非同构的无向树。

例3 设无向图G是由K(K≥2)棵树构成的森林，至少在G中添加多少条边才能使G成为一棵树？

例4 设T是一棵树，T有3个度为3顶点，1个2度顶点，其余均是1度顶点。则

(1)求T有几个1度顶点？

(2)画出满足上述要求的不同构的两棵树。

例5设树T中有2n个度为1的顶点,有3n个度为2的顶点,有n个度为3的顶点,则这棵树T有几个顶点和几条边？

例6 设T是一棵树且$\Delta(T)\geq k$，证明：T中至少有k个度为1的顶点。

例7设G是一个(p, q)图， 若$q\geq p$，证明G中必有圈。

例8证明：任一非平凡树最长路的两个端点都是树叶。

例9证明：恰有两个顶点度数为1的树必为一条通路。

例9(1)一棵无向树有n_i个度数为i的顶点，$i=1, 2, \dots, k$。$n_2, n_3, \dots, n_k$均为已知数，问n_1应为多少？

(2)在(1)中，若n_r($3\leq r\leq k$)未知，n_j($j\neq r$)均为已知数，问n_r应为多少？

例11设$d_1, d_2, \dots, d_p$是p个正整数，$p\geq 2$，且 $\sum_{i=1}^{p} d_i = 2p-2$。证明：存在一棵顶点度数为$d_1, d_2, \dots, d_p$的树。

习题课2

例 1 设G是连通图，满足下面条件之一的边应具有什么性质 ？

（1）在G的任何生成树中；

（2）不在G的任何生成树中。

例2 非平凡连通图G是树当且仅当G的的每条边都是桥。

例3 设T是一棵树，$p \geqslant 2$，则

（1）p个顶点的树至多有多少个割点；

（2）p个顶点的树有多少个桥？

例4 证明或否定断言：连通图G的任意边是G的某一棵生成树的弦。

第七章　习题课 1

定理1 设G=(V1∪V2，E)是一个偶图，|V1|≤|V2|。G中存在从V1到V2的完全匹配⇔是V1中任意k个顶点(k=1,2,...，|V1|)至少与V2中的k个顶点相连接。

例 1 现有4名教师：张、王、李、赵，要求他们去教4门课程：数学、物理、电工和计算机科学。已知张能教数学和计算机科学；王能教物理和电工；李能教数学、物理和电工；赵只能教电工。如何安排才能使4位教师都能教课，并且每门课都有人教？共有几种方案？

用相异性条件判断一个偶图是否存在完全匹配常常很不方便，下面的充分条件比较便于实际应用。

定理2 设G=(V1∪V2，E)是一个偶图，|V1|≤|V2|。G中存在从V1到V2的完全匹配的**充分条件**是存在正整数t，使得V1中每个顶点的度大于等于t，V2中每个顶点的度小于等于t。**该条件称为t条件。**

例２某年级共开设7门课程，由7位教师承担。已知每位教师都能担任其中的3门课程。他们将自己能担任的课程报到教务处后，教务处人员发现每门课都恰好有3位教师能担任。问教务处人员能否安排这7位教师每人担任1门课，并且每门课都有人承担。

例3 某杂志发表了7个征求答案的题目，当从读者寄来的解答中挑选每题的两个解答时，编辑发现所有14个选出来的解答恰好是7个读者提出来的，而且每个人正好提出了两个答案。证明：编辑可以这样发表每道题的一个解答，使得在发表的解答中，这7个读者每人都恰有一个解答。

定理3 从t条件可以推出相异性条件。

注意： 定理3中反过来不能推出t条件。

推论1 任何r-正则偶图$G=(V_1\cup V_2, E)$必有一个完美匹配，其中$r\geq 1$。

第七章　平面图和图的着色

习题课 1

1. 设G是有k个分支、f个面的(p, q)平面图，则

$$p-q+f=k+1。$$

2. 证明：下列4个图均是可平面图。

3. 如图所示的图G是否为平面图？是否为极大平面图？为什么？

4. 证明：极大平面图G一定是连通图。

5. 设G是有p(p≥3)个顶点的简单平面连通图，且G的每个面均是由3条边围成，证明：G是极大平面图。

（若G是极大平面图，则G的每个面都是三角形）

6. 由6个顶点，12条边构成的平面连通图G中，每个面由几条边围成？为什么？

7．证明：若每个顶点的度数大于等于3时，则不存在有7条边的平面连通图。

(等价命题：证明：不存在7条棱的凸多面体)

8． 设G是顶点p≥11的平面图，证明：G的补图G^c是非平面图。

(设G是顶点p≥11的图，证明：G与G的补图G^c至少有一个是非平面图。)

9. 设G是平面连通图，顶点为p面数f，证明:

(1)若p≥3，则f≤2p-4。(2)若δ(G)=4,则G中至少有6个顶点的度数≤5。

10． 设G是边数q<30的平面图,证明:G中存在顶点v，使得degv≤4。

习题课 2

1. 说明图中所示图(1)(2)是否是非平面图?

2. 证明:彼得森图不是平面图。

   (1) 收缩法;(2) 欧拉公式法;(3)收缩到$K_{3,3}$。

3. 设G是无向图,$p<8$,则G与G^c中至少有一个是平面图。

4. 设平面图G的顶点数$p=7$,边数$q=15$,证明G是连通的。

习 题 课 3

1．判断下面命题是否正确，并说明理由。

任意平面图G的对偶图G*的对偶图G**与G同构。

2．设G*是平面图G的对偶图，证明：$p^*=f$，$q^*=q$，$f^*=p-k+1$。其中$k(k\geqslant 1)$为G的连通分支数。

3．证明：若G是自对偶的平面图，则$q=2p-2$。其中p和q是G的边与顶点数。

4．把平面分成p个区域，每两个区域都相邻，问p最大为多少？

5.证明：不存在具有5个面，每两个面都共享一条公共边的平面图G。

习题课 4

1. 求下列各类图顶点的色数。

(1)p阶零图Np;(2)完全图Kp;(3)p阶轮图Wp(轮图至少有4个顶点);(4)彼德森图(如图1所示);(5)如图2所示。

2. 若图G的色数（或顶点色数）K(G)=k，则G中至少有k(k-1)/2条边。

3. 设G是一个没有三角形的平面图，则

（1）证明：G中存在一个顶点v，使得degv≤3;

（2）证明：G是4-可着色的。

4.5 四色问题

在图论中，也许是全部数学中，最著名、最难的问题是四色猜想。

这个猜想说，在一个平面或球面上的任何地图能够只用四种颜色来着色，使没有两个相邻的国家有相同的颜色。

在这里，每个国家必须是一个单连通区域构成，两个国家相邻是指它们有一段公共边界线，不能只有一个公共点。

1852年，格里斯（Guthrie）兄弟在通信中提出了四色问题，小格里斯求教与他的老师德摩根（De morgan），德摩根与他的朋友在通信中讨论过这个问题，但他们都无法给予解决。

1878年凯莱（Cayley）在伦敦数学大会上宣布了这个问题，引起了数学界的广泛注意。

1879年肯普（Kempe）、1880年Tait发表论文，声称证明了四色问题。

1890年，希伍德（Heawood）指出了肯普（Kempe）证明

中的一处错误，但却利用肯普（Kempe）的方法证明了五色定理成立。

肯普（Kempe）的这个错误使得他的论证是不完全的。不过，应当指出的是:肯普（Kempe）推理路线是1976年美国的阿普尔(K. Appel)、黑肯(W. Haken)和考齐(J. Koch)等3人所给出的成功证明的基础。

1891年，彼德森（Petersen）指出了Tait证明中所存在的错误，但Tait的方法也有其合理部分。

经过了一百年之后，这个貌似简单的四色猜想才被美国的阿普尔(K. Appel)、黑肯(W. Haken)和考齐(J. Koch)等3人在1976年借助于计算机用了1200多个小时，100亿个逻辑判断才证明了四色定理。从而四色猜想成了四色定理。这个证明引起了广泛的争论，主要是因为计算机在这里起到的重要作用。

然而,四色定理的数学方法的证明还是一个没有解决的问题。

1.怎样证明程序的正确性？

计算机证明不能显示，因此证明的正确性不能被接受。

2.在计算机程序里有没有导致不正确的结果的错误；

假如他们的证明依赖于或许不可靠的计算机输出，那么它是不是真正的证明。

3. 100亿个逻辑判断就一定能把所有的可能都包括进去吗？

第十章 习题课

例1 设T=(V, A)是一个有根树，其每个顶点的出度不是0就是2。若T有n0个叶子，试求T的弧的条数。

例2 设T=(V, A)是一个正则二元树，若T有n0个叶子，试求的弧的条数。

例3 设T是有n0个叶子的正则二元树，n2个出度为2的顶点，证明：n0=n2+1。

例4 设T是有n0个叶子的二元树，出度为2的顶点为n2，证明：n0=n2+1。

例5 设T是一个有p个顶点的正则二元树，求T的叶子数，其中p奇数。

例6 证明：任一棵正则(满)二元树必有奇数个顶点。

例7 有根树中最长有向路的两个端点都是树叶吗？为什么？

例8有向图仅有一个顶点入度为0，其余顶点的入度均为1，则一定是有向树吗？

例9 (1) 证明:正则(满)二元树的叶子数比内点数大1。

(2) 找出正则(满)m元树的叶子数的表达式，该表达式用树的内点数来表示。

例10设T是一个正则m元树，它有n0个叶子，则T有多少条弧？

例11 设有根树有17条弧,12片叶子,4个4度顶点,1个3度顶点,则

（1）求T的树根的度数；

（2）画出满足此要求的有根树。

例12 设T为任一棵正则二元树，q为边数，n0为树叶数，证明：q=2n0-2。其中n0≥2。

例13 设T为任一正则m元树，有n0个叶子，n2个内点，则(m-1)n2=n0-1。

例14 每个比赛图必有一条有向哈密顿路（即有向生成路）。

[用数学归纳法证明每个比赛图中必有有向哈密顿路]

集合论与图论试题

本试题满分90，半时作业分满分10分。

一、(10分，每小题1分) 判断下列各命题真伪（真命题打“√”号，假命题打“X”号)：

1. 从{1, 2, 3}到{4, 5}共有9个不同的映射. ( )
2. 从{1, 2, 3}到{4, 5}共有5个不同的满射. ( )
3. 从{4, 5}到{1, 2, 3}共3个不同的单射. ( )
4. 集合{1, 2, …, 10}上共有2^{100}个不同的二元关系. ( )

5. 如果A为可数集，则 2^A 也是可数集合。 (　　)

6. 欧拉图中没有割点。 (　　)

7. 有向图的每一条弧必在某个强支中。 (　　)

8. P为正整数，K_p 的顶点连通度为P－1。 (　　)

9. (P，P) 连通图至少有 2 个生成树。 (　　)

10. 每个有 2 个支的不连通图，如果每个顶点的度均大于或等于 2，则该图至少有 2 个圈。 (　　)

二、（20分，每小题2分）计算题。对每一小题给出计算结果：

1. $\{1, 2, \cdots, n\}$上有多少个反自反且对称的二元关系？（ ）

2. 把置换$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 4 & 1 & 3 & 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}$分解成循环置换的乘积。（ ）

3. 计算下面两个图G_1和G_2的色数。（ ）

G1: G2:

（答：G_1的色数为 ，G_2的色数为 ）

4. 设X为集合，R为X上的偏序关系，计算$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$等于什么。（ ）

5. 求下面的有向图D的邻接矩阵和可达矩阵。

6. 一个有向图 D=(V, A)满足什么条件是 V 到 V 的一个映射的图？（ ）

7. P 个顶点的无向连通图 G 的邻接矩阵中至少有多少个 1?

8. 设 X 为 n 个元素的集合，X 上有多少个二元运算？（ ）

9. 9 个学生，每个学生向其他学生中的 3 个学生各送一张贺年卡。确定能否使每个学生收到的卡均来自其送过卡的相同人？为什么？（ ）

10. 某次会议有 100 人参加，每人可以是诚实的，也可能是虚伪的。已经知道下面两项事实：(1) 这 100 人中至少有一人是诚实的；(2) 任两人中至少有一人是虚伪的。问这 100 人中有多少人是诚实的？（ ）

三、(12分，每小题6分)

1. 设A、B、C和D都为非空集合。证明：

$(A\times C)\setminus(B\times D)=[(A\cap B)\times(C\setminus D)]\cup[(A\setminus B)\times C]$

2. 设X为有穷集合，$g,f:X\to X$，$g\circ f=I_X$。证明：f和g都为一一对应且$g=f^{-1}$。举例说明，当X为无穷集时，上述结论不成立。

四、(12分，每小题6分)

1. 证明：每个平面图 $G=(V,E)$，如果G是偶图，则 $\exists u\in V$，使得 $\deg u\le 3$。

2. 设 $T=(V,A)$ 为具有P个顶点的二元树，T有 n_2 个出度为2的顶点。求T的叶子数 n_0。

五、(12分，每小题6分)

1. 下图是否是一个哈密顿图？证明你的结论。

2. 设 $G=(V,E)$ 为一个连通图，e 为 G 的一条边。证明：e 是 G 的桥当且仅当 e 在 G 的每个生成树中。

六、(12分，每小题6分)

1. 设 $X=\{a,b,c,d\}$，$R=\{(a,b),(b,c),(c,a)\}$，求 R^t。

2. 给出等价关系、等价类的定义。等价关系与集合的划分之间有何联系？

七、(12分，每小题6分)

1. 设 $N=\{1,2,3,\cdots\}$。用对角线法证明 $\{f \mid f: N\to\{0,1\}\}$ 是不可数集合。

2. 证明：平面图的欧拉公式。