状态空间分析与综合

1线性系统的状态空间描述

一. 问题提出

1.控制系统的两种基本描述方法

输入-输出描述法：经典控制理论

状态空间描述法： 现代控制理论

2. 经典控制理论的特点

优点：对单入单出系统的分析和综合特别有效

缺点： 内部的信息无法描述，仅适于单入单出系统

3. 现代控制理论

适用于控制工程高性能需要，60年代提出

可处理时变，非线性，多输入输出问题

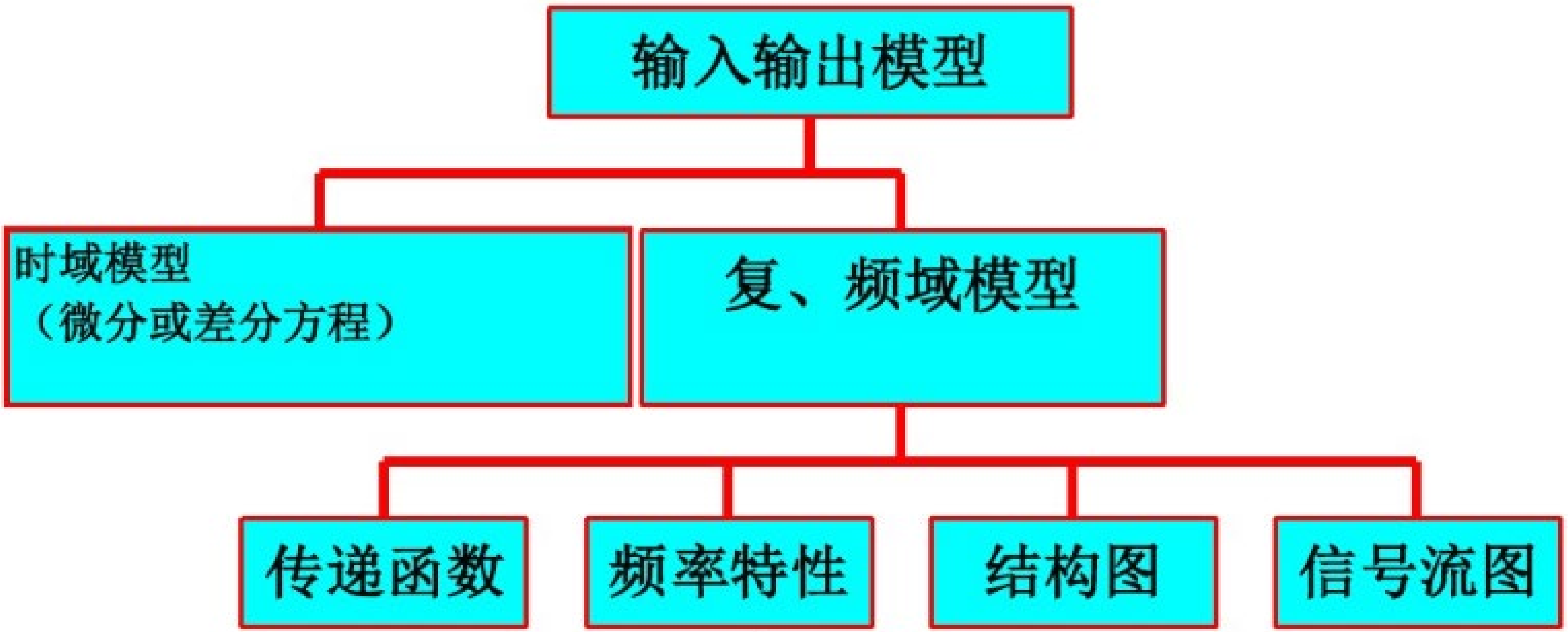
应用的理论分支：最优控制、系统辨识、自适应控制

表 1-1　经典控制理论与现代控制理论的比较

类　别	经典控制理论(20 世纪 50 年代前)	现代控制理论(20 世纪 50 年代后)
研究对象	单输入、单输出的线性定常系统	可以是比较复杂的系统
数学模型	传递函数(输入、输出描述)	状态方程(可描述内部行为)
数学基础	运算微积、复变函数	线性代数、矩阵理论
设计方法的特点	非唯一性、试凑成分多,经验起很大作用。主要在复数域进行	设计的解析性,与计算机结合,主要在时间域进行

输入输出描述法

数学模型的分类:

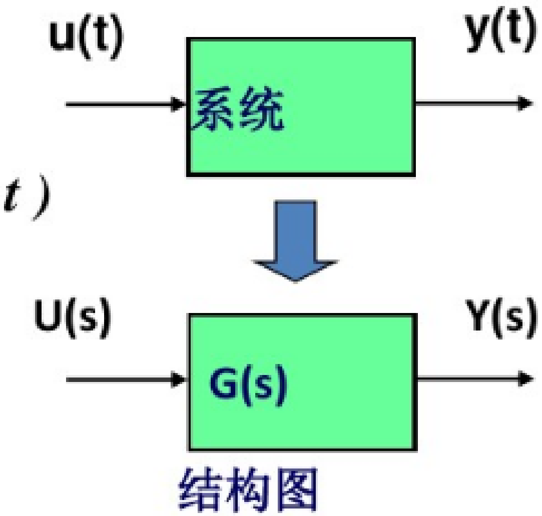


1. 传递函数的定义

注意

在零初始条件下，线性定常系统输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比，G(s)=Y(s)/U(s)。

对于n阶线性定常系统，



$$\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0 y(t)$$

$$=b_m\frac{d^m u(t)}{dt^m}+\cdots+b_1\frac{du(t)}{dt}+b_0u(t)$$

设初始条件为零，经拉氏变换后

$$s^nY(s)+a_{n-1}s^{n-1}Y(s)+\cdots+a_1sY(s)+a_0Y(s)$$

$$=b_ms^mU(s)+\cdots+b_1sU(s)+b_0U(s)$$

∴ n阶线性定常系统的输入输出传递函数为

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

系统增益

根轨迹增益

$$=\frac{b_m(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=\frac{K_g\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(\beta_i s+1)}{\prod_{i=1}^{n}(T_i s+1)}$$

z_i、p_i 分别为传递函数的零点和极点（$z_i \neq p_i$）

零极点表达形式

时间常数表达形式

注1：为何传递函数只能用于线性定常系统？

因为传递函数定义为输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比，所以要得到传递函数，就需要分别把输入和输出变量的拉氏变换从微分方程的每一项中提出来，而时变或非线性系统做不到这一点。

针对时间函数$f(t)$的拉氏变换为 $\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$

对于线性定常系统，$f(t)=a\dfrac{d^n y(t)}{dt^n} \Rightarrow F(s)=as^nY(s)$

而当 $f(t)=t\,y(t),\quad y^2(t),\quad y(t)u(t)$ 时，

显然无法得到$Y(s)$或$U(s)$。

注2：为何定义传递函数时要求系统满足零初始条件？

例： $$\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=u(t)$$

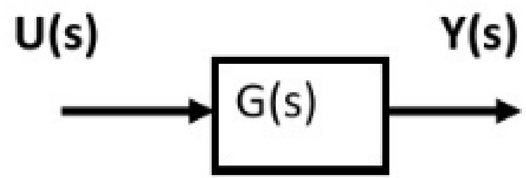
若 $y(0)\neq 0$ 则有

$$sY(s)-y(0)+Y(s)=U(s)$$

无法直接得到传递函数，只能将输出表达为：

$$Y(s)=\frac{1}{s+1}U(s)+\frac{1}{s+1}y(0)$$

2. 关于传递函数的几点说明



- 只适用于线性定常系统
- 是复变量s的真有理分式；
- 只取决于系统或元件的结构和参数，与输入量无关；
- 与微分方程可相互转换；
- 反映系统零初始状态下的响应；
- 传递函数G(s) 的拉氏反变换是系统的单位脉冲响应；
- 无零极点相消时传递函数是系统的一种完全描述。

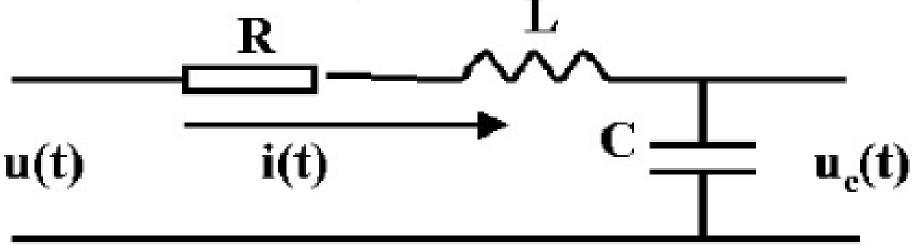
$$\frac{d^n}{dt^n} \leftrightarrow s^n$$

$$y(t) \leftrightarrow Y(s)$$

$$u(t) \leftrightarrow U(s)$$

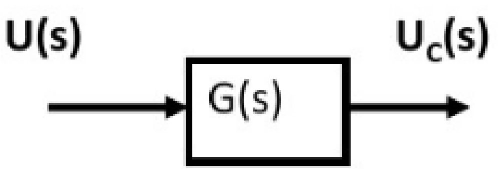
例：R-L-C串联网络的传递函数

输入u(t)，输出$u_c(t)$，求传递函数？



由输入输出微分方程

$$LC\frac{d^2u_C(t)}{dt^2}+RC\frac{du_C(t)}{dt}+u_C(t)=u(t)$$



可得

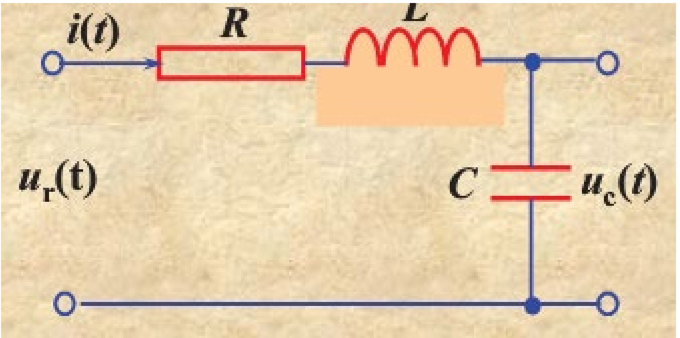
$$LCs^2U_C(s)+RCsU_C(s)+U_C(s)=U(s)$$

$\therefore$ 传递函数为 $G(s)=\dfrac{U_C(s)}{U(s)}=\dfrac{1}{LCs^2+RCs+1}$

- 例1：试建立图示电路的数学模型

$$L\frac{di(t)}{dt}+u_c(t)+Ri(t)=u_r(t)$$

$$i(t)=C\frac{du_c(t)}{dt}$$



$$\begin{cases}\dfrac{du_c(t)}{dt}=\dfrac{1}{C}i(t)\\[2ex]\dfrac{di(t)}{dt}=-\dfrac{1}{L}u_c-\dfrac{R}{L}i(t)+\dfrac{1}{L}u_r(t)\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{u}_c(t)\\ \dot{i}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1/C\\ -1/L & -R/L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_c(t)\\ i(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1/L\end{bmatrix}u_r(t)$$

在已知$u_r(t)$的情况下，只要知道$u_c(t)$和$i(t)$的变化特性，则其他变量的变化均可知道。故$u_c(t)$和$i(t)$称为“状态变量”。记

$$x_1(t)=u_c(t),\quad x_2(t)=i(t)$$

及
$$\frac{dx_i(t)}{dt}=\dot{x}_i\quad (i=1、2)$$

则有
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1/C\\ -1/L & -R/L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1/L\end{bmatrix}u_r(t)$$

➢ 2. 状态与状态变量的定义

控制系统的状态为完全描述系统的一个最小变量组，该组中的每个变量称为状态变量。

如上例中，$x(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$ 为系统的状态，$x_i(t),(i=1,2)$ 为状态变量。

状态：是指系统过去，现在和将来的状况.

状态变量：描述系统内部状态所需用的最少一组变量.

3. 状态向量 $x(t)$

4. 状态空间:

定义**:** 以**n**个状态变量作为坐标轴所构成的**n**维空间。（所有状态构成的一个实数域上的**(**线性**)**向量空间称为状态空间。）

5. 方程:

状态变量的一阶导数与状态变量、输入量的关系表达式称为状态方程**(**见上例**);**

系统输出量**y(t)** 与状态变量、输入量的关系的表达式称为输出方程。

$$y(t)=u_c(t), \text{ 或} y(t)=x_1(t)$$

则输出方程 $$y=[1 \quad 0]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

状态方程：描述系统状态变量与系统输入之间关系的一阶微分方程组称为状态方程.

其中方程组左边是状态变量的一阶导数，右边是只包含系统参数，状态变量和激励的一般函数表达式，其中没右变量的微分和积分运算.

三. 状态变量的选取

1. 状态变量的选取是非唯一的。

2. 选取方法

☞（1）可选取初始条件对应的变量或与其相关的变量作为系统的状态变量。

☞（2）可选取独立储能（或储信息）元件的特征变量或与其相关的变量作为控制系统的状态变量。（如电感电流i、电容电压u_c、质量m的速度v等。

四. 状态空间表达式

1. 单输入单输出线性定常连续系统

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 u \\
\dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 u \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n u
\end{aligned}\right\}
$$

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + du$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + du$$

2. 一般线性系统状态空间表达式（p输入q输出）

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$
$$y = C(t)x + D(t)u$$

3. 多输入—多输出 线性定常系统状态空间表达式

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

. 状态方程和输出方程得一般形式

假设有一个系统

有 n 个状态变量 $x_1, x_2 \cdots x_n$

有 l 个激励源 $e_1, e_2 \cdots e_l$

有 m 个输出 $y_1, y_2 \cdots y_m$

$$\underset{n\times 1}{\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}} = \underset{n\times n}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}} \underset{n\times 1}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}} + \underset{n\times l}{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\ & & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nl} \end{bmatrix}} \underset{l\times 1}{\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_l \end{bmatrix}}$$

$$\dot{X} = AX + B\vec{e}$$

$$
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ & & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1l} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2l} \\ & & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{ml} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_l \end{bmatrix}
$$

$$
m \times 1 \qquad\qquad m \times n \qquad\qquad n \times 1 \qquad\qquad m \times l \qquad\qquad l \times 1
$$

$$
\dot{y} = cX + d\vec{e}
$$

离散时间系统的状态方程和输出方程

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\ & & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(k) \\ e_2(k) \\ e_3(k) \\ \vdots \\ e_l(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ y_3(k) \\ \vdots \\ y_m(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ & & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1l} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2l} \\ & & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{ml} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(k) \\ e_2(k) \\ e_3(k) \\ \vdots \\ e_l(k) \end{bmatrix}$$

$$\overline{X}(k+1) = AX(k) + B\vec{e}(k)$$

$$\overline{y}(k) = CX(k) + D\vec{e}(k)$$

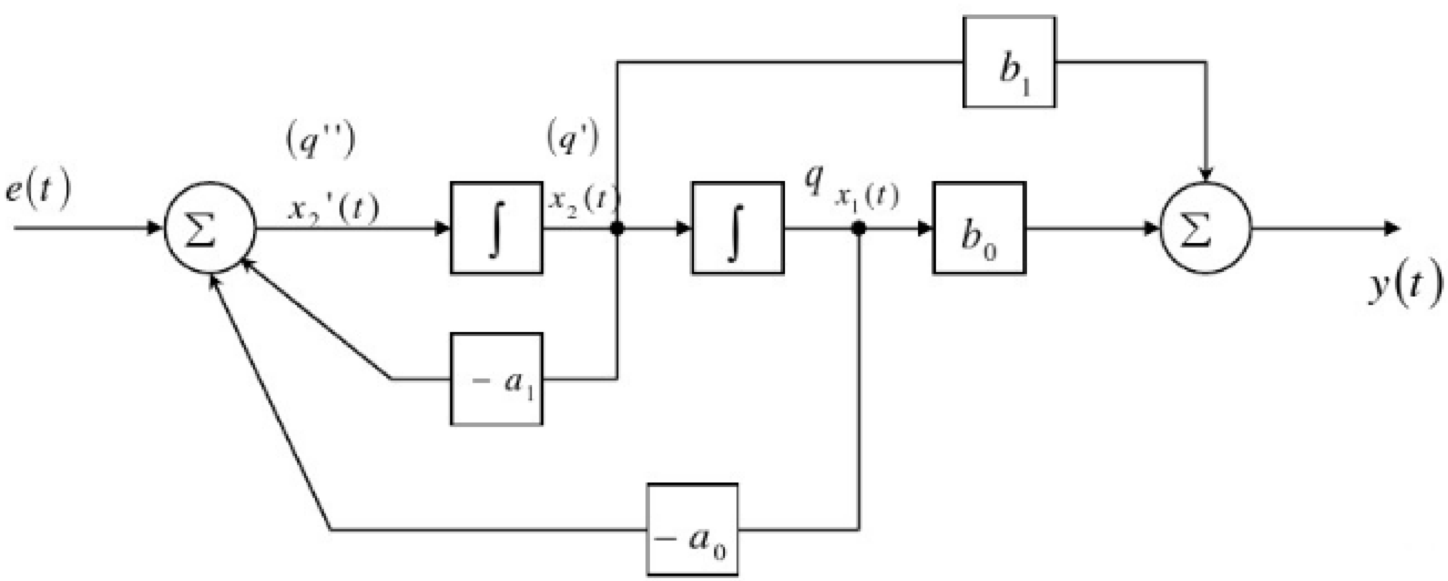
由输入输出方程求状态方程

由于状态方程更便于用计算机进行计算，有时就会要求从输入—输出方程去写出状态方程。

一. 由系统的模拟框图列写

方法是选取积分器的输出信号作为状态变量。

例 ：如图以$x_1(t), x_2(t)$ 为状态变量，以$y(t)$为响应写出状态方程和输出方程



解： $x_1'(t) = x_2(t)$

$$x_2'(t) = -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) + e(t)$$

$$y(t) = b_0 x_1(t) + b_1 x_2(t)$$

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(t)$$

$$y(t) = [b_0 \quad b_1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

由框图，求 $H(S)$

$$q'' = e(t) - a_1 q' - a_0 q \quad \Rightarrow q'' + a_1 q' + a_0 q = e(t)$$

$$y = q' b_1 + q b_0$$

知输入一输出方程为

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = b_1 e'(t) + b_0 e(t)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

二.由 $H(s)$或微分方程直接写出状态方程。

一个 n阶系统：

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0)y(t) = (b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \cdots b_1 p + b_0)e(t)$$

对应 $H(s)$为

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

当$m < n$时

$$\text{状态变量选择各辅助函数 } q\begin{cases}\text{连续时间系统选积分器　输出} \\ \text{离散时间系统选移位器　输出}\end{cases}$$

$$q(t) = x_1(t), q'(t) = x_2(t), \cdots q^{n-1}(t) = x_n(t), q^n(t) = x_n'(t)$$

$$q(k) = x_1(k), q'(k+1) = x_2(k), \cdots q^{n-1}(k+n-1) = x_n(k), q^n(k+n) = x_n'(k+1)$$

$$x_1'(t) = x_2$$

$$x_2'(t) = x_3$$

$$\cdots$$

$$x_{n-1}'(t) = x_n$$

$$x_n'(t) = -a_{n-1}x_n - a_{n-2}x_{n-1} - \cdots - a_1 x_2 - a_0 x_1 + e$$

$$y = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \cdots + b_m x_{m+1}$$

$$
\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ \vdots \\ \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} e(t)
$$

$$
y = [b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_m \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \\ \\ x_n \end{bmatrix}
$$

由 $H(s)$ 写状态方程的规律：

A 矩阵： $n \times n$.第 n 行的元素即为 $H(s)$ 分母多项式的系数 $a_0, a_1 \cdots a_{n-1}$ 的负值，其它各行除对 角线右边的元素为 1外，其余均为 0。

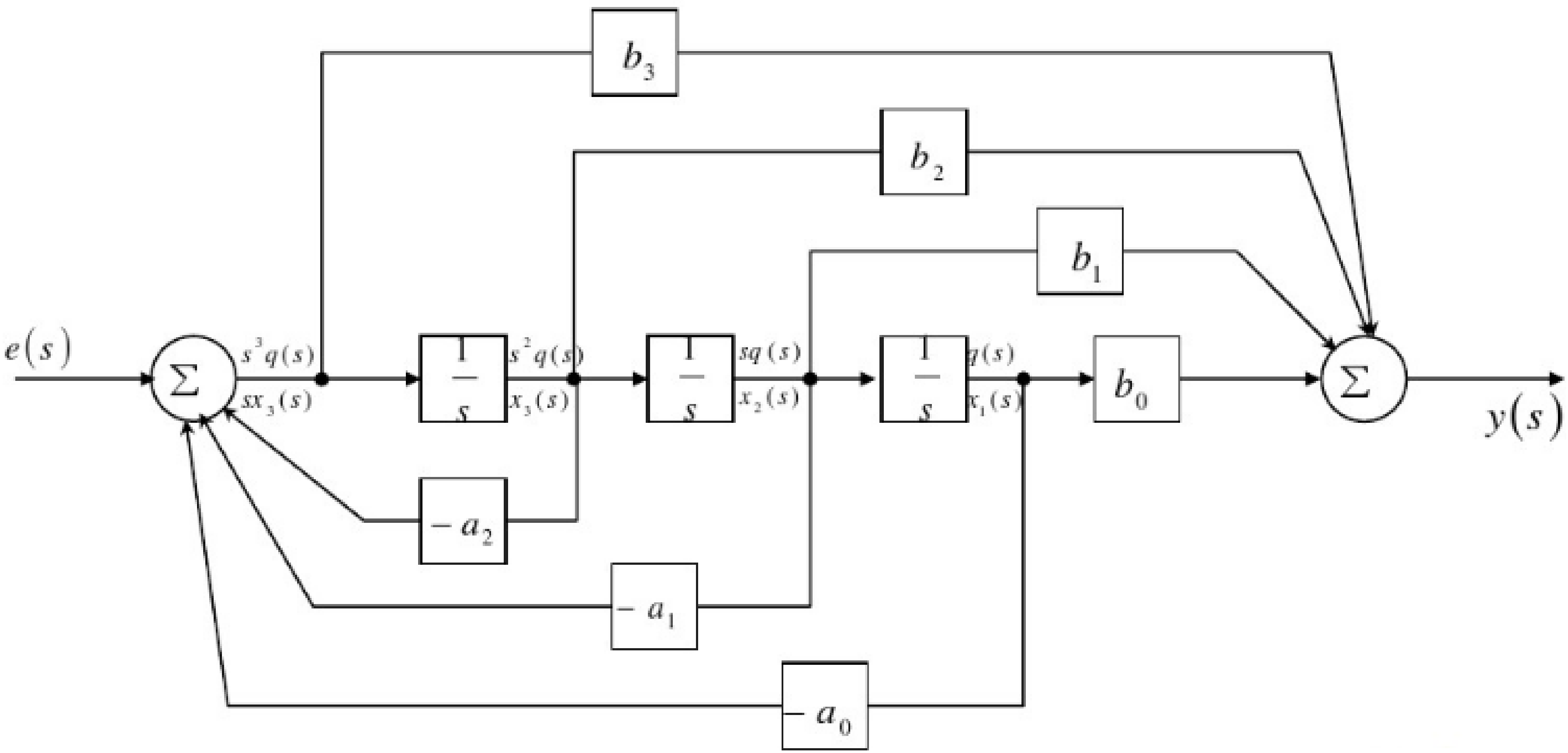
B 矩阵： $n \times 1$.最后一行为 1，其余均为 0。

C 矩阵：$1 \times n$.前 $m+1$ 行个元素即为 $H(s)$ 分子多项式的系数 $b_0, b_1 \cdots b_m$ 的负值，其 $n-m-1$ 个元素均为 0。

D 矩阵为 0。

例 ：已知一系统函数 $$\frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

解：此时： $m = n$



$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(t)$$

$$y(s) = b_3 s x_3(s) + b_2 x_3(s) + b_1 x_2(s) + b_0 x_1(s)$$

$$y(t) = b_3[-a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - a_2 x_3(t)] + b_3 e(t) + b_2 x_3(t) + b_1 x_2(t) + b_0 x_1(t)$$

$$= [b_0 - a_0 b_3 \quad b_1 - a_1 b_3 \quad b_2 - a_2 b_3] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \underbrace{b_3 e(t)}_{\text{D矩阵不为零}}$$

例 ：写出下列系统的状态方程和输出方程

$$H(z)=\frac{b_3z^3+b_2z^2+b_1z+b_0}{z^3+a_2z^2+a_1z+a_0}$$

解：选单位延时器的输　　出信号为状态变量

$$\text{则}\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+2) \\ x_3(k+3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}e(k)$$

$$y(k)=[b_0-b_3a_0 \quad b_1-b_3a_1 \quad b_2-b_3a_2]\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}+[b_3][e(k)]$$

状态空间表达式求传递函数

状态空间表达式：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu\\ y &= Cx + Du\end{aligned}\right\}$$

系统传递函数矩阵表达式

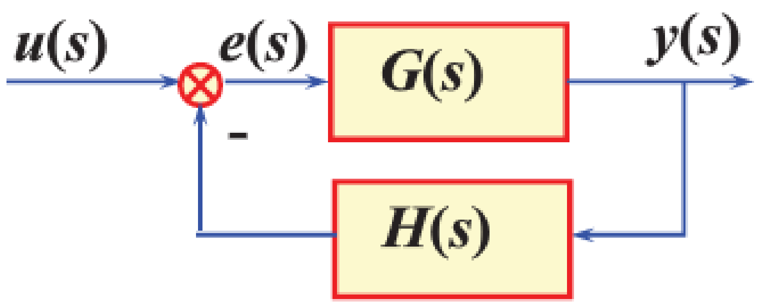
$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

➢3．线性定常多输入—多输出系统

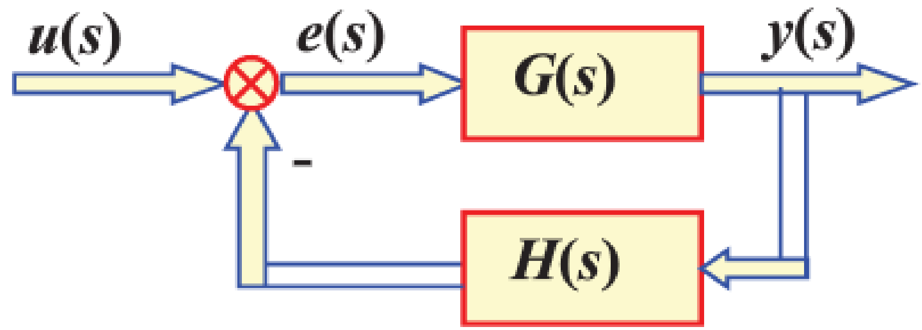
(1) 传递函数矩阵与状态系数矩阵间的关系

$$\left\{\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu\\ y &= Cx + Du\end{aligned}\right. \Rightarrow G(s) = C(SI - A)^{-1}B + D$$

(2) 开环与闭环传递矩阵



单入—单出系统



多入—多出系统

$$\phi = \frac{G}{1+GH} \quad \phi_e = \frac{1}{1+GH}$$

$$\phi = (I+GH)^{-1}G$$

$$\phi_e = (I+GH)^{-1}$$

(3) 传递矩阵的对角化

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ \vdots \\ y_q(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & g_{qp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ \vdots \\ u_p(s) \end{bmatrix}$$

(4) 传递矩阵的实现

1) 单输入—多输出时的实现

$$G(s)=\begin{bmatrix} g_1(s) \\ \vdots \\ g_q(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1+\hat{g}_1(s) \\ \vdots \\ d_q+\hat{g}_q(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_q \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \hat{g}_1(s) \\ \vdots \\ \hat{g}_q(s) \end{bmatrix}=d+\hat{G}(s)$$

$$\hat{G}(s)=\begin{bmatrix} N_1(s)/D(s) \\ N_2(s)/D(s) \\ \cdots \\ N_q(s)/D(s) \end{bmatrix}=\frac{1}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}\begin{bmatrix} \beta_{1,n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_{11,}s+\beta_{10} \\ \beta_{2,n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_{21}s+\beta_{20} \\ \cdots \\ \beta_{q,n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_{q1}s+\beta_{q0} \end{bmatrix}$$

☞可控规范型

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\boldsymbol{a}_0 & -\boldsymbol{a}_1 & -\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_{n-1} \\ \boldsymbol{x}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} = \mathrm{A}x + \boldsymbol{bu}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{10} & \cdots & \beta_{1,n-1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \beta_{q0} & \cdots & \beta_{q,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_q \end{bmatrix} u = Cx + du$$