集合论与图论课程总结

软件基础教研室

二0一一年五月

第一章　集合及其运算

§1　集合的基本概念

集合含义——怎样理解集合

集合的具体表示方法一外延和内涵表示法

空集和全集

§2　子集、集合的相等

子集、集合相等及其证明（重要）、集族、幂集（求幂集）

§3 集合的基本运算

并、交、差、对称差、余集

性质

并、交运算以及它们之间的关系

两个运算间的关系(分配律和吸收律)

差运算性质

差与并、交运算的关系

对称差性质

$A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

$A\Delta(A\Delta B)=B$

余集运算性质

$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$ ； $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$

De Morgan公式

§5 笛卡儿乘积

笛卡儿乘积定义

性质(笛卡儿乘积运算与并、交、差运算的关系)

定理1 设A, B, C是任意三个集合，则

（1） $A\times B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

（2） $A\times B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

（3） $A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$

（4） 若$A\neq \not\subset$，且$A\times B=B\times B$，则$A=B$

这也是证明集合相等的典型问题。

§6 有限集合的基数

定义、基数、基数比较、性质

$|A\times B|=|A|\cdot|B|$

$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$ （$A\cap B\neq\phi$）

$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|$
$-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

（1）设$A_1, A_2, \cdots, A_n$，为n个有限集合，则

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|$$

（2）设$A_1, A_2, \cdots, A_n$为有限集合S的子集，则

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i^C\right|=|S|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|-\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^{n}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|$$

§1 函数的一般概念

映射的定义

特殊的映射：

单射、满射、双射（一一对应） 恒等映射

几个重要结论

定理1 设A，B是有限集合，f:A→B。则

（1）若f是单射，则 $|A|\leq|B|$；

（2）若f是满射，则 $|A|\geq|B|$；

（3）若f是双射，则 $|A|=|B|$。

定理2 设A，B是有限集合且$|A|=|B|$，则f:A→B是单射且f是满射。

说明:

(1) f是单射也f是满射，从而f是双射（一一对应）；

(2) 定理中A，B为有限集合是必要条件，若A，B不是有限集合，则结论不成立。

(3) 举例:

§3 映射的一般性质

象、原象的概念

性质(定理 1 也是证明集合相等)

定理1 设 f:X→Y，C，D⊆Y，则

$(1) f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

$(2) f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

$(3) f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$

$(4) f^{-1}(C \Delta D) = f^{-1}(C) \Delta f^{-1}(D)$

$(5) f^{-1}(C^C) = (f^{-1}(C))^C$

定理2 设 f:X→Y，A，B⊆X，则

$(1) f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

$(2) f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

$(3) f(A \Delta B) \supseteq f(A) \Delta f(B)$

$(4) f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B)$

§4 映射的合成

定义

性质、映射合成的计算

1. 设 f:X→Y g:Y→Z，则

（1）若 f与g都是单射，则g f也是单射；

（2）若 f与g都是满射，则g f也是满射；

（3）若 f与g都是双射，则g f也是双射。

2. 设 f:X→Y，g:Y→Z，则

（1）若g f是单射，则 f是单射；

（2）若g f是满射，则g是满射；

（3）若g f是双射，则 f是单射且g是满射。

§5 逆映射

定义

f可逆 当且仅当 $gf=I_X$与 $fg=I_Y$ 同时成立。

左可逆、又可逆

性质

1. 设$f:X\to Y$，则f是可逆的充分必要条件是f为双射。

2. 设$f:X\to Y$，$g:Y\to X$，若f和g都是可逆的，则

（1）gf也是可逆的且$(gf)^{-1}=f^{-1}g^{-1}$；

（2）$(f^{-1})^{-1}=f$。

3. （1）f是左可逆的，当且仅当f是单射；

（2）f是右可逆的，当且仅当f是满射。

习题

例1令 X={x1， x2， ...， xm}，Y={y1，y2，...， yn}，问：

（1）有多少个不同的由X到Y的关系(子集个数)？

（2）有多少个不同的由X到Y的映射？

（3）有多少个不同的由X到Y的双射？

（4）有多少个不同的从X到Y的单射？

例2设N={1，2，3，...}，试构造两个映射 f和g：$N \to N$，使得$fg=I_N$，但$gf \neq I_N$。

例3设N={1，2，3，...}，试构造两个映射 f和g：$N \to N$，使得$gf=I_N$，但$fg \neq I_N$。

P46习题 1--8

§7 二元和n元运算

定义1设X，Y，Z为三个非空集合。一个从X×Y到Z的映射称为X与Y到Z的一个二元运算或二元代数运算。

当X＝Y＝Z时，即若$\varphi: X\times X\to X$，则称φ为X上的二元运算。

定义2 设X，Y是两个非空集合，一个从X到Y的映射称为X到Y的一个一元运算。

若X=Y，则φ称为X上的一元运算。也称X的一个变换。

定义3 设$A_1, A_2, \ldots, A_n$, D为非空集合，一个从$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$到D的映射φ称为$A_1, A_2, \ldots, A_n$到D的一个n元（代数）运算。

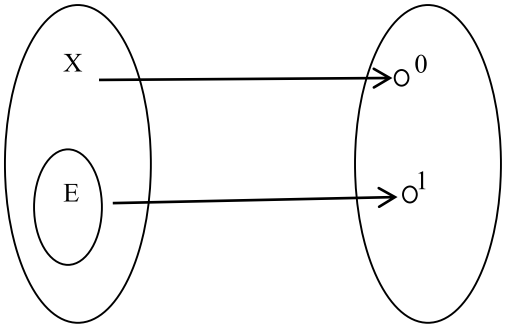
若$A_1=A_2=\ldots=A_n=D=A$，则称φ为A上的n元运算。

2. 例题：设|X|=n，则在X上可以定义多少个二元运算。

§8 特征函数

8.1定义1 设X是一个集合，从X到｛0，1｝的如下一个映射φ_E称为E的特征函数。$\forall x \in X$,

$$\varphi_E(x)=\begin{cases}1 & 若 x \in E \\ 0 & 若 x \notin E\end{cases}$$



8.2 集合E与它的特征函数一一对应。

X共有$|2^X|$个子集,

特征函数用$Ch(X)=\{\varphi_E \mid \varphi_E: E \to \{0,1\}, E \subseteq X\}$表示时，则也应该有$|2^X|$个，即$|2^X| \sim Ch(X)$ 。

第三章 关　系

1. 映射是关系的一种特例

映射反映的是事物之间的单值的依赖关系，而事物之间仅仅是单值依赖关系，大部分都是多值的依赖关系。对于这种多值的依赖关系，我们可以用“关系”这个概念来描述。因此映射是关系的一种特殊情况。

2. 在这里，我们所研究的关系主要是二元关系，即两个对象之间的关系，以后就不在特殊说明了。

3. 内容

关系概念的数学定义及几种等价的定义；

关系的几种特殊性质

二元关系的运算：合成运算、闭包运算、逆关系

二元关系的表示：关系矩阵、关系图

同时具有几种特殊性质的关系：等价关系、偏序关系

§1 关系的概念

1.1 关系的三个等价定义

恒等关系、全关系、空关系

定义域、值域

§2 关系的性质

一、自反性

二、反自反性

三、对称性　　R对称的$\Leftrightarrow R=R^{-1}$

四、反对称性

R反对称的<=>若$x\neq y$，则xRy与yRx不能同时成立

R反对称$\Leftrightarrow R\cap R^{-1}\subseteq I_X$。

五、传递性

2.3例题

例1 设R，S是集合X上的两个传递关系，则R∪S是否传递的？

2.4关系的运算（性质）

定理1 设R_1，R_2，R是X上的三个自反关系，则 $R_1\cup R_2$，$R_1\cap R_2$，R^{-1}也是自反的。

定理2 设R_1，R_2，R是X上的三个反自反关系，则 $R_1\cup R_2$，$R_1\cap R_2$，$R_1\backslash R_2$，R^{-1}也是反自反的。

定理3 设R_1，R_2，R是X上的三个对称的关系，则 $R_1\cup R_2$，$R_1\cap R_2$，$R_1\backslash R_2$，R^{-1}也是对称的。

定理4 设R_1，R_2，R是X上的三个反对称的关系，则$R_1 \cap R_2$，$R_1 \backslash R_2$，R^{-1}也是X上的反对称的关系。

定理5 设R_1，R_2，R是X上的三个传递关系，则

$R_1 \cap R_2$，R^{-1} 也是X上的传递关系。

注：$R_1 \cup R_2$，$R_1 \backslash R_2$不传递。

定理6 设R是X上的二元关系，则

(1) R是自反的$\Leftrightarrow I_X \subseteq R$；

(2) R是反自反的$\Leftrightarrow R \cap I_X \subseteq ¢$；

(3) R是对称的$\Leftrightarrow R=R^{-1}$；

(4) R是反对称的$\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq I_X$；

(5) R是传递的$\Leftrightarrow R \cdot R=R^2 \subseteq R$；

2.5 习题课

例1 设A＝{a, b, c}，给出A上的一个二元关系，使其同时不满足自反性、反自反性、对称性、反对称和传递性的二元关系，并画出R的关系图。

例2 设A是集合，$R, S \subseteq A \times A$ 且R, S都是传递的，则

（1）$R \cup S$是否传递的？（2）$R \cup S$是否是不传递的？

[(1)不一定是传递的。(2)不一定不是传递的（有可能传递）]

例3 设X是一个集合，$|X| = n$，求：

(1) X上的二元关系有多少？

(2) X上的自反的二元关系有多少？

(3) X上的反自反的二元关系有多少？

(4) X上的对称的二元关系有多少？

(5) X上自反的且对称的关系有多少？

[“反自反的且对称的关系有多少？”是一样多]

(6) X上自反的或对称的关系有多少？

§3 关系的合成

定义

求关系的合成运算

性质

定理1 设R_1，R_2，R_3分别是从A到B，B到C，C到D的二元关系，则

$$R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3) = (R_1 \cdot R_2) \cdot R_3$$

合成关系与并、交运算的关系（分配律）

定理2 设R1是A到B的二元关系，R2和R3是从B到C的二元关系， R4是从C到D的二元关系，则

$$R1 \cdot (R2 \cup R3) = (R1 \cdot R2) \cup (R1 \cdot R3)$$

$$R1 \cdot (R2 \cap R3) \subseteq (R1 \cdot R2) \cap (R1 \cdot R3)$$

$$R1 \cdot (R2 \backslash R3) \neq (R1 \cdot R2) \backslash (R1 \cdot R3)$$

定理3 设R_1， R_2, R是A上的三个二元关系，则

（1）$(R_1 \cdot R_2)^{-1} = R_2^{-1} \cdot R_1^{-1}$；

（2）$R \cdot R^{-1}$是对称的；

（3）若R_1, R_2是自反的，则$R_1 \cdot R_2$是自反的；

（4）若R是传递的，则$R \cdot R \subseteq R$。

§4 关系的闭包运算

4.2定义

定义1 设R是非空集合A上的一个二元关系，若有另一个关系R'满足下列条件：

（1）R'是自反的（对称的或传递的）

（2）R⊆R'

（3）对A上的任何包含R的自反的（对称或传递）关系R“，都有R‘ ⊆R”，则称R'为关系R的自反（对称或传递）闭包。

R的自反、对称和传递闭合分别记为r(R)，s(R)，t(R)。本书上给出了的是数学形式的等价定义。

4.4 如何从一个已知的关系来构造关系R的三种闭包

定理4 设R是非空集合A上的二元关系，则$r(R) = R \cup R^0 = R \cup I_A$。

定理5 设R是非空集合A上的二元关系，则$s(R) = R \cup R^{-1}$。

定理6 设R是非空集合A上的二元关系，则

$$t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

说明： $t(R)$也记为R^+，记$R^* = R^0 \cup R^+$-----R^* 称为自反传递闭包。

定理7 设R是A上的一个二元关系，$|A|=n$，则

$$t(R) = R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \cup R^n$$

§5 关系矩阵和关系图

5.1关系矩阵会写　　5.2关系图会画

§6　等价关系与划分

内容：等价关系、等价类、划分、

等价关系与划分的关系

6. 1等价关系

定义1　设R是非空集合A上的二元关系，若R同时具有以下三个性质：（1）R是自反的；（2）R是对称的；(3)R是传递的则称R是A上的等价关系，记为“≌”。

6.2等价类

定义2 设R是非空集合A上的一个等价关系，$\forall x \in A$，令

$$[x]_R=\{y \mid y\in A 且 (x,y)\in R\}$$

则称集合$[x]_R$为x关于*R*的等价类，简称x的等价类，简记为[x]。

6.3商集

定义3 设R是非空集合A上的一个等价关系，以R的不相交的等价类为元素构成的集合称为A在R下的商集，简称为A的商集，记为A/R，即$A/R=\{[x]_R|x\in A\}$。

6.4 划分

一、定义

定义4 设A是非空集合，若A的一些非空子集$\Pi=\{A_i\}_{l\in I}$形成的集族满足下列条件：

（1）$\forall l,r\in I$，若$l\neq r$，则$A_l\cap A_r=\phi$；

（2）$\cup A_l=A$。

则称Π为A的一个划分，称Π中的元素A_i为Π的划分块。

6.5 等价关系与划分之间的联系

定理1 对非空集合A上的任意一个等价关系R，A的商集A/R就是A的划分。

定理2 设Π是非空集合A上的一个划分，令A上的关系为R_{Π}为： $R_{\Pi}=\{(x, y) \mid x, y \in A$且x和y属于的同一个划分块$\}$，则RΠ为A上的等价关系。这个等价关系称为由划分Π诱导出的A上的等价关系。并且$R_{\Pi}=\cup \Pi_i \times \Pi_i$，$\Pi_i \in \Pi$。

定理3 对非空集合A上的一个划分Π和A上的一个等价关系R，有:Π诱导R⇔R诱导Π。

说明： 集合A上的划分Π和A上的等价关系R之间可以建立一一对应关系。

证明等价关系---习题课习题。

§8 偏序关系与偏序集

8.1偏序关系

定义1 设R是非空集合A上的一个二元关系，若R同时具有以下三个性质：

（1）R是自反的；（2）R是反对称的；（3）R是传递的

则称R是A上的偏序关系，简称偏序，记为“≤”。

8.2偏序集

定义3 设R的集合A上的一个偏序关系，集合A对偏序关系R形成一个二元组，记为(A, R)，称(A, R)为偏序集。

8.3 Hasse图

会画Hasse图

8.4 最大(小)元素、极大(小)元素、上(下)界、上(下)确界

定义1 设(A, $\leqslant$)是一个偏序集，B$\subseteq$A，则

(1) 若$\exists a \in B$,使得$\forall x \in B$，均有$x \leqslant a$，则称a为B的**最大元素**。

(2) 若$\exists a \in B$,使得$\forall x \in B$，均有$a \leqslant x$，则称a为B的**最小元素**。

(3) 存在$a \in B$，若B中没有任何元素x，满足$a \neq x$且$a \leqslant x$，则称a为B的**极大元**。

(4) 存在$a \in B$，若B中没有任何元素x，满足$a \neq x$且$x \leqslant a$，则称a为B的**极小元**。

定义2 设$(A,\leqslant)$是一个偏序集，$B\subseteq A$，则

（1）若存在$a\in A$，使得$\forall x\in B$，均有$x\leqslant a$，则称a为B的上界;

（2）若存在$a\in A$，使得$\forall x\in B$，均有$a\leqslant x$，则称a为B的下界;

（3）若B的一切上界元素形成的集合中有最小元素，则称此**最小上界**为B的**上确界**，记为$\sup B$;

（4）若B的一切下界元素形成的集合中有最大元素，则称此**最大下界**为B的**下确界**，记为$\inf B$。

定义2 设(A, ≤)是一个偏序集，B⊆A，则

（1）若存在$a\in A$，使得$\forall x\in B$，均有$x\leqslant a$，则称a为B的上界；

（2）若存在$a\in A$，使得$\forall x\in B$，均有$a\leqslant x$，则称a为B的下界；

（3）若B的一切上界元素形成的集合中有最小元素，则称此

最小上界为B的**上确界**，记为supB；

（4）若B的一切下界元素形成的集合中有最大元素，则称此

最大下界为B的**下确界**，记为infB。

8.5全序关系与全序集定义

8.6链与反链

一、定义

定义2 设$(A,\leqslant)$是一个偏序集，$B\subseteq A$，则

（1）若$\forall x,y\in B$，$x\leqslant y$与$y\leqslant x$必有一个成立，则称B为A的一个**链**，B中元素的个数称为链的长度。

（2）若$\forall x,y\in B$，$x\leqslant y$与$y\leqslant x$均不成立，则称B为A的一个**反链**，B中元素的个数称为反链的长度。

偏序集合的分解定理—组合数学三大定理之一。

习题课（一）

例1 设X＝{a,b,c}，给出X上的一个二元关系，使其同时不满足自反性、反自反性、对称性、反对称和传递性的二元关系，并画出R的关系图。

例2 设A是集合，R，S $\subseteq$ X×X 且R，S都是传递的，则 (1) R∪S是否传递的？(2)R∪S是否是不传递的？

(1)不一定是传递的。

(2)不一定不是传递的（有可能传递）]

例3 设有集合X，|X|=3，求X上具有反自反且反对称性的二元关系的数目，并写出计算过程。

[若|X|=n，结果又如何？]

习题课（二）

例1 设R是A上的二元关系，下面的结论是否正确？并证明你的结论.

（1）R是自反的，则R·R也是自反的

（2）R是对称的，则R·R也是对称的。

（3）R是反自反和传递的，则R是反对称的。

（正确\正确\正确）

例4 是否存在X(|X|=n)上的一个二元关系R，使得 $R^1,R^2,\ldots,R^n$两两不相等。

例5 证明：如果R是对称的，则R^+也是对称的。

习题课（三）

例1在集合A={1,2,3}上求出尽可能多的等价关系。

推广：A={1,2,3,4},|R|=15个；

A={1,2,3,4,5},|R|=52个。

例2给定集合 A={1,2,3,4,5}，找出A上的等价关系，此关系R能产生划分{1,2}，{3}，{4,5}，并画出关系图。

习题课（四）

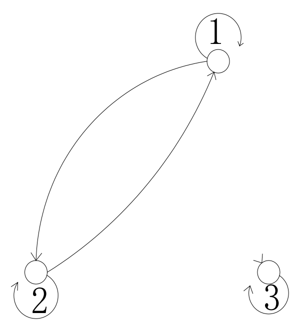
例1 R是整数集I上的关系，mRn定义为$m^2=n^2$，则

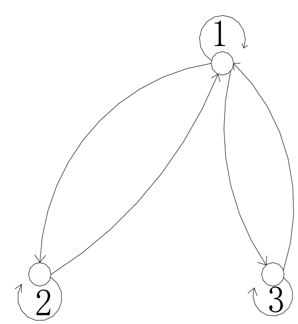
(1) 证明：R是等价关系；　(2) 确定R的等价类。

例2设R是A上的一个自反关系，证明：

R是等价关系⇔若$(a,b)\in R$且$(a,c)\in R$,则$(b,c)\in R$ 。

例3 设A={1,2,3}，A上的两个关系如图所示，则它们是否是等价关系？





例4 设R_1,R_2是A上的等价关系,则$R_1\cup R_2$也是A上的等价关系吗？

例5 设R是A上的对称和传递的关系。若对A中每个a，$\exists b \in A$, 使得$(a, b) \in R$，证明：R是A上的等价关系。

例6 设R是集合A上的一个自反的和传递的关系；T是A上的一个关系，使得$(a, b) \in T \Leftrightarrow (a, b) \in R$且$(b, a) \in R$。证明：T是A上的等价关系。

例7 设R是A上的二元关系，$S=\{(a, b) \mid \exists c \in A$，使得$(a, c) \in R$且$(c, b) \in R\}$。证明：若R是等价关系，则S也是等价关系。

说明：本题可以证明R＝S。

例8 设$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$是集合A的划分，若$A_i \cap B \neq \Phi$，$1 \leqslant i \leqslant n$，证明：$\{A_1 \cap B, A_2 \cap B, \cdots, A_n \cap B\}$是集合$A \cap B$的划分。

例9设S={1, 2, 3, 4}, 并设A＝S×S, 在A上定义关系R为: $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a+b=c+d$。

证明:(1) R是A上的等价关系；(2) 计算A/R。

例10 设A={1, 2, 3, 4}×{1, 2, 3, 4}，A上的二元关系R定义为：$(x, y)R(u, v) \Leftrightarrow |x-y|=|u-v|$，证明：

(1)R是A上的等价关系；(2)确定由R对集合A的划分。

例12设**S={1,2,…,n}, S=X×X**。**R**是**S**上的如下的关系：

$\forall(\mathrm{I},j),(k,l)\in S$，$(\mathrm{I},j)R(k,l) \Leftrightarrow i+j=k+l$。证明：

（**1**）**R**是等价关系；（**2**）求等价类个数。

例13 设$f: X \to Y$，定义X上的等价关系R如下：
$\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 R x_2 \Leftrightarrow f(x_1)=f(x_2)$，求R等价类。
例14 设$X=\{1,2,3\}, Y=\{1,2\}, S=\{f \mid f:X \to Y\}$。$\cong$是S上的二元关系：$f,g \in S$，$f \cong g \Leftrightarrow I_m(f)=I_m(g)$。证明
（1）$\cong$是S上的等价关系;（2）求等价类的集合。
例15 P113 (2)
例16 P113 (3)
例17 设N是自然数，定义N上的关系R如下：

$R=\{(x,y) \mid x \in N，y \in N，x+y是偶数\}$，则

（1）证明：R是一个等价关系；

（2）求关系R的等价类。

第四章 无穷集合及其基数

§1 可 数 集

1.1可数集定义、至多可数。

1.2 性质

定理1 集合A为可数集的充分必要条件是A中的全部元素可以排成没有重复项的无穷序列:

a1，a2，…，an，…

形式，即A＝{a1，a2，…，an，…}。

定理2 无穷集A必包含有可数子集。

可数集合是无穷集合中”最小”的集合.

定义2（无穷集合）凡能与自身的一个真子集对等的集合称为无穷集合(无穷集)，或无限集合。

1.3 证明集合是可数集。

§2 连续统集

2.1 不可数集的存在

定理1区间[0,1]中的所有实数构成的集合是不可数无穷集合。

2.2连续统集的定义

定义1 凡与[0,1]对等的集合称为具有“连续统的势”的集合，简称连续统。

2.3 对角线法证明—两个习题

第二篇　图　论

1. 图、图论

由点和线组成的图表称之为图。

系统地研究图的性质就构成了一门学科，被称为图论。

2. 与上篇的关系：

图论虽然是一门单独的学科，但实际上，图论可以看成是集合论的继续．就是在有限的集合上（V）上定义的一个反自反、对称的二元关系（E）。

3. 在图论的解题过程中常常使用两种解题方法：

一是反证法，另一个是数学归纳法。

第一节　图论发展概述------了解

第二节　图的基本定义

设V是一个非空集合，V的一切二个元素所构成子集记为$P_2(V)$，即$P_2(V)=\{A|A\subseteq V且|A|=2\}$；

２．１无向图

定义1 设V是一个非空有限集合，$E\subseteq P_2(V)$，二元组(V,E)称为一个无向图。

2.2 顶点的度

定义2 设v为图G=(V，E)的任一顶点，G中与v邻接的边的条数称为顶点v的度，记为degv。

定理1 (握手定理)设G=(V,E)是一个具有p个顶点q条边的图,则G中各顶点度的和等于边的条数q的两倍，即$\sum degv=2q$。

推论1 任一图中，度为奇数的顶点的数目必为偶数。

定义3 设G是图，若$\Delta(G)=\delta(G)=r$，即G的每个顶点的度都等于r，则G称为**r度正则图。**

(1) 若$\Delta(G)=\delta(G)=3$，则称**3-度正则图**，也叫做**三次图**。

(2) 若$\Delta(G)=\delta(G)=0$，则称为**零图**，即**0-度正则图**。

(3) 若$\Delta(G)=\delta(G)=p-1$，则称为**p-1度正则图**，即$\deg v=p-1$。

(4) p-1度正则图也称为p个顶点的**完全图**，记为K_p。在K_p中，每个顶点与其余各顶点均邻接。

显然，**K_p有$p(p-1)/2$条边。**

2.5 子 图

子图、生成子图、真子图、极大子图、导出的子图

2.6 同 构

第三节 路、回路（圈）、连通图

3.1 通道、迹、路

3.2 连通

定义2 设G=(V,E)是图，若G中任两个不同顶点间至少有一条路联结，则称G是一个连通图。

3.3 几个定理

定理2 设G=(V, E)是一个有p个顶点的图。若对G的任两个不邻接的顶点u和v, 有

$$degu + degv \geq p-1,$$

则G是连通的。[这个定理是一个充分条件]

定理3 设G=(V, E)是至少有一个顶点不是弧立顶点的图。若对任意$v \in V$，degv为偶数，则G中有回路。

定理4 若图G中的两个不同顶点u与v间有两条不同的路联结，则G中有回路。

例1 若G是一个恰有两个奇度顶点u和v的无向图，则G连通⇔G+uv连通。

例2 设G是一个(p, q)无向图，若$q>(p-1)(p-2)/2$，则G是连通的。

例3 设G是一个(p, q)无向图，若$\delta(G)\geqslant[p]/2$，则G是连通的。

例4 证明：若G不连通，则G^c是连通图。

例5 设G是有个p顶点，q条边的无向图，各顶点的度数均为3。则

(1) 若$q=3p-6$，证明：G在同构意义下唯一，并求p, q。

(2) 若$p=6$，证明：G在同构的意义下不唯一。

第四节　补图、偶图

4.1 补图---什么样的图有补图?

4.2 偶图（双图、二部图、双色图）

4.3 偶图的特征性质

定理1　图G为偶图的充分必要条件是它的所有回路都是偶数长。

4.4 图兰(Turan)定理

定理2 具有P个顶点的而没有三角形的图中最多有$[p^2/4]$条边。

第五节　欧拉图(Euler)

5.1 欧拉图

定义1 设(G,V)是一个图，则包含图的所有顶点和所有边的闭迹称为欧拉闭迹；存在一条欧拉闭迹的图称为欧拉图。

定理1 图G是欧拉图当且仅当G是连通的且每个顶点的度都是偶数。

(定理1对多重图也成立)

第六节　哈密顿图

6.1 哈密顿图

定义1 设G是一个图，则图G中包含G的所有顶点的生成 圈称为哈密顿圈；　具有哈密顿圈的图称为哈密顿图。

有割点的图一定不是哈密顿图;

有割点的图不一定不是欧拉图（可能是）；

6.2 性质

定理1 (G·A·Dirac)设G是一个有p个顶点的图，p≥3。若δ(G)≥p/2，则G是一个哈密顿图。

定理2 (O.Ore)设G是有p(p≥3)个顶点的图。若对G的任一对不邻接的顶点u和v，均有

degu+degv≥p，

则G是一个哈密顿图。

定理3 设G是一个有P个顶点的图，若对G的每一对不邻接的顶点u和v，均有degu+degv≥p-1，则G有哈密顿路。

(书上习题)

第七节 图的邻接矩阵

7.1 邻接矩阵

定义1设G=(V，E)是一个图，矩阵称为G的邻接矩阵，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & 若(v_i,v_j)\in E\\ 0, & 若(v_i,v_j)\notin E\end{cases}$$

7.2 通道的条数

定理1 设G=(V,E)是一个(p,q)图，p×p矩阵A是G的邻接矩阵，则G中vi与vj间长为l通道的条数等于A^l的第i行第j列元素的值，其中i≠j。

习 题

1. 2.设G是无向图，证明：若$\delta(G)\geq m$，则图中包含长至少为m+1的圈。

3.每个自补图必有4n或4n+1个顶点(n为正整数)

4. 设A={v1,v2,...,vp}，$q\leq p(p-1)/2$。试求以V为顶点集具有q条边的无向图的个数。

5.设m,n是正整数，则

（1） m,n满足什么条件时，Km,n是偶拉图？

（2） m,n满足什么条件时，Km,n是哈密顿图？

6. 对于P个顶点的完全图Kp，则

(1)Kp一定是完全图吗？

(2)Kp一定是哈密顿图吗？

第六章　树和割集

第一节 树及其性质

1.1树和森林

定义1 连通且无回路的无向图称为无向树，简称树。

定义2 没有回路的无向图称为无向森林，简称森林。

1.2 树的特征性质

与无向树等价的几个特征性质

推论1 任一非平凡树中至少有两个度为1的顶点。

推论2任一非平凡树的最长路的两个端点一定是树叶。

推论3 任意非平凡树都是偶图(显然，树中无圈)。

推论4 任意非平凡树都是2-色的。

第二节 生成树

2.1生成树（包含所有顶点的树）

定义1 设G=(V,E)是一个图，若G的一个生成子图T=(V，F)是树，则称T是G的生成树。

2.2 生成树存在问题

定理1 图G有生成树的充分必要条件是G为一个连通图。

2.3 怎样求(最小)生成树(破圈法)

2.4 树的弦

定义3 设T是连通图G的生成树，G的不是T的边称为T的弦。

说明:（1） 若G是一个(p,q)连通图，T是G的生成树，则T有q-p+1条弦。

(2) 若G是一个(p,q)连通图，则T至少有多少个圈?(q-p+1)

若G是一个(p,q)连通图，则T有多少个圈?

若G是一个(p,q)连通图，则T至少（多）有多少个生成树?

第三节 割点、桥和割集

3.1 割点和桥(割边)

定义1 设v是图G的一个顶点，若G-v的支数大于G的支数，则称顶点v为图G的一个**割点**(如图)。

定义2 设x是图G的一个边，若G-x的支数大于G的支数，则称边x为图G的一座**桥**(如图）。

有割点的图不是哈密顿图。

3.2割点和桥的特征性质

定理1 设v是连通图G=(V,E)的一个顶点，则下列命题等价：

（1） v是图G的一个割点；

（2） 存在与v不同的两上顶点u和w，使得v在每一条连结u与w间的路上；

（3） 集合V\{v}有一个二划分{U,W}，使得∀u∈U，w∈W，v在每一条联结u和w的路上。

定理2 每个非平凡的连通图至少有两个顶点不是割点。

3.4 习题

例1 设T是一棵树，T有3个度为3顶点，1个2度顶点，其余均是1度顶点。则

（1）求T有几个1度顶点？有多少条弧？

（2）画出满足上述要求的不同构的两棵树。

2. 设G是一棵树且Δ(G)≥k，证明：G中至少有k个度为1的顶点。

3. P个顶点的图中，最多有多少个割点？

4. 若无向图G中有p个顶点，q-1条边，则G为树。这个命题正确吗？为什么？

5. 设树中有2n个度为1的顶点，有2n个度为2的顶，有n个度为3的顶点，则这棵树有多少个顶点和多少条边？

6. 恰有两个顶点的度为1的树是一条通路。

第四章 平面图和图的着色

第一节 平面图及其欧拉公式

1.1 欧拉公式

定理1(欧拉公式)设G=(p,q)是平面连通图，有f个面，则 p-q+f=2。

推论1 若G=(p,q)是平面连通图且每个面都是由长为n的回路围成的，则q=n(p-2)/(n-2)

推论2 设G=(p,q)是一个最大可平面图，则G的每个面都是三角形，而且q=3p-6。

推论3 若G=(p,q)是一个可平面连通图，而且G的每个面都是一个长为4的回路围成的，则q=2p-4

推论4 若G=(p,q)是一个连通的平面图，p≥3，则q≤3p－6。

若G是2－连通的且没有三角形，则q≤2p－4。

推论5　证明K_5和$K_{3,3}$ 都不是可平面图。

推论6 每个平面图G的顶点度的最小值不超过5，即 $\delta(G)\leqslant 5$ 。

第二节 库拉托斯基定理、对偶图

定理1（库拉托斯基，1930）一个图是可平面的充分必要条件是它没有同胚于K_5或$K_{3,3}$的子图。

定理2 一个图是可平面的当且仅当它没有一个可以收缩到K_5或$K_{3,3}$的子图。

定理3 一个图是可平面图充分必要条件是图G不包含与K_5或$K_{3,3}$在二度顶点内同构的子图。

2.5 对偶图

会画即可

例1 把平面分成n个区域，每两个区域都相邻，问n最大为多少？

例2证明：不存在具有5个面，每两个面都共享一条公共边的平面图G。

例3 证明：不存在7条棱的凸多面体。

(等价命题：证明：当每个顶点的度数大于等于3时，不存在有7条边的简单连通平面图。）

例4 设G是顶点p≥11的平面图，证明：G的补图G^c是非平面图。

(设G是顶点p≥11的图，证明：G与G的补图G^c至少有一个是平面图。）

例5 设G是一个没有三角形的平面图，则

（1）证明：G中存在一个顶点v，使得degv≤3 ；

（2）证明：G是4-可着色的。

第四章　有向图

第一节 有向图的概念

1.1 有向图的定义

定义2 设V为一个非空有限集，$A \subseteq V \times V \setminus \{(u,u) \mid u \in V\}$，二元组$D=(V,A)$称为一个有向图。

1.2 图解

1.4 度(入度、出度)

定义3 设$D=(V,A)$是一个有向图，v是D的任一顶点。顶点v的入弧的条数称为v的入度，记为id(v)。顶点v的出弧的条数称为 v的出度，记为od(v)。

定理1 设$D=(V,A)$是一个有向图且$|A|=q$，则

$$\sum id(v)=\sum od(v)=q;$$

$$\sum (id(v)+od(v))=2q。$$

1.5完全图、补图

定义4 设$D=(V,A)$是一个有向图，若$A=V\times V\setminus\{(v,v)\,|\,v\in V\}$，则称D为完全有向图。

于是，在完全有向图中，任两不同顶点间有 一对对称弧。

定义5 设$D=(V,A)$是一个有向图，D的补图是有向图$D^C=(V,A^C)$，其中：$A^C=V\times V\setminus\{(v,v)\,|\,v\in V\}\setminus A$。

有向图$D=(V,A)$的补图D^C的图解就是从以V为顶点集的完全有向图的图解中去掉D中所有弧所得到的图解。

1.6 同构

定义6 设$G_1=(V_1, A_1)$, $G_2=(V_2, A_2)$都是有向图，若存在一个一一对应$\phi: V_1 \to V_2$，使得$\forall u, v \in A_1$，$(u, v) \in A_1$当且仅当$(\phi(u), \phi(v)) \in A_2$，则称$G_1$与$G_2$是同构的有向图。

第二节 有向路和有向图

2.1 有向通道、有向路

2.2连通

定义1 设D=(V,A)是有向图，∀u,v∈A。则

(1)若存在D的有一条从u到v的有向路，则称顶点u可达到顶点v，或v是从u可达的。

(2) 特别，当u=v时，规定从u可达到u。

定义2 u与v互达⇔u可达到v且v可达到u。

定义3 弱通道、弱路、弱回路

二、有向图任两个顶点与的连接

（1）u与v可以互达，即从u可达到v且从v可达到u；

（2）从u可达v到或从v可达到u；

（3）u与v间有一条弱路连接。

上述的每一种情况都反映了u与v间的连接性，但连接的强、弱不同。

定义3（连通）设D=(V,A)是一个有向图，则

（1）若对D的任两不同的顶点u和v，u与v是互达的，则称D是强连通；

（2）若对D的任两不同的顶点u和v，或从u可达到v，或从v可达到u，则称D是单向连通；

（3）若对D的任两不同的顶点u和v，u与v之间有一条弱路连接，则称D是弱连通。

三、有向圈的几个性质。

定理1 定理2

第三节 有向图的矩阵表示

3.1有向图的表示

邻接矩阵、关联矩阵、可达矩阵

一、邻接矩阵

定义1 设D=(V, A)是一个有向图，$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$，$p\times p$矩阵$B=(b_{ij})$称为有向图D的邻接矩阵。其中：

$$b_{ij}=\begin{cases}1, \text{若}\ (v_i, v_j)\in A \\ 0, \text{若}\ (v_i, v_j)\notin A\end{cases}$$

二、关联矩阵（了解）

定义1 设D=(V, A)是一个有p个顶点q条弧的有向图，$V=\{v_1, v_2, ..., v_p\}$，$A=\{x_1, x_2, ..., x_q\}$ 。$p\times q$矩阵$H=(h_{ij})$称为有向图D的关联矩阵。其中：

$$h_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若}v_i\text{是弧}x_j\text{的起点;}\\ -1, & \text{若}v_i\text{是弧}x_j\text{的终点;}\\ 0, & \text{若}v_i\text{不是弧}x_j\text{的起点也不是弧}x_j\text{的终点。}\end{cases}$$

说明:(1) 顶点p做矩阵的行下标，弧q做矩阵的列下标；

(2) 有向图的顶点v_i的出度等于关联矩阵H中的第i行里1个数；v_i的入度等于H中第i行里-1的个数；

(3) 由于有向图H中每条弧关联两个顶点，一个是弧的起点，另一个是弧的终点，所以有向图的关联矩阵的**每一列仅有两个非零元素，其中一个为1，另一个是-1。**

3.2 两点之间通道的条数

定理1 设B是有向图D=(V, A)的邻接矩阵，$V=\{v_1, v_2, ..., v_p\}$，则从顶点v_i到顶点v_j的长为l的有向通道的条数等于B^l第i行第j列元素$(B^l)_{ij}$的值。

3.3 可达矩阵

定义3 设D=(V, A)为有向图，$V=\{v_1, v_2, ..., v_p\}$。$p\times p$矩阵$R=(r_{ij})$称为D的可达矩阵，若 $i\neq j$，

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若从}v_i\text{可达到}v_j;\\ 0, & \text{若从}v_i\text{不能达到}v_j。\end{cases}$$

而$r_{ij}=1$, $i=1, 2, ..., p$。

若$r_{ij}=1$， $i, j=1, 2, ..., p$，说明D中任意两点都可达。

例1 设D＝(V, A)是一个有向图。在V上定义二元关系≌：对任意的u, v∈V ，u≌v当且仅当u与v互达。

证明：

（1）≌是等价关系；

（2）求≌的等价类；

（3）每个等价类导出的子图是什么子图?

例2 设V＝{v1, v2, ..., vp}。计算

(1)以V为顶点集的无向图的个数。

(2)以V为顶点集的有向图的个数。

(3)以V为顶点集的比赛图的个数。

第五节 有向树与有序树

5.1有向树

定义1 一个没有弱回路的弱连通的有向图称为有向树,记做T。

5.2有根树

定义2 设T是一个有向树，若T中恰有一个顶点的入度为0，而其余每个顶点的入度均为1，则称D为有根树。

定理1 有向图T=(V,A)是一个有根树当且仅当T有一个顶点v_0可以达到其他任一顶点且T中没有弱回路。

5.3父亲、儿子、祖先、子孙、子树

5.4 有序树

定义6 设T=(V,A)是一个有根树,若T的每个顶点的各儿子排定了次序，则称T为一个有序树。

定义7 设T是一个有序树，则

(1) 若T的每个顶点的出度≤m，则称T为m元有序树。

(2) 若T的每个顶点的出度不是0就是m,则称T为正则m元有序树。

(3) 若存在一个正整数k,使得深度小于k的顶点的出度都是m,而深度等于k的顶点都是叶子，则称T是完全m元有序树。

当m=2时， 就是二元有序树。

定理3 一个高为h的二元树至多有$2^{h+1}-1$个顶点。

定理4 高为k的二元树至多有2^k个叶子。

例1 设T=(V, A)是一个有根树,其每个顶点的出度不是0就是2。若T有n个叶子，试求的弧的条数。

例2 设T=(V, A)是一个正则树,若T有n0个叶子，试求的弧的条数。

例3 若二元树T有n0个叶子，n2个出度为2的顶点，证明：n0=n2+1。

例4 设T是正则二元树，T有n0个叶子，n2个出度为2的顶点，证明：n0=n2+1。

第七节 比赛图

7.2 定义

定义1 设D=(V,A)是一个有向图，若任两个不同的顶点之间有且仅有一条有向弧，则称D为比赛图。

问题 p个顶点的比赛图(顶点已命名)有多少个？(2p(p-1)/2)

7.2 性质

定理1 每个比赛图必有一条有向哈密顿路。（用数学归纳法证明）