§3.4一阶谓词形式系统的语义

一阶语言中的个体常元、变元、项、函词、谓词等属于语法范畴的字符串，并没有实际的意义。一阶语言的语义就是对这些字符串赋予一定的意义，即对个体常元、函词、谓词进行指称，对变元取值的指派，对量词的意义的规定。一阶语言的语义是一个数学结构，包括论域 D 及对函词、谓词进行指称的解释 I 即赋予字符串特定的意义。

例1 对FC中的公式 $A = \forall x P(f(x,a),x)$

令论域 $D = R$ 为实数域;

常元 $a = 0$

二元谓词 $P(x,y): x = y$

二元函词 $f(x,a) = x + a$

则此时公式 $A = \forall x(x + 0 = x)$

1. 解释 I 的组成:

一个解释就是一个映射 I，它指称一阶语言中的常元、函词、谓词为:

1) 对任一常元 a 指定为论域 D 中的一个体记为 $I(a)$，简记为 $\overline{a}$

2) 对每一 n 元函词 $f^{(n)}$ 指定为 D 上一个 n 元函数，记为 $I(f^{(n)})$，简记为 $\bar{f}^{(n)}$

3) 对每一 n 元谓词 $P^{(n)}$ 指定为 D 上一个 n 元关系，记为 $I(P^{(n)})$，简记为 $\overline{P}^{(n)}$

2. 结构：对字符串形式的公式赋予特定意义的一个二元组$<D, I>$称为结构，记为$U=<D, I>$

将全体结构的集合记为T

例2 对FC中的公式 $A = \exists x P(f(x,a), y)$

令论域 $D = N$ 为自然数域;

常元 $a = 1$

二元谓词 $P(x,y): x < y$

二元函词 $f(x,a) = x + a$

则此时公式 $A = \exists x(x + 1 < y)$

3. 指派 S

一阶谓词演算中的指派是对个体变元指定为论域 D 中的个体作为其取值，

即为映射 $s:\{v_1,v_2,v_3,\cdots\}\to D$

即对任一变元 v_i 有 $s(v_i)\in D$

指派 S 可扩展为从项集合到个体域的映射 $\bar{s}$

即对任意的项 t：

$$\bar{s}(t)=\begin{cases} s(v) & \text{当}t\text{为变元}v\text{时} \\ \bar{a} & \text{当}t\text{为常元}a\text{时} \\ \bar{f}^{(n)}(\bar{s}(t_1),\cdots,\bar{s}(t_n)) & \end{cases}$$

当 t 为 n 元函词 $f^{(n)}(t_1,\cdots,t_n)$

4. 记号 $\models_U A[s]$

称公式 A 在结构 $U=<D,I>$ 及指派 S 下真值取值为真，记为 $\models_U A[s]$

反之则记为 $\not\models_U A[s]$

$\models_U A$ 则表示在结构 U 中，对一切可能的指派 S，A 均为真

$\models A$ 或 $\models_T A$ 则表示公式 A 在任何结构中均为真，即 A 永真

5. $\models_U A[s]$的严格定义

1) 当 A 为原子公式 $P^{(n)}(t_1,\cdots,t_n)$ 时

$$\models_U A[s] \text{ iff } <\bar{s}(t_1),\cdots,\bar{s}(t_n)>\in \bar{P}^{(n)}$$

2) 当 A 为公式 $\neg B$ 时

$$\models_U A[s] \text{ iff } \not\models_U B[s]$$

3) 当 A 为公式 $B \to C$ 时

$\models_U A[s]$ iff $\not\models_U B[s]$ 或 $\models_U C[s]$

4) 当 A 为公式 $\forall v B$ 时

$\models_U A[s]$ iff 对每一个 $d \in D$ 有:

$$\models_U B[s(v \mid d)]$$

另对使用联结词 $\vee, \wedge$ 和量词 $\exists$ 时作规定如下：

1) $\models_U B \vee C[s]$ iff $\models_U B[s]$ 或 $\models_U C[s]$

2) $\models_U B \wedge C[s]$ iff $\models_U B[s]$ 且 $\models_U C[s]$

3) $\models_U \exists v B[s]$ iff 存在 $d \in D$ 使得

$$\models_U B[s(v \mid d)]$$

例3 证明 $\models_U \neg\forall v \neg B[s]$

iff $\models_U \exists v B[s]$

例4 设论域 $D=N$ 为自然数集

一元函词 $\bar{f}(x)=x+1$ 即 N 上的后继函数；

二元谓词 $\overline{P}(x,y):x\le y$

即 N 上的“小于等于”二元关系 ；

常元 $\overline{a}=0$

则在此结构 U 下有如下结论：

1) 当公式 $A=P(a,f(x))$ 时

则有 $\models_U A$

2) 当公式 $A = P(f(x), a)$ 时

则有 $\not\models_U A$

3) 当公式 $A = \forall x \exists y P(f(x), y)$ 时

则有 $\models_U A$

4) 当公式 $A = \exists y P(f(y), y)$ 时

则有 $\not\models_U A$

例5 证明对FC的公理 A，

在所有的语义结构里均真，即有 $\models_T A$

6. FC的逻辑蕴涵与逻辑等价的定义

设Γ为 FC 的公式集，B 为 FC 的公式，若对任意使得Γ中每个公式均为真的结构 U 及指派 s，也使得B为真，即有$\models_U B[s]$

则称Γ逻辑蕴涵 B，记为$\Gamma \models B$.

若$\Gamma=\{A\}$，则有$A \models B$，称作A逻辑蕴涵B.

若同时还有$B \models A$，则称A逻辑等价 B.