哈工大 2010 年 春季学期

# 集合论与图论 试题

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|
| 分数 | | | | | |

| | |
|---|---|
| 学号 | |
| 姓名 | |

注意行为规范

遵守考场纪律

| 主管领导审核签字 |
|---|
| |

## 本试卷满分 90 分

（计算机科学与技术学院 09 级各专业）

## 一、填空(本题满分 10 分，每空各 1 分)

1．设 $A,B$ 为集合，则 $(A\setminus B)\cup B=A$ 成立的充分必要条件是什么？（$B\subseteq A$）

2．设 $X=\{1,2,\cdots,n\},Y=\{1,2\}$，则从 $X$ 到 $Y$ 的满射的个数为多少？（$2^n-2$ ）

3．在集合 $A=\{2,3,4,8,9,10,11\}$ 上定义的整除关系“|”是 $A$ 上的偏序关系，则最大元是什么？（ 无 ）

4．设 $A=\{a,b,c\}$，给出 $A$ 上的一个二元关系，使其同时不满足自反性、反自反性、对称性、反对称和传递性的二元关系。（$R=\{(a,a),(b,c),(c,b),(a,c)\}$）

5．设 $\Sigma$ 为一个有限字母表，$\Sigma$ 上所有字（包括空字）之集记为 $\Sigma^*$，则 $\Sigma^*$ 是否是可数集？（ 是 ）

6．含 5 个顶点、3 条边的不同构的无向图个数为多少？（ 4 ）

7．若 $G$ 是一个 $(p,p)$ 连通图，则 $G$ 至少有多少个生成树？（ 3 ）

8．如图所示图 $G$，回答下列问题：

（1）图 $G$ 是否是偶图？（ 不是 ）

（2）图 $G$ 是否是欧拉图？（ 不是 ）

（3）图 $G$ 的色数为多少？（ 4 ）

## 二、简答下列各题（本题满分 40 分）

1．设 $A,B,C,D$ 为任意集合，判断下列等式是否成立？若成立给出证明，若不成立举出反例。（6分）

（1）$(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)$；

（2）$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$。

解：（1）不成立。例如 $A=D=\phi,B=c=\{a\}$ 即可。

（2）成立。$\forall(x,y)\in(A\cap B)\times(C\cap D)$，有 $x\in A\cap B,y\in C\cap D$，即 $x\in A,x\in B,y\in C,y\in D$。所以 $(x,y)\in A\times C,(x,y)\in B\times D$，因此 $(x,y)\in(A\times C)\cap(B\times D)$，从而 $(A\cap B)\times(C\cap D)\subseteq(A\times C)\cap(B\times D)$。

反之，$\forall(x,y)\in(A\times C)\cap(B\times D)$，有 $x\in A,x\in B,y\in C,y\in D$。即

$(x,y)\in(A\cap B)\times(C\cap D)$，从而$(A\times C)\cap(B\times D)\subseteq(A\cap B)\times(C\cap D)$。

因此，$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$。

**2. 设$G$是无向图，判断下列命题是否成立？若成立给出证明，若不成立举出反例。（6分）**

**（1）若图$G$是连通图，则$G$的补图$G^C$也是连通图。**

**（2）若图$G$是不连通图，则$G$的补图$G^C$是连通图。**

**解：**（1）$G^C$不一定是连通图。

（2）$G^C$一定连通图。

因为$G$不连通，故$G$至少有两个分支，一个是$G_1$，另外一些支构成的子图是$G_2$。

对于$G^c$中任意两个顶点$u$和$v$：

（1）若$u\in V_1, v\in V_2$，则$u$与$v$不在$G$中邻接。由补图的定义可知：$u$与$v$必在$G^c$中邻接；

（2）若$u,v\in V_1$(或$V_2$)，取$w\in V_2$ (或$V_2$)，则$u$与$w$，$w$与$v$在$G$都不邻接，故$u$与$w$，$w$与$v$在$G^c$必邻接，于是$uwv$就是$G^c$中的一条路。

综上可知，对$G^c$中任两个顶点$u$和$v$之间都有路连接，故$G^c$是连通的。

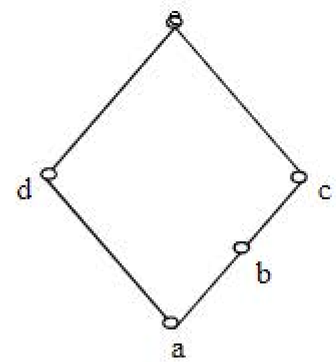
**3．设集合$A=\{a,b,c,d,e\}$，$A$上的关系定义如下：（6分）**

$$R=\{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,b),(b,c),(b,e),(c,c),(c,e),(d,d),(d,e),(e,e)\}$$ **。则**

**（1）写出$R$的关系矩阵；　（2）验证$(A,R)$是偏序集；　（3）画出$Hasse$图。**

**解：**（1）$R$所对应的关系矩阵为$M_R$为：

$$M_R=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$




（2）由关系矩阵可知：

对角线上的所有元素全为1，故$R$是自反的；$r_{ij}+r_{ji}\le 1$，故$R$是反对称的；

$R^2$对应的关系矩阵$M_{R^2}$为：$M_{R^2}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}=M_R$。

因此$R$是传递的。

综上可知：故$R$是$A$上的偏序关系，从而$(A,R)$是偏序集。

（3）$(A,R)$对应的$Hasse$图如图所示。

**4．设$A$是有限集合，$f:A\to A$。则（3 分）**

**（1）若$f$是单射，则$f$必是满射吗？反之如何？**

**（2）若$A$是无限集合，结论又如何？**

**解：**（1）$f$是单射，则$f$必是满射；反之也成立；

（2）若$A$是无限集合，结论不成立。

**举例：**令 N＝{1，2，3，…}，则

（1）设$s:N\to N$，$\forall n\in N,S(n)=n+1$。显然，S 是单射，但不是满射。

（2）设$t:N\to N$，$\forall n\in N,t(1)=1,t(n)=n-1,n\geq 2$。显然，$T$是满射，但不是单射。

**5．（4 分）**

**（1）根据你的理解给出关系的传递闭包的定义；**

**（2）设$A=\{a,b,c,d\}$，$A$上的关系$R=\{(a,b),(b,c),(c,a)\}$，求关系$R$的传递闭包$R^+$。**

**解：**（1）设$R$是集合$A$上的二元关系，则$A$上包含$R$的所有传递关系的交称为关系$R$的传递闭包。

（2）$R^+=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b)\}$

**6．由 6 个顶点，12 条边构成的平面连通图$G$中，每个面由几条边围成？说明理由。（4 分）**

**解：**每个面由 3 条边围成。

在图$G$中，$p=6$，$q=12$，根据欧拉公式$p-q+f=2$，得$f=8$。

因为简单平面连通图的每个面至少由 3 条边围成，所以假设存在某个面由大于 3 条边围成，则有：$3f<2q$，即$24<24$，矛盾。

故每个面至多由 3 条面围成，于是$G$中每个面由 3 条边围成的。

**7．设$G=(V,E)$是至少有一个顶点不是孤立点的图。若$\forall v\in V,\deg v$为偶数，则$G$中是否必有圈？说明理由。（4 分）**

**解：**$G$中必有圈。

令$P$是$G$中的一条最长的路，$P:v_1v_2\cdots v_n$，则由$\deg v_1\geq 2$知，必有某个顶点$u$与$v_i$邻接。由于$P$是最长路，所以$u$必是$v_3,v_4,\cdots,v_n$中的某个$v_i,i\geq 3$。于是，$v_1v_2\cdots v_iv_1$是$G$的一个回路。

8．设$T$是一个有$n_0$个叶子的二元树，出度为 2 的顶点为$n_2$，则$n_0$与$n_2$有何关系？说明理由。（4 分）

解：$n_0$与$n_2$的关系为：$n_0 = n_2 + 1$

由$\sum\limits_{v\in V} id(v_i) = \sum\limits_{v\in V} od(v_i) = q$且$q = p-1$，得$2\times n_2 + 1\times(p-n_2-n_0) = p-1$，

得$n_0 = n_2 + 1$。

9．已知有向图$D$的邻接矩阵$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，则（3 分）

（1）画出邻接矩阵为$A$的有向图$D$的图解；

（2）写出$D$的可达矩阵$R$；

（3）写出计算两顶点之间长为$k$的有向通道条数的计算方法。

解： （1） （2）$\begin{pmatrix} 11111 \\ 11111 \\ 00111 \\ 00111 \\ 00111 \end{pmatrix}$； （3）$(A^k)_{ij}$。

## 三、证明下列各题（本题满分 40 分，每小题各 5 分）

1．设$G$是一个$(p,q)$图，证明：$G$是树$\Leftrightarrow G$无圈且$p = q+1$。

证：$\Rightarrow$因为 G 是树，所以 G 是无圈；

其次对 G 的顶点数 p 进行归纳证明 p=q+1。

当 p 为 1 或 2 时，连通图 G 中显然有 p=q+1。

假设对一切少于 p 个顶点的树结论成立；

今设 G 是有 p 个顶点树，从 G 中去掉任一条边 x，则 G-x 恰有两个支。由归纳假设，每个支中顶点数与边数之间有关系式：$p_1=q_1+1$，$p_2=q_2+1$。

所以，$p=p_1+p_2=q_1+q_2+2=(q_1+q_2+1)+1=q+1$。

$\Leftarrow$只须证明 G 连通即可。

假设 G 不连通，则必有 k 个支且 k≥2。由于每个支都是连通的且无回路，故每个支都是树。于是，对每个支都有$p_i = q_i + 1, i = 1,2,\cdots,k$。于是，$p = \sum\limits_{i=1}^{k} p_i = \sum\limits_{i=1}^{k} q_i + k = q + k$。

由假设 k≥2，这与 p=q+1 相矛盾。因此，G 是连通的。即 G 是树。

2．设$f: X \to Y$，证明：$f$是单射$\Leftrightarrow \forall F \in 2^X, f^{-1}(f(F)) = F$。

**证**：（1）$\Rightarrow \forall x \in f^{-1}(f(F))$，则 $f(x) \in f(F)$，于是 $F$ 中必存在 $x_1$，使得 $f(x) = f(x_1)$。因为 $f$ 是单射，故必有 $x = x_1$。即 $x \in F$，所以 $f^{-1}(f(F)) \subseteq F$。

反过来，$\forall x \in F, f(x) \in f(F)$，从而有 $x \in f^{-1}(f(F))$，所以 $F \subseteq f^{-1}(f(F))$。

因此 $f^{-1}(f(F)) = F$。

$\Leftarrow$假设 $f$ 不是单射，则 $\exists x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$，但 $f(x_1) = f(x_2) = y$。令 $F = \{x_1\}$，于是 $f^{-1}(f(F)) = f^{-1}(f(\{x_1\}) = f^{-1}(\{y\}) = \{x_1, x_2\}$，故有 $\{x_1, x_2\} = F = \{x_1\}$，矛盾。

即 $f$ 一定为单射。

**3．设 $G$ 是一个 $p(p \geq 3)$ 个顶点的图。$u$ 和 $v$ 是 $G$ 的两个不邻接的顶点，并且**

$$\deg u + \deg v \geq p。$$

**证明：$G$ 是哈密顿图 $\Leftrightarrow G + uv$ 是哈密顿图。**

**证明**：$\Rightarrow$显然成立。

$\Leftarrow$假设 G 不是哈密顿图，则有题意知在 G 中必有一条从 u 到 v 的哈密顿路。不妨设此路为 $uv_2v_3 \cdots v_{p-1}v$，令 $\deg v_1=k$，$\deg v_p=l$，则在 G 中与 u 邻接的顶点为 $u_{i1}$，$u_{i2}$，…，$u_{ik}$，其中 $2=i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant p-1$。这时顶点 $u_{ir-1}$（r=2，3…，k）不能与顶点 vp 邻接。因为此时 G 有哈密顿回路 $uv_2\cdots v_{ir-1}vv_{p-1}\cdots v_{ir}u$，因此 $v_p$ 至少与 u，$v_2$，…，$v_{p-1}$ 中的 k 个顶点不邻接。于是，$l\leqslant p-1-k$，从而 $k+1\leqslant p-1$，与题设矛盾，故 G 是哈密顿图。

**4．设 $R$ 是 $A$ 上的一个二元关系，证明：$R$ 是对称的 $\Leftrightarrow R = R^{-1}$。**

**证**：$\Rightarrow \forall (x, y) \in R$，由 R 的对称性有 $(y, x) \in R$，即 $(x, y) \in R^{-1}$，从而 $R \subseteq R^{-1}$

反之，$\forall (y, x) \in R^{-1}$，则 $(x, y) \in R$。由 R 的对称性有：$(y, x) \in R$，从而 $R^{-1} \subseteq R$

故 $R = R^{-1}$

$\Leftarrow \forall x$，$y \in X$，若 $(x, y) \in R$，由 $R = R^{-1}$，得 $(x, y) \in R^{-1}$，即 $(y, x) \in R$，故 R 是对称的。

**5．设 $R$ 是 $A$ 上的一个二元关系，令 $S = \{(a,b) \mid \exists c \in A$，使得 $(a,c) \in R$ 且 $(c,b) \in R\}$。**

**证明：若 $R$ 是 $A$ 上的等价关系，则 $S$ 也是 $A$ 上的等价关系；**

**证**：因为 $R$ 是自反的，所以 $\forall a \in A$，有 $(a,a) \in R$。根据 $S$ 的定义，有 $(a,a) \in S$，所以 $S$ 是自反的；

若 $(a,b) \in S$，则 $\exists c \in A$，使得 $(a,c) \in R$ 且 $(c,b) \in R$。因为 $R$ 是对称的，所以 $(b,c) \in R$ 且 $(c,a) \in R$，根据 $S$ 的定义有 $(b,a) \in S$，所以 $S$ 是对称的；

若 $(a,b) \in S$，$(b,c) \in S$，则 $\exists d \in A$，使得 $(a,d) \in R$ 且 $(d,b) \in R$。因为 $R$ 是传递的，所以 $(a,b) \in R$。

则 $\exists e \in A$，使得 $(b,e) \in R$ 且 $(e,c) \in R$。因为 $R$ 是传递的，所以 $(b,c) \in R$。

根据 $S$ 的定义有 $(a,c) \in S$。所以 $S$ 是传递的。

综上可知：$S$ 是等价关系。

**6. 利用康托对角线法证明：若 $A$ 可数，则 $2^A$ 不可数。**

**证：** 因为 $2^A \sim Ch(A)=\{f \mid f: A\to\{0,1\}\}$，所以只须证明 $Ch(A)$ 不可数即可。$\forall f\in Ch(A)$，$f$ 可表为0，1 的无穷序列。若 $Ch(A)$ 可数，则 $Ch(A)$ 的元素可排列成无重复项的无穷序列 $f_1,f_2,f_3,\cdots$。每个 $f_i$ 可表成 0，1 的无穷序列 $f_{i1},f_{i2},f_{i3},\cdots$。用对角线法构造一个 0，1 序列 $g_1,g_2,g_3,\cdots$：若 $f_{11}=0$，则 $g_1=1$；若 $f_{11}=1$ 则 $g_1=0$。一般地，若 $f_{ii}=0$，则 $g_i=1$；如果 $f_{ii}=1$，则 $g_i=0$，$i=1,2,3,\cdots$，则 $g_1,g_2,\cdots$ 确定的函数 $g\in Ch(A)$，但 $g\neq f_i, i=1,2,\cdots$，矛盾。所以，$2^A$ 不可数。

**7. 设 $G=(V,E)$ 是一个 $(p,q)$ 图，若 $G$ 是一个 $K-$正则偶图，证明：$p\geq 2K$。**

**证：** 因为 $G$ 中无三角形且 $G$ 为 $K-$正则图，所以 $Kp=2q\leq 2(p/2)^2=p^2/2$，

因此，$p\geq 2K$。

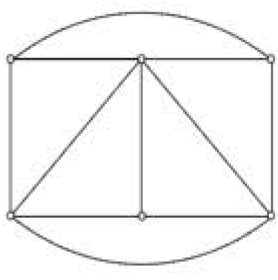
**8．设 $G$ 是顶点 $p\geq 11$ 的平面图，证明：$G$ 的补图 $G^c$ 是非平面图。**

**证：** 反证法：假设图 $G$ 的补图 $G^c$ 也是平面图，令 $G=(p,q)$，$G^c=(p_1,q_1)$，则 $p=p_1$，而 $q+q_1=p(p-1)/2$ …………　（1）

又因为 $G$ 和 $G^c$ 都是平面图，故 $q\leq 3p-6$，$q_1\leq 3p-6$。相加得：

$$q+q_1\leq 6p-12 \qquad (2)$$

由（1)，（2）的得：$q+q_1=p(p-1)/2\leq 6p-12$，展开有：$p^2-13p+24\leq 0$，于是 $p<11$。与题设矛盾，所以 $G^c$ 不是平面图。



哈工大 2011 年 春季学期

# 集合论与图论考试题

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|
| 分数 | | | | | |

| | |
|---|---|
| 学号 | |
| 姓名 | |

注意行为规范

遵守考场纪律

| 主管领导审核签字 |
|---|
| |

## 本试卷满分 100 分

**（计算机学院、英才学院 10 级）**

## 一、填空(本题满分 10 分，每空各 1 分)

**1.设 $f:X\to Y, g:Y\to Z$ ，若 $g\circ f$ 是单射，则 $f$ 与 $g$ 哪个是单射？（ $f$ ）**

**2.集合 $A=\{a,b,c,d\}$ ，$A$ 上的关系 $R=\{(a,b),(b,c),(c,a)\}$ ，则 $R^+$ 等于什么？**

（ $R^+=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(a,c),(b,a)(b,c),(c,a),(c,b)\}$ ）

**3 .设 $X$ 是集合，$|X|$ = n ,则反自反或对称的关系有多少？**（ $2^{n^2-n}+2^{(n^2+n)/2-2^{(n^2-n)/2}}$ ）

**4. 设 $\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 是集合 A 的划分，若 $A_i\cap B\neq\phi$ ，$1\le i\le n$ ，则 $A\cap B$ 的划分是什么？** （ $A_1\cap B, A_2\cap B,\cdots,A_n\cap B$ ）

**5.集合 $A=\{1,2,3,4,6,12\}$ 上的整除关系"|"是 $A$ 上偏序关系，画出 Hasse 图。**

（ ）

**6.什么是无穷集合？**

（凡能与自身真子集对等的集合都称为无穷集合 ）

**7.设 $G$ 为 $p$ 阶简单无向图，$p>2$ 且 $p$ 为奇数，$G$ 和 $G$ 的补图 $G^c$ 中度数为奇数的顶点的个数是否一定相等？** （ 一定 ）

**8.已知 $p$ 阶简单无向图 $G$ 中有 $q$ 条边，各顶点的度数均为 3，又 $2p=q+3$ ，则图 $G$ 在同构的意义下是否唯一？** （ 不唯一 ）

**9. 若 $G$ 是一个 $(p,q)$ 连通图，则 $G$ 至少有多少个圈？** （ q-p+1 ）

**10. 设$T$是一个有$n_0$个叶子的二元树，出度为 2 的顶点为$n_2$，则$n_0$与$n_2$**

**满足什么关系？　　　　　　　　　　　　（ n0=n2+1　）**

## 二、简答下列问题(本题满分 30 分，1-6 小题 3 分，7-9 小题 4 分)

**1．设$A,B$是集合，则$A\Delta B=B$充分必要条件是什么？说明理由。( 3 分 )**

**答案：**$A=\Phi$。

**2．设$f:X\to Y,C,D\subseteq Y$，则$f^{-1}(C\Delta D)$与$f^{-1}(C)\Delta f^{-1}(D)$满足什么关系？说明理由。**

**解：相等。**$f^{-1}(C\Delta D)=f^{-1}((C\setminus D)\cup(D\setminus C))=f^{-1}(C\setminus D)\cup f^{-1}(D\setminus C)=$

$$=(f^{-1}(C)\setminus f^{-1}(D))\cup(f^{-1}(D)\setminus f^{-1}(C))=f^{-1}(C)\Delta f^{-1}(D)。$$

**3. 写出无向树的特征性质（至少 5 个）。( 3 分 )**

**（1）G 是树；**

（2）G 的任两个不同顶点间有唯一的一条路联结；

（3）G 是连通的且 p=q+1；

**（4）G 中无回路且 p=q+1；**

（5）G 中无回路且任加一条边，得到有唯一回路的图；

（6）G 是连通的，并且若 p≥3，则 G 不是 $K_p$。又若 G 的任两个不邻接的**顶点间加一条边，则得到一个恰有唯一的一个回路的图；**

（7）G 是极小连通图。

**4．设$G$是一个$(p,q)$图，若$q\geq p-1$，则$k(G)\leq[2q/p]$与$k(G)\leq[2p/q]$哪个正确？**

**说明理由。( 3 分 )**

答案：$k(G)\leq[2q/p]$。

**5.$K_5$是否是可平面图？说明理由。( 3 分 )**

**解：$K_5$不是平面图。**

若$K_5$是可平面图，则由欧拉公式成立有，5－10＋f＝2，即 f ＝7。

而每个面至少 3 条边，所以 3f≤2q ，从而 21≤20，矛盾。因此，$K_5$ 不是可平面图。

**6. 已知有向图 $D$ 的邻接矩阵 $A=\begin{pmatrix}0111\\1010\\0001\\0000\end{pmatrix}$，则（3 分）**

**（1）画出邻接矩阵为 $A$ 的有向图 $D$ 的图解；**

**（2）写出 $D$ 的可达矩阵 $R$ ；**

**（3）写出计算两顶点之间长为 $k$ 的有向通道条数的计算方法。**

**（1）** **（2）** $R=\begin{pmatrix}1111\\1111\\0011\\0001\end{pmatrix}$ **（3）** $(A^k)_{ij}$。

**7．每个自补图有多少个顶点？说明理由。（4 分）**

解：每个自补图都有 $4n$或$4n+1$个顶点

因为每个自补图 $G$ 的对应的完全图的边数必为偶数，即 $q=p(p-1)/2$ 为偶数。而当 $p=1,2,3$ 时，图 $G$ 无自补图，只有 $p\geq 4$ 时，图 $G$ 才有自补图。于是 $p$ 可写成如下形式：$4n,4n+1,4n+2,4n+3$，其中 $n$ 为正整数；代入 $q=p(p-1)/2$ 中，只有 $4n,4n+1$ 才能使 $q$ 为偶数，故每个自补图必有 $4n$或$4n+1$个顶点。

**8. 设 $N=\{1,2,3,\cdots\}$，试构造两个映射 $f$ 和 $g$ ：$N\to N$，使得 $gf=I_N$ 但 $fg\neq I_N$。（4 分）**

**解：** $f:N\to N,\forall n\in N,f(n)=n+1;\quad g:N\to N,\forall n\in N,g(1)=1,g(n)=n-1,n\geq 2$。

**9．设 $f:A\to B,H\subseteq A$，令 $H$ 在 $A$ 中的余集 $H^c=A\setminus H$，则（4 分）**

**（1）当 $f$ 是单射时，给出 $f(H^c)$ 和 $(f(H))^c$ 之间的关系，并给予证明。**

**（2）当 $f$ 是满射时，给出 $f(H^c)$ 和 $(f(H))^c$ 之间的关系，并给予证明。**

**[（1）、（2）任选一种情况证明即可]**

**解**：由定理知，$(f(H^c))=f(A\backslash H)\supseteq f(A)\backslash f(H)$。

若 $f$ 是满射，即 $f(A)=B$，有 $f(H^c)\supseteq(f(H))^c$。

若 $f$ 是单射时，有 $f(H^c)\subseteq(f(H))^c$。

因为 $\forall y\in f(H^c)$，故存在 $x\in H^c$，使得 $y=f(x)$，从而 $x\notin H$；由 $f$ 是单射，有 $f(x)\notin f(H)$（否则存在 $x_1\in H$，使 $f(x_1)=f(x)$ 矛盾），即 $y\in(f(H))^c$。于是 $f(H^c)\subseteq(f(H))^c$。

## 三、证明下列各题（本题满分 60 分，每小题各 6 分）

**1．设 $A,B$ 是两个集合，$B\neq\varnothing$，试证：若 $A\times B=B\times B$，则 $A=B$。**

**证**：$\forall x\in A$，因为 $B\neq\varnothing$，故在 B 中任取一元素 y，必有 $(x,y)\in A\times B$，因而 $(x,y)\in B\times B$，故 $x\in B$。从而 $A\subseteq B$。

反之，$\forall x\in B$，因为 $B\neq\varnothing$，故在 $B$ 中任取一元素 y，必有 $(x,y)\in B\times B$，因而 $(x,y)\in A\times B$，故 $x\in A$。从而 $B\subseteq A$。

于是 $A=B$。

**2.设 $f:X\to Y$，证明：$f$ 是单射 $\Leftrightarrow\forall F\in 2^X, f^{-1}(f(F))=F$。**

**证**：$\Rightarrow$ $\forall x\in f^{-1}(f(F))$，则 $f(x)\in f(F)$，于是 $F$ 中必存在 $x_1$，使得 $f(x)=f(x_1)$。因为 $f$ 是单射，故必有 $x=x_1$。即 $x\in F$，所以 $f^{-1}(f(F))\subseteq F$。

反过来，$\forall x\in F, f(x)\in f(F)$，从而有 $x\in f^{-1}(f(F))$，所以 $F\subseteq f^{-1}(f(F))$。

因此 $f^{-1}(f(F))=F$。

$\Leftarrow$ 假设 $f$ 不是单射，则 $\exists x_1,x_2\in X, x_1\neq x_2$，但 $f(x_1)=f(x_2)=y$。令 $F=\{x_1\}$，于是 $f^{-1}(f(F))=f^{-1}(f(\{x_1\})=f^{-1}(\{y\})=\{x_1,x_2\}$，即 $\{x_1,x_2\}=F=\{x_1\}$，矛盾。

因此，$f$ 为单射。

**3．设 $R$ 是 $A$ 上的一个自反关系，证明：**

**$R$ 是等价关系 $\Leftrightarrow$ 若 $(a,b)\in R$ 且 $(a,c)\in R$ ，则 $(b,c)\in R$ 。**

证：$\Rightarrow$ $R$ 是 $A$ 上的等价关系。

若 $(a,b)\in R$ 且 $(a,c)\in R$，由 $R$ 的对称性有：$(b,a)\in R$ 且 $(a,c)\in R$，

由 $R$ 的传递性有：$(b,c)\in R$ 。

$\Leftarrow$R 是自反的，故 $\forall a\in A$ 有 $(a,a)\in R$ 。

若 $(a,b)\in R$，由 $(a,a)\in R$ 有 $(b,a)\in R$，所以 $R$ 是对称的。

若 $(a,b)\in R$ 且 $(b,c)\in R$，由 $R$ 的对称性有：

$(b,a)\in R$ 且 $(b,c)\in R$，故由题意得 $(a,c)\in R$，所以 $R$ 是传递。

因此，$R$ 是 $A$ 上的等价关系。

**4. 设 $R$ 是 $A$ 上的二元关系，证明： $R$ 是传递的 $\Leftrightarrow$ $R\circ R\subseteq R$。**

$\Rightarrow$ $\forall(a,c)\in R\ R$，则 $\exists b\in A$，使得 $(a,b)\in R$ 且 $(b,c)\in R$，由 R 的传递性知：

$(a,c)\in R$，于是 $R\ R\subseteq R$ 。

$\Leftarrow$ $\forall(a,b)\in R$ 且 $(b,c)\in R$，有 $(a,c)\in R\ R\subseteq R$，故 R 是传递的。

**5.令 $N=\{1,2,3,\cdots\}$ ，$S=\{f \mid f:N\to\{0,1\}\}$, 利用康托对角线法证明 S 是不可数集。**

证:假设从 N 到{0，1}的所有映射之集可数，则可排成无重复项的无穷序列 $f_1,f_2,f_3,\cdots$ 。每个函数 $f_i$ 确定了一个 0, 1 序列 $a_{i1},a_{i2},a_{i3},\cdots$ 。构造序列 $b_1,b_2,b_3,\cdots,b_i=1$，若 $a_{ii}=0$；否则 $b_i=0$ 。该序列对应的函数 $f(i)=b_i$，$i\in N$，不为 $f_1,f_2,\cdots$ 任一个，矛盾。

**6. 设 $G=(V,E)$ 是一个有 $p$ 个顶点的图。若对 $G$ 的任两个不邻接的顶点 $u$ 和 $v$ ，**

**有 $\deg u+\deg v\geq p-1$ ，证明：$G$ 是连通的。**

**证:若 $G$ 不连通，则 $G$ 至少有两个支。设 $G_1=(V_1,E_1)$ 是其中的一个支，其他各支构成的子图为 $G_2=(V_2,E_2)$，$|V_1|=n_1,|V_2|=p-n_1,$，则任意 $\forall u\in V_1,v\in V_2,$，有**

$$\deg u\le n_1-1,\deg v\le p-n_1-1。$$

于是，$\deg u+\deg v\le(n_1-1)+(p-n_1-1)=p-2$。

**这与假设相矛盾，所以 G 是连通的。**

**7. 证明：完全图 $K_9$ 中至少存在彼此无公共边的两条哈密顿圈和一条哈密顿路。**

**证：**在 $K_9$ 中，$\forall v\in V,\deg v=8\ge p/2$，由定理可知，必有一条哈密顿回路 $C_1$；令 $G_1$ 为 $K_9$ 中删除 $C_1$ 中全部边之后的图，则 $G_1$ 中每个顶点的度均为 $\deg v=6\ge p/2$，故 $G_1$ 仍为哈密顿图，因而存在 $G_1$ 中的哈密顿回路 $C_2$，显然 $C_1$ 与 $C_2$ 无公共边。再设 $G_2$ 为 $G_1$ 中删除 $C_2$ 中的全部边后所得图，则 $G_2$ 每个顶点的度均为 $\deg v=4$。又由定理可知 $G_2$ 为半哈密顿图，因而 $G_2$ 中存在哈密顿路。设 $L$ 为 $G_2$ 中的一条哈密顿路，显然 $C_1,C_2,L$ 无公共边。

**8. 设 $G$ 是一棵树且Δ($G$)$\ge k$，证明：$G$ 中至少有 $k$ 个度为 1 的顶点。**

**证：设 $T$ 中有 $p$ 个顶点，$s$ 个树叶，则 $T$ 中其余 $p-s$ 个顶点的度数均大于等于 2，且至少有一个顶点的度大于等于 $k$。由握手定理可得：**

$$2q=2p-2=\sum_{i=1}^{p}deg(v_i)\ge 2(p-s-1)+k+s，有 s\ge k。$$

**所以 $T$ 中至少有 $k$ 个树叶 。**

**9. 证明：一个没有有向圈的有向图中至少有一个入度为零的顶点。**

**证：**设 D=(V,A)是一个没有有向回路的有向图。考察 $D$ 中任一条最长的有向路的第一个顶点 v，则 id(v)=0。因为若 id(v)≠0，则必有一个顶点 u 使得(u,v)∈A。于是，

若 u 不在此最长路上，则此最长路便不是 $D$ 中的最长路，这是与前面的假设相矛盾。

若 u 在此最长路上，则 D 中有有向回路，这与定理的假设矛盾。因此 id(v)=0。

**10. 设 $G$ 是一个没有三角形的平面图，证明：$G$ 是 4-可着色的**

证：（1）假设 $\forall v\in V$，$\deg(v)\ge 4$，则由握手定理有：$4p\le 2q$；由于 $G$ 是一个没有

**三角形的平面图，故$q \le 2p-4$，即$4p \le 4p-8$，矛盾。故假设不成立，即$G$中存在一个**顶点$v$，使得$\deg(v) \le 3$。

(2)对顶点$p$进行归纳。

**当$p=1,2,3,4$时，显示成立。**

假设当$p=k$时，$G$是4-可着色的。

当$p=k+1$时，由于$G$是一个没有三角形的平面图，故由（1）可知：$\exists v \in V$，使得$\deg(v) \le 3$。**于是$G-v=G_1$便是一个具有$k$个顶点没有三角形的平面图，由归纳假设，**$G_1$是4-可着色的。

由于$\deg(v) \le 3$，故在$G$中用不同于与$v$相邻接的那些顶点在$G_1$中着色时所用的颜色**为$v$着色，$G$的其它顶点着色同$G_1$的4-可着色，这就得到了$G$一个4-可着色。**

哈工大 2012 年 春季学期

# 集合论与图论考试题

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|
| 分数 | | | | | |

| 学号 | |
|---|---|
| 姓名 | |

注意行为规范

遵守考场纪律

## 本试卷满分 100 分

（计算机学院 11 级）

## 一、填空（本题满分 10 分）

1. 求方程：$A\Delta X = B$ 的解。 ______________

2. 设 $X=\{1,2,\cdots,m\}$，$Y=\{a,b\}$，求 X 到 Y 的满射的个数。______________

3. 给定集合 $S=\{1,2,3,4,5\}$，找出 S 上的等价关系 $R$，此关系 $R$ 能产生划分为 $\{1,2\}$，$\{3\}$，$\{4,5\}$。 $R=$ ______________

4. 在 $A$ Î $\{2,3,4,8,9,10,11\}$ 上定义的整除关系是偏序关系，则极大元是什么。

______________

5. 什么是可数集合？______________
6. 图 $G$ 是欧拉图当且仅当图 $G$ 是______________
7. 若图 $G$ 是自补图，则它所对应的完全图的边数一定是______________数。
8. 每棵树的中心含有多少个顶点？ ______________
9. 把平面分成 $p$ 个区域，每两个区域都相邻，问 $p$ 最大为多少？ ________

10. 若 $D=(V,A)$ 是单向连通的当且仅当 $D$ 中有一条 ______________

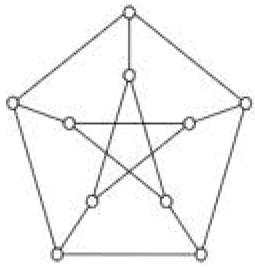
| 主管领导审核签字 |
|---|
| |

## 二、简答下列各题（本题满分 30 分）

**1.** 设 $R$ 是复数集合 $A$ 上的一个二元关系且满足 $xRy \Leftrightarrow x-y=a+bi$，$a,b$ 为非负整数，试确定 $R$ 的性质。（自反、反自反、对称、反对称、传递）

2. 如图所示是彼德森图$G$，回答问题:

（1）图$G$是否是偶图？　（2）图$G$是否是平面图？（3）图$G$的色数是多少？



3. 下列命题是否成立？若成立请证明之，若不成立请举反例。

（1） $(A\setminus B)\bigcup C = A\setminus(B\setminus C)$；　（2） $A\bigcup(B\setminus C)=(A\bigcup B)\setminus C$；

4. 设$f: N\times N\to N, f((x,y))=xy$。则

（1）说明$f$，$g$是否是单射、满射或双射？　（2）求$f(N\times\{1\}), f^{-1}(\{0\})$。

5.（1）根据你的理解给出二元关系$R$传递闭包$R^+$的定义;

（2）若$R$是集合$A$上的反对称关系，则$R^+$一定是反对称的吗？举例说明。

6. （下列两题任选一题）

（1）已知$a,b,c,d,e,f,g$ 7 个人中，$a$会讲英语；$b$会讲英语和汉语；$c$会讲英语、意大利语和俄语；$d$会讲汉语和日语；$e$会讲意大利语和德语；$f$会讲俄语、日语和法语；$g$会讲德语和法语。能否将他们的座位安排在圆桌旁，使得每个人都能与他身边的人交谈？

（2）今要将 6 个人分成 3 组（每组 2 个人）去完成 3 项任务，已知每个人至少与其余 5 个人中的 3 个人能相互合作，问：

(1)能否使得每组 2 个人都能相互合作？ (2)你能给出几种方案？

7. 设$T$是一个有$n_0$个叶子的二元树，出度为 2 的顶点为$n_2$，则$n_0$和$n_2$有何关系？说明理由。

8. 设$G$是一个$(p,q)$图，若$q \geq p$，则$G$中一定有圈吗?说明理由。

## 三、证明下列各题（本题满分 60 分）

1. 设 $A, B$ 是两个集合，$B \neq \varnothing$，试证：若 $A \times B = B \times A$，则 $A = B$。

2. 证明：在 52 个整数中，必有两个整数，使得这两个整数之和或差能被 100 整除。

3. 设 $f: X \to Y$，证明：$f$ 是满射 $\Leftrightarrow \forall E \in 2^Y, f(f^{-1}(E)) = E$。

4. 任选一题

（1）设$R$是集合$A$上的一个自反的和传递的关系；$T$是$A$上的一个关系，使得

$(a,b)\in T \Leftrightarrow (a,b)\in R$且$(b,a)\in R$。证明：$T$是$A$上的等价关系。

（2）设$R,S$是$A$上的等价关系，证明：$R\circ S$是等价关系$\Leftrightarrow$ $R\circ S=S\circ R$。

5. 若$A$可数，证明：$2^A$不可数。（利用康托对角线法）

6. 若$G$是一个恰有两个奇度顶点$u$和$v$的无向图，证明：$G$连通$\Leftrightarrow G+uv$连通。

7. 任选一题

(1) 证明：任一非平凡树中至少有两个度为 1 的顶点。

(2) 证明：恰有两个顶点度数为 1 的树必为一条通路。

8. 证明：若每个顶点的度数大于等于 3 时，则不存在有 7 条边的平面连通图。

9. 证明：在一个连通图中，两条最长的路有一个公共的顶点。

10. 用数学归纳法证明:每个比赛图中必有有向哈密顿路。