数理逻辑第 1 次习题作业部分参考答案

2.

(3) $A \to (B \to C) \Rightarrow (A \to B) \to (A \to C)$

解:成立。

方案 1：根据定义用真值表法。//注意这里课堂上所提的计算量优化。

方案 2：调用逻辑蕴涵的判定定理。

证 $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ 为永真式:

$$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$$

$$\Leftrightarrow \neg(A \to (B \to C)) \vee ((A \to B) \to (A \to C))$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B \vee C) \vee (\neg(\neg A \vee B) \vee (\neg A \vee C))$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B \vee C) \vee ((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \vee C))$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B \vee C) \vee ((A \vee \neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg A \vee C))$$

$\Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B \vee C) \vee (\neg B \vee \neg A \vee C) \Leftrightarrow T$ 为永真式。

(4) $A \to (B \to C) \Leftrightarrow A \wedge B \to C$

解:成立。

方案 1：根据定义用真值表法。

方案 2：调用逻辑等价的判定定理。

证 $(A \to (B \to C)) \leftrightarrow (A \wedge B \to C)$ 为永真式。证明方法可以同上(3)。

$$(A \to (B \to C)) \leftrightarrow (A \wedge B \to C) \Leftrightarrow T$$

方案 3：利用替换原理进行等价变换。

$$A \to (B \to C) \Leftrightarrow \neg A \vee (\neg B \vee C) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B) \vee C \Leftrightarrow \neg(A \wedge B) \vee C$$

$$\Leftrightarrow A \wedge B \to C$$

(5) $(A \vee B) \to C \Leftrightarrow (A \to C) \wedge (B \to C)$

解：成立。解法同(4).

(6) $\neg A \vee B, A \to (B \wedge C), D \to B \Rightarrow \neg B \to C$

解：不成立。

方案 1：根据定义用真值表法。//注意优化，比如从结论 $\neg B \to C$ 来看，显然 B 为 T 时不用考虑了，因为此时结论 $\neg B \to C$ 自动为真。故只需要考虑 B 为 F 的情况。以此类推，可以进一步优化。

方案 2：调用逻辑蕴涵的判定定理。//此处较为麻烦。

证 $(\neg A\vee B)\wedge(A\to(B\wedge C))\wedge(D\to B)\to(\neg B\to C)$ 是否为永真式。

$(\neg A\vee B)\wedge(A\to(B\wedge C))\wedge(D\to B)\to(\neg B\to C)$

$\Leftrightarrow(\neg A\vee B)\wedge(\neg A\vee(B\wedge C))\wedge(\neg D\vee B)\to(B\vee C)$

$\Leftrightarrow(\neg A\vee B)\wedge(\neg A\vee C)\wedge(\neg D\vee B)\to(B\vee C)$

$\Leftrightarrow(A\wedge\neg B)\vee(A\wedge\neg C)\vee(D\wedge\neg B)\vee(B\vee C)$

$\Leftrightarrow(A\wedge\neg B)\vee(A\wedge\neg C)\vee((D\wedge\neg B)\vee(B\vee C))$

$\Leftrightarrow(A\wedge\neg B)\vee(A\wedge\neg C)\vee(D\vee B\vee C)$

$\Leftrightarrow(A\wedge\neg B)\vee((A\wedge\neg C)\vee(D\vee B\vee C))$

$\Leftrightarrow(A\wedge\neg B)\vee(A\vee D\vee B\vee C)$

$\Leftrightarrow A\vee D\vee B\vee C$ 显然为非永真式，故不成立。

方案 3：举反例。由 $\neg B\to C$ 为假：知 B 为 F，C 为 F，在此基础上寻找前提为真的指派：A 为 F，D 为 F 即可。从而找到前提均为真而结论为假的指派，故原逻辑蕴涵不成立。

3. 合取范式与析取范式较简单，略。

4.

1）

解：$p\to(p\wedge q)\Leftrightarrow\neg p\vee(p\wedge q)\Leftrightarrow(\neg p\vee p)\wedge(\neg p\vee q)\Leftrightarrow\neg p\vee q$ 为主合取范式。

主析取范式：$(\neg p\wedge q)\vee(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge q)$

2）

解：$(p\vee q)\to(q\to r)\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg q\vee r)$

$\Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)$ 为主合取范式。

主析取范式：$(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee$

$(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

3）

解：$(p\to(p\wedge q))\vee r\Leftrightarrow(\neg p\vee(p\wedge q))\vee r\Leftrightarrow(\neg p\vee p)\wedge(\neg p\vee q))\vee r$

$\Leftrightarrow\neg p\vee q\vee r$ 为主合取范式。

主析取范式：$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee$

$(\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$