2009 概率统计考试题答案

一、 填空题

1. $\frac{1}{2}$;2. $\frac{3}{8}$;3. $\frac{9}{64}$;4. $(\bar{x}-\frac{4}{\sqrt{9}}u_{0.025},\bar{x}+\frac{4}{\sqrt{9}}u_{0.025})=(30-\frac{4}{3}\times 1.96,30+\frac{4}{3}\times 1.96)$;5. $\frac{1}{2}$

二、选择题

1.B;　　2.C;　　3.A;　　4.B;　　5.D

三、**解**：设 $B=$“取出的一个球是白球”，再设 A_i = “取到了第 i 箱”，$i=1,2,3$.　3 分

则由全概率公式有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)=\frac{1}{3}(\frac{1}{5}+\frac{3}{6}+\frac{5}{8})=\frac{53}{120}$$　7 分

四、**解**：（1） $f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)} & x>0,y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}e^{-x}.e^{-y}, x>0,y>0\\ 0, \quad \text{其它}\end{cases}=f_X(x)f_Y(y)$，

$$\forall x,y\in R$$

所以， X,Y 相互独立同分布， $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, x>0\\ 0, \quad x\le 0\end{cases}$

利用卷积公式有： Z 的概率密度为

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(x-z)dx$，使被积函数不为 0 的积分区域： $\begin{cases}x>0\\ x-z>0\end{cases}$

$$\text{当}z\le 0\text{时，}f_Z(z)=\int_0^{\infty}e^{-x}\cdot e^{-(x-z)}dx=e^z(-\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^{\infty})=\frac{1}{2}e^z;$$

$$\text{当}z>0\text{时，}f_Z(z)=\int_z^{\infty}e^{-x}\cdot e^{-(x-z)}dx=e^z(-\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_z^{\infty})=\frac{1}{2}e^{-z}.$$

6 分

$$F_z(z)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{z}f_Z(x)dx=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{2}e^x dx=\frac{1}{2}e^x\Big|_{-\infty}^{z}=\frac{1}{2}e^z, z\le 0\\ \int_{-\infty}^{z}f_z(x)dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^x dx+\int_0^z\frac{1}{2}e^{-x}dx=1-\frac{1}{2}e^{-z}, z>0\end{cases}$$

4 分

（2）利用分布函数方法

$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X-Y\le z)$

当 $z>0$ 时 $F_Z(z)=\int_0^z dx\int_0^{+\infty} e^{-(x+y)}dy+\int_z^{\infty} dx\int_{x-z}^{+\infty} e^{-(x+y)}dy$

$$=\int_0^z e^{-x}dx\int_0^{+\infty} e^{-y}dy+\int_z^{+\infty} e^{-x}dx\int_{x-z}^{+\infty} e^{-y}dy$$

$$=1-e^{-z}+e^{z}\int_z^{+\infty} e^{-2x}dx=1-e^{-z}+\frac{1}{2}e^{-z}$$

$$=1-\frac{1}{2}e^{-z}$$

当 $z\le 0$ 时 $F_Z(z)=\int_0^{+\infty} dx\int_{x-z}^{+\infty} e^{-(x+y)}dy=e^{z}\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx$

$$=\frac{1}{2}e^{z}$$ 6 分

$\therefore F_Z(z)=\begin{cases}1-\frac{1}{2}e^{-z} & z>0\\ \frac{1}{2}e^{z} & z\le 0\end{cases}$ $\quad\therefore\ f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-z} & z>0\\ \frac{1}{2}e^{z} & z\le 0\end{cases}$ $\quad -\infty<z<+\infty$

4 分

五、解：（1） $EZ=\frac{1}{3}EX+\frac{1}{2}EY=\frac{1}{3}$

$$DZ=D(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=\frac{1}{9}DX+\frac{1}{4}DY+2COV(\frac{X}{3},\frac{Y}{2})$$

$$=\frac{1}{9}\times 9+\frac{1}{4}\times 16+2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}$$

$$=1+4+2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})\times 3\times 4=3$$ 5 分

（2） $EXZ=EX(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=\frac{1}{3}EX^{2}+\frac{1}{2}EXY$

$$=\frac{1}{3}[DX+(EX)^2]+\frac{1}{2}[\mathrm{C}\mathrm{ov}(X,Y)+EXEY]$$

$$=\frac{1}{3}(9+1)+\frac{1}{2}(\rho_{XY}\sqrt{DX\cdot DY}+0)$$

$$=\frac{10}{3}+\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot 3\cdot 4=\frac{1}{3}$$

于是 $\mathrm{C}\mathrm{ov}(X,Z)=E(XZ)-EXEZ=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$

故 $\rho_{XZ}=0$ 5 分

六、解：(1)参数λ的矩估计：

$$\mu_1 = EX = \int_0^{+\infty} x\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}x}dx = -\int_0^{+\infty} xd\left(e^{-\frac{1}{\lambda}x}\right),$$

$$= \left[-xe^{-\frac{1}{\lambda}x}\Big|_0^{+\infty} + (-\lambda)e^{-\frac{1}{\lambda}x}\Big|_0^{+\infty}\right] = \lambda$$

所以参数λ的矩估计$\hat{\lambda} = \overline{X}$。　　　　　　　　4 分

参数λ的极大似然估计：似然函数为

$$L(x_1,\cdots,x_n;\lambda) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}x_i}\right) = \frac{1}{\lambda^n}\exp\left\{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i\right\}$$

求对数

$$\ln L(\lambda) = -n\ln\lambda - \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

求导数，令其为零，得似然方程：$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}x_i \triangleq 0$

解似然方程得：$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i = \bar{x}$

故参数λ的极大似然估计为$\hat{\lambda} = \overline{X}$。　　　　　　　　8 分

(2)因为$E\overline{X} = EX = \lambda$，所以$\hat{\lambda} = \overline{X}$是$\lambda$的无偏估计。　2 分

七．解：(1)

$\forall z \in R, F_Z(z) = P(Z \le z) = P(XY \le z)$

又X,Y是定义于同一个样本空间之上的随机变数

$\therefore S = (Y=0) + (Y=1)$

利用全概率公式：

$$F_Z(z) = P(Y=0)P(XY \le z|Y=0) + P(Y=1)P(XY \le z|Y=1)$$

$$= \frac{1}{2}P(0 \le z|Y=0) + \frac{1}{2}P(X \le z|Y=1) = \frac{1}{2}P(0 \le z) + \frac{1}{2}P(X \le z)$$

(利用0与Y独立，X与Y独立）

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{2}\times\Phi(z), z \ge 0 \\ \frac{1}{2}\times 0 + \frac{1}{2}\times\Phi(z), z < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(z), z \ge 0 \\ \frac{1}{2}\Phi(z), z < 0 \end{cases}$$　　4 分

（2） $F_Z(z)$有一个间断点（$z=0$）

（$\because \lim_{z\to 0+} F_Z(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(0) = \frac{3}{4} \ne \lim_{z\to 0-}\frac{1}{2}\Phi(z) = \frac{1}{4}$）　2 分