哈工大春季学期《集合论与图论》

考 试 题

练 习 题

哈工大 2014年 春季学期

集合论与图论考试题

题号	一	二	三	四	总分
分数					

学号	
姓名	

本试卷满分100分

（计算机学院、英才学院2013级）

注意行为规范

遵守考场纪律

主管领导审核签字

一、填空（本题满分20分，每小题各1分）

1. 化简 $(A\cup(B\setminus C)\cap A)\cup(A\setminus(B\cap C)\cup(A\cap B\cap C))$。（ A ）

2. 设 A,B 为集合，使下列两式 $A\setminus B=B\setminus A$ 和 $(A\setminus B)\cup B=(A\cup B)\setminus B$ 成立的充要条件是什么？（ $A=B=\phi$ ）

3. 设 R,I,N 分别表示实数，整数，自然数集（包括0），定义映射 f_1,f_2,f_3，试确定它们的性质（单射、满射、双射）。

(1) $f_1:R\to R, f_1(x)=2^x$；（ 单射 ）

(2) $f_2:I\to N, f_2(x)=|x|$；（ 满射 ）

(3) $f_3:R\to R, f_3(x)=x+2$。（ 双射 ）

4. 设 $f:X\to Y, A\subseteq X$，则 $f^{-1}(f(A))$ 与 A 有何关系？（ ） $f^{-1}(f(A))\supseteq A$

5. 设 X 是一个集合，$|X|=n$，试求：

(1) X 上自反的二元关系的个数；（ 2^{n^2-n} ）

(2) X 上对称的二元关系的个数。（ $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ ）

6. 给定集合 $S=\{1,2,3,4,5\}$，找出 S 上的等价的关系 R，此关系 R 能产生划分 $\{\{1,2\},\{3\},\{4,5\}\}$。（ $\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4),(4,5),(5,4),(5,5)\}$ ）

7. 在集合 $A=\{1,2,\cdots,11,12\}$ 上定义的整除关系"|"是 A 上的偏序关系，则极大元是什么？（ 7 8 9 10 11 12 ）

8. 什么是无穷集合？（ ）

9、已知有向图 D 的邻接矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&1&1&0&0\\1&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$，则

（1）画出邻接矩阵为 A 的有向图 D 的图解；

（2）写出 D 的可达矩阵 R；

（3）写出计算两顶点之间长为 k 的有向通道条数的计算方法。

（1）　　　　　　　　（2）　　　　　　　　（3）

10、每个自补图必有多少个顶点？　　　　　（　　　　　　）

11、设 p,q 为正整数，则

（1）p,q 为何值时 $K_{p,q}$ 为欧拉图？　　　　（　　　　　　）

（2）p,q 为何值时 $K_{p,q}$ 为哈密顿图？　　　　（　　　　　　）

12、设 G 是 (p,q) 图，若 $q \ge p-1$，则 G 的连通度 $k(G)$ 至多为多少？（　　　）

13、设 $V=\{1,2,\cdots,n\}$，则以 V 为顶点集的无向图共有多少个？　　（　　　）

14、设 $V=\{1,2,\cdots,n\}$，则以 V 为顶点集的有向图共有多少个？　　（　　　）

二、填空（本题满分 10 分，每小题各 2 分）

1、某班有学生 50 人，有 26 人在第一次考试中得优，有 21 人在第二次考试中得优，有 17 人两次考试都没有得优，那么两次考试都得优的学生人数是多少？

（　14　）

2、设 $A=\{a,b,c\}$，给出 A 上的一个二元关系，使其同时不满足自反性、反自反性、对称性、反对称和传递性的二元关系。

（　　　　　　　　　　　　）

3、集合 $A=\{a,b,c\}$，A 上的关系 $R=\{(a,b),(b,c),(c,a)\}$，则 R^+ 等于什么？

（　　　　　　　　　　　　）

4. 设T为任一棵正则二元树，q为边数，$t(t\geq 2)$为树叶数，则q等于什么？

（　　　　）

5. 设G是有8个顶点的极大平面图，则G的面数f为多少？（　　　　）

三、证明下列各题（本题满分70分，每小题各7分）

1. 设A,B,C是三个任意集合，证明：$A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$。

2. 设$N=\{1,2,3,\cdots\}$，试构造两个映射f和g：$N\to N$，使得：$fg=I_N$，但$gf\neq I_N$。

3. 下列两题任选一题

（1）设R是X上的二元关系，证明：R是对称的$\Leftrightarrow R=R^{-1}$。

（2）设R是X上的二元关系，证明：R是传递的$\Leftrightarrow R\circ R\subseteq R$。

4．设R,S是集合X上的等价关系，则$R\circ S$是X上的等价关系$\Leftrightarrow R\circ S=S\circ R$。

5．证明：全体有理数之集Q是可数集。

6．设$G=(V,E)$是一个有p个顶点的图。若对G的任两个不邻接的顶点u和v，有$\deg u+\deg v\geq p-1$，证明：G是连通的。

7. 设$G=(V,E)$是无向图，证明：若$\delta(G)\geq m$，则图G中包含长至少为$m+1$的圈。

8. 设G是一个(p,q)图，证明：G是树$\Leftrightarrow$ G连通且$p=q+1$。

9．设 G 是顶点 $p\geq 11$ 的平面图，证明：G 的补图 G' 是非平面图。

10．用数学归纳法证明每个比赛图中必有有向哈密顿路。

2014年参　考　答　案

一、填空（本题满分 20 分，每小题各 1 分）

1. 化简 $(A\cup(B\setminus C)\cap A)\cup(A\setminus(B\cap C)\cup(A\cap B\cap C))$。　　（　A　）

2. 设 A, B 为集合，使下列两式 $A\setminus B=B\setminus A$ 和 $(A\setminus B)\cup B=(A\cup B)\setminus B$ 成立的充要条件是什么？　　（$A=B=\Phi$）

3. 设 R,I,N 分别表示实数，整数，自然数集（包括 0），定义映射 f_1,f_2,f_3，试确定它们的性质（单射、满射、双射）。

   （1）$f_1:R\to R, f_1(x)=2^x$；　　（f_1 是单射　）

   （2）$f_2:I\to N, f_2(x)=|x|$；　　（f_2 是满射　）

   （3）$f_3:R\to R, f_3(x)=x+2$。　　（f_3 是双射　）

4. 设 $f:X\to Y, A\subseteq X$，则 $f^{-1}(f(A))$ 与 A 有何关系？　　（$f^{-1}(f(A))\supseteq A$　）

5. 设 X 是一个集合，$|X|=n$，试求：

   矩阵对角线全为1

   （1）X 上自反的二元关系的个数：　　（　2^{n^2-n}　）

   （2）X 上对称的二元关系的个数：　矩阵为对称矩阵　（　$2^{\frac{n^2+n}{2}}$　）

6. 给定集合 $S=\{1,2,3,4,5\}$，找出 S 上的等价的关系 R，此关系 R 能产生划分 $\{\{1,2\},\{3\},\{4,5\}\}$。（$\{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1),(3,3),(4,4),(5,5),(4,5),(5,4)\}$）

7. 在集合 $A=\{1,2,\cdots,11,12\}$ 上定义的整除关系"|"是 A 上的偏序关系，则极大元是什么？　　（ 7, 8, 9, 10, 11, 12 ）

8. 什么是无穷集合？

   （凡能与自身的一个真子集对等的集称为无穷集合。）

9、已知有向图 D 的邻接矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&1&1&0&0\\1&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$，则

（1）画出邻接矩阵为 A 的有向图 D 的图解；

（2）写出 D 的可达矩阵 R；

（3）写出计算两顶点之间长为 k 的有向通道条数的计算方法。

(1) (2) (3)

10. 每个自补图必有多少个顶点？ （$4n$ 或 $4n+1$，n 为正整数）

11. 设 p,q 为正整数，则

(1) p,q 为何值时 $K_{p,q}$ 为欧拉图？ （ p,q 均为偶数 或 $p,q\geq 2$ 均为偶数）

(2) p,q 为何值时 $K_{p,q}$ 为哈密顿图？ （ $p=q$ ）

12、设 G 是 (p,q) 图，若 $q\geq p-1$，则 G 的连通度 $k(G)$ 至多为多少？

（$[2q/p]$ 或 $2q/p$ ）

13．设 $V=\{1,2,\cdots,n\}$，则以 V 为顶点集的无向图共有多少个？ （ $2^{n(n-1)/2}$ ）

14．设 $V=\{1,2,\cdots,n\}$，则以 V 为顶点集的有向图共有多少个？ （ $2^{n(n-1)}$ ）

二、填空（本题满分 10 分，每小题各 2 分）

1．某班有学生 50 人，有 26 人在第一次考试中得优，有 21 人在第二次考试中得优，有 17 人两次考试都没有得优，那么两次考试都得优的学生人数是多少？ （ 14 ）

2．设 $A=\{a,b,c\}$，给出 A 上的一个二元关系，使其同时不满足自反性、反自反性、对称性、反对称和传递性的二元关系。

（ $R=\{(a,a),(b,c),(c,b),(a,c)\}$ ）

3．集合 $A=\{a,b,c\}$，A 上的关系 $R=\{(a,b),(b,c),(c,a)\}$，则 R^+ 等于什么？

（ $R^+=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,b),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$ ）

4．设 T 为任一棵正则二元树，q 为边数，$t(t\geq 2)$ 为树叶数，则 q 等于什么？

（ $q=2(t-1)$ ）

5．设 G 是有 8 个顶点的极大平面图，则 G 的面数 f 为多少？ （ 12 ）

三、证明下列各题（本题满分 70 分，每小题各 7 分）

1．设 A,B,C 是三个任意集合，证明：$A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$。

证：设 $(x,y)\in A\times(B\setminus C)$，则 $x\in A$，$y\in B\setminus C$，从而 $x\in A$，$y\in B$，$y\notin C$。

于是 $(x,y)\in A\times B$，$(x,y)\notin A\times C$，因此 $(x,y)\in(A\times B)\setminus(A\times C)$，即

$$A\times(B\setminus C)\subseteq(A\times B)\setminus(A\times C)。$$

反之，设$(x,y)\in(A\times B)\setminus(A\times C)$，有$(x,y)\in(A\times B)$，$(x,y)\notin(A\times C)$，从而$x\in A$，$y\in B$，$y\notin C$，故$x\in A$且$y\in B\setminus C$。于是$(x,y)\in A\times(B\setminus C)$，

即$(A\times B)\setminus(A\times C)\subseteq A\times(B\setminus C)$。

因此，$A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$。

2. 设$N=\{1,2,3,\cdots\}$，试构造两个映射f和g: $N\to N$，使得：$fg=I_N$，但$gf\neq I_N$。

解：令：$f:N\to N, f(1)=1, f(n)=n-1, n\geq 2$，$g:N\to N,\forall n\in N, g(n)=n+1$，

则$fg=I_N$但$gf\neq I_N$。

3. 下列两题任选一题

（1）设R是A上的一个二元关系，证明：R是对称的$\Leftrightarrow R=R^{-1}$。

（2）设R为X上的二元关系，试证：R是传递的$\Leftrightarrow R\circ R\subseteq R$。

证：（1）$\Rightarrow \forall(x,y)\in R$，由R的对称性有$(y,x)\in R$，即$(x,y)\in R^{-1}$，从而$R\subseteq R^{-1}$

反之，$\forall(y,x)\in R^{-1}$，则$(x,y)\in R$。由R的对称性有：$(y,x)\in R$，从而$R^{-1}\subseteq R$

故$R=R^{-1}$

$\Leftarrow \forall x$，$y\in X$，若$(x,y)\in R$，由$R=R^{-1}$，得$(x,y)\in R^{-1}$，即$(y,x)\in R$，故R是对称的。

（2）设R是传递的，则$\forall(x,z)\in R\circ R$，有$y\in X$使得$(x,y)\in R$，$(y,z)\in R$。由R的传递性知$(x,z)\in R$，故$R\circ R\subseteq R$。反之，设$R\circ R\subseteq R$，往证R是传递的。为此，设$(x,y),(y,z)\in R$，则由合成的定义有$(x,z)\in R\circ R$。再由$R\circ R\subseteq R$得$(x,z)\in R$。因此，R是传递的。

4. 设R,S是集合X上的等价关系，则$R\circ S$是X上的等价关系$\Leftrightarrow R\circ S=S\circ R$。

证：$\Rightarrow R\circ S=(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}=S\circ R$。

$\Leftarrow$由R,S是等价关系得到$R\circ S$自反的；

又由$(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}=S\circ R=R\circ S$，故$R\circ S$是对称的；

而$(R\circ S)^2=(R\circ S)\circ(R\circ S)=R\circ(S\circ R)\circ S=R\circ(R\circ S)\circ S=R^2S^2\subseteq R\circ S$。

从而 $R\circ S$ 是传递的，因此，$R\circ S$ 是等价关系。

5、证明：全体有理数之集 Q 是可数集。

证：因为 $Q=Q_+\cup Q_-\cup\{0\}$。显然，$Q_+\sim Q_-$。因此只须证明 Q_+ 是可数集即可。

因为每个正有理数均可写成 p/q 的形式，其中 p 与 q 为自然数。于是，

$\forall q\in N$，令 $A_q=\{\frac{p}{q}|p\in N\}$，则 A_q 是可数集，并且 $Q_+=\bigcup_{q=1}^{\infty}A_q$。由定理可知，

Q_+ 是可数集。因此，Q 是可数集。

6、设 $G=(V,E)$ 是一个有 p 个顶点的图。若对 G 的任两个不邻接的顶点 u 和 v，

有 $\deg u+\deg v\geq p-1$，证明：G 是连通的。

证：若 G 不连通，则 G 至少有两个支。设 $G_1=(V_1,E_1)$ 是其中的一个支，其他各支构成的子图为 $G_2=(V_2,E_2)$，$|V_1|=n_1,|V_2|=p-n_1$，则任意 $\forall u\in V_1,v\in V_2$，有

$$\deg u\leq n_1-1,\deg v\leq p-n_1-1。$$

于是，$\deg u+\deg v\leq(n_1-1)+(p-n_1-1)=p-2$。

这与假设相矛盾，所以 G 是连通的。

7、设 $G=(V,E)$ 是无向图，证明：若 $\delta(G)\geq m$，则图 G 中包含长至少为 $m+1$ 的圈。

证：设 L 是 G 中最长的路，$L:v_1v_2\cdots v_n$，因为 $\forall v\in V,\deg v\geq m$，所以必有 L 上的 m 个顶点 $v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_m}(2=i_1<i_2<\cdots<i_m)$ 与 v_1 邻接，于是 $v_1v_2\cdots v_{i_m}v_1$ 便是 G 中的一个圈路，且长至少为 $m+1$。

若 L 上不存在 m 个顶点与 v_1 邻接，则在最长路 L 外必有一个顶点与 v_1 邻接，于是有更长路矛盾。

8、设 G 是一个 (p,q) 图，证明：G 是树 $\Leftrightarrow$ G 连通且 $p=q+1$。

证：$\Rightarrow$ 因为 G 是树，所以 G 是连通的；
其次对 G 的顶点数 p 进行归纳证明 p=q+1。
当 p 为 1 或 2 时，连通图 G 中显然有 p=q+1。
假设对一切少于 p 个顶点的树结论成立；

今设G是有p个顶点树，从G中去掉任一条边x，则G-x恰有两个支。由归纳假设，每个支中顶点数与边数之间有关系式：$p_1=q_1+1$，$p_2=q_2+1$。

所以，$p=p_1+p_2=q_1+q_2+2=(q_1+q_2+1)+1=q+1$。

⇐显然，只须证G中无回路即可。

设G中有一个长为n的回路C_n，则回路上有n条边，显然$n\le p$。于是，G中还有p-n个顶点不在C_n上。由于G是连通的，所以不在C_n上的那些p-n个点的每一个均关联一条边，这些边互不相同，其中每一条都在该点与C_n的某点的最短路上。因此，除了C_n上的n条边之外，G至少还有p-n条边。所以，G至少有$q\ge p$条边，这与$p=q+1$相矛盾，故G中无回路。

9．设G是顶点$p\ge 11$的平面图，证明：G的补图G^c是非平面图。

证：反证法：假设图G的补图G^c也是平面图，令$G=(p,q)$，$G^c=(p_1,q_1)$，则$p=p_1$，而$q+q_1=p(p-1)/2$ …………．　(1)

又因为G和G^c都是平面图，故$q\le 3p-6$，$q_1\le 3p-6$。相加得：

$$q+q_1\le 6p-12 \qquad (2)$$

由(1)、(2)易得：$q+q_1=p(p-1)/2\le 6p-12$，展开有：$p^2-13p+24\le 0$，于是$p<11$。与题设矛盾，所以G^c不是平面图。

10．用数学归纳法证明每个比赛图中必有有向哈密顿路。

证：设D是p个顶点的比赛图。施归纳于p：当p=1，2时结论显然成立。假设当$p\ge 2$时结论成立，往证对p+1个顶点的比赛图D也成立。从D中去掉一个顶点u，则得到一个具有p个顶点的比赛图D-u。由归纳假设D-u有哈密顿路u_1，u_2，…，u_p。在D中，如uu_1或u_pu为D的弧，则结论成立。今设u_1u及uu_p为D的弧。由于D比赛图，所以u与u_k（k=2，…，p-1）之间有且仅有一条弧，于是必有一个最大i使u_iu为弧，从而uu_{i+1}为D的弧。于是，$u_1\cdots u_iuu_{i+1}\cdots u_p$为D的哈密顿路。由归纳法原理知对任何p本题结论成立。

哈工大 2013 年 春季学期

集合论与图论考试题

题号	一 24分	二 20分	三 56分	四	总分
分数					

学号	
姓名	

注意行为规范 遵守考场纪律

主管领导审核签字

本试卷满分 100 分

（计算机学院、英才学院 12 级）

一、填空

（本题满分 24 分，1-10 题每空各 1 分，11-13 题每空各 2 分）

1．化简 $(B\setminus(A\cap C))\cup(A\cap B\cap C)$ （B ）

2. 设 A,B 是任意集合，则

(1) $A\times B=B\times A$ 充要条件是什么？ （$A=\varnothing$ 或 $B=\varnothing$ 或 $A=B$ ）

(2) $(A\setminus B)\cup B=(A\cup B)\setminus B$ 充要条件是什么？ （$B=\varnothing$ ）

3. 设 $f:X\to Y, B\subseteq Y$，则

(1) 若 $y\in Y$，则 $f^{-1}(y)$ 与 X 有何关系？ （$f^{-1}(y)\subseteq X$ ）

(2) B 与 $f(f^{-1}(B))$ 有何关系？ （ $f(f^{-1}(B))\subseteq B$ ）

4．在集合 $A=\{2,3,4,8,9,10,11\}$ 上定义的整除关系"|"是偏序关系，则

(1)画出 Hasse 图； （ ）

(2)指出极大元、极小元是什么。(极大元:8, 9, 10, 11；极小元:2, 3, 11)

5．什么是无穷集合？（凡能与自身一个真子集对等的集称为无穷集合）

6. 设 G 是 $p(p\geq 2)$ 阶无向图，G^c 为 G 的补图，已知 $\Delta(G)=k_1,\delta(G)=k_2$，

则 $\Delta(G^c)$ 和 $\delta(G^c)$ 等于什么？ （$\Delta(G^c)$=p-1- k_2，$\delta(G^c)$=p-1-k_1）

7．设 $G=(V,E)$ 是一个 (p,q) 图，每个顶点的度为 3 且 $q=2p-3$。则

（1）G 一定是哈密顿图吗？ （一定是）

（2）G 一定为平面图吗？ （不一定）

（3）G 一定是欧拉图吗？ （不 是）

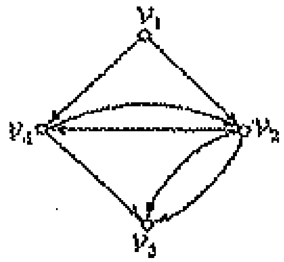
8．设T是一个正则m元树，它有n_0个叶子，则T有多少条弧？ （$m(n_0-1)/(m-1)$）

9．设G是由 6 个顶点，12 条边构成的平面连通图，则

(1) G有几个面？ （ 8 ）

(2) G的每个面由几条边围成？ （ 3 ）

10. 设$D=(V,E)$是一个有向图，如图所示，则



(1) 写出D的邻接矩阵B；

(2) 写出D的可达性矩阵R；

(3) 指出D的所有强分支（图）的顶点集合。

(1) （$\begin{pmatrix}0101\\0011\\0100\\0110\end{pmatrix}$）；(2) （$\begin{pmatrix}1111\\0111\\0111\\0111\end{pmatrix}$）；(3) （$\{v_1\}$，$\{v_2,v_3,v_4\}$ ）。

以下各题每空各 2 分

11. 集合$A=\{a,b,c,d\}$，X上的关系$R=\{(a,b),(b,c),(c,a)\}$，则R^+等于什么？

（$R^+=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b)\}$）

12. 设X是一个集合，$|X|=n$；则X上有多少个自反或对称的二元关系？

（$2^{n^2-n}+2^{\frac{n^2+n}{2}}-2^{\frac{n^2-n}{2}}$）

13. 无向图G的边数$q=16$，3 个 4 度顶点，4 个 3 度顶点，其余顶点的度均小于 3，则G中至少有多少个顶点？ （ 11）

二、简答下列各题（本题满分 20 分）

1．设$d_1,d_2,\cdots,d_p$为p个互不相同的正整数，则是否存在一个p阶的(简单)无向图G，使得G的各个顶点的度数序列恰好为$d_1,d_2,\cdots,d_p$？（3 分）

证：由于$d_1,d_2,\cdots,d_p$是互不相同的正整数，所以$\min\{d_1,d_2,\cdots,d_p\}\geqslant 1$，而$\max\{d_1,d_2,\cdots,d_p\}\geqslant$p。这与 p 阶简单无向图的最大度数≤p-1 相矛盾。故不存在

一个 p 阶的(简单)无向图 G 使得 G 的各个顶点的度数序列恰好为 $d_1,d_2,\cdots,d_p$。

2、设 G 是一棵树且 $\Delta(G)\geq k$，则 G 中至少有多少个度为 1 的顶点。说明理由。(4 分)

证：设 T 中有 p 个顶点，s 个树叶，则 T 中其余 $p-s$ 个顶点的度数均大于等于 2，且至少有一个顶点的度大于等于 k。由握手定理可得：

$$2q=2p-2=\sum_{i=1}^{p}deg(v_i)\geq 2(p-s-1)+k+s，有 s\geq k。$$

所以 T 中至少有 k 个树叶 。

3，一个没有有向圈的有向图中是否一定存在一个顶点使其入度为零？说明理由。(4 分

证：考察 D 中任一条最长有向路的第一个顶点 v，则 id(v)=0。因为若 id(v)≠0，则必有一个顶点 u 使得(u, v)∈A。于是，

若 u 不在此最长路上，则此最长路便不是 D 中的最长路，这是与前面的假设相矛盾。

若 u 在此最长路上，则 D 中有有向圈，这与定理的假设矛盾。因此 id(v)=0。

4、设 R 是集合 A 上任意自反和传递的关系，则　（１０分）

(1) $R\circ R=R$ 是否成立？说明理由。

(2) 该命题的逆命题是否成立？说明理由。

证：(1) $R\circ R=R$ 成立。

因为 R 是传递的，故 $R\circ R\subseteq R$，又 $\forall(x,y)\in R$，因 R 自反，故 $(x,x)\in R$，从而

$(x,y)\in R\circ R$，即 $R\subseteq R\circ R$。于是 $R\circ R=R$。

(2) 该命题的逆命题不成立。

设 $A=\{a,b,c\}$，A 上关系 $R=\{(a,a)\}$，则 $R\circ R=\{(a,a)\}=R$。

但 R 只是传递的，不是自反的。

三、证明下列各题（本题满分 56 分，每小题各 7 分）

1. 设 A,B,C,D 都为非空集合。证明：

$$(A\times C)\setminus(B\times D)=[A\times(C\setminus D)]\cup[(A\setminus B)\times C]。$$

证：设 $(x,y)\in(A\times C)\setminus(B\times D)$，则 $(x,y)\in A\times C$，且 $(x,y)\notin B\times D$。于是，
$x\in A$，$y\in C$，　$x\notin B$ 或 $y\notin D$。

若$x\notin B$，则$x\in A\setminus B$，$y\in C$，故$(x,y)\in(A\setminus B)\times C\subseteq$右边；

若$y\notin D$，则$y\in C\setminus D$，$x\in A$，故$(x,y)\in A\times(C\setminus D)\subseteq$右边。因此，左$\subseteq$右。

反之，设$(x,y)\in[A\times(C\setminus D)]\bigcup[(A\setminus B)\times C]$，则$(x,y)\in A\times(C\setminus D)$或$(x,y)\in(A\setminus B)\times C]$。

若$(x,y)\in A\times(C\setminus D)$，则$x\in A$，$y\in C$，$y\notin D$，即$(x,y)\in A\times C$，$(x,y)\notin B\times D$，故$(x,y)\in(A\times C)\setminus(B\times D)$。

若$(x,y)\in(A\setminus B)\times C$，则$x\in A$，$x\notin B$，$y\in C$，则$(x,y)\in A\times C$且$(x,y)\notin B\times D$，故$(x,y)\in(A\times C)\setminus(B\times D)$，因此，右$\subseteq$左。

从而，$(A\times C)\setminus(B\times D)=[A\times(C\setminus D)]\bigcup[(A\setminus B)\times C]$。

2. 设$f:X\to Y, g:Y\to Z$。若$g\circ f$是单射，则f与g哪个是单射？请证明之。

解：f是单射。

因为$g\circ f$是单射，所以$\forall x_1,x_2\in X$，若$x_1\neq x_2$，则$g(f(x_1))\neq g(f(x_2))$。

因此，$f(x_1)\neq f(x_2)$，故f是单射。

3. 设R是A上的一个自反关系，证明：R是等价关系$\Leftrightarrow$若$(a,b)\in R$且$(a,c)\in R$，则$(b,c)\in R$。

证：$\Rightarrow$ R是A上的等价关系。若$(a,b)\in R$且$(a,c)\in R$，由R的对称性有：$(b,a)\in R$，$(a,c)\in R$，由R的传递性有：$(b,c)\in R$

$\Leftarrow$R是自反的，故$\forall a\in A$有$(a,a)\in R$。

若$(a,b)\in R$，由$(a,a)\in R$有$(b,a)\in R$，所以R是对称的。

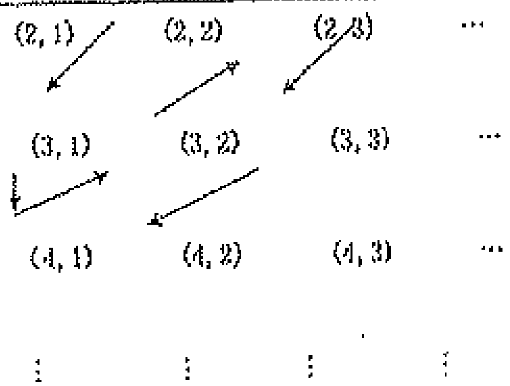
若$(a,b)\in R$且$(b,c)\in R$，由R的对称性有：

$(b,a)\in R$且$(b,c)\in R$，故由题意得$(a,c)\in R$，所以R是传递。

因此，R是A上的等价关系。

4. 设N是自然数集合，证明：$N\times N$是可数集。

证：$N\times N$中元素可以排成如下形式：



按上面箭头所指的方向排列这些元素，则这样排列后就在 $N\times N$ 与自然数集合 N 之间建立了一个一一对应，从而 $N\times N$ 是可数集。

5．设 G 是一个 (p,q) 图，且 $q>(p-1)(p-2)/2$，证明：G 是连通的。

证：用反证法。假设图 G 是不连通的，则图 G 至少存在两个连通分支 $G_1=(p_1,q_1)$ 和 $G_2=(p_2,q_2)$ 时，G 的最大可能边数 $q=q_1+q_2\le p_1(p_1-1)/2+p_2(p_2-1)/2$，其中 $1\le p_1\le p-1$，$1\le p_2\le p-1$，所以 $q\le(p-1)(p-2)/2$，与题设矛盾，所以若 G 是简单图，则 G 是连通的。

6．设 G 是一个 (p,q) 连通图，证明：G 有圈当 $q\ge p$。

证：⇐若 G 中无圈，则 G 是树，故 $q=p-1$ 与 $q\ge p$ 矛盾。
故 G 中必有回路。
⇒设 G 中有一个长为 n 的圈 C_n，则若 n=p，则 q≥p。命题成立。
若 n<p，则 G 中还有 p-n 个顶点不在 C_n 上。由于 G 是连通的，所以不在 C_n 上的那些 p-n 个点的每一个均关联一条边，这些边互不相同，其中每一条都在该点与 C_n 的某点的最短路上。因此，除了 Cn 上的 n 条边之外，G 至少还有 p-n 条边。所以，G 至少有 q≥p 条边。

7．证明：若每个顶点的度数大于等于 3 时，则不存在有 7 条边的平面连通图。

证：假设存在 7 条边的平面连通图，有 f 个面。则

由欧拉公式知：$p+f=q+2=9$　　　　　　　　(1)

而每个面至少由 3 条边围成，故 $3f\le 2q$，即 $f\le 2q/3$；因为 f 是整数，故 $f\le 4$。

又 $\forall v\in V$，$\deg v\ge 3$，有 $3p\le 2q$，故 $p\le 2q/3$；因为 p 是整数，故 $p\le 4$。

所以$p+f\le 4+4=8$，与（1）矛盾，所以结论正确。

8. 以下两题任选一题

(1) 设无向图G有p个顶点，$p\ge 2$。证明：若$\delta(G)\ge(p+k-1)/2$，则G是$k-$连通图，

其中$1\le k\le p-1$。（提示：当$\delta(G)\ge p/2$时，G是连通图）

(2) 设G是一个三次正则图，证明：$k(G)=\lambda(G)$。

证：（1）要证明G是$k-$连通图，等价于证明任意删去$k-1$个顶点及其关联的边后，图仍然是连通图。

任意删去$k-1$个顶点$v_1,v_2,\cdots,v_{k-1}$及关联的边得图G_1。在G_1中$\delta(G_1)\ge(p+k-1)/2-(k-1)=(p-k+1)/2$，而此时图$G_1$所含的顶点数$p_1=p-k+1$，即$\delta(G_1)\ge p_1/2$。故$G_1$是连通的。

因此，G的顶点连通度$k(G)\geqslant k$，即G是$k-$连通图.

（2）由定理知：$k(G)\leqslant\lambda(G)\leqslant\delta(G)$。

若$k(G)=3$，有$3=k(G)\leqslant\lambda(G)\leqslant\delta(G)=3$得，$k(G)=\lambda(G)=3$；

若$k(G)=1$，有$k(G)=\lambda(G)=1$；

若$k(G)=2$，有以下几种情况：

哈工大 2012 年 春季学期

集合论与图论考试题

题号	一	二	三	四	总分
分数					

学号	
姓名	

注意行为规范

遵守考场纪律

主管领导审核签字

本试卷满分 100 分

（计算机学院 11 级）

一、填空（本题满分 10 分）

1. 求方程：$AAX = B$ 的解。 ____________

2. 设 $X = \{1,2,\cdots,m\}$，$Y = \{a,b\}$，求 X 到 Y 的满射的个数。 ____________

3. 给定集合 $S = \{1,2,3,4,5\}$，找出 S 上的等价关系 R，此关系 R 能产生划分为 $\{1,2\}$，$\{3\}$，$\{4,5\}$。 $R =$ ____________

4. 在 $A = \{2,3,4,8,9,10,11\}$ 上定义的整除关系是偏序关系，则极大元是什么。

____

5. 什么是可数集合？ ____________
6. 图 G 是欧拉图当且仅当图 G 是____________
7. 若图 G 是自补图，则它所对应的完全图的边数一定是____________数。
8. 每棵树的中心含有多少个顶点？ ____________
9. 把平面分成 p 个区域，每两个区域都相邻，问 p 最大为多少？ ____________

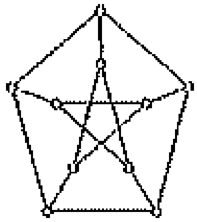
10. 若 $D = (V, A)$ 是单向连通的当且仅当 D 中有一条 ____________

二、简答下列各题（本题满分 30 分）

1. 设 R 是复数集合 A 上的一个二元关系且满足 $xRy \Leftrightarrow x - y = a + bi$，$a,b$ 为非负整数，试确定 R 的性质。（自反、反自反、对称、反对称、传递）

2. 如图所示是彼德森图G，回答问题：

（1）图G是否是偶图？　（2）图G是否是平面图？（3）图G的色数是多少？



3. 下列命题是否成立？若成立请证明之，若不成立请举反例。

（1）$(A\setminus B)\cup C = A\setminus(B\setminus C)$；　（2）$A\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\setminus C$；

4. 设$f: N\times N\to N, f((x,y))=xy$。则

（1）说明f，g是否是单射、满射或双射？　（2）求$f(N\times\{1\}), f^{-1}(\{0\})$。

5. （1）根据你的理解给出二元关系R传递闭包R^+的定义；

（2）若R是集合A上的反对称关系，则R^+一定是反对称的吗？举例说明。

6. （下列两题任选一题）

（1）已知a,b,c,d,e,f,g 7个人中，a会讲英语；b会讲英语和汉语；c会讲英语、意大利语和俄语；d会讲汉语和日语；e会讲意大利语和德语；f会讲俄语、日语和法语；g会讲德语和法语。能否将他们的座位安排在圆桌旁，使得每个人都能与他身边的人交谈？

（2）今要将6个人分成3组（每组2个人）去完成3项任务，已知每个人至少与其余5个人中的3个人能相互合作，问：

(1)能否使得每组2个人都能相互合作？ (2)你能给出几种方案？

7. 设T是一个有n_0个叶子的二元树，出度为2的顶点为n_2，则n_0和n_2有何关系？说明理由。

8. 设G是一个(p,q)图，若$q \ge p$，则G中一定有圈吗?说明理由。

三、证明下列各题（本题满分 60 分）

1. 设 A,B 是两个集合，$B\neq\varnothing$，试证：若 $A\times B=B\times A$，则 $A=B$。

2. 证明：在 52 个整数中，必有两个整数，使得这两个整数之和或差能被 100 整除。

3. 设 $f:X\to Y$，证明：f 是满射 $\Leftrightarrow \forall E\in 2^Y, f(f^{-1}(E))=E$。

4. 任选一题

(1) 设 R 是集合 A 上的一个自反的和传递的关系；T 是 A 上的一个关系，使得 $(a,b)\in T \Leftrightarrow (a,b)\in R$ 且 $(b,a)\in R$。证明：T 是 A 上的等价关系。

(2) 设 R,S 是 A 上的等价关系，证明：$R\circ S$ 是等价关系 $\Leftrightarrow R\circ S=S\circ R$。

5. 若 A 可数，证明：2^A 不可数。（利用康托对角线法）

6. 若 G 是一个恰有两个奇度顶点 u 和 v 的无向图，证明：G 连通 $\Leftrightarrow G+uv$ 连通。

7. 任选一题

(1) 证明：任一非平凡树中至少有两个度为 1 的顶点。

(2) 证明：恰有两个顶点度数为 1 的树必为一条通路。

8. 证明：若每个顶点的度数大于等于 3 时，则不存在有 7 条边的平面连通图。

9. 证明：在一个连通图中，两条最长的路有一个公共的顶点。

10. 用数学归纳法证明：每个比赛图中必有有向哈密顿路。

哈工大 2011 年 春季学期

集合论与图论考试题

题号	一	二	三	四	总分
分数					

学号	
姓名	

注意行为规范

遵守考场纪律

主管领导审核签字

本试卷满分 100 分

（计算机学院、英才学院 10 级）

一、填空(本题满分 10 分，每空各 1 分)

1.设 $f:X\to Y, g:Y\to Z$ ，若 $g\circ f$ 是单射，则 f 与 g 哪个是单射？（ f ）

2.集合 $A=\{a,b,c,d\}$ ， A 上的关系 $R=\{(a,b),(b,c),(c,a)\}$ ，则 R^+ 等于什么？

（ $R^+=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(a,c),(b,a)(b,c),(c,a),(c,b)\}$ ）

3.设 X 是集合，$|X|=n$，则反自反或对称的关系有多少？（ $2^{n^2-n}+2^{(n^2+n)/2}-2^{(n^2-n)/2}$ ）

4. 设 $\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 是集合 A 的划分，若 $A_i\cap B\neq\phi$ ，$1\le i\le n$ ，则 $A\cap B$ 的划分是什么？ （ $A_1\cap B,A_2\cap B,\cdots,A_n\cap B$ ）

5.集合 $A=\{1,2,3,4,6,12\}$ 上的整除关系"|"是 A 上偏序关系，画出 Hasse 图。

（ ）

6.什么是无穷集合？

（凡能与自身真子集对等的集合都称为无穷集合 ）

7.设 G 为 p 阶简单无向图，$p>2$ 且 p 为奇数，G 和 G 的补图 G^c 中度数为奇数的顶点的个数是否一定相等？ （ 一定 ）

8.已知 p 阶简单无向图 G 中有 q 条边，各顶点的度数均为 3，又 $2p=q+3$，则图 G 在同构的意义下是否唯一？ （ 不唯一 ）

9. 若 G 是一个 (p,q) 连通图，则 G 至少有多少个圈？ （ q-p+1 ）

10. 设 T 是一个有 n_0 个叶子的二元树，出度为 2 的顶点为 n_2，则 n_0 与 n_2

满足什么关系？ （ n0=n2+1 ）

二、简答下列问题(本题满分 30 分，1-6 小题 3 分，7-9 小题 4 分)

1．设 A,B 是集合，则 $A\Delta B=B$ 充分必要条件是什么？说明理由。（ 3 分 ）

答案：$A=\Phi$。

2．设 $f:X\to Y, C, D\subseteq Y$，则 $f^{-1}(C\Delta D)$ 与 $f^{-1}(C)\Delta f^{-1}(D)$ 满足什么关系？说明理由。

解：相等。$f^{-1}(C\Delta D)=f^{-1}((C\setminus D)\cup(D\setminus C))=f^{-1}(C\setminus D)\cup f^{-1}(D\setminus C)=$

$=(f^{-1}(C)\setminus f^{-1}(D))\cup(f^{-1}(D)\setminus f^{-1}(C))=f^{-1}(C)\Delta f^{-1}(D)$.

3. 写出无向树的特征性质（至少 5 个）。（ 3 分 ）

（1）G 是树；

（2）G 的任两个不同顶点间有唯一的一条路联结；

（3）G 是连通的且 p=q+1；

（4）G 中无回路且 p=q+1；

（5）G 中无回路且任加一条边，得到有唯一回路的图；

（6）G 是连通的，并且若 p≥3，则 G 不是 K_p。又若 G 的任两个不邻接的顶点间加一条边，则得到一个恰有唯一的一个回路的图；

（7）G 是极小连通图。

4．设 G 是一个 (p,q) 图，若 $q\geq p-1$，则 $k(G)\leq[2q/p]$ 与 $k(G)\leq[2p/q]$ 哪个正确？

说明理由。（ 3 分 ）

答案：$k(G)\leq[2q/p]$。

5. K_5 是否是可平面图？说明理由。（ 3 分 ）

解：K_5 不是平面图。

若 K_5 是可平面图，则由欧拉公式成立有，5－10＋f＝2，即 f ＝7。

面每个面至少 3 条边，所以 $3f\leq 2q$，从而 $21\leq 20$，矛盾。因此，K_5 不是可平面图。

6. 已知有向图 D 的邻接矩阵 $A=\begin{pmatrix}0111\\1010\\0001\\0000\end{pmatrix}$，则（3 分）

（1）画出邻接矩阵为 A 的有向图 D 的图解；

（2）写出 D 的可达矩阵 R；

（3）写出计算两顶点之间长为 k 的有向通道条数的计算方法。

（1） （2）$R=\begin{pmatrix}1111\\1111\\0011\\0001\end{pmatrix}$ （3）$(A^k)_{ij}$。

7、每个自补图有多少个顶点？说明理由。（4 分）

解：每个自补图都有 $4n$ 或 $4n+1$ 个顶点

因为每个自补图 G 的对应的完全图的边数必为偶数，即 $q=p(p-1)/2$ 为偶数，而当 $p=1,2,3$ 时，图 G 无自补图，只有 $p\geq 4$ 时，图 G 才有自补图。于是 p 可写成如下形式：$4n,4n+1,4n+2,4n+3$，其中 n 为正整数；代入 $q=p(p-1)/2$ 中，只有 $4n,4n+1$ 才能使 q 为偶数，故每个自补图必有 $4n$ 或 $4n+1$ 个顶点。

8. 设 $N=\{1,2,3,\cdots\}$，试构造两个映射 f 和 g：$N\to N$，使得 $gf=I_N$ 但 $fg\neq I_N$。（4 分）

解：$f:N\to N,\forall n\in N,f(n)=n+1$；$g:N\to N,\forall n\in N,g(1)=1,g(n)=n-1,n\geq 2$。

9. 设 $f:A\to B,H\subseteq A$，令 H 在 A 中的余集 $H^C=A\setminus H$，则（4 分）

（1）当 f 是单射时，给出 $f(H^C)$ 和 $(f(H))^C$ 之间的关系，并给予证明。

（2）当 f 是满射时，给出 $f(H^C)$ 和 $(f(H))^C$ 之间的关系，并给予证明。

[（1）、（2）任选一种情况证明即可]

解：由定理知，$(f(H^c))=f(A\backslash H)\supseteq f(A)\backslash f(H)$。

若 f 是满射，即 $f(A)=B$，有 $f(H^c)\supseteq(f(H))^c$。

若 f 是单射时，有 $f(H^c)\subseteq(f(H))^c$。

因为 $\forall y\in f(H^c)$，故存在 $x\in H^c$，使得 $y=f(x)$，从而 $x\notin H$；由 f 是单射，有 $f(x)\notin f(H)$（否则存在 $x_1\in H$，使 $f(x_1)=f(x)$ 矛盾），即 $y\in(f(H))^c$。于是 $f(H^c)\subseteq(f(H))^c$。

三、证明下列各题（本题满分 60 分，每小题各 6 分）

1．设 A,B 是两个集合，$B\neq\varnothing$，试证：若 $A\times B=B\times B$，则 $A=B$。

证：$\forall x\in A$，因为 $B\neq\varnothing$，故在 B 中任取一元素 y，必有 $(x,y)\in A\times B$，因而 $(x,y)\in B\times B$，故 $x\in B$。从而 $A\subseteq B$。

反之，$\forall x\in B$，因为 $B\neq\varnothing$，故在 B 中任取一元素 y，必有 $(x,y)\in B\times B$，因而 $(x,y)\in A\times B$，故 $x\in A$。从而 $B\subseteq A$。

于是 $A=B$。

2.设 $f:X\to Y$，证明：f 是单射 $\Leftrightarrow\forall F\in 2^X, f^{-1}(f(F))=F$。

证：$\Rightarrow\forall x\in f^{-1}(f(F))$，则 $f(x)\in f(F)$，于是 F 中必存在 x_1，使得 $f(x)=f(x_1)$。因为 f 是单射，故必有 $x=x_1$。即 $x\in F$，所以 $f^{-1}(f(F))\subseteq F$。

反过来，$\forall x\in F, f(x)\in f(F)$，从而有 $x\in f^{-1}(f(F))$，所以 $F\subseteq f^{-1}(f(F))$。

因此 $f^{-1}(f(F))=F$。

$\Leftarrow$ 假设 f 不是单射，则 $\exists x_1,x_2\in X, x_1\neq x_2$，但 $f(x_1)=f(x_2)=y$。令 $F=\{x_1\}$，于是 $f^{-1}(f(F))=f^{-1}(f(\{x_1\}))=f^{-1}(\{y\})=\{x_1,x_2\}$，即 $\{x_1,x_2\}=F=\{x_1\}$，矛盾。

因此，f 为单射。

3．设R是A上的一个自反关系，证明：

R是等价关系$\Leftrightarrow$若$(a,b)\in R$且$(a,c)\in R$，则$(b,c)\in R$。

证：$\Rightarrow$ R是A上的等价关系。

若$(a,b)\in R$且$(a,c)\in R$，由R的对称性有：$(b,a)\in R$且$(a,c)\in R$，

由R的传递性有：$(b,c)\in R$。

$\Leftarrow$ R是自反的，故$\forall a\in A$有$(a,a)\in R$。

若$(a,b)\in R$，由$(a,a)\in R$有$(b,a)\in R$，所以R是对称的。

若$(a,b)\in R$且$(b,c)\in R$，由R的对称性有：

$(b,a)\in R$且$(b,c)\in R$，故由题意得$(a,c)\in R$，所以R是传递。

因此，R是A上的等价关系。

4．设R是A上的二元关系，证明：R是传递的$\Leftrightarrow R\circ R\subseteq R$。

$\Rightarrow \forall(a,c)\in R\circ R$，则$\exists b\in A$，使得$(a,b)\in R$且$(b,c)\in R$，由R的传递性知：

$(a,c)\in R$，于是$R\circ R\subseteq R$。

$\Leftarrow \forall(a,b)\in R$且$(b,c)\in R$，有$(a,c)\in R\circ R\subseteq R$，故R是传递的。

5．令$N=\{1,2,3,\cdots\}$，$S=\{f \mid f:N\to\{0,1\}\}$，利用康托对角线法证明S是不可数集。

证：假设从N到{0，1}的所有映射之集可数，则可排成无重复项的无穷序列

$f_1,f_2,f_3,\cdots$。每个函数f_i确定了一个0，1序列$a_{i1},a_{i2},a_{i3},\cdots$。构造序列

$b_1,b_2,b_3,\cdots,b_i=1$，若$a_{ii}=0$；否则$b_i=0$。该序列对应的函数$f(i)=b_i$，$i\in N$，不为

$f_1,f_2,\cdots$任一个，矛盾。

6．设$G=(V,E)$是一个有p个顶点的图。若对G的任两个不邻接的顶点u和v，

有$\deg u+\deg v\geq p-1$，证明：G是连通的。

证：若 G 不连通，则 G 至少有两个支。设 $G_1=(V_1,E_1)$ 是其中的一个支，其他各支构成的子图为 $G_2=(V_2,E_2)$，$|V_1|=n_1,|V_2|=p-n_1$，则任意 $\forall u\in V_1,v\in V_2$，有

$$\deg u\le n_1-1,\deg v\le p-n_1-1。$$

于是，$\deg u+\deg v\le(n_1-1)+(p-n_1-1)=p-2$。

这与假设相矛盾，所以 G 是连通的。

7. 证明：完全图 K_9 中至少存在彼此无公共边的两条哈密顿圈和一条哈密顿路。

证：在 K_9 中，$\forall v\in V,\deg v=8\ge p/2$，由定理可知，必有一条哈密顿回路 C_1；令 G_1 为 K_9 中删除 C_1 中全部边之后的图，则 G_1 中每个顶点的度均为 $\deg v=6\ge p/2$，故 G_1 仍为哈密顿图，因而存在 G_1 中的哈密顿回路 C_2，显然 C_1 与 C_2 无公共边。再设 G_2 为 G_1 中删除 C_2 中的全部边后所得图，则 G_2 每个顶点的度均为 $\deg v=4$。又由定理可知 G_2 为半哈密顿图，因而 G_2 中存在哈密顿路。设 L 为 G_2 中的一条哈密顿路，显然 C_1,C_2,L 无公共边。

8. 设 G 是一棵树且 $\Delta(G)\ge k$，证明：G 中至少有 k 个度为 1 的顶点。

证：设 T 中有 p 个顶点，s 个树叶，则 T 中其余 $p-s$ 个顶点的度数均大于等于 2，且至少有一个顶点的度大于等于 k。由握手定理可得：

$$2q=2p-2=\sum_{i=1}^{p}deg(v_i)\ge 2(p-s-1)+k+s，有 s\ge k。$$

所以 T 中至少有 k 个树叶。

9. 证明：一个没有有向圈的有向图中至少有一个入度为零的顶点。

证：设 D=(V,A) 是一个没有有向回路的有向图。考察 D 中任一条最长的有向路的第一个顶点 v，则 id(v)=0。因为若 id(v)≠0，则必有一个顶点 u 使得 (u,v)∈A。于是，若 u 不在此最长路上，则此最长路便不是 D 中的最长路，这是与前面的假设相矛盾。若 u 在此最长路上，则 D 中有有向回路，这与定理的假设矛盾。因此 id(v)=0。

10. 设 G 是一个没有三角形的平面图，证明：G 是 4-可着色的

证：(1) 假设 $\forall v\in V$，$\deg(v)\ge 4$，则由握手定理有，$4p\le 2q$；由于 G 是一个没有

三角形的平面图，故$q\le 2p-4$，即$4p\le 4p-8$，矛盾。故假设不成立，即G中存在一个顶点v，使得$\deg(v)\le 3$。

(2)对顶点p进行归纳。

当$p=1,2,3,4$时，显示成立。

假设当$p=k$时，G是4-可着色的。

当$p=k+1$时，由于G是一个没有三角形的平面图，故由（1）可知，$\exists v\in V$，使得$\deg(v)\le 3$。于是$G-v=G_1$便是一个具有k个顶点没有三角形的平面图，由归纳假设，G_1是4-可着色的。

由于$\deg(v)\le 3$，故在G中用不同于与v相邻接的那些顶点在G_1中着色时所用的颜色为v着色，G的其它顶点着色同G_1的4-可着色，这就得到了G一个4-可着色。

哈工大 2010 年 春季学期

集合论与图论 试题

题号	一	二	三	四	总分
分数					

学号	
姓名	

本试卷满分 90 分

（计算机科学与技术学院 09 级各专业）

注意行为规范

遵守考场纪律

主管领导审核签字

一、填空（本题满分 10 分，每空各 1 分）

1. 设 A,B 为集合，则 $(A\setminus B)\cup B=A$ 成立的充分必要条件是什么？（ $B\subseteq A$ ）
2. 设 $X=\{1,2,\cdots,n\}, Y=\{1,2\}$，则从 X 到 Y 的满射的个数为多少？（ 2^n-2 ）
3. 在集合 $A=\{2,3,4,8,9,10,11\}$ 上定义的整除关系“|”是 A 上的偏序关系，则最大元是什么？（ 无 ）
4. 设 $A=\{a,b,c\}$，给出 A 上的一个二元关系，使其同时不满足自反性、反自反性、对称性、反对称和传递性的二元关系。（ $R=\{(a,a),(b,c),(c,b),(a,c)\}$ ）
5. 设 Σ 为一个有限字母表，Σ 上所有字（包括空字）之集记为 Σ^*，则 Σ^* 是否是可数集？（ 是 ）
6. 含 5 个顶点、3 条边的不同构的无向图个数为多少？（ 4 ）
7. 若 G 是一个 (p,p) 连通图，则 G 至少有多少个生成树？（ 3 ）
8. 如图所示图 G，回答下列问题：
   （1）图 G 是否是偶图？（ 不是 ）
   （2）图 G 是否是欧拉图？（ 不是 ）
   （3）图 G 的色数为多少？（ 4 ）

二、简答下列各题（本题满分 40 分）

1. 设 A,B,C,D 为任意集合，判断下列等式是否成立？若成立给出证明，若不成立举出反例。（6分）

（1）$(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)$；

（2）$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$。

解：（1）不成立。例如 $A=D=\phi, B=c=\{a\}$ 即可。

（2）成立。$\forall(x,y)\in(A\cap B)\times(C\cap D)$，有 $x\in A\cap B, y\in C\cap D$，即 $x\in A, x\in B, y\in C, y\in D$。所以 $(x,y)\in A\times C,(x,y)\in B\times D$，因此 $(x,y)\in(A\times C)\cap(B\times D)$，从而 $(A\cap B)\times(C\cap D)\subseteq(A\times C)\cap(B\times D)$。

反之，$\forall(x,y)\in(A\times C)\cap(B\times D)$，有 $x\in A, x\in B, y\in C, y\in D$，即

$(x,y)\in(A\cap B)\times(C\cap D)$，从而$(A\times C)\cap(B\times D)\subseteq(A\cap B)\times(C\cap D)$。

因此，$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$。

2. 设G是无向图，判断下列命题是否成立？若成立给出证明，若不成立举出反例。（6分）

（1）若图G是连通图，则G的补图G^c也是连通图。

（2）若图G是不连通图，则G的补图G^c是连通图。

解：（1）G^c不一定是连通图。

（2）G^c一定连通图。

因为G不连通，故G至少有两个分支，一个是G_1，另外一些支构成的子图是G_2。

对于G^c中任意两个顶点u和v：

（1）若$u\in V_1, v\in V_2$，则u与v不在G中邻接。由补图的定义可知，u与v必在G^c中邻接；

（2）若$u,v\in V_1$(或V_2)，取$w\in V_2$(或V_1)，则u与w，w与v在G都不邻接，故u与w，w与v在G^c必邻接，于是uwv就是G^c中的一条路。

综上可知，对G^c中任两个顶点u和v之间都有路连接，故G^c是连通的。

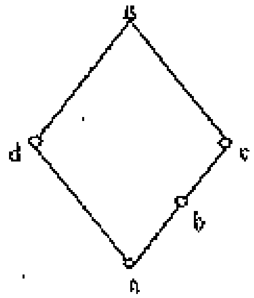
3. 设集合$A=\{a,b,c,d,e\}$，A上的关系定义如下：（6分）

$R=\{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,b),(b,c),$
$(b,e),(c,c),(c,e),(d,d),(d,e),(e,e)\}$。则

（1）写出R的关系矩阵；　（2）验证(A,R)是偏序集；　（3）画出$Hasse$图。

解：（1）R所对应的关系矩阵为M_R为：

$$M_R=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$



（2）由关系矩阵可知：

对角线上的所有元素全为1，故R是自反的；$r_{ij}+r_{ji}\le 1$，故R是反对称的；

$$R^2\text{对应的关系矩阵}M_{R^2}\text{为：}M_{R^2}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}=M_R。$$

证:(1) $\Rightarrow \forall x \in f^{-1}(f(F))$,则 $f(x) \in f(F)$,于是 F 中必存在 x_1,使得 $f(x)=f(x_1)$。因为 f 是单射,故必有 $x=x_1$。即 $x \in F$。所以 $f^{-1}(f(F)) \subseteq F$。

反过来, $\forall x \in F, f(x) \in f(F)$,从而有 $x \in f^{-1}(f(F))$,所以 $F \subseteq f^{-1}(f(F))$。

因此 $f^{-1}(f(F))=F$。

$\Leftarrow$ 假设 f 不是单射,则 $\exists x_1,x_2 \in X, x_1 \neq x_2$,但 $f(x_1)=f(x_2)=y$。令 $F=\{x_1\}$,于是 $f^{-1}(f(F))=f^{-1}(f(\{x_1\}))=f^{-1}(\{y\})=\{x_1,x_2\}$,故有 $\{x_1,x_2\}=F=\{x_1\}$,矛盾。

即 f 一定为单射。

3. 设 G 是一个 $p(p \geq 3)$ 个顶点的图。u 和 v 是 G 的两个不邻接的顶点,并且

$$\deg u+\deg v \geq p。$$

证明: G 是哈密顿图 $\Leftrightarrow G+uv$ 是哈密顿图。

证明: $\Rightarrow$ 显然成立。

$\Leftarrow$ 假设 G 不是哈密顿图,则有题意知在 G 中必有一条从 u 到 v 的哈密顿路。不妨设此路为 $uv_2v_3\cdots v_{p-1}v$,令 $\deg v_1=k$,$\deg v_p=l$,则在 G 中与 u 邻接的顶点为 u_{i_1},u_{i_2},…,u_{i_k},其中 $2=i_1<i_2<\cdots<i_k\leq p-1$。这时顶点 $u_{i_r-1}(r=2,3\cdots,k)$ 不能与顶点 v_p 邻接。因为此时 G 有哈密顿回路 $uv_2\cdots v_{i_r-1}vv_{p-1}\cdots v_{i_r}u$,因此 v_p 至少与 u,v_2,…,v_{p-1} 中的 k 个顶点不邻接。于是,$l\leq p-1-k$,从而 $k+l\leq p-1$,与题设矛盾,故 G 是哈密顿图。

4. 设 R 是 A 上的一个二元关系,证明:R 是对称的 $\Leftrightarrow R=R^{-1}$。

证: $\Rightarrow \forall(x,y) \in R$,由 R 的对称性有 $(y,x) \in R$,即 $(x,y) \in R^{-1}$,从而 $R\subseteq R^{-1}$

反之,$\forall(y,x) \in R^{-1}$,则 $(x,y) \in R$。由 R 的对称性有:$(y,x) \in R$,从而 $R^{-1}\subseteq R$

故 $R=R^{-1}$

$\Leftarrow \forall x, y \in X$,若 $(x,y) \in R$,由 $R=R^{-1}$,得 $(x,y) \in R^{-1}$,即 $(y,x) \in R$,故 R 是对称的。

5. 设 R 是 A 上的一个二元关系,令 $S=\{(a,b)|\exists c \in A$,使得 $(a,c) \in R$ 且 $(c,b) \in R\}$。

证明:若 R 是 A 上的等价关系,则 S 也是 A 上的等价关系;

证:因为 R 是自反的,所以 $\forall a \in A$,有 $(a,a) \in R$。根据 S 的定义,有 $(a,a) \in S$,所以 S 是自反的;

若 $(a,b) \in S$,则 $\exists c \in A$,使得 $(a,c) \in R$ 且 $(c,b) \in R$。因为 R 是对称的,所以 $(b,c) \in R$ 且 $(c,a) \in R$,根据 S 的定义有 $(b,a) \in S$,所以 S 是对称的;

若 $(a,b) \in S$,$(b,c) \in S$,则 $\exists d \in A$,使得 $(a,d) \in R$ 且 $(d,b) \in R$。因为 R 是传递的,所以 $(a,b) \in R$。

则 $\exists e \in A$,使得 $(b,e) \in R$ 且 $(e,c) \in R$。因为 R 是传递的,所以 $(b,c) \in R$。

根据 S 的定义有 $(a,c) \in S$。所以 S 是传递的。

综上可知:S 是等价关系。

6. 利用康托对角线法证明：若 A 可数，则 2^A 不可数。

证：因为 $2^A \sim Ch(A)=\{f|f:A\to\{0,1\}\}$，所以只须证明 $Ch(A)$ 不可数即可。$\forall f\in Ch(A)$，f 可表为 0，1 的无穷序列。若 $Ch(A)$ 可数，则 $Ch(A)$ 的元素可排列成无重复项的无穷序列 $f_1,f_2,f_3,\cdots$。每个 f_i 可表成 0，1 的无穷序列 $f_{i1},f_{i2},f_{i3},\cdots$。用对角线法构造一个 0，1 序列 $g_1,g_2,g_3,\cdots$：若 $f_{11}=0$，则 $g_1=1$；若 $f_{11}=1$ 则 $g_1=0$。一般地，若 $f_{ii}=0$，则 $g_i=1$；如果 $f_{ii}=1$，则 $g_i=0$，$i=1,2,3,\cdots$，则 $g_1,g_2,\cdots$ 确定的函数 $g\in Ch(A)$，但 $g\neq f_i,i=1,2,\cdots$，矛盾。所以，2^A 不可数。

7. 设 $G=(V,E)$ 是一个 (p,q) 图，若 G 是一个 $K-$ 正则偶图，证明：$p\geq 2K$。

证：因为 G 中无三角形且 G 为 $K-$ 正则图，所以 $Kp=2q\leq 2\cdot(p/2)^2=p^2/2$，

因此，$p\geq 2K$。

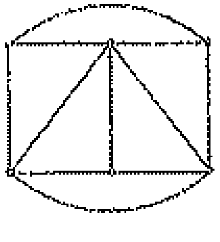
8. 设 G 是顶点 $p\geq 11$ 的平面图，证明：G 的补图 G^c 是非平面图。

证：反证法：假设图 G 的补图 G^c 也是平面图，令 $G=(p,q)$，$G^c=(p_1,q_1)$，则 $p=p_1$，而 $q+q_1=p(p-1)/2$ ………… (1)

又因为 G 和 G^c 都是平面图，故 $q\leq 3p-6$，$q_1\leq 3p-6$，相加得：

$$q+q_1\leq 6p-12 \qquad (2)$$

由 (1)，(2) 的得：$q+q_1=p(p-1)/2\leq 6p-12$，展开有：$p^2-13p+24\leq 0$，于是 $p<11$，与题设矛盾，所以 G^c 不是平面图。



哈工大 2009 年 秋季学期

集合论与图论试题

题号	一	二	三	四	五	总分
分数						

学号	
姓名	

注意行为规范

遵守考场纪律

主管领导审核签字

本试卷满分 90 分-参考答案

（计算机科学与技术学院 08 级）

一、填空（本题满分 20 分，每空各 1 分）

1. 设 A,B 为集合，若 $(A\setminus B)\cup B=(A\cup B)\setminus B$，则 B 等于什么？（ $B=\phi$ ）

2. 设 $f:X\to Y, A\subseteq X$，则 $f^{-1}(f(A))$ 与 A 有何关系？（ $f^{-1}(f(A))\supseteq A$ ）

3. 给定集合 $S=\{1,2,3,4,5\}$，找出 S 上的等价的关系 R，此关系 R 能产生划分 $\{\{1,2\},\{3\},\{4,5\}\}$。（ $\{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1),(3,3),(4,4),(5,5),(4,5),(5,4)\}$ ）

4. 设 R,I,N 分别表示实数，整数，自然数集（包括 0），定义映射 f_1,f_2,f_3，试确定它们的性质（单射、满射、双射）。

   （1） $f_1:R\to R, f_1(x)=2^x$；（ f_1 是单射 ）

   （2） $f_2:I\to N, f_2(x)=|x|$；（ f_2 是满射 ）

   （3） $f_3:R\to R, f_3(x)=x+2$。（ f_3 是双射 ）

5. 在集合 $A=\{1,2,\cdots,11,12\}$ 上定义的整除关系"|"是 A 上的偏序关系，则极大元有几个？（ 6个 ）

6. 设 X 是一个集合，$|X|=n$，求 X 上对称的二元关系有多少？（ $2^{\frac{n^2+n}{2}}$ ）

7. 设 R 是集合 X 上的一个二元关系，则

   （1） R 是传递的充分必要条件是什么？（ $R^2\subseteq R$ ）

   （2） R 是对称的充分必要条件是什么？（ $R=R^{-1}$ ）

8. 设 G 是有 p 个顶点的 $K-$正则偶图，则 p 至少是多少？（ $p\geq 2K$ ）

9. 有 n 个药箱，若每两个药箱里有一种相同的药，而每种药恰好放在两个药箱中，则

(1) 每个药箱里有多少种药？　　　　　　　　　　($n-1$)

(2) n 个药箱里共有多少种药？　　　　　　　　($n(n-1)/2$)

10. 设 G 是无向图，有 12 条边，6 个 3 度顶点，其余顶点的度数均小于 3，则 G 至少有多少个顶点？　　　　　　　　(9)

11. 设 T 是有 p ($p\geq 3$) 个顶点的无向树且 T 的最大度为 $\Delta(T)$，则

(1) $\Delta(T)$ 的范围为多少？　　　　　　　　($2\leq\Delta(T)\leq p-1$)

(2) 若 $\Delta(T)=2$，则 T 中最长路的长度为多少？　　($p-1$)

12. 设 G 是有 8 个顶点的极大平面图，则 G 的面数 f 为多少？　(12)

13. 设 G 是 (p,q) 图，若 $q<p-1$，则 G 的顶点连通度 $k(G)$ 为多少？(0)

14. 设 T 为任一棵正则二元树，q 为边数，$t(t\geq 2)$ 为树叶数，则 q 等于什么？

($q=2(t-1)$)

15. 设 p,q 为正整数，则 p,q 为何值时 $K_{p,q}$ 为欧拉图？　　(p,q 为偶数)

二、简答下列各题（本题满分 10 分）

1. 设 A,B,C 是三个任意集合，且 $(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$，则 A 与 C 应满足什么关系？说明理由。(3 分)

解：$C\subseteq A$。

两边同并上 A 得：$A\cup((A\cap B)\cup C)=A\cup[A\cap(B\cup C)]=A$，

$[A\cup(A\cap B)]\cup C=A\cup C=A$；则 $C\subseteq A$。

2. 设 R 为 X 上的二元关系，若 $R\neq\phi$ 且 R 是反自反的和传递的，则 R 是

反对称的吗？说明理由。（3分）

证：若 R 不是反对称的，则 $\exists x,y\in X$，使得 (x,y)，$(y,x)\in R$，由 R 的传递性有：

$(x,x)\in R$，与 R 是反自反的矛盾。于是 R 是反对称的二元关系。

3．设 $N=\{1,2,3,\cdots\}$，试构造两个映射 f 和 g：$N\to N$，使得 $f\circ g=I_N$，

但 $g\circ f\neq I_N$。（4分）

解：$fg=I_N$ 但 $gf\neq I_N$，故 f 是满射，但 f 不是单射。于是令：

$f:N\to N, f(1)=1, f(n)=n-1, n\geq 2$，$g:N\to N, \forall n\in N, g(n)=n+1$，则

$fg=I_N$ 但 $gf\neq I_N$。

三、简答下列各题（本题满分 15 分）

1．何谓强连通有向图？何谓有向图的强支？（2分）

解：设 D=（V，A）是有向图，若 $\forall u,v\in V$，u 与 v 互达，则称 D 是强连通的有向图；

有向图 D 的极大强连通子图称为 D 的一个强支。

2．至少要删除多少条边，才能使 $K_p(p>2)$ 不连通且其中有一个连通分支恰有 k

个顶点 $(0<k<p)$？（3分）

证：要使删除边后的图边数最多，则删除的边最少。则至少应该删除的边数为：

$$\frac{p(p-1)}{2}-\frac{k(k-1)}{2}-\frac{(p-k)(p-k-1)}{2}=k(p-k)。$$

3．具有奇数顶点的偶图是否是哈密顿图？说明理由。（3分）

证：设 G 是一个具有奇数顶点的偶图，则 G 的顶点集 V 有一个二划分，

即 $V=\{V_1,V_2\}$ 且有 $|V_1|\neq|V_2|$。

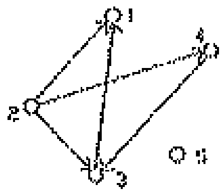
不妨设 $|V_1|<|V_2|$，则有 $W(G-V_1)=|V_2|>|V_1|$。

由哈密顿图的必要条件可知：G 不是哈密顿图。

4．设 $D=(V,A)$ 是一个有向图，如图所示，写出有向图 D 邻接矩阵、可达矩阵

以及顶点 2 到 4 长度为 2 的有向通路的条数。(3 分)

解：(1) $\begin{pmatrix} 00000 \\ 10110 \\ 10000 \\ 00100 \\ 00000 \end{pmatrix}$；(2) $\begin{pmatrix} 10000 \\ 11110 \\ 10100 \\ 10110 \\ 00001 \end{pmatrix}$；0；



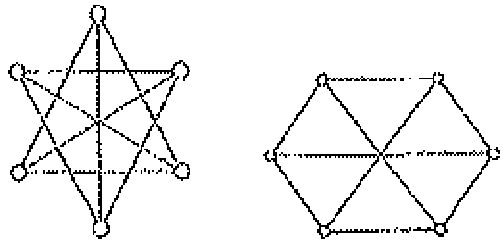
5. 设 $G=(V,E)$ 是一个 (p,q) 图，每个顶点的度为 3。则 (4 分)

(1) 若 $q=3p-6$，则 G 在同构意义下是否唯一？

(2) 若 $p=6$，则 G 在同构的意义下是否唯一？说明理由。

解：(1) $p=4, q=6$，K_4 唯一。

(2) $p=6$，$q=9$，G 不唯一。如图所示。



四、证明下列各题（本题满分 25 分）

1. 设 A,B,C,D 都是非空集合，若 $A\times B=C\times D$，证明：$A=C$，$B=D$。(5 分)

证：因为 A,B,C,D 非空，所以 $\forall x\in A, y\in B$，有 $(x,y)\in A\times B=C\times D$，即 $x\in C, y\in D$。因此 $A\subseteq C, B\subseteq D$。

同理 $C\subseteq A, D\subseteq B$。由集合相等的定义有：$A=C$，$B=D$。

2. 设 $f:X\to Y$，证明：f 是满射 $\Leftrightarrow \forall E\in 2^Y, f(f^{-1}(E))=E$。(5 分)

证明：$\Rightarrow$ $\forall y\in f(f^{-1}(E))$，则 $\exists x\in f^{-1}(E)$，使得 $f(x)=y$，于是，$y=f(x)\in E$，所以 $f(f^{-1}(E))\subseteq E$。

反过来，$\forall y\in E$，因为 f 是满射，故必有 $x\in f^{-1}(E)$，使得 $f(x)=y$。又 $x\in f^{-1}(E)$，

故 $y\in f(f^{-1}(E))$，所以 $E\subseteq f(f^{-1}(E))$。

因此 $f(f^{-1}(E))=E$。

$\Leftarrow$ 假设 f 不是满射，则 $\exists y_0\in Y$，使得 $\forall x\in X$，$f(x)\neq y$。于是令 $E=\{y_0\}\in 2^Y$，

有 $f(f^{-1}(E))=f(f^{-1}(\{y_0\}))=f(\phi)=\phi$，由题意得 $\phi=E=\{y_0\}$，矛盾。

故 f 一定为满射。

3、证明：全体有理数之集 Q 是可数集。（5 分）

证：因为 $Q=Q_+\cup Q_-\cup\{0\}$，显然，$Q_+\sim Q_-$，因此只须证明 Q_+ 是可数集即可。

我们知道，每个正有理数均可写成 p/q 的形式，其中 p 与 q 为自然数，于是，

$\forall q\in N$，令 $A_q=\{\frac{p}{q}|p\in N\}$，则 A_q 是可数集，并且 $Q_+=\bigcup_{q=1}^{\infty}A_q$，由定理可知，

Q_+ 是可数集，因此，Q 是可数集。

4、设 R,S 是集合 X 上的等价关系，且 $R\circ S=S\circ R$，则（10 分）

（1）证明：$R\circ S$ 是 X 上的等价关系；

（2）证明：$(R\cup S)^+=R\circ S$。

证：（1）由 R,S 是等价关系得到 $R\circ S$ 自反的；

又由 $(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}=S\circ R=R\circ S$，故 $R\circ S$ 是对称的；

而 $(R\circ S)^2=(R\circ S)\circ(R\circ S)=R\circ(S\circ R)\circ S=R\circ(R\circ S)\circ S=R^2S^2\subseteq R\circ S$，

从而 $R\circ S$ 是传递的，因此，$R\circ S$ 是等价关系。

（2）因为 $R\circ S$ 是 X 上的等价关系，所以 $R\circ S$ 是 X 上的传递关系；

又 $\forall(x,y)\in R\cup S$，有 $(x,y)\in R$ 或 $(x,y)\in S$。

若 $(x,y)\in R$，因为 $(y,y)\in S$，所以 $(x,y)\in R\circ S$；

若$(x,y)\in S$，因为$(x,x)\in R$，所以$(x,y)\in R\circ S$。

两种情况下都有$(x,y)\in R\circ S$，故$R\cup S\subseteq R\circ S$。

对于X上的任一等价关系R''且$R\cup S\subseteq R''$，有

$\forall(x,y)\in R\circ S$，$\exists z\in X$，使得$(x,z)\in R$或$(z,y)\in S$。

若$(x,z)\in R$，有$(x,z)\in R\cup S\subseteq R''$；

若$(z,y)\in S$，有$(z,y)\in R\cup S\subseteq R''$。

由R''的传递性，有$(x,y)\in R''$，故$R\circ S\subseteq R''$。

因此$R\circ S$是包含$R\cup S$的最小传递关系，

从而$(R\cup S)^t=R\circ S$。

五、证明下列各题（本题满分 20 分，每小题各 5 分）

1. 证明：恰有两个顶点度数为 1 的树必为一条通路。

证：设T是一棵具有两个顶点度数为 1 的(p,q)树，则

$$q=p-1且\sum_{i=1}^{p}\deg(v_i)=2q=2(p-1)。$$

又T除两个顶点度数为 1 外，其他顶点度均大于等于 2，故

$$\sum_{i=1}^{p}\deg(v_i)=2+\sum_{i=1}^{p-2}\deg(v_i)=2(p-1)，即$$

$$\sum_{i=1}^{p-2}\deg(v_i)=2(p-2)。$$

因此$p-2$个分支点的度数都恰为 2，即T为一条通路。

2. 设G是一个(p,q)图，$p\geq 3$，证明：若$q\geq p$，则G中必有圈。

证：（1）设G是连通的，若G无圈，则G是树，因此$q=p-1$与$q\geq p$矛盾。

故 G 中必有圈。

（2）设 G 不连通，则 G 中有 $k(k\geq 2)$ 个分支，$G_1,G_2,\cdots,G_k$。

若 G 中无圈，则 G 的各个分支 $G_i(i=1,2,\cdots,k)$ 中也无圈，于是各个分支都是树，所以有：$q_i=p_i-1$，$i=1,2,\cdots,k$。相加得：

$q=p-k(k\geq 2)$ 与 $q\geq p$ 矛盾，故 G 中必有圈。

综上所述，图 G 中必有圈。

3. 设 G 是一个 (p,q) 图，且 $q>(p-1)(p-2)/2$，证明：G 是连通图。

证：用反证法。假设图 G 是不连通的，则图 G 至少存在两个连通分支，一个支为 G_1 是 (p_1,q_1) 图，另外一些支构成的子图为 G_2 是 (p_2,q_2)。而 G 的最大可能边数 $q=q_1+q_2\leq p_1(p_1-1)/2+p_2(p_2-1)/2$，其中 $1\leq p_1\leq p-1$，$1\leq p_2\leq p-1$，所以 $q\leq(p-1)(p-2)/2$，与题设矛盾。所以 G 是连通的。

4. 设 G 是边数 $q<30$ 的平面图，证明：G 中存在顶点 v，使得 $\deg v\leq 4$。

证：不妨设 G 是连通的，否则因为它的每个连通分支的边数都应小于 30，因此可对它的每个连通分支进行讨论，所以可设 G 是连通的。

若 G 中无圈，则 G 必为树，结论显然成立；

若 G 中有圈，因而 G 中每个圈至少由 3 条边围成，于是

$$q\leq 3p-6 \qquad (1)$$

假设 G 中所有顶点的度数均大于等于 5，由握手定理可知：

$$2q=\sum_{i=1}^{p}\deg v_i\geq 5p，即 p\leq 2q/5 \qquad (2)$$

由（1），（2）得：$q\geq 30$。

这与题设 $q<30$ 矛盾，故一定存在顶点 v，使得 $\deg v\leq 4$。

哈工大 2008 年 春季学期

集合论与图论 试题

题号	一	二	三	四	五	六	总分
分数							

班号	
姓名	

本试卷满分 90 分

（计算机科学与技术学院 07 级）

注意行为规范

遵守考场纪律

主管领导审核签字

一、填空（本题满分 10 分，每小题各 1 分）

1、设 A,B 是集合，若 $A\Delta B=B$，则 A 等于什么？

（ $A=\Phi$ ）

2. 设 X 为集合，R 为 X 上的偏序关系，计算 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 等于什么？

（ R ）

3. 把置换 $\begin{pmatrix}123456789\\436987251\end{pmatrix}$ 分解成循环置换的乘积。

（(149)(2367)(58)）

4. 什么是无穷集合？

（凡能与自身的一个真子集对等的集称为无穷集合）

5、设 T 是一棵树，$p\geq 2$，则 p 个顶点的树 T 至多有多少个割点？

（ $p-2$ ）

6、设 D 是一个有 p 个顶点 q 条弧的有向图，若 D 是连通的，则 q 至少是多大？（ $p-1$ ）

7、设 $V=\{1,2,\cdots,n\}$，则以 V 为顶点集的无向图共有多少个？

（ $2^{n(n-1)/2}$ ）

8、设 $V=\{1,2,\cdots,n\}$，则以 V 为顶点集的有向图共有多少个？ $2^{n(n-1)}$ ）

9. 每个有 3 个支的不连通图，若每个顶点的度均大于或等于 2，则该图至少有多少个圈？　　（ 3 ）

10. 设T是一个正则二元树，它有n_0个叶子，则T有多少条弧？（$2(n_0-1)$）

二、判断对错（本题满分 10 分，每小题各 1 分）

1. 设A,B是两个集合，则$A\subseteq B$且$A\in B$不可能同时成立。　（ 错 ）

2. 在集合$\{1,2,\cdots,10\}$上可以定义2^{10}个二元运算。　（ 错 ）

3. 设$f:X\to Y$，若存在唯一一个映射$g:Y\to X$，使得$gf=I_X$，则f一定是可逆的。

（ 错 ）

4. 设X是一个集合，则X上的自反和反自反的二元关系个数相同。

（ 对 ）

5. 设Σ为一个有限字母表，Σ上所有字（包括空字）之集记为Σ^*。则Σ^*不是可数集。　（ 错 ）

6. 设G是一个(p,q)图，若$q\geq p$，则G中必有圈。　（ 对 ）

7. 若 G 是一个(p,p)连通图，则G至多有p个生成树。　（ 对 ）

8. 设$r\geq 2$，G是r-正则图且顶点连通度为 1，则$\lambda(G)\leq r$。（ 对 ）

9. 把平面分成p个区域，每两个区域都相邻，则p最大为 5。（ 错 ）

10. 有向图的每一条弧必在某个强支中。　（ 错 ）

三、证明下列各题（本题满分 18 分，每小题各 6 分）

1. 设A,B,C是三个任意的集合，则

（1）证明：$(A\setminus B)\setminus C\subseteq A\setminus(B\setminus C)$；（2）举例说明$(A\setminus B)\setminus C\neq A\setminus(B\setminus C)$。

证：(1) 证明：$\forall x\in(A\setminus B)\setminus C$，有$x\in(A\setminus B),x\notin C$，即$x\in A$但$x\notin B,x\notin C$，从而$x\notin B\setminus C$，于是$x\in A\setminus(B\setminus C)$，即$(A\setminus B)\setminus C\subseteq A\setminus(B\setminus C)$。

(2) 若$A=\{1,2,3\},B=C=\{2\}$，则$(A\setminus B)\setminus C\subseteq A\setminus(B\setminus C)$。

2. 设A,B,C是三个任意的集合，证明：$A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$。

证明：设 $(x,y)\in A\times(B\setminus C)$，则$x\in A$，$y\in B\setminus C$，从而$x\in A$，$y\in B$，$y\notin C$。于是$(x,y)\in A\times B$，$(x,y)\notin A\times C$，因此$(x,y)\in(A\times B)\setminus(A\times C)$，即

$$A\times(B\setminus C)\subseteq(A\times B)\setminus(A\times C)。$$

反之，设$(x,y)\in(A\times B)\setminus(A\times C)$，有$(x,y)\in(A\times B)$，$(x,y)\notin(A\times C)$，从而

$x\in A$，

$y\in B$，$y\notin C$，故$x\in A$且$y\in B\setminus C$。于是$(x,y)\in A\times(B\setminus C)$，

即$(A\times B)\setminus(A\times C)\subseteq A\times(B\setminus C)$。

因此，$A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$。

3. 设S,T是两个任意的集合，证明：$S\Delta T=(S\cup T)\Delta(S\cap T)$。

证：$\forall x\in S\Delta T$，则

若$x\in S$，则$x\notin T$。因而$x\in(S\cup T)$且$x\notin(S\cap T)$，故

$x\in(S\cup T)\setminus(S\cap T)=(S\cup T)\Delta(S\cap T)$；

若$x\notin S$，则$x\in T$，同理可得$x\in(S\cup T)\Delta(S\cap T)$。

因此 $S\Delta T\subseteq(S\cup T)\Delta(S\cap T)$。

反之，因为$(S\cap T)\subseteq(S\cup T)$，故$(S\cup T)\Delta(S\cap T)=(S\cup T)\setminus(S\cap T)$。于是

$\forall x\in(S\cup T)\Delta(S\cap T)=(S\cup T)\setminus(S\cap T)$，有$x\in(S\cup T),x\notin(S\cap T)$。

若$x\in S$，则$x\notin T$，故$x\in S\Delta T$；

若$x \notin S$，则$x \in T$，故$x \in S \Delta T$。

因此$(S \cup T) \Delta (S \cap T) \subseteq S \Delta T$。

从而$S \Delta T = (S \cup T) \Delta (S \cap T)$。

四、回答下列各题(本题满分 14 分)

1. 如图 1 所示是彼德森图G，回答下列问题：(6 分)

(1) G是否是偶图？　　(不是)

(2) G是否是欧拉图？　　(不是)

(3) G是否是平面图？　　(不是)

(4) G是否是哈密顿图？　　(不是)

(5) G的色数为多少？　　(3)

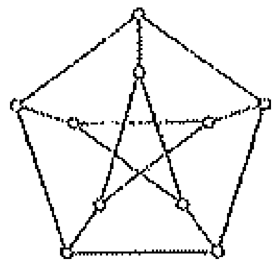


图 1

2. 设 G 是如图 2 所示的有向图，则 (8 分)

(1) 写出 G 的邻接矩阵。

(2) 求顶点v_1到v_4间长为 10 的有向通道的条数的方法是什么？

(不必算出具体的数)

(3) 写出 G 的可达矩阵。

(4) 画出对应于表达式 (A+B*C) / (A-C) 的二元树表示。

解：(1) $B=\begin{pmatrix}0101\\0011\\0100\\0110\end{pmatrix}$；(2) $(B^{10})_{14}$元素的值；(3) $\begin{pmatrix}1111\\0111\\0111\\0111\end{pmatrix}$　(4)

五、证明下列各题(本题满分 18 分，每小题各 6 分)

1．设 $f: X\to Y$，$g: Y\to Z$。若 $g\circ f$ 是单射，则 f 与 g 哪个是单射？请证明之。

解：f 是单射。

因为 $g\circ f$ 是单射，所以 $\forall x_1,x_2\in X$，若 $x_1\neq x_2$，则 $g(f(x_1))\neq g(f(x_2))$。

因此，$f(x_1)\neq f(x_2)$，故 f 是单射。

2．设 $X=\{1,2,\cdots,n\}$，$S=X\times X$。"$\equiv$"是 S 上如下的二元关系：$\forall(i,j),(k,l)\in S$，

$$(i,j)\equiv(k,l)\text{ 当且仅当 } i+j=k+l。$$

则(1) 证明：$\equiv$ 是等价关系；(2) 求等价类数。

证：(1)等价关系显然；

(2)等价类数为：$2n-1$。

3．令 $N=\{1,2,3,\cdots\}$，$S=\{f|f:N\to\{0,1\}\}$，利用康托对角线法证明 S 是不可数集。

证：假设从 N 到{0，1}的所有映射之集可数，则可排成无重复项的无穷序列 $f_1,f_2,f_3,\cdots$。每个函数 f_i 确定了一个 0，1 序列 $a_{i1},a_{i2},a_{i3},\cdots$。构造序列 $b_1,b_2,b_3,\cdots,b_i=1$，若 $a_{ii}=0$；否则 $b_i=0$。该序列对应的函数 $f(i)=b_i$，$i\in N$，不为 $f_1,f_2,\cdots$ 任一个，矛盾。

六、证明下列各题（本题满分 20 分，每小题各 5 分）

1．设 G 是一个恰有两个不邻接的奇度顶点 u 和 v 的无向图，证明：

$$G\text{ 连通}\Leftrightarrow G+uv\text{ 连通}。$$

证：$\Rightarrow$ 显然成立。

$\Leftarrow$ 假设G不连通，则G恰有 2 个分支：G_1,G_2。由题意u与v不在一个分支上，于是含有u(或v)的顶点的分支只有一个奇度数顶点与握手定理的推论矛盾。于是假设不成立，即G是连通的。

2．证明：任意一棵非平凡树至少有两个树叶。

证明：设T为一棵非平凡的无向树，T中最长的路为$L=v_1v_2\cdots v_k$。若端点v_1和v_k中至少有

一个不是树叶，不妨设v_k不是树叶，即有$\deg(v_k)\ge 2$，则v_k除与L上的顶点v_{k-1}相邻外，

必存在v_{k+1}与v_k相邻，而v_{k+1}不在L上，否则将产生回路。于是$v_1\cdots v_kv_{k+1}$仍为T的一条比

L更长的路，这与L为最长的路矛盾。故v_k必为树叶。

同理，v_1也是树叶。

3．证明：若每个顶点的度数大于或等于 3，则不存在有 7 条边的平面连通图。

证明：假设存在这样的平面图，则由$p-q+f=2$，有

$$p+f=2+q=9\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

而由$\sum_{v\in V}\deg v=2q, 3p\le 2q, p\le\frac{2}{3}q=\frac{14}{3}$；由$rf=2q, 3f\le 2q, f\le\frac{2}{3}q=\frac{14}{3}$；

p,f为整数，故$p,f\le 4$，于是$p+f\le 8$与(1)矛盾。

4、证明每个比赛图中必有有向哈密顿路。（用数学归纳法证明）

证：设D是p个顶点的比赛图。施归纳于p:

当p=1，2时，结论显然成立。

假设当p≥2时结论成立，往证对p+1个顶点的比赛图D也成立。从D中

去掉一个顶点 u，则得

到一个具有 p 个顶点的竞赛图 $D-u$。由归纳假设 $D-u$ 有哈密顿路

$u_1, u_2, \cdots, u_p$。

在 D 中，若 uu_1 或 u_pu 为 D 的弧，则结论成立。今设 u_1u 及 uu_p 为 D 的弧，由于 D 竞赛图，所以 u 与 $u_k\ (k=2,\cdots,p-1)$ 之间有且仅有一条弧，于是必有一个最大 i 使 u_iu 为弧，从而 uu_{i+1} 为 D 的弧。于是，$u_1\cdots u_iuu_{i+1}\cdots u_p$ 为 D 的哈密顿路。由归纳法原理知对任何 p 本题结论成立。

07年秋季学期

集合论与图论考试题A

本试卷满分90分， 06级计算机专业

一、判断对错

（正确画“√”，错误画“×”，本题满分10分，每小题各1分）

1. 若$P\cup Q=Q, P\cap Q=\varnothing$则$P=\varnothing$。（ ）

答案：√

2. A，B是集合，则命题$A\subseteq B$和$A\in B$不可能同时成立。（ ）

答案：×

3. 若$A\Delta B=A\Delta C$，则B=C。（ ）

答案：√

4. 设A与B是两个任意集合，若$\{A\cap B, B\setminus A\}$是$A\cup B$的一个划分，则有$A\setminus B=\varnothing$。

（ ）

答案：√

5. 若R是集合A上的传递关系，则R^2不是集合A上的传递关系。（ ）

答案：×

6. 若图G不连通，则$\overline{G}$连通。（ ）

答案：√

7. 极大平面图必是连通图。（ ）

答案：√

8. 设G=(V, E)是连通图，$e\in E$是G的一座桥，则e在G的每棵生成树中。（ ）

答案：√

9. 一个有向图G若仅有一个顶点的入度为0，其余顶点的入度全为1，则G一定是有向树。（ ）

答案：×

10. 有根树中最长路的两个端点都是树叶。（ ）

答案：×

二、填空

（要求只给出答案，本题满分15分，每小题各1分）

1. 集合 $A=\{\varnothing,\{a\}\}$的幂集P(A)=（　　　　　）。

答案：$\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{a\}\},\{\varnothing,\{a\}\}\}$

2. 设 $A=\{1,2,\cdots,n\}$， $B=\{1,2\}$，则从 A 到 B 的满射的个数是（　　　　）。

答案：（2^n-2）

3. 设 $X=\{a,b,c,d\},R=\{(a,b),(b,c),(c,a)\}$，关系 R 的传递闭包是

（　　　　　　　　　　　　　　　　　　）。

答案：（$(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,c),(c,a),(a,c),(b,a),(c,b)$，(d, d)）

4. 设 $B=\{0,1\},E=\{a,b,c,\cdots,x,y,z\}$。字母表 B 上所有字符串之集记为 B^*，字母表 E 上所有字符串之集记为 E^*。试求 B^* 和 E^* 的基数有什么关系。

（　　　　　）

答案：相等

5. 设 X 为集合且 $|X|=n$，则 X 上有多少个不同的自反或对称的二元关系。

（　　　　　）

答案：2^{n^2-n}

7. 设集合 X 中有 3 个元素，则 X 上的不同的等价关系的个数为（　　　　）。

答案：5

8. 某班有学生 50 人，有 26 人在第一次考试中得优，有 21 人在第二次考试中得优，有 17 人两次考试都没有得优，那么两次考试都得优的学生人数是（　　　　）。

答案：14 人

9. 设 $A=\{u_1,u_2,\cdots,u_p\}$， $q\le\frac{1}{2}p(p-1)$。试求以 V 为顶点集具有 q 条边的无向图的个数。（　　　　　）

答案：$C^q_{p(p-1)/2}$

10. 含 5 个顶点、3 条边的不同构的无向图有（　　　）个。

答案：4

11. 设 $G=(V,E)$ 是一个 (p,q) 图，且 G 中每个顶点的度数不是 k 就是 $k+1$，则 G 中度为 k 的顶点的个数是（　　）。

答案：p（k+1）−2q

12. 设无向图 G 有 12 条边，有 6 个 3 度顶点，其余顶点度数均小于 3，则 G 中至少有（　　）个顶点。

答案：9

13. 设 $G=(V,E)$ 是一个 (p,q) 图。若 G 是一个 K－正则图且每个回路图的长度至少为 4，则顶点 p 至少是（　　　）。

答案：$p\geq 2K$

14. 无向图 G 是由 k（k≥2）棵树组成的森林，至少要添加多少条边才能使 G 成为一棵树。（　　　）

答案：k－1

16. 设 $V=\{u_1,u_2\cdots u_p\}$。计算以 V 为顶点集的有向图的个数。（　　　）。

答案：$2^{p(p-1)}$

三、计算下列各题

（本题满分 20 分，第一题 2 分，其余每小题各 3 分）

1. 是否存在一个同时不满足自反、反自反、对称、反对称和传递的二元关系？

2. 设 A、B 是任意的集合，若 A\B=B，则 A、B 有何关系？为什么？

3. 设集合 A={a, b, c, d, e}，R={(a, a)，(a, b)，(a, c)，(a, d)，(a, e)，(b, b)，(b, c)，(b, e)，(c, c)，(c, e)，(d, d)，(d, e)，(e, e)}，

验证：(A, R) 是偏序集，并画出 Hasses 图

4. 设 G=（V，E）是一个（p，q）图，每个顶点的度为 3 且 q=2p－3

(1) 求 p 和 q 的值

(2) G 必为平面图吗？为什么？

(3) G 必是哈密顿图吗？G 必是欧拉图吗？为什么？

答案：

（1） p=6，q=9

（2）不一定是平面图。如 $K_{3,3}$ 就不是平面图.

（3）G 一定是哈密顿图。因为对任一对不相邻的顶点 $u,v\in V$，

$$\deg u+\deg v\geq p=6$$

故 G 不是欧拉图。因为 G 的顶点度数不全是偶数。

5. 设 G 是一个（p，p）连通图，则

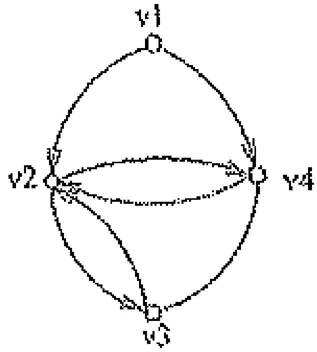
（1）G 中至少有多少个圈。

（2）G 中至多有多少个生成树。

6. 设 T 是一棵树且 Δ(T) ≥K，则 T 中至少有 K 个顶点的度为 1。

7. 如图所示，求：

（1）邻接矩阵；
（2）v1 到 v2 的长度为 4 的有向通道的条数；
（3）可达矩阵；
（4）求强分图。



四、证明下列个题（本题满分 45 分，每小题各 5 分）

1. 设 A,B,C 是三个任意集合，证明：$A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$

2. 设 f: $X\to Y$，g: $Y\to Z$。若 $g\circ f$ 是单射，则 f 与 g 那个是单射？并证明之。

3. 设 f: $X\to Y$，C，$D\subseteq Y$，证明：$f^{-1}(C\Delta D)=f^{-1}(C)\ \Delta f^{-1}(D)$

4. 设 $X=\{1,2,3\},Y=\{1,2\},S=\{f\mid f:X\to Y\}$。$\cong$ 是 S 上的二元关系：

$f,g\in S,f\cong g\Leftrightarrow I_m(f)=I_m(g)$。证明：
（1）$\cong$ 是 S 上的等价关系；
（2）求等价类的集合。

5. 设 D＝（V, A）是一个有向图。在 V 上定义二元关系$\cong$：$\forall u,v\in V,u\cong v$ 当且仅当 u 与 v 互达。证明：
（1）$\cong$是等价关系；
（2）求$\cong$的等价类；
（3）每个等价类导出的子图是什么子图？

6. 设 R 是集合 X 上的一个二元关系，证明：

（1）$R\circ R^{-1}$ 是对称的；（2）R 是传递的 $\Leftrightarrow R\circ R\subseteq R$。

7. 设 A 为可数集，利用康托对角线法证明 2^A 是不可数集。

8. 设 G 是无向图，证明：若 $\delta(G)\geq m$，则图 G 中包含长至少为 m+1 的圈。

9. 若 G 是一个恰有两个奇度顶点 u 和 v 的无向图，则 G 连通的 $\Leftrightarrow$ G+uv 是连通的。

10. 证明：若 G 不连通，则 G^c 是连通图。

11 每个自补图必有 4n 或 4n+1 个顶点(n 为正整数)

12. 设 G 是一个(p,q)图，证明：若 $q\ge p$，则 G 中必有圈。

13. 设 G 是一个没有三角形的平面图。证明：G 是 4—可着色的。

14. 证明：不存在每个顶点的度数≥3 且只有 7 条边的平面连通图。

15. 若二元树 T 有 n_0 个叶子，n_2 个出度为 2 的顶点，证明：$n_0=n_2+1$。

16. 应用数学归纳法证明比赛图中必有有向生成路。

习 题 课

例 1 设A,B,C是三个任意集合，则

（1）若$A\in B,B\in C$,则$A\in C$可能吗？ $A\in C$常真吗?举例说明；

（2）若$A\subseteq B$，则$A\in B$可能吗？证明你的断言。

解：（1）举例说明如下：$A=\{a\},B=\{\{a\}\},C=\{\{a\},\{\{a\}\}\}$，则有

$$A\in B,B\in C,A\in C。$$

但$A\in C$不常为真。若$A=\{a\},B=\{\{a\}\},C=\{\{\{a\}\}\}$，则有

$$A\in B,B\in C,但A\notin C。$$

（2）若$A=\{a\},B=\{a,\{a\}\}$，则有$A\in B,A\subseteq B$。

例 2 设 A,B,C 是任意三个集合：

（1）若$A\cup B=A\cup C$，则有$B=C$吗?

（2）若$A\cap B=A\cap C$，则有$B=C$吗?

（3）若$A\cup B=A\cup C$且$A\cap B=A\cap C$，则有$B=C$吗?

解：（1）、（2）不成立，（3）成立。

反例如下自己举。

（3）由集合相等的定义来证明：

例 3 设 A,B 为任意集合，证明

（1）$A\subseteq B\Longrightarrow P(A)\subseteq P(B)\Longrightarrow A\subseteq B$

（2）$P(A)=P(B)\Leftrightarrow A=B$

证：（1）$\forall x\in P(A)$，有$x\subseteq A$，而$A\subseteq B$，故$x\subseteq B$，即$x\in P(B)$。所以$P(A)\subseteq P(B)$。

反之，$\forall x \in A$，则 $\{x\} \subseteq A$，即 $\{x\} \in P(A)$，又 $P(A) \subseteq P(B)$，所以 $\{x\} \in P(B)$，即 $\{x\} \subseteq B$，所以 $x \in B$，即 $A \subseteq B$。

（2）$P(A) = P(B) \Leftrightarrow (P(A) \subseteq P(B)) \wedge (P(B) \subseteq P(A))$

$$\Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B。$$

例 4 设 A, B 是两个任意集合，证明：

(1) $2^A \cup 2^B \subseteq 2^{A \cup B}$；(2) $2^A \cap 2^B = 2^{A \cap B}$；(3) 举例说明 $2^A \cup 2^B \neq 2^{A \cup B}$。

其中 2^A 表示集合 A 的幂集。

证：(1) 证 $2^A \cup 2^B \subseteq 2^{A \cup B}$。

$\forall\ x \in 2^A \cup 2^B$，有 $x \in 2^A$ 或 $x \in 2^B$。

若 $x \in 2^A$，则 $x \subseteq A$，而 $A \subseteq A \cup B$，故 $x \subseteq A \cup B$，因此 $x \in 2^{A \cup B}$。

同理，若 $x \in 2^B$，也有 $x \in 2^{A \cup B}$。

因此 $2^A \cup 2^B \subseteq 2^{A \cup B}$。

(2) 证 $2^A \cap 2^B = 2^{A \cap B}$。

证 $\forall x \in 2^A \cap 2^B \Leftrightarrow x \in 2^A$ 且 $x \in 2^B \Leftrightarrow x \subseteq A$ 且 $x \subseteq B$

$$\Leftrightarrow x \subseteq A \cap B \Leftrightarrow x \in 2^{A \cap B}。$$

所以 $2^A \cap 2^B = 2^{A \cap B}$。

(3) 下面举例说明 $2^A \cup 2^B \neq 2^{A \cup B}$。

设 $A = \{1\}, B = \{2\}$，则 $2^A = \{\varnothing, \{1\}\}, 2^B = \{\varnothing, \{2\}\}$。

$2^A \cup 2^B = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}\}$，而 $A \cup B = \{1,2\}, 2^{A \cup B} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$，

所以 $2^A \cup 2^B \neq 2^{A \cup B}$。

例 5（多项选择）设集合 A 是以空集 $\varnothing$ 为唯一元素的集合，集合 $B=2^{2^A}$，则下列各式那个正确？

(1) $\varnothing\in B$；(2) $\varnothing\subseteq B$；(3) $\{\varnothing\}\subseteq B$；(4) $\{\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}\subseteq B$；(5) $\{\varnothing,\{\{\varnothing\}\}\}\in B$。

解： 选（1），（2），（3），（4）。

例 6 设 A,B 是任意集合，则

（1）若 $A\setminus B=B$，则 A，B 有何关系？

（2）$A\setminus B=B\setminus A$，则 A 与 B 又有何关系。

证：（1）由 $A\setminus B=B$，则可得出 $A=B=\phi$。

（2）由 $A\setminus B=B\setminus A$，可导出 $A=B$。（决不是 $A=B=\phi$）

例 7 (1)举例说明，结合律不适用于集合的差运算之中。

(2) 证明：对任意集合 A,B,C，有 $\{1,2\}\subseteq\{1,2,3\}$，即 $(A\setminus B)\setminus C\subseteq A\setminus(B\setminus C)$。

解： (1) 若 $A=\{1,2,3\},B=C=\{2\}$，则 $(A\setminus B)\setminus C\subsetneq A\setminus(B\setminus C)$。

(2) 证明：$\forall\ x\in(A\setminus B)\setminus C$，有 $x\in(A\setminus B),x\notin C$，即 $x\in A$ 但 $x\notin B,x\notin C$，从而 $x\notin B\setminus C$，于是 $x\in A\setminus(B\setminus C)$，即 $(A\setminus B)\setminus C\subseteq A\setminus(B\setminus C)$。

例 8 设 A,B,C 是集合，求下列各式成立的充分必要条件

（1）$(A\setminus B)\cup(A\setminus C)=A$；（2）$(A\setminus B)\cup(A\setminus C)=\phi$；

（3）$(A\setminus B)\cap(A\setminus C)=\phi$；（4）。$(A\setminus B)\Delta(A\setminus C)=\phi$

解：（1）$A\cap B\cap C=\phi$。

（2）$(A\setminus B)\cup(A\setminus C)=\phi\Rightarrow A\setminus(B\cap C)=\phi\Leftrightarrow A\subseteq(B\cap C)$。

（3）$A\subseteq B\cup C$

（4）A\B=A\C。

例 9 设 A,B 是集合，证明：

（1）$A=\phi \Leftrightarrow B=A\Delta B$；（2）$(A\setminus B)\cup B=(A\cup B)\setminus B \Leftrightarrow B=\varnothing$。

证：（1）$\Rightarrow$ 显然。

$\Leftarrow$ 反证法：假设 $A\neq\phi$，则 $\exists x_0\in A$，若 $x_0\in B$，则 $x_0\in$ 左，但 $x_0\notin$ 右，矛盾。

若 $x_0\notin B$，则 $x_0\notin$ 左，但 $x_0\in$ 右，矛盾。故假设不成立，即 $A=\phi$。

（2）两边同时 交上 B，即得 $B=\varnothing$。

例 11 设 A,B,C 是任意三个集合，则

$$(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)\Leftrightarrow C\subseteq A$$

证：$\Rightarrow$ 两边同并上 A 有：

$A\cup((A\cap B)\cup C)=A\cup[A\cap(B\cup C)]=A$，$[A\cup(A\cap B)]\cup C=A\cup C=A$；

$\Rightarrow C\subseteq A$

$\Leftarrow$ 若 $C\subseteq A$，则 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)=(A\cap B)\cup C$。

例 12 设 V 是任一集合，证明：

$\forall S,T,W\in 2^V$ 有 $S\subseteq T\subseteq W$ 当且仅且 $S\Delta T\subseteq S\Delta W$ 且 $S\subseteq W$。

证：$\Rightarrow$ 因为 $S\subseteq T\subseteq W$，故 $S\Delta T=T\setminus S\subseteq W\setminus S\subseteq S\Delta W$。

$\Leftarrow$ 先证 $S\subseteq T$。设 $x\in S$，则

若 $x\notin T$，则 $x\in S\setminus T\subseteq S\Delta T\subseteq S\Delta W=W\setminus S$，故 $x\in W$ 且 $x\notin S$，矛盾。

所以 $x\in T$，即 $S\subseteq T$。

其次，证明 $T\subseteq W$。设 $x\in T$，则有两种情况：

若 $x\notin S$。则 $x\in T\setminus S\subseteq S\Delta T\subseteq S\Delta W=W\setminus S$，故 $x\in W$。

若 $x\in S$。由 $S\subseteq W$，知 $x\in W$。

总之，$\forall x\in T$，有 $x\in W$，故 $T\subseteq W$。

习 题 课

例 1 (P_{16}^{3}) 设 A,B,C 是三个任意集合，证明：$A\Delta\left(B\Delta C\right)=\left(A\Delta B\right)\Delta C$。

证：两边展开 $=\left(A\,\mathrm{I}\;B^{C}\,\mathrm{I}\;C^{C}\right)\mathrm{U}\left(A\,\mathrm{I}\;B\,\mathrm{I}\;C\right)\mathrm{U}\left(B\,\mathrm{I}\;C^{C}\,\mathrm{I}\;A^{C}\right)\mathrm{U}\left(C\,\mathrm{I}\;B^{C}\,\mathrm{I}\;A^{C}\right)$

故结论成立。

例 2 (P_{20}^{2}) 设 A,B,C 为任意集合，化简

$$(A\,\mathrm{I}\;B\,\mathrm{I}\;C)\mathrm{U}(A^{C}\,\mathrm{I}\;B\,\mathrm{I}\;C)\mathrm{U}(A\,\mathrm{I}\;B^{C}\,\mathrm{I}\;C)\mathrm{U}(A\,\mathrm{I}\;B\,\mathrm{I}\;C^{C})\mathrm{U}$$
$$(A^{C}\,\mathrm{I}\;B^{C}\,\mathrm{I}\;C)\mathrm{U}(A\,\mathrm{I}\;B^{C}\,\mathrm{I}\;C^{C})\mathrm{U}(A^{C}\,\mathrm{I}\;B\,\mathrm{I}\;C^{C})$$

$$(A\,\mathrm{I}\;B\,\mathrm{I}\;C)\mathrm{U}(A^{C}\,\mathrm{I}\;B\,\mathrm{I}\;C)\mathrm{U}(A\,\mathrm{I}\;B^{C}\,\mathrm{I}\;C)\mathrm{U}(A\,\mathrm{I}\;B\,\mathrm{I}\;C^{C})\mathrm{U}$$
$$(A^{C}\,\mathrm{I}\;B^{C}\,\mathrm{I}\;C)\mathrm{U}(A\,\mathrm{I}\;B^{C}\,\mathrm{I}\;C^{C})\mathrm{U}(A^{C}\,\mathrm{I}\;B\,\mathrm{I}\;C^{C})$$

答案：$A\,\mathrm{Y}\,B\,\mathrm{Y}\,C$。

例 3 (P_{20}^{4}) 设 M_1,M_2,L 和 N_1,N_2,L 是集合 S 的子集的两个序列，对 $i\neq j$，$i,j=1,2,\mathrm{L}$，有 $N_i\,\mathrm{I}\;N_j=\phi$。令 $Q_1=M_1,Q_n=M_n\,\mathrm{I}\;(\overset{n-1}{\underset{k=1}{\mathrm{U}}}M_k)^{C},n=2,3,\mathrm{L}$。试证：

$$N_n\Delta Q_n\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)。$$

证：$\forall x\in N_n\Delta Q_n=(N_n\setminus Q_n)\mathrm{U}(Q_n\setminus N_n)$，则

当 $n=1$ 时，$x\in N_1\Delta Q_1=N_1\Delta M_1\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)$，故 $N_n\Delta Q_n\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)$；

当 $n\geq 2$ 时，设 $x\in N_n\Delta Q_n=(N_n\setminus Q_n)\mathrm{U}(Q_n\setminus N_n)$，有 $x\in(N_n\setminus Q_n)$ 或 $x\in(Q_n\setminus N_n)$。则

1. 若 $x\in(N_n\setminus Q_n)$，则 $x\in N_n$，但 $x\notin Q_n=M_n\,\mathrm{I}\;(\bigcup_{i=1}^{n-1}M_i)^{c}$，即 $x\notin M_n$ 或 $x\in\bigcup_{i=1}^{n-1}M_i$，

因此有 $x\notin M_n$ 或 $x\in M_i(i\leq n-1)$。于是

（1）若 $x\in N_n$ 且 $x\notin M_n$，有 $x\in N_n\setminus M_n\subseteq N_n\Delta M_n\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)$；

（2）若 $x\in N_n$ 且 $x\in M_i(i\le n-1)$，由 $N_i\cap N_j=\varnothing(i\ne j)$，有 $x\notin N_i$ 且 $x\in M_i$ $(i\le n-1)$，于是 $x\in M_i\setminus N_i\subseteq M_i\Delta N_i\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)$。

2. 若 $x\in Q_n\setminus N_n$，则 $x\in Q_n=M_n\cap(\bigcup\limits_{k=1}^{n-1}M_k)^c$，即 $x\in M_n$ 但 $x\notin N_n$。于是 $x\in M_n\setminus N_n\subseteq M_n\Delta N_n\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)$。

综上可得：$N_n\Delta Q_n\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)$。

例 4(P_{33}^{2}) 设 A,B 为集合，证明：$A\times B=B\times A$ 充要条件是下列三个条件至少一个成立：（1）$A=\varnothing$；（2）$B=\varnothing$；（3）$A=B$。

1. 若 $A\times B=B\times A=\varnothing$，则 $A=\varnothing$ 或 $B=\varnothing$。

2. 若 $A\times B=B\times A\ne\varnothing$，则 $\forall x\in A,y\in B$，有 $(x,y)\in A\times B=B\times B$。于是 $x\in B,y\in A$，因此 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，故 $A=B$。

例 6(P_{33}^{4}) 马大哈写 n 封信，n 个信封，把 n 封信放入到 n 个信封中，求全部装错的概率是多少？（n 个人，n 顶帽子，全部戴错的概率是多少？）

解： n 封信放入到 n 个信封中的全部排列共有：$|S_n|=n!$；

令 A 表示所有信都装错的集合，即

$A=\{i_1,i_2,\cdots,i_n\mid i_1\ne 1,i_2\ne 2,\cdots,i_n\ne n\}$。

令 A_i 表示第 i 个信封恰好装对的集合，则 $A_i^C\subseteq A$。所以全部装错的集合为：

$$A=A_1^C\cap A_2^C\cap\cdots\cap A_n^C。$$

于是，易得

$|A_i|=(n-1)!, |A_i \cap A_j|=(n-2)!, i\neq j$。

对于 $1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$，有 $|A_{i1}\cap A_{i2}\cap\cdots\cap A_{ik}|=(n-k)!$。又

$$|A|=|A_1^C\cap A_2^C\cap\cdots\cap A_n^C|=|S_n|-\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=n!-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|$$

$$-\cdots+(-1)^n\left|\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right|=n!-C_n^1(n-1)!+C_n^2(n-2)!-\cdots+(-1)^nC_n^n(0)!$$

$$=n!(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!})$$，故

$$P=\frac{|A|}{|S_n|}=\frac{|A|}{n!}=\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)\approx e^{-1}=0.3679$$

（答案：0.3679，当 n≥10 时，概率都近似等于 0.3679）。

例 7(P_{33}^5) 毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞，已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有姑娘跳过。同样地，每个姑娘也至少与一个小伙子跳舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙与姑娘中，必可找到两个小伙子和两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙中的一个跳过舞。

证：设 $F=\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 是小伙的集合，$G=\{g_1,g_2,\cdots,g_m\}$ 是姑娘的集合。

与 f_1 跳舞的姑娘的集合用 G_{f_1} 表示；

与 f_2 跳舞的姑娘的集合用 G_{f_2} 表示；

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

与 f_n 跳舞的姑娘的集合用 G_{f_n} 表示；

于是，由题意：$G_{f_1}\cup G_{f_2}\cup\cdots\cup G_{f_n}=G$ 且 $G_{f_i}\neq\phi$ 且 $G_{f_i}\neq G$，$i=1,2,3,\cdots,n$。

若存在 $G_{f_i},G_{f_j}(i\neq j)$，使得 $G_{f_i}\not\subseteq G_{f_j}$ 且 $G_{f_j}\not\subseteq G_{f_i}$，则结论成立。

反证法：假设不存在 G_{f_i} 和 G_{f_j} 满足 $G_{f_i}\not\subseteq G_{f_j}$ 且 $G_{f_j}\not\subseteq G_{f_i}$。于是

$\forall i,j(i\neq j), G_{f_i}$与$G_{f_j}$应满足：$G_{f_i}\subseteq G_{f_j}$或$G_{f_j}\subseteq G_{f_i}$必有一个成立。

因此把G_{f_1}、$G_{f_2},\cdots,G_{f_n}$重新排列有：$G_{f_{i1}}\subseteq G_{f_{i2}}\subseteq\cdots\subseteq G_{f_{in}}$。从而$f_{in}$与所有的姑娘都跳过舞，矛盾。

因此假设不成立，本题得证。

例 8 甲每 5 秒放一个爆竹，乙每 6 秒放一个，丙每 7 秒放一个，每人都放 21 个爆竹，共能听见多少声响。

解：设$A=\{0,5,10,15,\cdots,100\},B=\{0,6,12,18,\cdots,120\},C=\{0,7,14,21,\cdots,140\}$，则能听见多少声响相当于并集的个数，即

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

$$=21\times3-\left(\left[\frac{100}{5\times6}\right]+1\right)-\left(\left[\frac{100}{5\times7}\right]+1\right)-\left(\left[\frac{120}{6\times7}\right]+1\right)+\left(\left[\frac{100}{5\times6\times7}\right]+1\right)=54$$

0, 30, 60, 90　　0, 35, 70　　0, 42, 84　　0

习 题 课

例 1 令$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\},Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，问：

(1)有多少不同的由 X 到 Y 的关系？(2)有多少不同的由 X 到 Y 的映射？

(3)有多少不同的由 X 到 Y 的双射？(4)有多少不同的从 X 到 Y 的单射？

答案：(1) $2^{|X\times Y|}=2^{mn}$。(2) n^m。

(3) 只有 m=n 时，才存在 X 到 Y 的双射，共有$m!$否则不存在。

(4) 若 m=n，则单射的个数为 m!。

若 m>n，则单射的个数为 0。

若 m<n，则单射的个数为$C_n^m\cdot m!$。

例 2 设$f:X\to Y$, $A,B\subseteq X$，证明

(1)$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$;(2)$f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$;

(3) $f(A\setminus B)\supseteq f(A)\setminus f(B)$；(4) $f(A\Delta B)\supseteq f(A)\Delta f(B)$。

分析：本例题是书上的定理，但定理的结果和证明的方法很重要，因此在此处列出来。证明这样的问题主要利用"$\subseteq$"的定义及映射的定义，采用按定义证明方法来证明。

证：(1) 设 $y\in f(A\cup B)$，则 $\exists x\in A\cup B$，使得 $y=f(x)$。于是，$x\in A$ 或 $x\in B$。因此，$y\in f(A)$ 或 $y\in f(B)$，所以 $y\in f(A)\cup f(B)$，故

$$f(A\cup B)\subseteq f(A)\cup f(B)$$

反之，设 $y\in f(A)\cup f(B)$，则 $y\in f(A)$ 或 $y\in f(B)$。于是 $\exists x\in A$ 或 $x\in B$，使得 $f(x)=y$。因此不论何种情况都 $\exists x\in A\cup B$，使得 $f(x)=y$。因此 $y\in f(A\cup B)$，故

$$f(A)\cup f(B)\subseteq f(A\cup B)$$

因此，$f(A)\cup f(B)=f(A)\cup f(B)$。

(2) 设 $y\in f(A\cap B)$，则 $\exists x\in A\cap B$，使得 $y=f(x)$。于是，$x\in A$ 且 $x\in B$。从而，$y\in f(A)$ 且 $y\in f(B)$，所以 $y\in f(A)\cap f(B)$，故

$$f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)。$$

(3) 设 $y\in f(A)\setminus f(B)$，则 $y\in f(A)$ 但 $y\notin f(B)$。于是 $\exists x\in A$，使得 $f(x)=y$ 且 $x\notin B$，从而 $\exists x\in A\setminus B$，使得 $f(x)=y$。故 $y=f(x)\in f(A\setminus B)$，即

$$f(A)\setminus f(B)\subseteq f(A\setminus B)。$$

(4) $f(A\Delta B)=f((A\setminus B)\cup(B\setminus A))=f(A\setminus B)\cup f(B\setminus A)$

$$\supseteq(f(A)\setminus f(B))\cup(f(B)\setminus f(A))=f(A)\Delta f(B)。$$

说明：(1) 注意，两个集合的交、差、对称差的象不一定与它们的象的交、差、

对称差相应集合。

（2）例：设 $X=\{a,b,c\},Y=\{1,2,3\}$， $f:X\to Y,f(a)=1,f(b)=f(c)=2$。

令 $A=\{a,b\},B=\{c\}$。于是 $A\cap B=\varnothing,f(A\cap B)=\varnothing$。但是

$f(A)\cap f(B)=\{1,2\}\cap\{2\}=\{2\}\neq\varnothing$。这表明 $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$。

又 $f(A\setminus B)=\{1,2\},f(A)\setminus f(B)=\{1,2\}\setminus\{2\}=\{1\}$，于是 $f(A\setminus B)\supset f(A)\setminus f(B)$。

又 $f(A\Delta B)=f((A\setminus B)\cup(B\setminus A))=f(\{a,b,c\})=\{1,2\}$，而

$f(A)\Delta f(B)=\{1,2\}\Delta\{2\}=\{1\}$。于是，$f(A\Delta B)\supset f(A)\Delta f(B)$。

（3）定理 1 和定理 2 可以推广到有穷或无穷多个集合的并与交集的情况。

例 3(P_{39}^{3}) 设 X 是一个有限集合，从 X 到 X 的部分映射有多少？

解：设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，则

$\phi\to X,C_{|X|}^{0}$

$\{x_i\}\to X,C_{|X|}^{1}|X|,i=1,2,\cdots,n$。

$\{x_i,x_j\}\to X,C_{|X|}^{2}|X|^2,i,j=1,2,\cdots,n$。

$\{x_i,x_j,x_k\}\to X,C_{|X|}^{3}|X|^3,i,j,k=1,2,\cdots,n$。

$\vdots$

$X\to X,C_{|X|}^{|X|}|X|^{|X|}$

于是共有：

$$C_{|X|}^{0}+C_{|X|}^{1}|X|+C_{|X|}^{2}|X|^2+\cdots+C_{|X|}^{|X|}|X|^{|X|}=(1+|X|)^{|X|}$$

例 4(P_{39}^{3}) 设 $u_1,u_2,\cdots,u_{mn+1}$ 是一个两两不相同的整数构成的数列，则必有长至少为 $n+1$ 的递增子序列或有长至少为 $m+1$ 的递减子序列。

证：令 $A=\{u_1,u_2,\cdots,u_{mn+1}\}$，则$|A|=mn+1$。

设以u_i为首项的最长递增子序列的长度为l_i^+，

设以u_i为首项的最长递减子序列的长度为l_i^-。

反证法：假设题中结论不成立，则$l_i^+\le n, l_i^-\le m, i=1,2,3,\cdots,mn+1$。

令$\varphi:A\to\{1,2,\cdots,n\}\times\{1,2,\cdots,m\},\forall u_i\in A$，$\varphi(u_i)=(l_i^+,l_i^-)$，则$\varphi$是单射。

实际上，$\forall u_i,u_j\in A$且$u_i\ne u_j(i<j)$，则

若$u_i>u_j$，则$l_i^->l_j^-$，所以$(l_i^+,l_i^-)\ne(l_j^+,l_j^-)$；

即$\varphi(u_i)\ne\varphi(u_j)$。

若$u_i<u_j$，则$l_i^+>l_j^+$，所以$(l_i^+,l_i^-)\ne(l_j^+,l_j^-)$；

即$\varphi(u_i)\ne\varphi(u_j)$。

故φ为单射，从而就有$mn+1\le mn$矛盾。

例 5(P_{43}^2)已知m个整数$a_1,a_2,\cdots,a_m$，试证：存在两个整数$k,l,0\le k<l\le m$，使得$a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_l$能被$m$整除。

证：考察下式：

$$
\begin{aligned}
&a_1\\
&a_1+a_2\\
&a_1+a_2+a_3\\
&\vdots\\
&a_1+a_2+\cdots+a_m
\end{aligned}
$$

若第i式能被m整除，则显然成立，此时$k=0,l=i$；

若任一式都不能被m整除，则考察各式被m整除后的余数，如下式：

$a_1 = q_1 m + r_1$

$a_1 + a_2 = q_2 m + r_2$

$a_1 + a_2 + a_3 = q_3 m + r_3$

$\vdots$

$a_1 + a_2 + \cdots + a_m = q_m m + r_m$

由于每一个都不能被 m 整除，故共有 m 个余数一相当于 m 个物体。而任意整数被 m 除后，只有 $m-1$ 个余数——相当于 $m-1$ 抽屉，于是由抽屉原理可知必有两个余数相等。设这两个余数为 $r_i, r_j, i \neq j(i<j)$，对应两式相减便有：

$a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_j$ 可被 m 整除，此时 $k = i, l = j$。

例 6 设 X 是一个无穷集合，$f: X \to X$。证明：存在 X 的一个真子集 E，使得 $f(E) \subseteq E$。

证：取 $x_0 \in X$，令 $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \cdots, x_n = f(x_{n-1}), \cdots$。

若到某一位与前面有重复项，设为第 k 项，即 $f(x_k) = x_i (i < k)$。则

令 $E = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k\} \subset X$，则 $f(E) \subseteq E$；

若 x_i 互不相同，则令 $E = X \setminus \{x_0\} \subset X$，则 $f(E) \subseteq E$。

例 7 设 $N = \{1,2,3,\cdots\}$，试构造两个映射 f 和 g: $N \to N$，使得 $gf = I_N$，但 $fg \neq I_N$。

例 8(P_{55}^{2}) 设 $f: X \to Y$ 则

（1）若存在唯一的一个映射 $g: Y \to X$，使得 $gf = I_X$，则 f 是可逆的吗？

（2）若存在唯一的一个映射 $g: Y \to X$，使得 $fg = I_Y$，则 f 是可逆的吗？

答案：（1）f 不一定可逆。

当 $|X| = 1$ 时，f 不一定可逆。

当 $|X| \geq 2$ 时，f 可逆。

（2）f一定可逆。

证：由 $fg=I_Y$，得f是满射。假设f不是单射，则 g 不唯一，矛盾。

例 9(P_{55}^{3}) 设$f:X\to Y,|X|=m,|Y|=n$，则

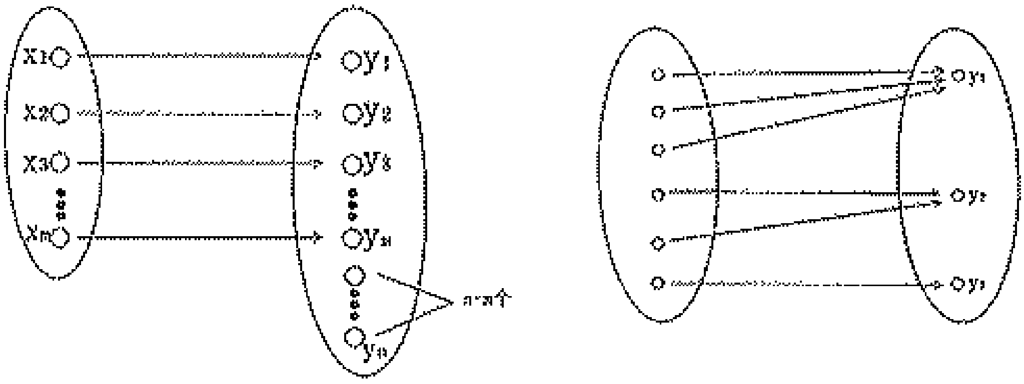
（1）若f是左可逆的，则f有多少个左逆映射？

（2）若f是右可逆的，则f有多少个右逆映射？

解：令 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\},Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，则

（1）如图 1(a)所示：有m^{n-m}；（2）如图 1(b)所示：有

$$|f^{-1}(y_1)|\cdot|f^{-1}(y_2)|\cdot\cdots\cdot|f^{-1}(y_n)|。$$



(a)　　　　　　　　　　(b)

图 1

例 10(1) 设 $X=\{1,2,3,4,5\}$，$Y=\{a,b\}$，求 X 到 Y 的满射的个数。($2^5-2=30$)

(2)设 $X=\{1,2,\cdots,m\}$，$Y=\{a,b\}$，求 X 到 Y 的满射的个数。(2^m-2)

(3) 设 $X=\{1,2,\cdots,m\},Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，$m\geq n$，若$f:X\to Y$，求 X 到 Y 的满射的个数。

证：在Y上的定义n个性质$P_1,P_2,\cdots,P_n$，满足各性质的Y^X中映射之集分别记为$A_1,A_2,\cdots,A_n$。若$f\in Y^X(f:X\to Y),\forall x\in X,f(x)\neq y_i$，则称$f$不具有性质，于是令$A_i$为$X$中每个元素在$f$下的象都不等于$y_i$，即

$A_i=\{f\mid f:X\to Y,\forall x\in X,f(x)\neq y_i\}$，$i=1,2,\cdots,n$。于是

$A_i^C=\{f\mid f:X\to Y,x\exists X,f(x)\neq y_i\}$，$i=1,2,\cdots,n$，即

$$\left|A_1^C\cap A_2^C\cap\cdots\cap A_n^C\right|=\left|Y^X\right|-\left|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\right|=$$
$$=\left|Y^X\right|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|-\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^n\left|\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right|$$
$$=n^m-C_n^1(n-1)^m+C_n^2(n-2)^m-C_n^3(n-3)^m+\cdots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}1^m+C_n^n0^m$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^kC_n^k(n-k)^m(k=0\text{就是}n^m)$$

在这里A_i不以y_i为函数值，则$|A_i|=(n-1)^m$

$A_i\cap A_j$不以y_i与y_j为函数值，则$|A_i\cap A_j|=(n-2)^m$。

例 11(P_{51}^2)设 X, Y, Z 是三个非空集合，$|Z|\ge 2$。证明：$f:X\to Y$是满射当且仅当不存在从 Y 到 Z 的映射g_1和g_2，使得$g_1\neq g_2$，但$g_1gf=g_2gf$。

证：$\Rightarrow$因$f:X\to Y$且f为满射，故$\forall y\in Y,\exists x\in X$，使得$f(x)=y$。

假设存在$g_1,g_2,g_1\neq g_2$，所以$\exists y_0\in Y$，使得$g_1(y_0)\neq g_2(y_0)$，因为$|Z|\ge 2$，因此必存在这样的g_1和g_2。对于上面的y_0，$\exists x_0\in X$（f是满射），使得$f(x_0)=y_0,g_1(f(x_0))\neq g_2(f(x_0))$。

$[g_1(y_0)\neq g_2(y_0)]$，即$g_1f(x_0)\neq g_2f(x_0)$。故$g_1gf\neq g_2gf$与$g_1gf=g_2gf$，矛盾。所以假设不成立。

<u>也可以用如下方法：</u>

f 满射 $\Leftrightarrow$ f 右可逆 $\Leftrightarrow$ $\exists h:Y\to X$，使得 $f\circ h=I_Y$ $\Leftrightarrow$ 假设 $g_1\circ f=g_2\circ f$ 得到 $g_1=g_2$，命题得证。

$\Leftarrow$ $f:X\to Y$，假设 f 不是满射，则 $\exists y_0\in Y$，使得 $\forall x\in X, f(x)\neq y_0$。构造两个映射 $g_1,g_2:Y\to Z$，

当 $y=y_0$ 时，$g_1(y_0)\neq g_2(y_0)$；

当 $y\neq y_0$ 时，$g_1(y)=g_2(y)$。

因为 $|Z|\geq 2$，故此时 $g_1\neq g_2$，但

$\forall x\in X, g_1\circ f(x)=g_1(y\neq y_0)=g_2(y\neq y_0)=g_2\circ f(x)$

即 $g_1\circ f=g_2\circ f$，与题设不存在 $g_1\neq g_2$，但 $g_1\circ f=g_2\circ f$ 矛盾，故假设不成立，即 f 一定是满射。

习 题 课

例 1(P_{47}^{3}) 设 $f:X\to Y$，$A\subseteq X, B\subseteq Y$，证明：

$$f(f^{-1}(B)\cap A)=B\cap f(A)。$$

证： 设 $y\in f(f^{-1}(B)\cap A)$，则 $\exists x\in f^{-1}(B)\cap A$，使得 $f(x)=y$。于是 $x\in f^{-1}(B)$ 且 $x\in A$，因此 $y=f(x)\in B$ 且 $y\in f(A)$，即 $y\in B\cap f(A)$，从而

$$f(f^{-1}(B)\cap A)\subseteq B\cap f(A)。$$

反之，设 $y\in B\cap f(A)$，则 $y\in B$ 且 $y\in f(A)$。于是 $\exists x\in A$ 且 $x\in f^{-1}(B)$，使得 $f(x)=y$。从而 $\exists x\in f^{-1}(B)\cap A$，使得 $f(x)=y$，因此 $y\in f(f^{-1}(B)\cap A)$。从而

$$B\cap f(A)\subseteq f(f^{-1}(B)\cap A)。$$

所以$f(f^{-1}(B)\cap A)=B\cap f(A)$。

例2 (P_{47}^{8})设$f:A\to B$，证明：$\forall T\in 2^{B}$，有$f(f^{-1}(T))=T\cap f(A)$。

证：若$T=\varnothing$，则$f(f^{-1}(T))=\varnothing, T\cap f(A)=\varnothing$，从而$f(f^{-1}(T))=T\cap f(A)$。

若$T\neq\varnothing$，设$y\in f(f^{-1}(T))$，则$\exists x\in f^{-1}(T)$，使得$f(x)=y$且$x\in A$，于是$y=f(x)\in T$且$y=f(x)\in f(A)$，因此$y\in T\cap f(A)$。故

$$f(f^{-1}(T))\subseteq T\cap f(A)$$

反之，设$y\in T\cap f(A)$，则$y\in T$且$y\in f(A)$。于是$\exists x\in A$且$x\in f^{-1}(T)$，使得$f(x)=y$。因此$\exists x\in A\cap f^{-1}(T)$，使得$y=f(x)\in f(f^{-1}(T)\cap A)$。而$f^{-1}(T)\subseteq A$，所以$y\in f(f^{-1}(T))$，故$T\cap f(A)\subseteq f(f^{-1}(T))$

从而$T\cap f(A)=f(f^{-1}(T))$

例3 ($P_{47}^{5,6}$)设$f:X\to Y$，证明：f是单射$\Leftrightarrow\forall F\in 2^{X}, f^{-1}(f(F))=F$。

证：$\Rightarrow\forall x\in f^{-1}(f(F))$，则$f(x)\in f(F)$，于是$F$中必存在$x_1$，使得$f(x)=f(x_1)$。因为$f$是单射，故必有$x=x_1$。即$x\in F$，所以$f^{-1}(f(F))\subseteq F$。

反过来，$\forall x\in F, f(x)\in f(F)$，从而有$x\in f^{-1}(f(F))$，所以$F\subseteq f^{-1}(f(F))$。

因此$f^{-1}(f(F))=F$。

$\Leftarrow$ 假设f不是单射，则$\exists x_1,x_2\in X, x_1\neq x_2$，但$f(x_1)=f(x_2)=y$。令$F=\{x_1\}\in 2^{X}$，于是

$$f^{-1}(f(F))=f^{-1}(f(\{x_1\})=f^{-1}(\{y\})=\{x_1,x_2\},$$

故有$\{x_1,x_2\}=F=\{x_1\}$，矛盾。

即f一定为单射。

例 4 (P_{11}^{7}) 设有映射 $f:A\to B, H\subseteq A$，令 H 在 A 中的余集 $H^c=A\setminus H$，当 f 分别是单射和满射时，给出 $f(H^c)$ 和 $(f(H))^c$ 之间的关系，并给予证明。

解：由定理知，$(f(H^c))=f(A\setminus H)\supseteq f(A)\setminus f(H)$。

若 f 是满射，即 $f(A)=B$，有 $f(H^c)\supseteq B\setminus f(H)=(f(H))^c$。

举例说明：

设 $A=\{1,2,3\}, B=\{a,b\}, f(1)=f(2)=a, f(3)=b$，则 f 为满射。

令 $H=\{1,3\}$，则 $H^c=\{2\}, f(H^c)=\{a\}$，而 $(f(H))^c=B\setminus f(H)=\varnothing$。

若 f 是单射时，有 $f(H^c)\subseteq(f(H))^c$。

$\forall y\in f(H^c)$，存在 $x\in H^c$，即 $x\notin H$，使得 $y=f(x)$；由 f 是单射，有 $y=f(x)\notin f(H)$ 且 $y=f(x)\in B$（否则存在 $x_1\in H$，使 $f(x_1)=f(x)$，与 f 是单设矛盾），故 $y=B\setminus f(H)\in(f(H))^c$。于是 $f(H^c)\subseteq(f(H))^c$。

举例说明：

设 $A=\{1,2,3\}, B=\{a,b,c,d\}, f(1)=a, f(2)=b, f(3)=c, H=\{1,2\}$，则

$f(H^c)=f(\{3\})=\{c\}$，而 $(f(H))^c=B\setminus f(H)=\{d,c\}$。

例 5（1）若 $f:T\to U$, f 是单射，$g,h:S\to T$，满足 $f\circ g=f\circ h$，证明：$g=h$。

（2）给出映射 f,g,h 的实例，$f:T\to U, g,h:S\to T$，$f\circ g=f\circ h$，但 $g\neq h$。

（3）$f:A\to B$，$g,h:B\to C$。给出 f 的条件，使得由 $g\circ f=h\circ f$ 可以得出 $g=h$。

证：（1）$\forall s\in S$，由条件知，$(f\circ g)(s)=(f\circ h)(s)$，即 $f(g(s))=f(h(s))$。因为 f 为单射，所以有 $g(s)=h(s)$，且 g,h 都是 S 到 T 映射，从而 $g=h$。

（2）f 不为单射时不成立。

例：$S=\{1\}$，$T=\{a,b\},U=\{0\},f(x)=0;g(1)=a;h(1)=b$。则

$f\circ g(x)=f(g(x))=0,f\circ h(x)=f(h(x))=0$，但 $g\neq h$。

（3）f 为满射时，结论成立。

$\forall b\in B$，因为 f 是满射，所以存在 $a\in A$，使得 $f(a)=b$。由 $g\circ f=h\circ f$，

得 $g(f(a))=h(f(a))$，即 $g(b)=h(b)$，从而 $g=h$。

例 6 设 $f:N\times N\to N,f((x,y))=xy$。求 $f(N\times\{1\}),f^{-1}(\{0\})$，并说明是否是单射、满射或双射？（在此处 N 必包含 0）

解：容易说明 f 不是单射：$f((1,4))=f((2,2))$，但 $(1,4)\neq(2,2)$。

f 是满射：$\forall y\in N,$ 有 $f((1,y))=1\cdot y=y$，任一元素都存在有原象。

$f(N\times\{1\})=\{n\cdot 1|n\in N\}=N$；

$f^{-1}(\{0\})=\{(x,y)|xy=0\}=(N\times\{0\})\cup(\{0\}\times N)$。

例 7 设 $f:X\to Y,g:Y\to Z$ 是两个映射，$g\circ f$ 是一个满射，若 g 是单射，证明 f 是满射。

证：假设 f 不是满射，则有 $f(X)\neq Y$。即存在 $y_0\in Y$，使得 $\forall x\in X,f(x)\neq y_0$。

又由 g 是映射，则有 $g(y_0)=z_0\in Z$；

因 $g\circ f$ 是满射，故对上面 $z_0\in Z$，必存在 $x\in X$，使得 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=z_0$，

取 $f(x)=y_1$，有 $g(y_1)=z_0$，而 $y_1\neq y_0$，但 $g(y_1)=g(y_0)=z_0$，故 g 不是单射，与题设矛盾。于是假设不成立，即 f 是满射。

例 8 一个人步行了十小时，共走 45 公里，已知他第一个小时走了 6 公里，而最后一小时只走了 3 公里，证明：一定存在连续的两个小时，在这两个小时之

内至少走了 9 公里。

证：设a_i为第i小时步行的路程，连续两小时一共有 9 种：

$a_1+a_2, a_2+a_3, \cdots, a_8+a_9, a_9+a_{10}$。即相当于有 9 个抽屉，而

$\sum_{i=1}^{9}(a_i+a_{i+1})=2\sum_{i=1}^{10}a_i-a_1-a_{10}=2\times45-6-3=81$。即相当于有 81 个物体，于是把 81 个物体放入 9 个抽屉里，必有一个抽屉里至少有 9 个物体，所以至少存在一个 k，使得$a_k+a_{k+1}\geq9$。此题解法可推广到连续n个小时的情况。

对本题还可简单证明如下：$a_1=6, a_{10}=3, a_2+a_3+\cdots+a_9=36$。

8 个小时路程分四段，$a_2+a_3, a_4+a_5, a_6+a_7, a_8+a_9$，但

$(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+(a_6+a_7)+(a_8+a_9)=36$，由抽屉原理可知，必存在某一段的路程至少为 9 公里。