词处理：统计语言模型

MM与HMM：更理论化的描述

主要内容

- **马尔可夫模型：MM**
- 隐马尔可夫模型：HMM
- HMM的三个基本问题及其计算

马尔科夫(Markov)模型

- 马尔科夫模型是一种统计模型，广泛的应用在语音识别，词性自动标注，音字转换，概率文法等各个自然语言处理的应用领域。
- Markov(1856~1922)，苏联数学家。切比雪夫的学生。在概率论、数论、函数逼近论和微分方程等方面卓有成就。
- 经过长期发展，尤其是在语音识别中的成功应用，使它成为一种通用的统计工具。
- N元语言模型，是Markov模型的应用。

马尔科夫(Markov)模型：概述

- 随机过程又称为随机函数，是随时间随机变化的过程。马尔科夫模型描述了一类重要随机过程。
- 一个系统有N个有限状态$S = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$，随时间推移，系统将由某一状态转移到另一状态。
- $Q = (q_1, q_2, \dots, q_T)$为随机变量序列，其取值为状态集S中的某个状态，在时间t的状态为q_t。

马尔科夫(Markov)模型：概述

- 系统在时间t处于状态s_j的概率取决于其在时间1, 2, •••t−1的状态，该概率为：

$$P(q_t = s_j | q_{t-1} = s_i, q_{t-2} = s_k, \ldots)$$

- 离散的一阶马尔科夫链：系统在时间t的状态只与时间t−1的状态有关。

$$P(q_t = s_j | q_{t-1} = s_i, q_{t-2} = s_k, \ldots) = P(q_t = s_j | q_{t-1} = s_i)$$

马尔科夫(Markov)模型：概述

- 马尔科夫模型：只考虑独立于时间t的随机过程

$$P(q_t = s_j | q_{t-1} = s_i) = a_{ij}, 1 \leq i, j \leq N$$

- 状态转移概率a_{ij}必须满足以下条件：
  - $a_{ij} \geq 0$
  - $\sum_{j=1}^{N} a_{ij} = 1$
- N个状态的一阶马尔科夫过程有N^2，可以表示成为一个状态转移矩阵。

马尔科夫(Markov)模型：举例

- 一段文字中名词，动词，形容词三类词性出现的情况可以由三个状态的马尔科夫模型描述：
- 状态s_1：名词
- 状态s_2：动词
- 状态s_3：形容词

马尔科夫(Markov)模型：举例

- 假设状态之间的转移矩阵如下：

$$\mathbf{A}=[a_{ij}]=\begin{array}{c}\\ s_1\\ s_2\\ s_3\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} s_1 & s_2 & s_3\end{array}\\ \begin{bmatrix}0.3 & 0.5 & 0.2\\ 0.5 & 0.3 & 0.2\\ 0.4 & 0.2 & 0.4\end{bmatrix}\end{array}$$

- 如果在该文字中某句子的第一个词为名词，那么该句子中三类词出现顺序为O = “名动形名” 的概率。

马尔科夫(Markov)模型：举例

- $P(O|M) = P(s_1, s_2, s_3, s_1|M)$

$= \mathrm{P}(s_1) \cdot \mathrm{P}(s_2|s_1) \cdot \mathrm{P}(s_3|s_2) \cdot \mathrm{P}(s_1|s_3)$

$= 1 \times a_{12} \times a_{23} \times a_{31}$

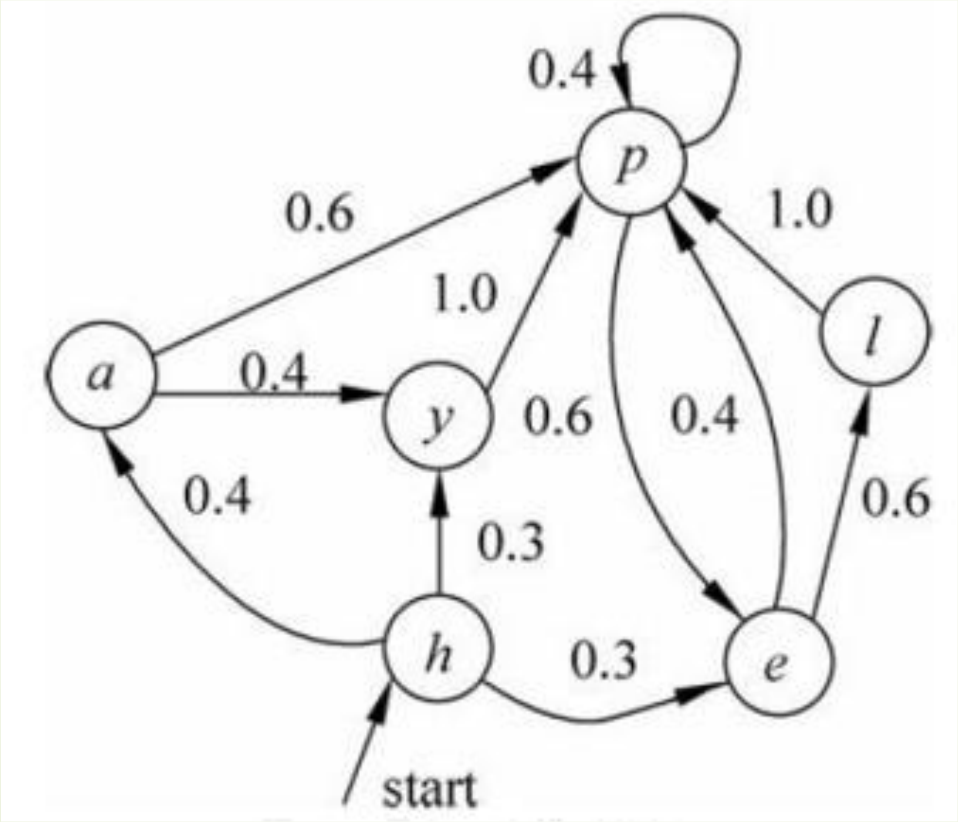
$= 0.5 \times 0.2 \times 0.4$

$= 0.04$

马尔科夫(Markov)模型：有限状态机

- 马尔科夫模型可视为随机的有限状态机。
- 圆圈表示状态，状态之间的转移用带箭头的弧表示，弧上的数字为状态转移的概率。
- 初始状态用标记为start的输入箭头表示。
- 假设任何状态都可作为终止状态。
- 对每个状态来说，发出弧上的概率和为1。

马尔科夫模型 vs 有限状态机



主要内容

- 马尔可夫模型：MM
- 隐马尔可夫模型：HMM
- HMM的三个基本问题及其计算

隐马尔可夫模型：HMM

- 隐马尔可夫模型创建于20世纪70年代，是美国数学家鲍姆等人提出来的。
- 该模型是一个双重随机过程，我们不知道具体的状态序列，只知道状态转移的概率，即模型的状态转换过程是不可观察的（隐蔽的），可观察事件的随机过程是隐蔽状态过程的随机函数。

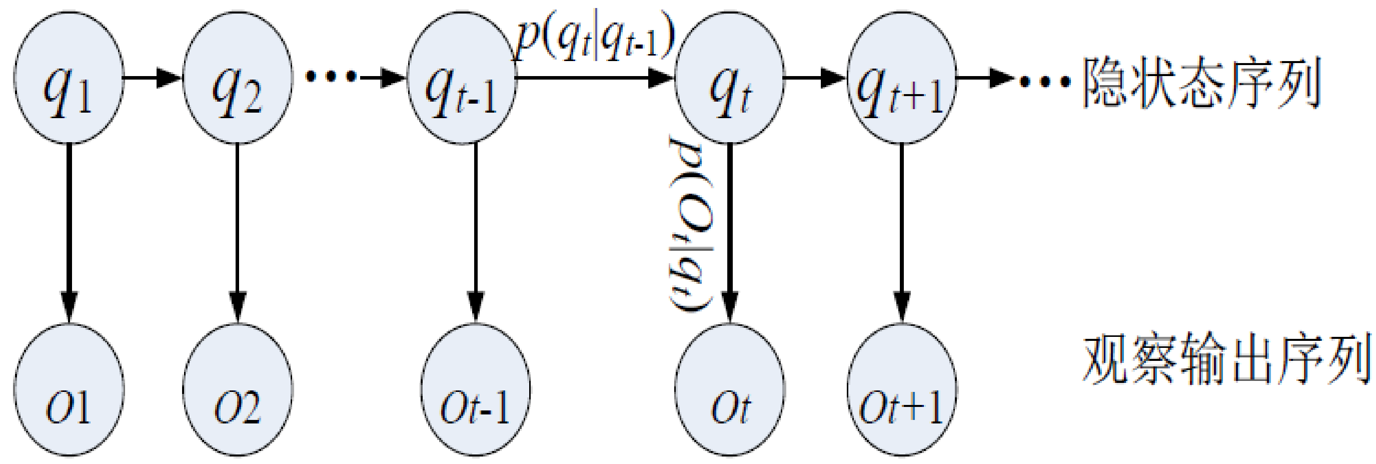
隐马尔可夫模型：例子

- 假定一暗室中有N个口袋，每个口袋中有M种不同颜色的球。
- 一个实验员根据某一概率分布随机地选取一个初始口袋，从中根据不同颜色的球的概率分布，随机地取出一个球，并向室外的人报告该球的颜色。
- 再根据口袋的概率分布选择另一个口袋，根据不同颜色的球的概率分布从中随机选择另外一个球。重复进行这个过程。

隐马尔可夫模型：例子

- 对于暗室外边的人来说，可观察的过程只是不同颜色的球的序列，而口袋的序列是不可观察的。
- 每个口袋对应于HMM中的状态，球的颜色对应于HMM中状态的输出符号。
- 从一个口袋转向另一个口袋对应于状态转换，从口袋中取出球的颜色对应于从一个状态输出的观察符号。

隐马尔可夫模型：图解



HMM 图解

隐马尔可夫模型：组成部分

1. 模型中状态的数目N（上例中口袋的数目）；

2. 从每个状态可能输出的不同符号的数目M（上例中球的不同颜色的数目）；

3. 状态转移概率矩阵$A=\{a_{ij}\}$（a_{ij}为实验员从一个口袋（状态s_i）转向另一个口袋（s_j）取球的概率）。其中：

$$a_{ij}=P(q_t=s_j|q_{t-1}=s_i),1\le i,j\le N$$

$$a_{ij}\ge 0$$

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}=1$$

隐马尔可夫模型：组成部分

4. 从状态s_j观察到符号v_k的概率分布矩阵$B = \{b_j(k)\}$（ $b_j(k)$为实验员从第j个口袋中取出第k种颜色的球的概率），其中：

$$b_j(k) = P\left(O_t = v_k \middle| q_t = s_j\right), 1 \le j \le N; 1 \le k \le M$$

$$b_j(k) \ge 0$$

$$\sum_{k=1}^{M} b_j(k) = 1$$

隐马尔可夫模型：组成部分

5. 初始状态概率分布 $\pi = \{\pi_i\}$，其中：

$$\pi_i = P(q_1 = s_i), 1 \leq i \leq N$$

$$\pi_i \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} \pi_i = 1$$

隐马尔可夫模型：组成部分

- 一般地，一个HMM记为一个五元组 μ = （S，K，A，B，π），其中，S为状态的集合，K为输出符号的集合，π，A和B分别是初始状态的概率分布、状态转移概率和符号发射概率。
- 为了简单，有时也将其记为三元组 μ = （A，B，π）

主要内容

- 马尔可夫模型：MM
- 隐马尔可夫模型：HMM
- HMM的三个基本问题及其计算

隐马尔可夫模型：三个基本问题

1. 估计问题：给定一个观察序列$O = O_1 O_2 \dots O_T$和模型μ =（A，B，π），如何快速地计算出给定模型μ情况下，观察序列 O 的概率，即$P(O|\mu)$?

2. 序列问题：给定一个观察序列$O = O_1 O_2 \dots O_T$和模型μ =（A，B，π），如何快速有效的选择在一定意义下“最优”的状态序列

$Q = q_1 q_2 \dots q_T$，使得该状态序列“最好的解释”观察序列？

3. 参数估计问题：给定一个观察序列$O = O_1 O_2 \dots O_T$，如何根据最大似然估计来求模型的参数值？即如何调节模型μ =（A，B，π）的参数，使得$P(O|\mu)$最大？

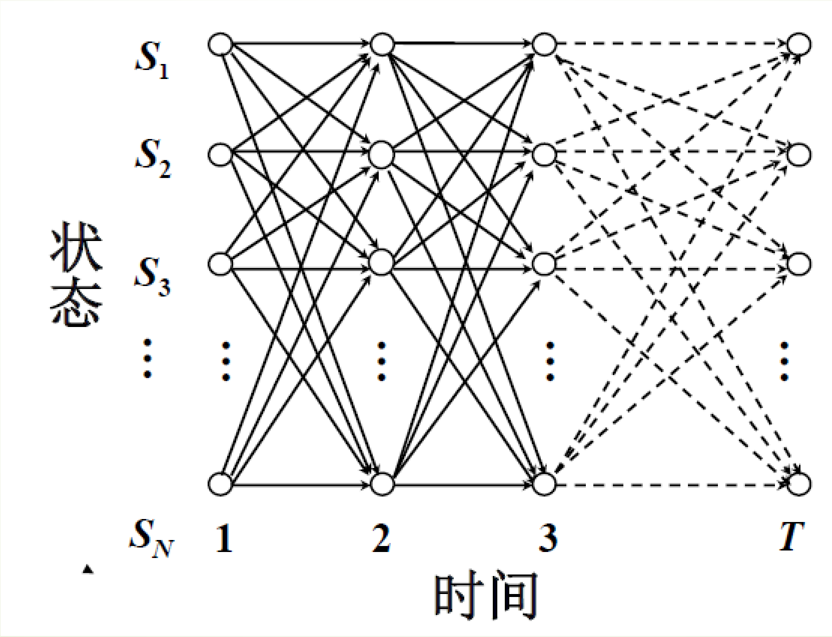
隐马尔可夫模型：求解观察序列的概率

- 给定观察序列O $= O_1 O_2 \dots O_T$和模型$\mu = (A, B, \pi)$，快速的计算出给定模型μ情况下观察序列O的概率，即$P(O|\mu)$。
- 将其称为解码问题。

- 对于给定的状态序列$Q = q_1 q_2 \dots q_T$，$P(O|\mu) =?$
- $p(O|\mu) = \sum_Q p(O, Q|\mu) = \sum_Q p(Q|\mu) \cdot p(O|Q, \mu)$
- $p(Q|\mu) = \pi_{q_1} a_{q_1 q_2} a_{q_2 q_3} \dots a_{q_{t-1} q_T}$
- $p(O|Q, \mu) = b_{q_1}(O_1) b_{q_2}(O_2) \dots b_{q_T}(O_T)$

隐马尔可夫模型：求解观察序列的概率

- 存在的困难：如果模型μ有N个不同的状态，时间长度为T，那么有N^T个可能的状态序列，搜索路径成指数级组合爆炸。



隐马尔可夫模型：前向算法

- 解决办法：动态规划，前向算法。
- 基本思想：定义前向变量$\alpha_t(i)$，前向变量$\alpha_t(i)$是在时间t，HMM输出了序列$O_1O_2\ldots O_t$，并且位于状态s_i的概率。
- $\alpha_t(i) = P(O_1O_2\ldots O_t, q_t = s_i|\mu)$
- 如果可以高效的计算$\alpha_t(i)$，就可以高效的求得$p(O|\mu)$。

隐马尔可夫模型：前向算法

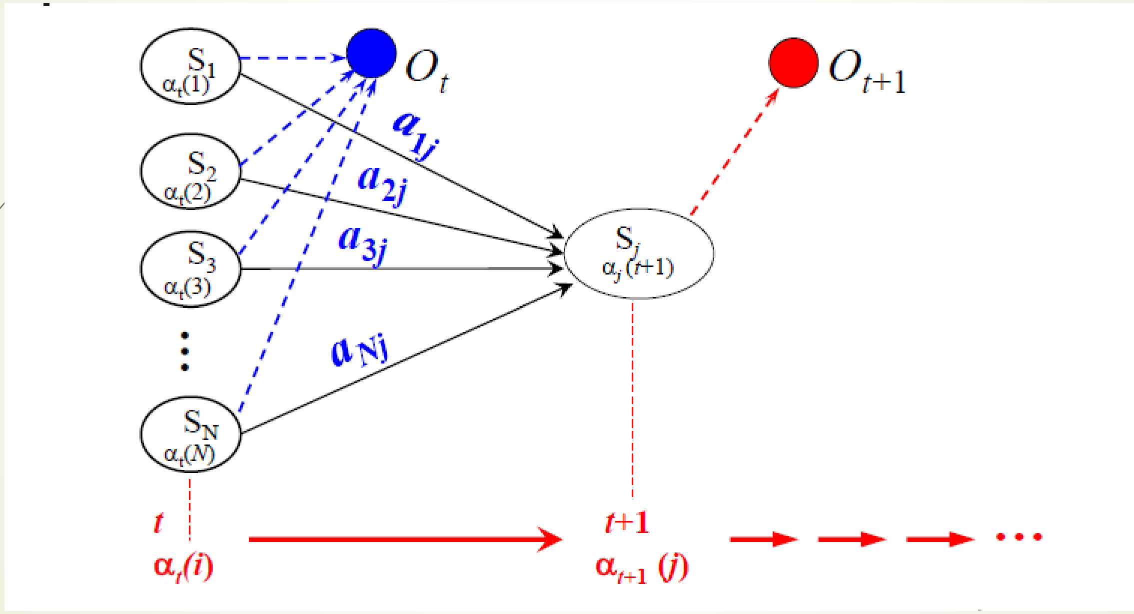
- $p(O|\mu)$是在到达状态q_T时观察到序列O $= O_1O_2 \ldots O_T$的概率：

$$p(O|\mu) = \sum_{S_i} p(O_1O_2 \ldots O_T, q_T = S_i|\mu) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_t(i)$$

- 在时间t+1的前向变量可以根据在时间t时的前向变量$\alpha_t(1)$, $\alpha_t(2) \ldots \alpha_t(\mathrm{N})$的值来归纳计算

$$\alpha_{t+1}(j) = (\sum_{i=1}^{N} \alpha_t(i)\, a_{ij})b_j(O_{t+1})$$

隐马尔可夫模型：前向算法



隐马尔可夫模型：前向算法

- 前向算法

1. 初始化：$\alpha_1(i) = \pi_i b_i(O_1), 1 \le i \le N$。

2. 归纳计算

$$\alpha_{t+1}(j) = \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_t(i)\, a_{ij}\right) b_j(O_{t+1}), 1 \le t \le T-1$$

3. 求和终结

$$P(O|\mu) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_T(i)$$

隐马尔可夫模型：前向算法

- 时间复杂度：
- 每计算一个$\alpha_t(i)$必须考虑从t-1时的所有N个状态转移到状态s_i的可能性，时间复杂度为O(N)，对应每一个时刻t，要计算N个前向变量：$\alpha_\mathrm{t}(1)$，$\alpha_\mathrm{t}(2)$, ⋯$\alpha_\mathrm{t}(N)$，所以，时间复杂度为：O(N)XN=O(N^2),
- 又因为t=1, 2⋯T, 所以前向算法总的复杂度为O(N^2T)

隐马尔可夫模型：后向算法

- 后向变量$\beta_t(i)$是在给定模型$\mu = (A, B, \pi)$，并且在时间t状态为s_i的条件下，HMM输出观察序列$O_{t+1} \dots O_T$的概率。

- $\beta_t(i) = \mathrm{P}(O_{t+1} \dots O_T | q_t = s_i, \mu)$

隐马尔可夫模型：后向算法

- 与计算前向变量一样，可以用动态规划的算法计算后向变量。

1. 从时刻t到t+1，模型由状态S_i转移到状态S_j，并从S_j输出O_{t+1}
2. 在时间t+1，状态为S_j的条件下，模型输出观察序列$O_{t+2}O_{t+3} \dots O_T$

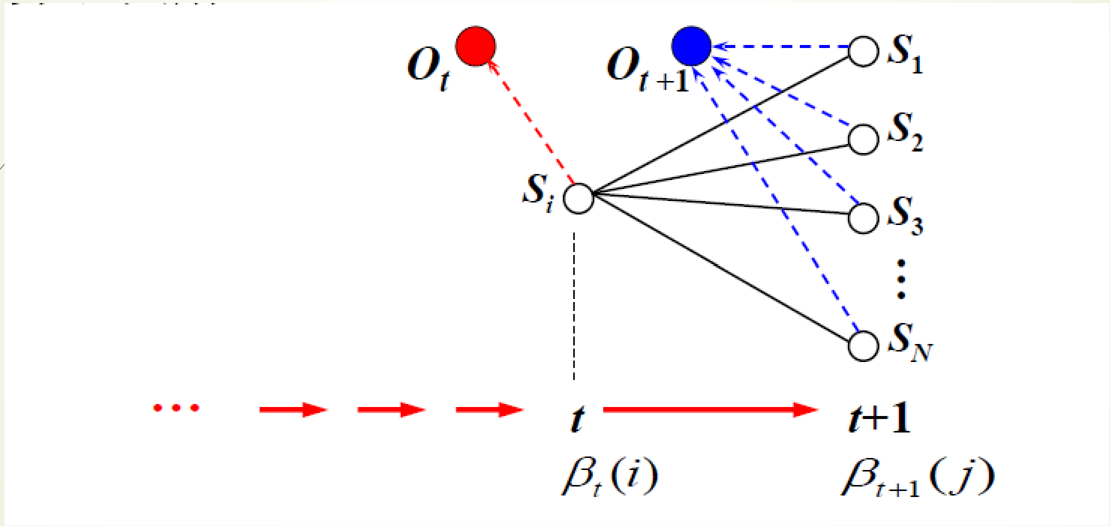
隐马尔可夫模型：后向算法

- 第一步的概率：$a_{ij} \times b_j(O_{t+1})$
- 第二步的概率按后向变量的定义为$\beta_{t+1}(i)$
- 可得到如下归纳关系：

$$\beta_t(i) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} b_j(O_{t+1}) \beta_{t+1}(j)$$

- 归纳顺序为：$\beta_{\mathrm{T}}(x), \beta_{\mathrm{T}-1}(x), \ldots, \beta_1(x)$

隐马尔可夫模型：后向算法



隐马尔可夫模型：后向算法

1. 初始化：$\beta_T(i) = 1, 1 \le i \le N$

2. 归纳计算：

$$\beta_t(i) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} b_j(O_{t+1}) \beta_{t+1}(j), \mathrm{T}-1 \ge t \ge 1; 1 \le i \le N$$

3. 求和终结：

$$P(O|\mu) = \sum_{i=1}^{N} \pi_i b_i(O_1) \beta_1(i)$$

时间复杂度：$O(N^2T)$

隐马尔可夫模型：维特比算法

- 维特比算法用于求解HMM中的第二个问题，给定一个观察序列$O = O_1 O_2 \ldots O_T$和模型$\mu = (A, B, \pi)$，如何快速有效的选择在一定意义下最优的状态序列$Q = q_1 q_2 \ldots q_T$，使得该状态序列“最好的解释”观察序列。

- 对于最优状态序列的一种理解：状态序列中的每个状态都单独的具有概率，对于每个时刻$t(1 \leq t \leq T)$，寻找q_t使得$\gamma_t(i) = p(q_t = S_i | O, \mu)$最大。

隐马尔可夫模型：维特比算法

$$\gamma_t(i) = p(q_t = S_i|O,\mu) = \frac{p(q_t = S_i, O|\mu)}{p(O|\mu)}$$

- $p(q_t = S_i, O|\mu)$表示模型的输出序列O，并在时间t到达状态i的概率。

隐马尔可夫模型：维特比算法

- 分解过程：
- 模型在时间t到达状态i，并且输出$O = O_1 O_2 \dots O_t$。根据前向变量的定义，实现这一步的概率为$\alpha_t(i)$。
- 从时间t，状态S_i出发，模型输出$O = O_{t+1} O_2 \dots O_T$，根据后向变量定义，实现这一部的概率为$\beta_t(i)$。
- 因此：
- $p(q_t = S_i, O|\mu) = \alpha_t(i) \times \beta_t(i)$

隐马尔可夫模型：维特比算法

- 而$p(O|\mu)$与时间t的状态无关，因此：

$$p(O|\mu) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_t(i) \times \beta_t(i)$$

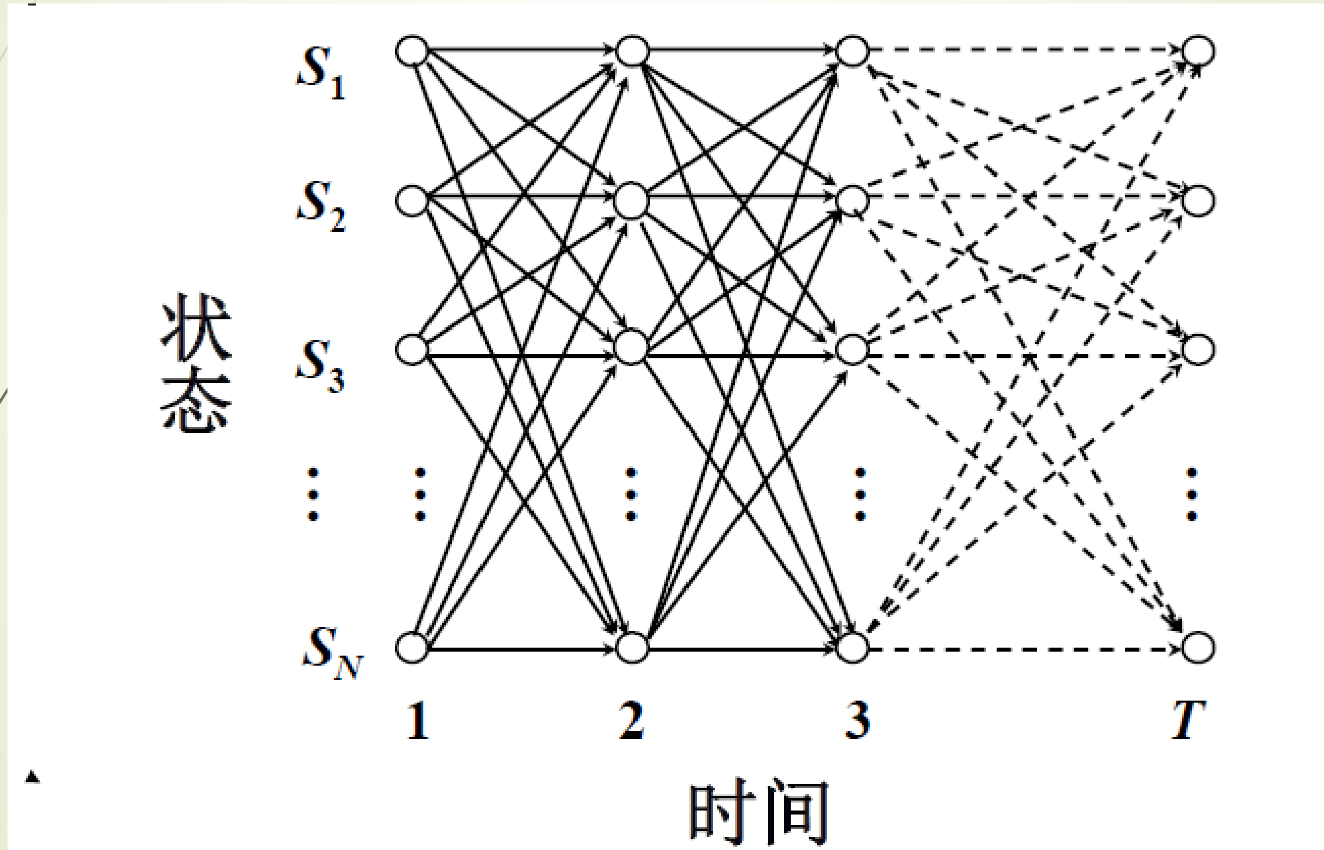
- 因此：$\gamma_t(i) = \frac{\alpha_t(i) \times \beta_t(i)}{\sum_{i=1}^{N} \alpha_t(i) \times \beta_t(i)}$

- t时刻的最优状态为：$\hat{q}_t = \arg\max_{1 \le i \le N} (\gamma_t(i))$

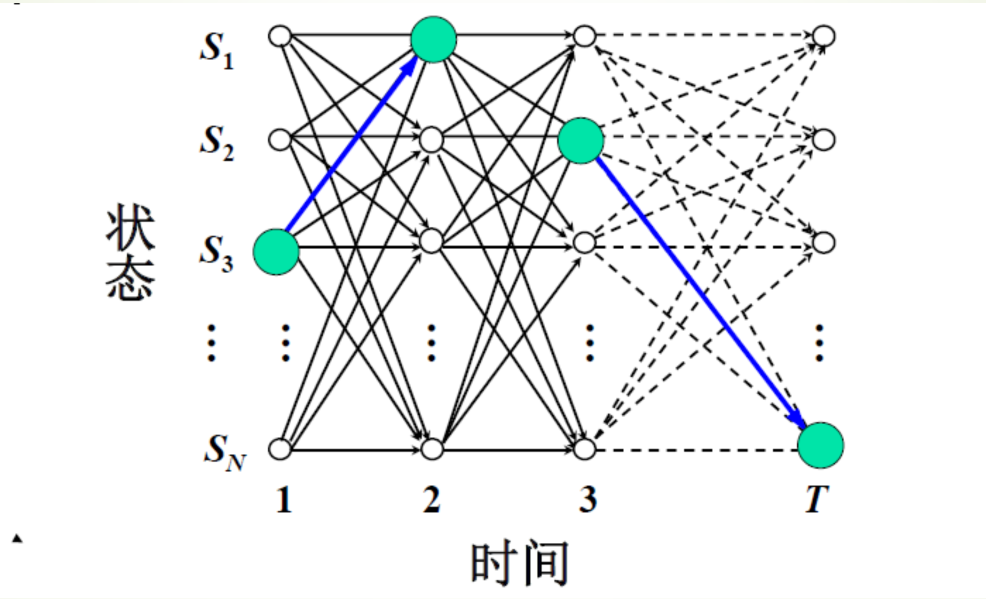
隐马尔可夫模型：维特比算法

- 存在问题：
- 每一个状态单独最优不一定整体的状态序列最优，可能两个最优的状态 $\hat{q}_t$ 和 $\hat{q}_{t+1}$ 之间的转移概率为0.

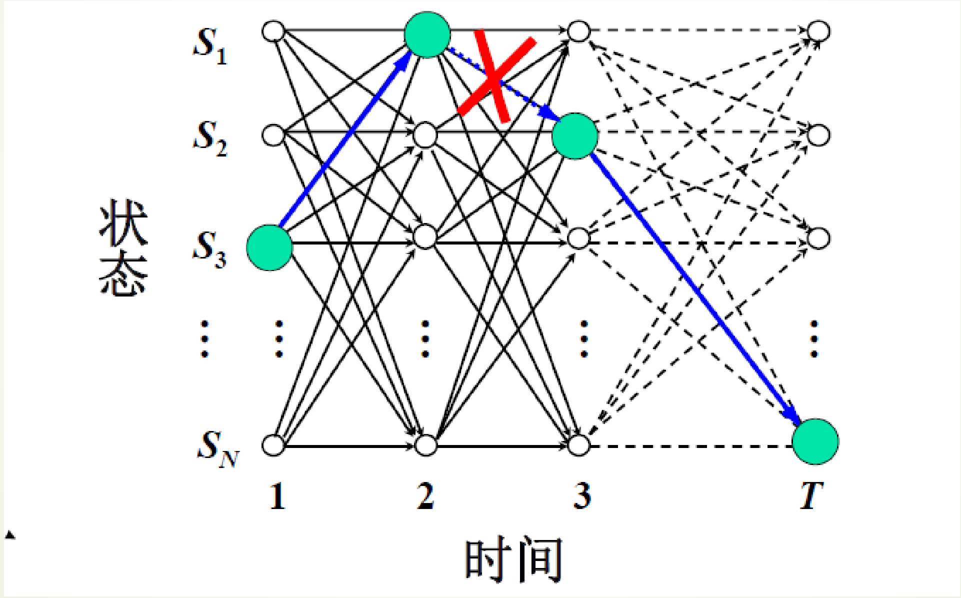
隐马尔可夫模型：维特比算法



隐马尔可夫模型：维特比算法



隐马尔可夫模型：维特比算法



隐马尔可夫模型：维特比算法

- 对于最优的另一种解释：在给定模型 μ 和观察序列O的条件下，使得$P(Q|O,\mu)$最大。
- $Q' = argmax_Q P(Q|O,\mu)$

- 维特比算法运用动态规划的搜索算法求解最优状态序列。
- 定义一个维特比变量。
- 维特比变量$\delta_t(i)$是在时间t时，HMM沿着某一条路径到达状态s_i，并输出观察序列$O_1 O_2 \dots O_t$的最大概率。

隐马尔可夫模型：维特比算法

- $\delta_t(i) = max_{q_1,q_2 \dots q_{t-1}} P(q_1, q_2 \dots q_t = s_i, O_1 O_2 \dots O_t | \mu)$
- 与前向变量类似，$\delta_t(i)$有如下递归关系：
- $\delta_{t+1}(i) = max_j [\delta_t(j) \cdot a_{ji}] \cdot b_i(O_{t+1})$

隐马尔可夫模型：维特比算法

步1 初始化：

$$\delta_1(i) = \pi_i b_i(O_1), \quad 1 \leqslant i \leqslant N$$

$$\psi_1(i) = 0$$

步2 归纳计算：

$$\delta_t(j) = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} [\delta_{t-1}(i) \cdot a_{ij}] \cdot b_j(O_t), \quad 2 \leqslant t \leqslant T; 1 \leqslant j \leqslant N$$

记忆回退路径：

$$\psi_t(j) = \operatorname*{argmax}_{1 \leqslant i \leqslant N} [\delta_{t-1}(i) \cdot a_{ij}] \cdot b_j(O_t), \quad 2 \leqslant t \leqslant T; 1 \leqslant i \leqslant N$$

步3 终结：

$$\hat{Q}_T = \operatorname*{argmax}_{1 \leqslant i \leqslant N} [\delta_T(i)]$$

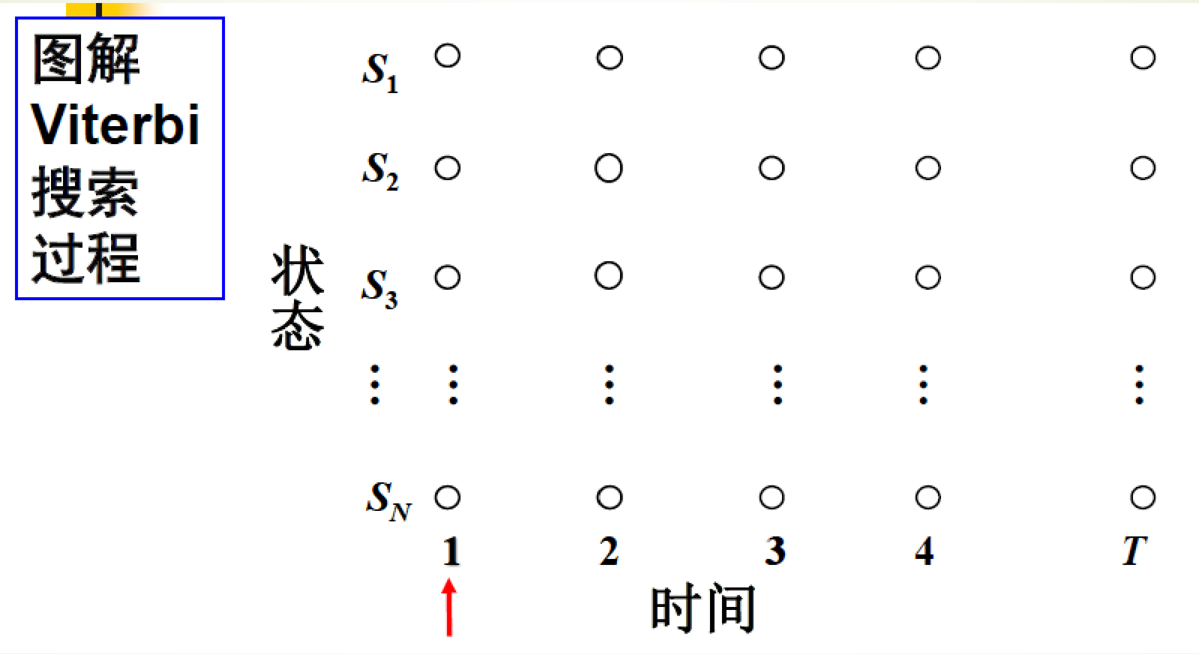
$$\hat{P}(\hat{Q}_T) = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} [\delta_T(i)]$$

步4 路径（状态序列）回溯：

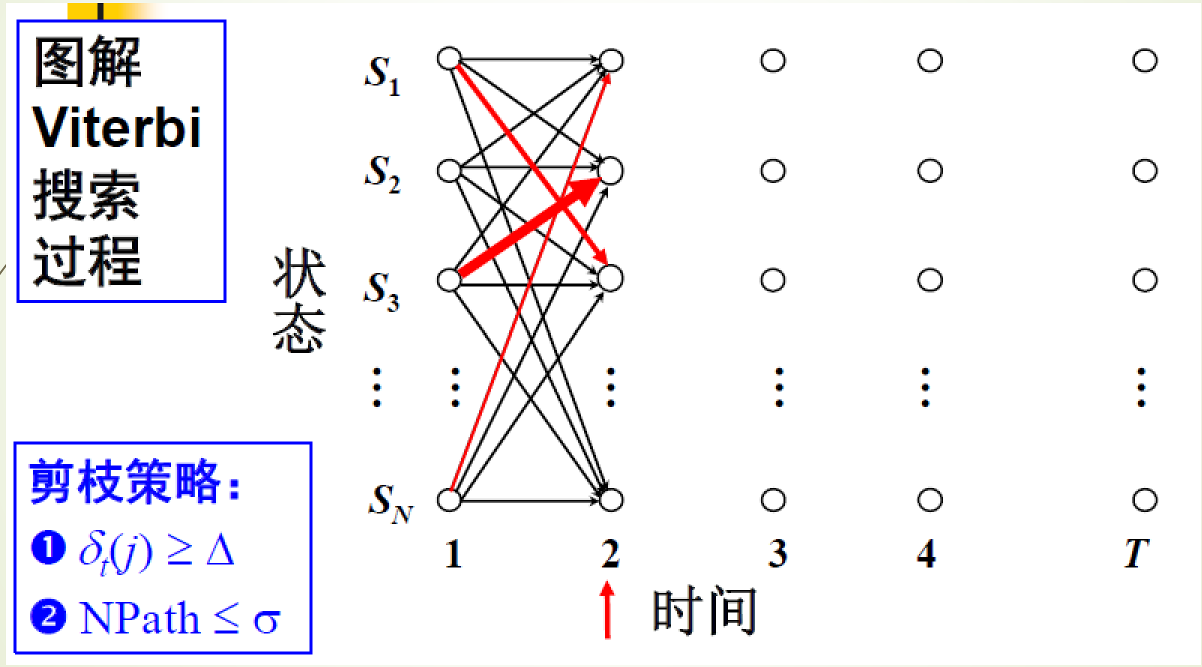
$$\hat{q}_t = \psi_{t+1}(\hat{q}_{t+1}), \quad t = T-1, T-2, \cdots, 1$$

- 时间复杂度为$O(N^2T)$

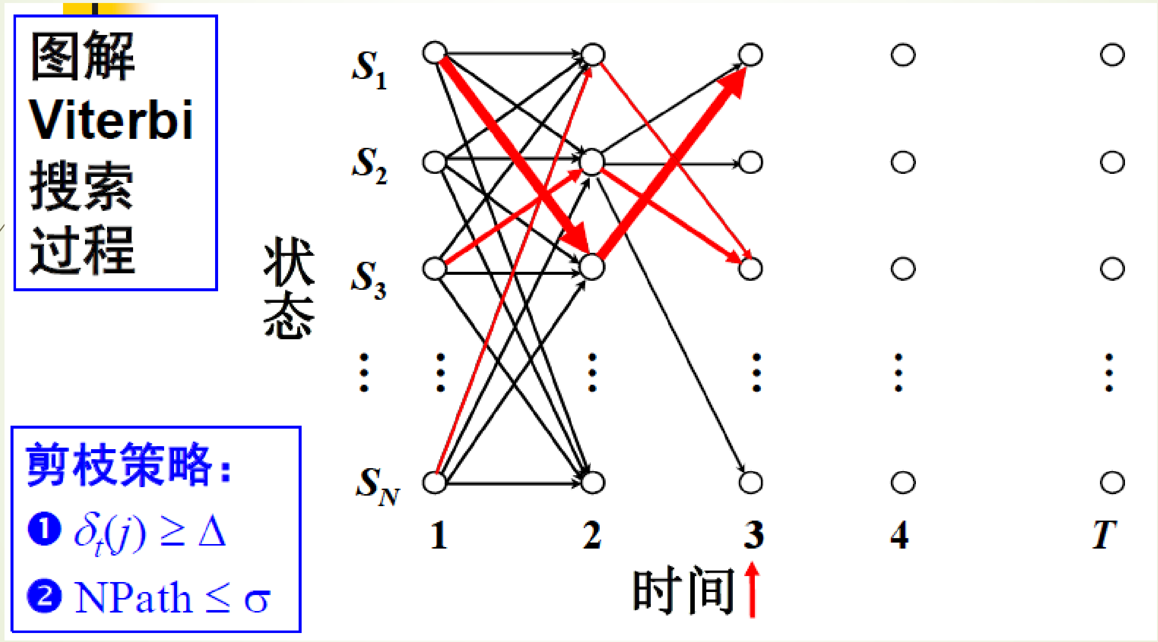
隐马尔可夫模型：维特比算法



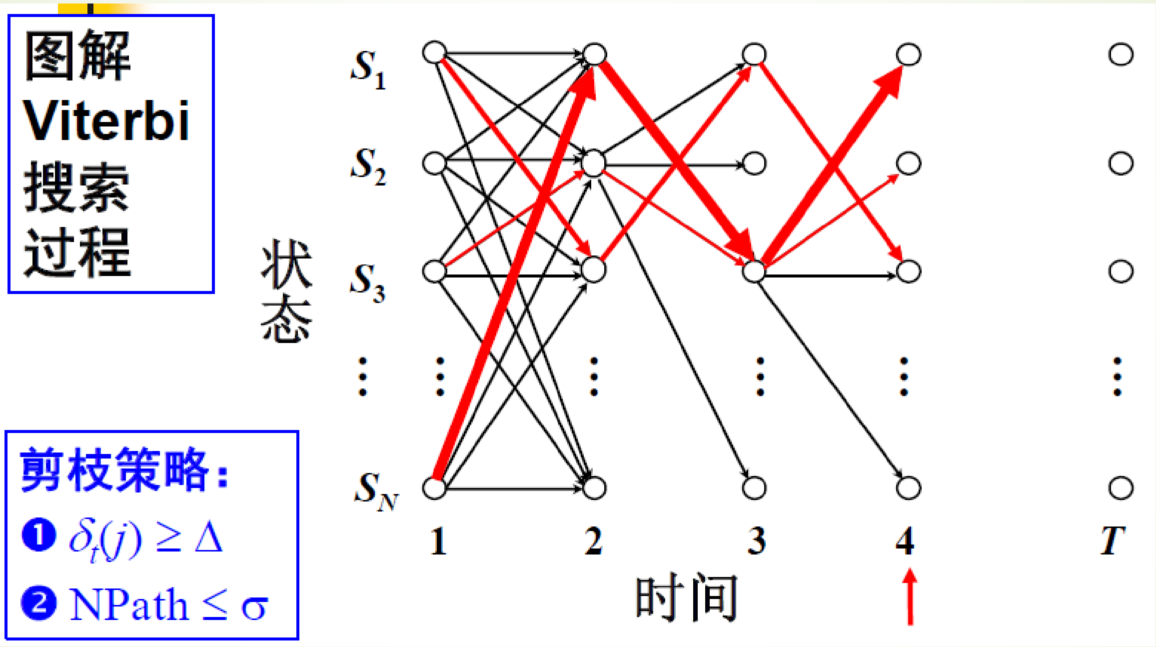
隐马尔可夫模型：维特比算法



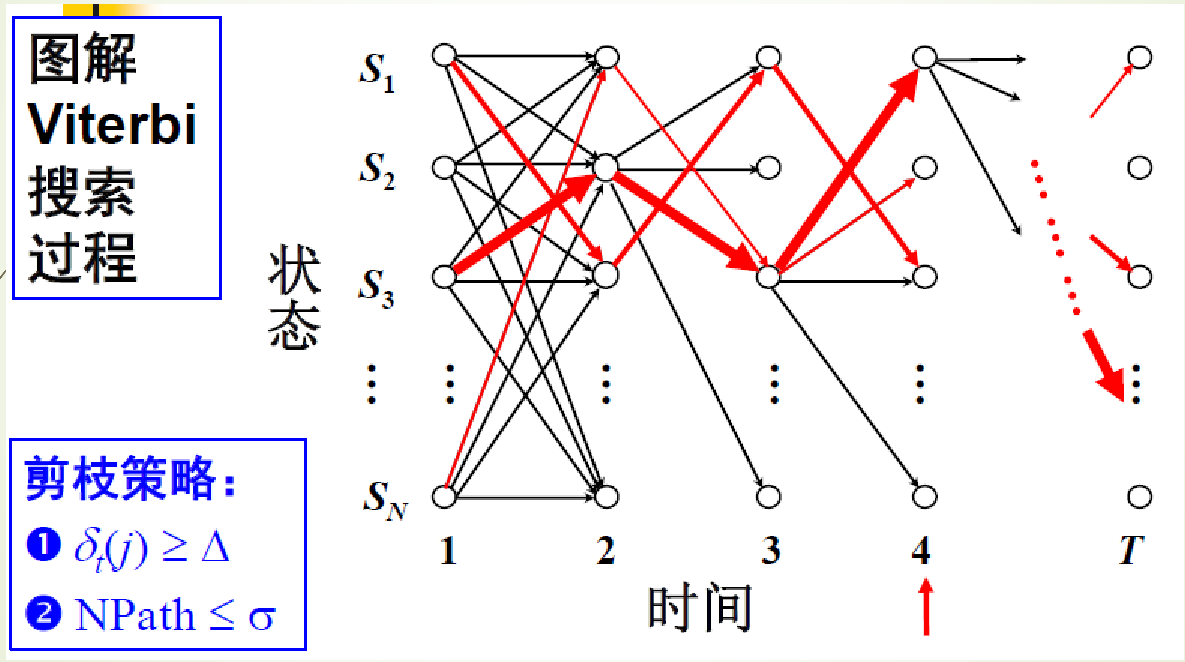
隐马尔可夫模型：维特比算法



隐马尔可夫模型：维特比算法



隐马尔可夫模型：维特比算法



隐马尔可夫模型：参数估计

- 参数估计是HMM面临的第三个问题，给定观察序列

$O = O_1 O_2 \ldots O_T$，如何调节模型$\mu = (A, B, \pi)$的参数，使得$P(O|\mu)$最大。

$$argmax_{\mu} P(O_{training}|\mu)$$

- 模型的参数是指构成μ的$\pi_i, a_{ij}, b_j(k)$。

隐马尔可夫模型：参数估计

- 如果产生观察序列O的状态$Q = q_1 q_2 \dots q_T$已知，可以用最大似然估计来计算μ的参数：
- $\pi'_i = \delta(q_1, S_i)$
- $a'_{ij} = \dfrac{Q\text{中从状态}q_i\text{转移到}q_j\text{的次数}}{Q\text{中所有从状态}q_i\text{转移到另一状态（包括}q_j\text{自身）的总数}} = \dfrac{\sum_{t=1}^{T-1} \delta(q_t, S_i) \times \delta(q_{t+1}, S_j)}{\sum_{t=1}^{T-1} \delta(q_t, S_i)}$
- 其中，$\delta(x, y)$为克洛耐克函数，当x=y时，$\delta(x, y)$=1，否则$\delta(x, y)$=0

隐马尔可夫模型：参数估计

- 类似的
- $b_j'(k) = \frac{\text{Q中从状态}q_j\text{输出符号}v_k\text{的次数}}{\text{Q到达}q_j\text{的总次数}}$

$$= \frac{\sum_{t=1}^{T} \delta(q_t, S_j) \times \delta(O_t, v_k)}{\sum_{t=1}^{T} \delta(q_t, S_j)}$$

- 其中，v_k是模型输出符号集中的第k个符号。

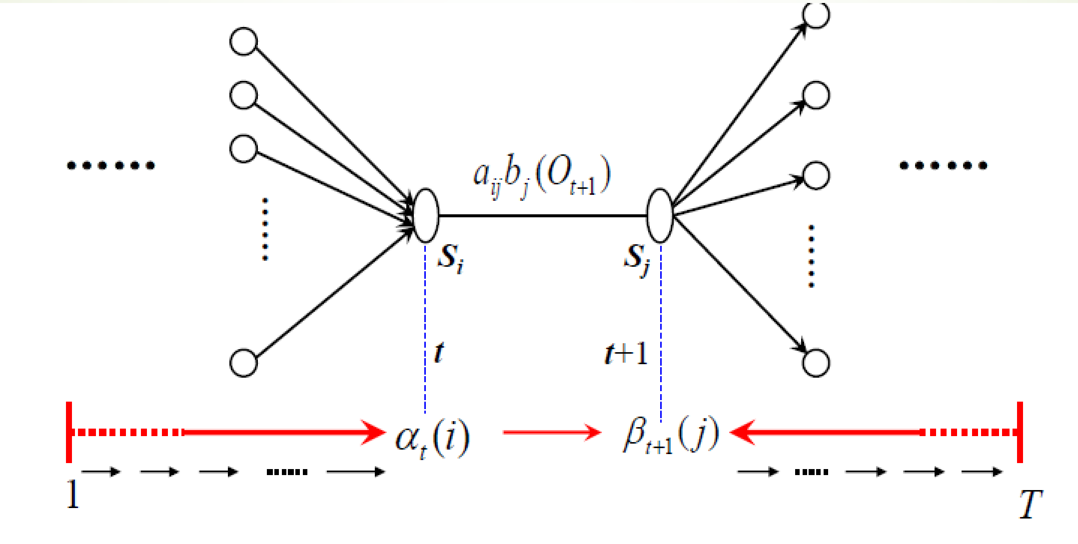
隐马尔可夫模型：参数估计

- 期望值最大化算法（EM）
- 初始化时随机的给模型的参数赋值，遵循限制规则，例如：从某一状态出发的转移概率总和为1，得到模型μ_0，然后可以从μ_0得到从某一状态转移到另一状态的期望次数，然后以期望次数代替公式中的次数，得到模型参数的新估计，由此得到新的模型μ_1，从μ_1又可以得到模型中隐变量的期望值，由此重新估计模型参数。循环这个过程，参数收敛于最大似然估计。

隐马尔可夫模型：参数估计

- 给定模型μ和观察序列$O = O_1 O_2 \dots O_T$，在时间t位于状态S_i，时间t+1位于状态S_j的概率：
- $$\xi_t(i,j) = p\left(q_t = S_i, q_{t+1} = S_j \middle| O, \mu\right)$$
$$= \frac{p(q_t = S_i, q_{t+1} = S_j, O|\mu)}{p(O|\mu)}$$
$$= \frac{\alpha_t(i) \times a_{ij} b_j(O_{t+1}) \times \beta_{t+1}(j)}{p(O|\mu)}$$
$$= \frac{\alpha_t(i) \times a_{ij} b_j(O_{t+1}) \times \beta_{t+1}(j)}{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_t(i) \times a_{ij} b_j(O_{t+1}) \times \beta_{t+1}(j)}$$

隐马尔可夫模型：参数估计



隐马尔可夫模型：参数估计

- 因此，给定模型μ和观察序列$O = O_1 O_2 \dots O_T$，在时间t位于状态S_j的概率为：

$$\gamma_t(i) = \sum_{j=1}^{N} \xi_t(i,j)$$

- 因此，模型μ的参数可由下面的公式重新估计：

1. q_1为S_i的概率：

$$\pi_i = \gamma_1(i)$$

隐马尔可夫模型：参数估计

2.

$$a'_{ij} = \frac{Q\text{中从状态}q_i\text{转移到}q_j\text{的期望次数}}{Q\text{中所有从状态}q_i\text{转移到另一状态（包括}q_j\text{自身）的期望总数}}$$

$$= \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \xi_t(i,j)}{\sum_{t=1}^{T-1} \gamma_t(i)}$$

隐马尔可夫模型：参数估计

$$3.\quad b_j'(k) = \frac{Q\text{中从状态}q_j\text{输出符号}v_k\text{的期望次数}}{Q\text{到达}q_j\text{的期望次数}}$$

$$= \frac{\sum_{t=1}^{T} \gamma_t(j) \times \delta(O_t, v_k)}{\sum_{t=1}^{T} \gamma_t(j)}$$

隐马尔可夫模型：前向后向算法

步1　初始化：随机地给参数π_i，a_{ij}，b_j（k）赋值，使其满足如下约束：

$$\sum_{i=1}^{N} \pi_i = 1$$

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} = 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant N$$

$$\sum_{k=1}^{M} b_j(k) = 1, \quad 1 \leqslant j \leqslant N$$

由此得到模型μ_0。令i=0，执行下面的EM估计。

步2　EM计算：

E-步骤： 由模型μ_i根据式（6-24）和式（6-25）计算期望值ξ_t（i, j）和γ_t（i）；

M-步骤： 用E-步骤得到的期望值，根据式（6-26）、（6-27）和（6-28）重新估计参数π_i，a_{ij}，b_j（k）的值，得到模型μ_{i+1}。

步3　循环计算：

令i=i+1。重复执行EM计算，直到π_i，a_{ij}，b_j（k）收敛。

Q & A!

EM算法：还会回来的