

第7章习题

7.1 现有两台计算机和 n 个计算任务,第 i 个任务在两台机器上的运行时间为 $A[i]$ 和 $B[i]$,此外还给出了所有计算任务的信息通讯代价 (i,j,c_{ij}) ,其含义是:如果第 i 个任务和第 j 个任务分别运行于两台机器则这两个任务间信息通讯时间为 c_{ij} 。试设计一个任务调度算法,使得所有任务被执行时的总时间最小。

7.2 有向图 $G=(V,E)$ 的路径覆盖是一个由路径构成的集合 $\{p_1, \dots, p_k\}$,其中路径 p_i 和 p_j ($i \neq j$) 无公共顶点;路径覆盖中路径的条数 k 定义为路径覆盖的代价。试设计算法求解如下问题。

输入: 无环有向图 $G=(V,E)$

输出: G 的最小路径覆盖

7.3 一个社团的成员正在安排暑假的度假计划,有旅行项目 t_1, \dots, t_n 可供选择,但参加 t_i 的人数以 c_i 为限。每人有若干个喜好的项目但是至多只能选择一个。推导出一个充要条件,使得(限制条件下)能够为各个成员安排其喜欢的项目。

7.4 设计一个算法求解下面的相异代表系问题或断言该问题无解。

输入: 非空集合 S_1, S_2, \dots, S_n

输出: 输出元素 x_1, x_2, \dots, x_n 使得 $x_i \in S_i$ 对 $1 \leq i \leq n$ 成立。

7.5 公交车驾驶员问题 有 n 名公交驾驶员; n 条上午路线,其规定的行车时间分别是 x_1, \dots, x_n ; n 条下午路线,其规定的行车时间分别是 y_1, \dots, y_n 。如果一名司机在上午路线和下午路线中的行车时间总和超过 t ,则可以获得加班费。目标是为每名司机分配一条上午路线和一条下午路线,使得总加班费最小。证明:对任意司机 i ,为其分配第 i 长的上午路线和第 i 短的下午路线,将产生一个最优解。(提示:不要使用匈牙利算法;考虑矩阵的特殊结构)

7.6 计算机系给该系的 n 名学生开设 k 个讨论班,各讨论班的主题各不相同。每名学生参加一个讨论班;第 i 个讨论班可容纳 k_i 名学生且 $\sum k_i = n$ 。每名学生提交了一个清单,将 k 个讨论班依其偏好程度排序。将学生分配到各讨论班,如果不存在两个学生使得交换他们的讨论班之后各自均找到了更喜欢的讨论班,则称该分配方案是稳定的。描述怎样用加权二分匹配来找出一个稳定的分配方案。

7.7 (1)一个农业公司有 n 个农场和 n 个加工厂,各农场生产的玉米均达到了一个加工厂的加工能力。将农场 i 生长的玉米送到加工厂 j 加工获得的利润是 w_{ij} 。试设计一个算法建立农场和加工厂的一一对应关系使得总利润最大。

(2)政府宣布玉米生产过量,并补贴农业公司使其不再生产玉米。如果农业公司不再使用农场 i ,则政府给予补贴 u_i ;如果农业公司不再使用加工厂 j ,则政府给予补贴 v_j 。如果 $u_i + v_j < w_{ij}$,则农业公司使用边 $x_i y_j$ 所获得的收益比政府提供的补贴总量高。为使得所有生产停止,政府支付的补贴必须对所有 i, j 满足 $u_i + v_j > w_{ij}$ 。

同时,试设计一个算法输出一个补贴方案,使得 $\sum u_i + \sum v_j$ 达到最小值。

7.8 尝试如下改进 Ford-Fulkerson 算法。

(1)修改 Dijkstra 算法,使其在 G_f 中找到的增广路径是公差最大的增广路径,分析算法的复杂性;

(2)将 Ford-Fulkerson 算法中的增广路径替换成公差最大的增广路径,分析算法的复杂性。