哈工大 2013 年秋季学期概率论与数理统计期末考试题

一、填空题（每小题 3 分，共 5 小题，满分 15 分）

1．设随机事件 $A,\ B,\ C$ 相互独立，且 $P(A)=0.5,\ P(B)=0.25,\ P(C)=0.2$，则随机事件 $A,\ B,\ C$ 至少有一个不发生的概率为______________ .

2．设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$，则随机变量 $Y=|X|$ 的概率密度

$f_Y(y)=$

_____________________________ .

3．设 $X,\ Y$ 是随机变量，$EX=2,\ DX=25,\ EY=1,\ DY=16,\ \rho_{XY}=0.4$ 则

$$E(2X-3Y+4)^2=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

4．设某种溶液中杂质的浓度服从 $N(\mu,\sigma^2)$，今取样 4 次，测得平均值 $\bar{x}=0.834$，样本标准差 $s=0.0003$，则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为______________________.

5．设随机变量 $X,\ Y$ 相互独立，且均服从参数为 8 的指数分布，则

$$P\{\min(X,Y)\le 1\}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ .$$

注：可选用的部分数值：$t_{0.05}(4)=2.1318,\ t_{0.025}(3)=3.1824,\ t_{0.025}(4)=2.7764,$

$$\Phi(1.96)=0.975,\ \Phi(1.645)=0.95.$$

二、选择题（每小题 3 分，共 5 小题，满分 15 分）

1．设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $P(X=1)=P(Y=1)=p,\ P(X=0)=P(Y=0)=1-p$，$(0<p<1)$，令 $Z=\begin{cases}1, & X+Y\text{为偶数}\\ 0, & X+Y\text{为奇数}\end{cases}$，要使 X 与 Z 独立，则 p 的值应等于

（A）$1/2$.　　（B）$1/4$.　　（C）$1/3$.　　（D）$2/3$.　　【　　】

2．下列函数可作为概率密度函数的是

（A）$f(x)=\begin{cases}2(1-|x|), & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$.　　（B）$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$ $(\sigma>0)$.

（C）$f(x)=\begin{cases}x, & -1<x<0\\ 3x/4, & 0\le x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.　　（D）$f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ $(\lambda>0)$.　　【　　】

3．设 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，其中 $\bar{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，S^{*2} 为样本的二阶中心矩，则

（A）$\dfrac{(n-1)S^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.　　（B）$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S^*}\sqrt{n-1} \sim t(n-1)$.

（C）$\dfrac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.　　（D）$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n-1} \sim t(n-1)$.　　【　　】

4. 设随机变量 $X \sim U[1,\ 7]$ ，$Y \sim B(8,\ 0.5)$，且 $\rho_{XY} = 1/\sqrt{6}$，则根据切比雪夫不等式有

$$P(X-3<Y<X+3) \geq \_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

（A）1/4.　　（B）1/6.　　（C）2/3.　　（D）5/6.　　【　　】

5. 设 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ 是来自总体 $N(0,\ 1)$ 的简单随机样本，则下列统计量的分布中不正确的是

（A）$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$.　　（B）$\sqrt{n-1}X_n \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} X_i^2} \sim t(n-1)$.

（C）$\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(0,\ 1)$.　　（D）$(\dfrac{n}{2}-1)\sum_{i=1}^{2} X_i^2 \Big/ \sum_{i=3}^{n} X_i^2 \sim F(2,\ n-2)$.　　【　　】

三、（9 分）今从装有一等品 2 件，二等品 4 件的甲箱子中任取 2 件产品，然后将 2 件产品放入含有 3 件一等品 2 件二等品的乙箱中，再从乙箱中任取 1 件产品，求：

（1）从乙箱中取到 1 件一等品的概率；

（2）已知从乙箱中取出 1 件一等品的条件下，从甲箱中取出 1 件一等品和 1 件二等品的概率。

四、（9 分）设随机变量 X 和 Y 的联合分布在以点 $(0,\ 1)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$ 为顶点的三角形区域内服从均匀分布。求：（1）随机变量 $Z=2X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$；（2）方差 DZ .

五、（9 分）在区间 $[0,\ 1]$ 上任取 n 个点 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$，记 $X_{(1)} = \min\{X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n\}$，$X_{(n)} = \max\{X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n\}$，$X = X_{(n)} - X_{(1)}$. 求 EX .

六、（9 分）设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta^2 x^{-3} \mathrm{e}^{-\theta/x}, & x>0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数，$X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本。求：

（1）θ 的矩估计量；（2）θ 的最大似然估计量。

七、（4 分）在 x 轴上有一个质点可以在整个数轴的整数点上游动，记 X_n 表示时刻 n 时质点的位置。该质点移动的规则是：每隔单位时间，分别以概率 p 及概率 $q=1-p\ (0<p<1)$ 向正的及负的方向移动一个单位。假设质点在时刻 $t=0$ 时，位于 a，即 $X_0 = a\ (a>0)$，而在 0 和 $a+b\ (b>0)$ 处各有一个吸收壁（即质点移动到 0 和 $a+b$ 时，将不能再移动）。求质点的初始位置为 a 而最终在 $a+b$ 被吸收的概率 u_a .

（提示：$u_n = pu_{n+1} + qu_{n-1},\ n=1,2,\cdots,a+b-1.\ \ u_0=0,\ \ u_{a+b}=1$）

哈工大 2013 年秋季学期概率统计期末考试题参考答案

一、填空题：（15 分）

1．$\dfrac{39}{40}$　　2．$f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ 2\varphi(y), & y>0\end{cases}=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-y^2/2}, & y>0\end{cases}$　　3．148

．4．$(0.8335,\ 0.8345)$．　5．$1-\mathrm{e}^{-16}$

二、选择题：（15 分）

1A　2D　3B　4C　5C

三、**解：**（1）设 A= ‘从乙箱中取到 1 件产品是一等品’

B_i =‘从甲箱中恰好取到 i 件一等品’　　$i=0,1,2$．

$$P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(B_i)P(A|B_i)=\sum_{i=0}^{2}\frac{C_2^iC_4^{2-i}}{C_6^2}\times\frac{3+i}{7}$$

$$=\frac{C_2^0C_4^2}{C_6^2}\times\frac{3}{7}+\frac{C_2^1C_4^1}{C_6^2}\times\frac{4}{7}+\frac{C_2^2C_4^0}{C_6^2}\times\frac{5}{7}=\frac{11}{21}$$　　5 分

（2）$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{\frac{C_2^1C_4^1}{C_6^2}\times\frac{4}{7}}{\frac{11}{21}}=\frac{21}{11}\times\frac{2\times4}{\frac{6\times5}{2\times1}}\times\frac{4}{7}=\frac{32}{55}$$

4 分

四、**解：**（1）三角形区域 $G=\{(x,y):0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ x+y\ge 1\}$ 随机变量 X 和 Y 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2 & 若(x,y)\in G\\ 0 & 若(x,y)\overline{\in} G\end{cases}$$

令 $\mathrm{Z}=2\mathrm{X}+\mathrm{Y}$ 的概率密度函数为 $f_Z(z)$

利用和函数的概率密度公式有：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,z-2x)dx$

使 $f(x,z-2x)$ 不为零的区域：$\begin{cases}x+z-2x>1,\\ x<1,\\ z-2x<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z>x+1,\\ x<1,\\ z<2x+1\end{cases}$

当 $1<z<2$ 时，$f_Z(z)=\int_{\frac{z-1}{2}}^{z-1}2dx=2(z-1-(\dfrac{z-1}{2}))=z-1;$

当$2 \le z < 3$时， $f_Z(z)=\int_{\frac{z-1}{2}}^{1} 2dx = 2(1-\frac{z-1}{2}) = 3-z;$

其它， $f_Z(z)=0$ 4 分

（2）以 $f_1(x)$ 表示 X 的概率密度，则当 $x \le 0$ 或 $x \ge 1$ 时， $f_1(x)=0$，当 $0<x<1$ 时，有

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{1-x}^{1} 2dy = 2x$$

$\therefore EX = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}$ $EX^2 = \int_0^1 2x^3 dx = \frac{1}{2}$

$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$

同理可得 $EY = \frac{2}{3}$， $DY = \frac{1}{18}$，

$$EXY = \iint_G 2xydxdy = 2\int_0^1 xdx \int_{1-x}^{1} ydy = \frac{5}{12}$$

$$\mathrm{cov}(X,Y) = EXY - EX \cdot EY = \frac{5}{12} - \frac{4}{9} = -\frac{1}{36}$$

于是 $D(2X+Y) = 4DX + DY + 4COV(X,Y) = 4\times\frac{1}{18} + \frac{1}{18} + 4\times(-\frac{1}{36}) = \frac{1}{6}$ 5 分

五、**解**：设 $X_1,\cdots,X_n$ 为取的点，则它们相互独立同分布 $U(0,1)$，

$X = \max\{X_1,\cdots,X_n\} - \min\{X_1,\cdots,X_n\}$

$F_{\max}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^n, & 0<x<1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$ $F_{\min}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1-(1-x)^n, & 0<x<1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$

$f_{\max}(x) = \begin{cases} nx^{n-1}, & 0<x<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$ $f_{\min}(x) = \begin{cases} n(1-x)^{n-1}, & 0<x<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

$E\max = \int_0^1 nx^n dx = \frac{n}{n+1}$ $E\min = \int_0^1 n(1-x)^{n-1} x dx = \frac{1}{n+1}$ 8 分

$EX = E\max - E\min = \frac{n-1}{n+1}$ 1 分

六、解：（I）矩估计： $EX=\mu_1=\int_0^{\infty}\frac{\theta^2}{x^3}xe^{-\frac{\theta}{x}}dx=\int_0^{\infty}\theta d(e^{-\frac{\theta}{x}})=\theta e^{-\frac{\theta}{x}}\Big|_0^{\infty}=\theta$

所以θ的矩估计为： $\hat{\theta}=\bar{x}$ 4 分

(2) 极大似然估计：

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\theta^2}{x_i^3}e^{-\frac{\theta}{x_i}}=\frac{\theta^{2n}}{(x_1x_2\cdots x_n)^n}e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{\theta}{x_i}}$$

$$LnL=2nLn\theta-nLn(x_1x_2\cdots x_n)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\theta}{x_i}$$

$$\frac{\partial LnL}{\partial\theta}=0=2n\times\frac{1}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$$

取对-1 数： $\therefore\theta=\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$

θ的MLE为：$\hat{\theta}=\frac{2\mathrm{n}}{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\frac{1}{\mathrm{x_i}}}$

5 分

七、解：如某时刻质点位于$x=n$，这里 $1\le n\le a+b-1$,则它要被$x=a+b$吸收有两种方式来实现：一种是接下去一次移动是向右的而最终被$x=a+b$吸收；另一种是接下去一次移动是向左的而最终被$x=a+b$吸收，所以利用全概率公式有：

$q_n=pq_{n+1}+qq_{n-1},n=1,2,\cdots,a+b-1$

上式化为：

$$(p+q)q_n=pq_{n+1}+qq_{n-1},n=1,2,\cdots,a+b-1$$
$$\therefore p(q_{n+1}-q_n)=q(q_n-q_{n-1})$$
$$\therefore q_{n+1}-q_n=c_n=\frac{q}{p}(q_n-q_{n-1})=(\frac{q}{p})^2(q_{n-1}-q_{n-2})$$
$$\cdots\qquad=(\frac{q}{p})^n(q_1-q_0)\hat{=}r^nc_0$$

当$r=1$时， $p=q=\frac{1}{2}$，亦称为对称的随机游动的场合，此时$c_n=c_{n-1}$，因此，

$$q_{n+1}-q_n=q_n-q_{n-1}=\cdots=q_1-q_0\stackrel{\wedge}{=}d$$

则 $q_n=q_0+nd$, 而 $q_0=0, q_{a+b}=1, \therefore q_n=\dfrac{n}{a+b}$, 特别地， $q_a=\dfrac{a}{a+b}$

当 $r\neq 1$ 时， $p\neq q$ 的场合

这时 $c_n=rc_{n-1}=\cdots=r^n c_0$, 从而， $q_n-q_0=\sum_{k=0}^{n-1}(q_{k+1}-q_k)=\sum_{k=0}^{n-1}c_k=\sum_{k=0}^{n-1}r^k c_0=\dfrac{1-r^n}{1-r}c_0$ 由于

$$q_0=0, q_{a+b}=1$$

所以 $\dfrac{1-r^{a+b}}{1-r}=1, c_0=\dfrac{1-r}{1-r^{a+b}}$，因此 $q_n=\dfrac{1-r^n}{1-r^{a+b}}$

特别地， $q_a=\dfrac{1-r^a}{1-r^{a+b}}=\dfrac{1-(\frac{q}{p})^a}{1-(\frac{q}{p})^{a+b}}$ 4 分

若以 p_n 表示自质点 n 出发而在 0 点被吸收的概率，同样可得到如上结论。