1．设$a>0$，（1）利用 Newton 迭代建立求$\sqrt{a}$的迭代公式;（2）讨论所建立公式的收敛性；(3)并求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-\sqrt{a}}{(x_n-\sqrt{a})^2}$；(2)取初值$x_0=2$计算根$\sqrt{5}$的近似值，要求迭代 3 次（结果保留 5 位小数）。

解：（1）设$f(x)=x^2-a$，则$\sqrt{a}$是$f(x)=0$的单实根

Newton 迭代：

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n^2-a}{2x_n^2}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})$$

（2）迭代函数$\varphi(x)=\dfrac{1}{2}(x+\dfrac{a}{x})$, 则$\varphi'(x)=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{a}{x^2})$，$\varphi''(x)=\dfrac{a}{x^3}$

$$\varphi(\sqrt{a})=\sqrt{a}\,,\varphi'(\sqrt{a})=0,\varphi''(\sqrt{a})=\frac{1}{\sqrt{a}}\neq 0$$

$\left|\varphi'(\sqrt{a})\right|=0<1,\varphi''(\sqrt{a})=\dfrac{1}{\sqrt{a}}\neq 0$，迭代公式平方收敛于$\sqrt{a}$；

（3）$$\frac{x_{n+1}-\sqrt{a}}{(x_n-\sqrt{a})^2}=\frac{\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})-\sqrt{a}}{(x_n-\sqrt{a})^2}=\frac{\frac{1}{2x_n}(x_n-\sqrt{a})^2}{(x_n-\sqrt{a})^2}=\frac{1}{2x_n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-\sqrt{a}}{(x_n-\sqrt{a})^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2x_n}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

（4）$$x_1=\frac{1}{2}(x_0+\frac{5}{x_0})=\frac{1}{2}(2+\frac{5}{2})=2.25$$

$$x_2=\frac{1}{2}(x_1+\frac{5}{x_1})=\frac{1}{2}(2.25+\frac{5}{2.25})=2.23611$$

$$x_3=\frac{1}{2}(x_2+\frac{5}{x_2})=\frac{1}{2}(2.23611+\frac{5}{2.23611})=2.23607$$

2．设$l_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 以1 , 2 ,$\cdots$, n 为节点的 Lagrange 插值基函数，

证明：
$$\sum_{i=1}^{n} l_i(0)\cdot i^k = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k=1,\cdots,n-1 \\ (-1)^{n-1}n! & k=n \end{cases}$$

证明：对$k=0,1,2,\cdots,n$, 令 $f(x)=x^k$

则函数$f(x)$的n次 Lagrange 插值多项式为

$$L_{n-1}(x)=\sum_{i=1}^{n} l_i(x)\cdot i^k$$

因$k\le n-1$时 $f^{(n)}(x)=0$, 于是插值余项为

$$f(x)-L_{n-1}(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\omega_n(x)=0$$

得到 $f(x)-L_{n-1}(x)=0$， $\sum_{i=1}^{n} l_i(x)\cdot i^k = x^k = \begin{cases} 1 & k=0 \\ x^k & k\le n-1 \end{cases}$

故 $$\sum_{i=1}^{n} l_i(0)\cdot i^k = x^k = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k\le n-1 \end{cases}$$

因$k=n$时 $f^{(n)}(x)=n!$, 于是插值余项为

$$f(x)-L_{n-1}(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\omega_n(x)=\omega_n(x)$$

得到 $L_{n-1}(x)=x^n-\omega_n(x)$ ，$\sum_{i=1}^{n} l_i(x)\cdot i^k = x^k-\omega_n(x)$

故 $$\sum_{i=1}^{n} l_i(0)\cdot i^k = (-1)^{n-1}n!$$

3．设常数$a\neq 0$ ，求出使得解方程组

$$\begin{pmatrix}10 & a & \\ 10 & 10 & 10\\ & a & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\ 20\\ 10\end{pmatrix}$$

的 Jacobi 和 Gauss_Seidel 迭代法收敛的充分必要条件时a的取值范围。

解： Jacobi 迭代：$x^{(k+1)}=B_J x^{(k)}+g$

$$B_J=-\begin{pmatrix}10 & & \\ & 10 & \\ & & 5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & -a & 0\\ -10 & 0 & -10\\ 0 & -a & 0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0 & \frac{a}{10} & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & \frac{a}{5} & 0\end{pmatrix}\qquad g=\begin{pmatrix}10 & & \\ & 10 & \\ & & 5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$$

迭代矩阵B_J的特征方程：

$$\left|\lambda E-B_J\right|=\left|\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \frac{a}{10} & \\ 1 & 0 & 1\\ 0 & \frac{a}{5} & 0\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}\lambda & \frac{a}{10} & 0\\ 1 & \lambda & 1\\ 0 & \frac{a}{5} & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-\frac{3}{10}a\lambda=0$$

特征根：$\lambda_1=0,\lambda_{2,3}=\pm\frac{\sqrt{3|a|}}{10}$

谱半径：$\rho(B_J)=\frac{\sqrt{3|a|}}{10}<1$ 时 Jacobi 迭代收敛.　　故：$|a|<\frac{10}{3}$

Gauss_Seidel 迭代：$x^{(k+1)}=B_G x^{(k)}+g$

$$B_G=-\begin{pmatrix}10 & & \\ 10 & 10 & \\ & a & 5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 0 & 0 & 10\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0 & \frac{a}{10} & 0\\ 0 & -\frac{a}{10} & 1\\ 0 & \frac{a^2}{50} & -\frac{a}{5}\end{pmatrix}$$

迭代矩阵B_G的特征方程：

$$\left|\lambda E - B_J\right| = \left|\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & \frac{a}{10} & 0 \\ 0 & -\frac{a}{10} & 1 \\ 0 & \frac{a^2}{50} & -\frac{a}{5}\end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix}\lambda & \frac{a}{10} & 0 \\ 0 & \lambda-\frac{a}{10} & 1 \\ 0 & \frac{a^2}{50} & \lambda-\frac{a}{5}\end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - \frac{3}{10}a) = 0$$

特征根：$\lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = \frac{3}{10}a$

谱半径：$\rho(B_J) = \frac{3|a|}{10} < 1$ 时 Gauss_Seidel 迭代收敛

故：$|a| < \frac{10}{3}$

4．用 Doolittle 三角分解法求解方程组 $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ ；

解： Doolittle 三三角分解：

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ \frac{6}{5} & 1 & \\ \frac{4}{5} & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ & -\frac{2}{5} & \frac{8}{5} \\ & & -3 \end{pmatrix}=LU$$

$$L=\begin{pmatrix} 1 & & \\ \frac{6}{5} & 1 & \\ \frac{4}{5} & 4 & 1 \end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ & -\frac{2}{5} & \frac{8}{5} \\ & & -3 \end{pmatrix}$$

$$Ax=b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly=b \\ Ux=y \end{cases}$$

求解 $Ly=b$ 得 $y=\left(6,-\frac{6}{5},3\right)^T$

求解 $Ux=y$ 得 $x=(1,-1,-1)^T$

5．已知一组实验数据如下：

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	0	1	2	1	0

用二次多项式 $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ 拟合这组数据，并求平方误差。

解：　取 $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x, \varphi_2 = x^2$，得法方程：

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

解得：$a_0 = 1.6571, a_1 = 0, a_2 = -0.4286$

最小二乘拟合曲线为：$y = 1.6571 - 0.4286x^2$

平方误差为：$\|\delta\|_2^2 = \sum_{i=1}^{5} [y(x_i) - y_i]^2 = 0.22857$

6．试确定求积公式 $\int_1^3 f(x)dx \approx A_0 f(2-\frac{1}{\sqrt{3}})+A_1 f(2+\frac{1}{\sqrt{3}})$ 的求积系数 A_0, A_1 ，使得其有尽可能高的代数精度，并确定代数精度？并用此公式计算积分 $\int_1^3 \frac{1}{x^2+1}dx$（结果保留 5 位小数）。

解： 令 $f(x)=1,x$ 求积公式准确成立，有：

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 2 \\ A_0(2-\frac{1}{\sqrt{3}})+A_1(2+\frac{1}{\sqrt{3}})=4 \end{cases}$$

得： $A_0 = A_1 = 1$

求积公式： $\int_1^3 f(x)dx \approx f(2-\frac{1}{\sqrt{3}})+f(2+\frac{1}{\sqrt{3}})$

令 $f(x)=x^2, x^3$，则求积公式准确成立的， $f(x)=x^4$ 时求积公式不是准确成立的，

求积公式代数精度为 3，是 Gauss 型的；

$$\int_1^3 \frac{1}{1+x^2}dx \approx \frac{1}{1+(2-\frac{1}{\sqrt{3}})^2}+\frac{1}{1+(2+\frac{1}{\sqrt{3}})^2}$$

$$=\frac{9}{13}$$

$$=0.69231$$

7．用插值法求一个二次多项式 $p_2(x)$，使得它与 $f(x)=\cos x$ 在 $x=0$ 处相切，在

$x=\dfrac{\pi}{2}$处相交，并证明：$\max\limits_{0\le x\le\frac{\pi}{2}}\left|\cos x-p_2(x)\right|\le\dfrac{\pi^3}{324}$

解：即求二次 Hermite 插值 $p_2(x)$，满足：

$$p_2(0)=\cos 0=1\,,\; p_2(\frac{\pi}{2})=\cos\frac{\pi}{2}=0,\, p_2'(0)=\sin 0=0$$

由 $p_2(\dfrac{\pi}{2})=\cos\dfrac{\pi}{2}=0$，设 $p_2(x)=(a+bx)(x-\dfrac{\pi}{2})$

再由 $p_2(0)=\cos 0=1\,,\, p_2'(0)=\sin 0=0$，得：

$$\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}a=1\\ a-\dfrac{\pi}{2}b=0\end{cases}$$

解得：　$a=-\dfrac{2}{\pi},b=-\dfrac{4}{\pi^2}$，

$$p_2(x)=(-\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi^2}x)(x-\frac{\pi}{2})=1-\frac{4}{\pi^2}x^2$$

误差为：

$$\cos x-p_2(x)=\frac{\sin(\xi)}{3!}x^2(x-\frac{\pi}{2}),\quad x\in[0,\frac{\pi}{2}],\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$$

$$\left|\cos x-p_2(x)\right|=\left|\frac{\sin(\xi)}{3!}x^2(x-\frac{\pi}{2})\right|\le\frac{1}{6}\max_{0\le x\le\frac{\pi}{2}}x^2(x-\frac{\pi}{2})$$

令 $g(x)=x^2(x-\dfrac{\pi}{2}),g'(x)=x(3x-\pi)$

得：$x_1=0,x_2=\dfrac{\pi}{2}$，$\max\limits_{0\le x\le\frac{\pi}{2}}x^2(x-\dfrac{\pi}{2})=(\dfrac{\pi}{3})^2(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\pi^3}{54}$

故　$\left|\cos x-p_2(x)\right|\le\dfrac{1}{6}\max\limits_{0\le x\le\frac{\pi}{2}}x^2(x-\dfrac{\pi}{2})\le\dfrac{1}{6}\times\dfrac{\pi^3}{54}=\dfrac{\pi^3}{324}$

8．用共轭梯度方法解方程组：$\begin{pmatrix}3&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

（取初值 $x^{(0)}=(0,0)^T$ ）。

共轭梯度方法: $$\begin{cases} \mathbf{p}_0=\mathbf{r}^{(0)}=\mathbf{b}-A\mathbf{x}^{(0)}, \quad \alpha_k=\dfrac{(\mathbf{r}^{(k)},\mathbf{r}^{(k)})}{(\mathbf{p}_k,A\mathbf{p}_k)} \\ \mathbf{x}^{(k+1)}=\mathbf{x}^{(k)}+\alpha_k\mathbf{p}_k, \quad \mathbf{r}^{(k+1)}=\mathbf{r}^{(k)}-\alpha_k A\mathbf{p}_k \\ \beta_k=\dfrac{(\mathbf{r}^{(k+1)},\mathbf{r}^{(k+1)})}{(\mathbf{r}^{(k)},\mathbf{r}^{(k)})}, \quad \mathbf{p}_{k+1}=\mathbf{r}^{(k+1)}+\beta_k\mathbf{p}_k \end{cases}$$

解： $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$是对称正定阵；

$$\mathbf{p}_0=\mathbf{r}^{(0)}=\mathbf{b}-A\mathbf{x}^{(0)}=(2,0)^T$$

$$\alpha_0=\frac{(\mathbf{r}^{(0)},\mathbf{r}^{(0)})}{(\mathbf{p}_0,A\mathbf{p}_0)}=\frac{1}{3}$$

$$\mathbf{x}^{(1)}=\mathbf{x}^{(0)}+\alpha_0\mathbf{p}_0=(\frac{2}{3},0)^T$$

$$\mathbf{r}^{(1)}=\mathbf{r}^{(0)}-\alpha_0 A\mathbf{p}_0=(0,\frac{2}{3})^T$$

$$\beta_0=\frac{(\mathbf{r}^{(1)},\mathbf{r}^{(1)})}{(\mathbf{r}^{(0)},\mathbf{r}^{(0)})}=\frac{1}{9}$$

$$\mathbf{p}_1=\mathbf{r}^{(1)}+\beta_0\mathbf{p}_0=(\frac{2}{9},\frac{2}{3})^T$$

$$\alpha_1=\frac{(\mathbf{r}^{(1)},\mathbf{r}^{(1)})}{(\mathbf{p}_1,A\mathbf{p}_1)}=\frac{3}{2}$$

$$\mathbf{x}^{(2)}=\mathbf{x}^{(1)}+\alpha_1\mathbf{p}_1=(1,1)^T$$

$$\mathbf{r}^{(1)}=\mathbf{r}^{(0)}-\alpha_0 A\mathbf{p}_0=(0,0)^T$$

解为： $\mathbf{x}^{(2)}=(1,1)^T$

9．应用改进 Eulor 方法：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n)) \end{cases}$$

解初值问题 $\begin{cases} y' + 10y + 2 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 时，问步长 h 应如何选取方能保证方法的绝对稳定性？ 并在 $h = 0.1\,,\,0.2$ 中选取数值稳定的步长计算 $y(0.2)$ 的近似值.

解： 令 $z = y + \frac{1}{5}$, 原初值问题等价为 $\begin{cases} z' = -10z \\ z(0) = 1.2 \end{cases}$

将改进 Eulor 方法应用到方程 $z' = -10z$ 上，有：

$$z_{n+1} = (1 + \overline{h} + \frac{\overline{h}^2}{2})z_n, \qquad \text{其中 } \overline{h} = -10h$$

当 $\overline{h} = -(2\,,\,0)$ 时，方法是绝对稳定的，

即 $h = (0\,,\,\frac{1}{5}) = (0\,,\,0.2)$ 时方法是绝对稳定的；

故取 $h = 1 \in (0\,,\,\frac{1}{5}) = (0\,,\,0.2)$，即 $\overline{h} = -1$，方法是绝对稳定的

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n,$$

$$z_1 = \frac{1}{2}z_0 = \frac{3}{5} = 0.6,$$

$$z_2 = \frac{1}{2}z_1 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10} = 0.3,$$

$$y(0.2) = z(0.2) - \frac{1}{5} \approx z_2 - \frac{1}{5} = 0.1$$

10．求解常微分方程初值问题 $\begin{cases} y' = f(x, y), \quad a \le x \le b \\ y(a) = \eta \end{cases}$ 的两步方法：

$$y_{n+1}=\frac{3}{2}y_n-\frac{1}{2}y_{n-1}+\frac{h}{4}\left(5y_n'-3y_{n-1}'\right)$$

求出局部截断误差；

解：$$a_0=\frac{3}{2},a_1=-\frac{1}{2},b_{-1}=0,b_0=\frac{4}{5},b_1=-\frac{3}{4}$$

把局部截断误差在 x_n 处 Taylor 展开：

$$T_n=C_0y(x_n)+C_1hy'(x_n)+\cdots+C_rh^ry^{(r)}(x_n)+\cdots$$

$$C_0=C_1=C_2=0,C_3=\frac{11}{24}\neq 0$$

$$T_n=\frac{11}{24}h^3y'''(x_n)+\cdots$$ ，方法是二阶的；

11．在 $-4\leq x\leq 4$ 上给出函数 $f(x)=e^x$ 的等距节点上函数值和一阶导数值，若用三次 Hermite 插值求 $f(x)$ 的值，要使截断误差不超过 10^{-6}，问至少要把所给的区

间分多少份？

解： 把区间$[-4,4]$ n等分，分点$x_i=-4+ih, i=0,\cdots,n$，$h=\dfrac{8}{n}$

在子区间$[x_i,x_{i+1}]$上构造三次 Hermite 插值$L_h(x)$，误差为：

$$f(x)-L_h(x)=\frac{f^{(4)}(\xi_i)}{4!}(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2,\quad x\in[x_i,x_{i+1}],\xi_i\in(x_i,x_{i+1})$$

$$\begin{aligned}\left|f(x)-L_h(x)\right|&=\left|\frac{f^{(4)}(\xi_i)}{4!}(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2\right|\\&\le\left|\frac{f^{(4)}(\xi_i)}{4!}\right|\left|(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2\right|\\&\le\frac{1}{4!}\max_{x_i\le x\le x_{i+1}}\left|f^{(4)}(x)\right|\bullet\max_{x_i\le x\le x_{i+1}}\left|(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2\right|\\&\le\frac{h^4}{16\bullet 4!}\max_{x_i\le x\le x_{i+1}}\left|f^{(4)}(x)\right|\end{aligned}$$

当$x\in[-5,5]$时，$\left|f(x)-L_h(x)\right|\le\dfrac{h^4}{16\bullet 4!}e^4=\dfrac{h^4}{384}<10^{-6}$

故 $h<\sqrt[4]{384\times10^{-6}}$

$$n=\frac{8}{h}>\frac{8}{\sqrt[4]{384\times10^{-6}}}$$

12．初值问题 $\begin{cases}y'+10y+2=0\\ y(0)=1\end{cases}$

用 4 阶经典 Runge-kutta 方法取步长$h=0.1$计算$y(0.2)$的近似值（结果保留 5

位小数）.

解：　令 $z=y+\dfrac{1}{5}$, 原初值问题等价为 $\begin{cases} z'=-10z \\ z(0)=1.2 \end{cases}$

将 4 阶经典 Runge-Kutta 方法公式

$$\begin{cases} z_{n+1}=z_n+\dfrac{h}{6}\left(K_1+2K_2+2K_3+K_4\right) \\ K_1=f\left(x_n,z_n\right) \\ K_2=f\left(x_n+\dfrac{h}{2},z_n+\dfrac{h}{2}K_1\right) \\ K_3=f\left(x_n+\dfrac{h}{2},z_n+\dfrac{h}{2}K_2\right) \\ K_4=f\left(x_n+h\,,z_n+hK_3\right) \end{cases}$$

应用到方程 $z'=-10z$ 上，有：
可得

$$z_{n+1}=\left[1+\overline{h}+\frac{1}{2}\overline{h}^2+\frac{1}{6}\overline{h}^3+\frac{1}{24}\overline{h}^4\right]z_n\text{，其中 }\overline{h}=-10h$$

取步长 $h=0.1$, $\overline{h}=-10\times 0.1=-1$

$$z_{n+1}=\frac{3}{8}z_n$$

$$z_1=\frac{1}{8}z_0=\frac{9}{20}=0.45,$$

$$z_2=\frac{3}{8}z_1=\frac{3}{8}\times\frac{9}{20}=\frac{27}{160}=0.16875$$

$$y(0.2)=z(0.2)-\frac{1}{5}\approx z_2-\frac{1}{5}=-0.03125\text{；}$$