

第5章 习题

- 5.1 现有一台计算机,在某个时刻同时到达了 n 个任务。该计算机在同一时间只能处理一个任务,每个任务都必须被不间断地得到处理。该计算机处理这 n 个任务需要的时间分别为 a_1, a_2, \dots, a_n 。将第 i 个任务在调度策略中的结束时间记为 e_i 。请设计一个贪心算法输出这 n 个任务的一个调度使得用户的平均等待时间 $1/n \sum e_i$ 达到最小。
- 5.2 现有面值为 1 角、5 分、2 分、1 分的硬币,每种硬币的个数都是无限的。给出一个贪心算法,使得对任意给定的面值为 n ($n > 18$) 分的纸币能够将它兑换成币值相等的硬币且使用硬币个数最少。证明算法的正确性并分析其复杂度。
- 5.3 给定 k 个排好序的有序序列 s_1, s_2, \dots, s_k ,现在用 2 路归并排序算法对这些有序序列排序。假定用 2 路归并排序算法对长度分别为 m 和 n 的有序序列排序要用 $m+n-1$ 次比较操作。设计一个贪心算法合并 s_1, s_2, \dots, s_k 使得所需的比较操作次数最少。
- 5.4 设计分治算法求解如下问题,并分析算法的复杂性。
输入: 字符表 $C=\{c_1, \dots, c_n\}$ 的前缀编码 $\text{code}(c_1), \dots, \text{code}(c_n)$
输出: 与前缀编码 $\text{code}(c_1), \dots, \text{code}(c_n)$ 对应的编码树 T
- 5.5 给定两个大小为 n 的正整数集合 A 和 B 。对于 A 到 B 的一个一一映射 f ,不妨设 $f(a_i)=b_i$ ($i=1, \dots, n$), 则 f 的代价为 $\sum_{i=1}^n a_i^{b_i}$ 。试设计一个贪心算法,找出从 A 到 B 的代价最大的一一映射。
- 5.6 一个 DNA 序列 X 是字符集 $\{G, T, A, C\}$ 上的串,其上有大量信息冗余。设 x 是 X 的子串, x 及其冗余形式在 X 内在出现的起、止位置构成了一系列等长区间 $[p_1, q_1], \dots, [p_m, q_m]$ 。试设计一个贪心算法找出 $[p_1, q_1], \dots, [p_m, q_m]$ 中互不相交的区间的最大个数,即确定 x 的独立冗余度。
- 5.7 背包问题定义如下,输入背包容量 C 和 n 个物品,其中第 i 个物品 ($1 \leq i \leq n$) 的重量为 w_i 且其价值为 v_i ,试设计一个贪心算法输出向量 $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ 使得 $0 \leq x_i \leq 1$ ($1 \leq i \leq n$) 且 $\sum_{i=1}^n x_i v_i$ 达到最大值。
- 5.8 给定平面点集 $P=\{(x_i, y_i) | 1 \leq i \leq m\}$ 和 $Q=\{(x_j, y_j) | 1 \leq j \leq n\}$ 。 $(x_i, y_i) \in P$ 支配 $(x_j, y_j) \in Q$ 当且仅当 $x_i \geq x_j$ 且 $y_i \geq y_j$ 。试设计一个贪心算法输出集合 $\{(p, q) | p \in P, q \in Q, p \text{ 支配 } q\}$ 使得该集合中点对最多。
- 5.9 某工厂收到 n 个订单 (a_i, b_i) , 其中 a_i 和 b_i 均是正整数 ($1 \leq i \leq n$), 订单 (a_i, b_i) 希望在时间 b_i 之前获得 a_i 件产品。工厂的生产能力为每个时间单位生产 1 件产品。工厂希望拒绝最少数量的订单,并恰当地排序剩下的订单使得剩下的订单均能够被满足。试设计一个贪心算法求解上述问题。
- 5.10 输入 n 个区间 $[a_i, b_i]$, 其端点满足 $1 \leq a_i \leq b_i \leq n$, 试设计一个贪心算法选出最少区间覆盖 $[1, n]$ 。