哈工大　2010 年　秋　季学期

概率论与数理统计　　试　题

一、填空题（每小题 3 分，共 5 小题，满分 15 分）

1. 设事件 A、B 仅发生一个的概率为 0.3，且 $P(A)+P(B)=0.5$，则 A、B 至少有一个不发生的概率为__________.

2．设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，则 $Y=1-\mathrm{e}^{-2X}$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} \\ \\ \end{cases}.$$

____

3．设 $X\sim B(n,p)$,且 $EX=3, DX=\dfrac{3}{2}$, 则 $P(X\ge 1)=$___________.

4．已知一批零件长度 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 若 σ 未知，从中随机地抽取 9 个零件，得样本均值 $\bar{x}=30, s^2=16$，则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是____________________.

5．已知随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}6\mathrm{e}^{-2x-3y}, & x>0, y>0\\ 0, & 其它\end{cases}$，则

$P(X+2Y\le 1)=$_________.

二、选择题（每小题 3 分，共 5 小题，满分 15 分）

（每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项的字母填在题后的括号内）

1．设 $0<P(A)<1,\ 0<P(B)<1,\ P(B|\bar{A})=P(B)$，则与上式不等价的是

（A） $P(B|A)=P(B|\bar{A})$.　　　　（B） A 与 B 互斥.

（C） A 与 B 独立.　　　　（D） $P(A|\bar{B})=P(A)$.　　【　　】

2．. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自具有 $\chi^2(n)$ 分布的总体的样本，$\bar{X}$ 为样本均值，则

（A） $E\bar{X}=n$，$D\bar{X}=2$；　　　　（B） $E\bar{X}=n,\ D\bar{X}=2n$；

（C）$E\bar{X}=1,\ D\bar{X}=2$；　　　　（D）$E\bar{X}=\dfrac{1}{n},\ D\bar{X}=n$　　【　　】

3．如下四个函数，能作为随机变量 X 概率密度函数的是

（A） $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$.　　　　（B） $f(x)=\mathrm{e}^{-|x|},\ x\in\mathbf{R}$.

（C）$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$.　　（D）$f(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0\end{cases}$.　　【　　】

4．设随机变量 X 服从参数为 $\frac{1}{2}$ 的指数分布，$Y\sim N(1,4)$，且 $\rho_{XY}=\frac{1}{2}$，根据切比晓夫不等式有：$P(-4+2Y\le X\le 2Y+4)\ \ge$

（A）$\frac{1}{4}$　　（B）$\frac{1}{6}$.　　（C）$\frac{1}{8}$.　　（D）$\frac{2}{9}$.　　【　　】

5．设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$EX=\mu,\ DX=\sigma^2,\ \bar{X}$ 是样本均值，S^2 是样本方差，S^{*2} 为样本的二阶中心矩，则

（A）$\overline{X}\sim N(\mu,\sigma^2)$.　　（B）$\frac{nS^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$.

（C）S^{*2} 是 σ^2 的无偏估计.　　（D）$\overline{X}^2$ 与 S^2 相互独立.　　【　　】

三、（8 分）三个箱子，第一个箱子中有 4 个黑球，1 个白球；第二个箱子中有 3 个黑球，3 个白球；第三个箱子中有 3 个黑球，5 个白球. 现随机地取一个箱子，再从这个箱子中取出一个球，求（1）该球是白球的概率；（2）若已知取出一个白球的条件下，它来自第一个箱子的概率。

四、（8 分）已知 X 与 Y 独立同分布，且 $X\sim N(0,1)$，$Z=X+Y$

求（1）利用卷积公式求 Z 的概率密度 $f_z(z)$;（2）利用（1）的结论试给出 n 个相互独立的正态随机变量线性函数服从何分布？

五、（8 分）设随机变量 X,Y 相互独立，$X\sim B(2,\frac{1}{3}),\quad Y\sim U[0,1],$ 设 $Z=X+Y$，求 Z 的分布函数及 EZ 和 DZ.

六、（12 分）设总体 $X\sim U[\theta_1,\theta_2]$，$\left(\theta_1<\theta_2\right)$ $X_1,\cdots,X_n$ 为来自 X 的一个简单随机样本，

求（1）$\theta_1,\ \theta_2$ 的矩估计；（2）$\theta_1,\ \theta_2$ 的似然估计；（3）已知 $\theta_2=2$ 条件下，θ_1 的似然估计是否为 θ_1 的无偏估计？为什么？

七（4 分）实验室器皿中产生甲、乙两类细菌的机会是相等的，且产生 k 个细菌的概率为 $p_k=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},k=0,1,2,\cdots$ 试求产生了甲类细菌但没有乙类细菌的概率。

2010 年概率期末答案

一、填空题：

1. 0.9 **2.** $f_Y(y)=\begin{cases}1, 0<y<1\\ 0，其他\end{cases}$ **3.** $\frac{63}{64}$

4. $(\bar{x}-\frac{4}{\sqrt{9}}\times t_{0.05/2}(9-1), \bar{x}+\frac{4}{\sqrt{9}}\times t_{0.05/2}(9-1))=(30-\frac{4}{3}\times 2.306, 30+\frac{4}{3}\times 2.306)$

$=(26.8, 33.2);$

5． $1+3e^{-2}-4e^{-\frac{3}{2}}$

二、选择题：1B 2A 3C 4A 5D

三、解：（1）设$B=$“取出的一个球是白球”，再设A_i =“取到了第i箱”，$i=1,2,3$，则由全概率公式有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=\frac{1}{3}(\frac{1}{5}+\frac{3}{6}+\frac{5}{8})=\frac{53}{120}$$

（2）$P(A_1|B)=\dfrac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\dfrac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}}{\frac{53}{120}}=\frac{1}{15}\times\frac{120}{53}=\frac{8}{53}$

四、：(1) 利用卷积公式 5 分

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,2}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2+zx-\frac{1}{2}z^2}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\frac{1}{2}z)^2}e^{-\frac{1}{4}z^2}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{4}z^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{2}x-\frac{1}{\sqrt{2}}z)^2}d(\sqrt{2}x-\frac{z}{\sqrt{2}})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2(\sqrt{2})^2}z^2}$$

故有：$Z\sim N(0,2)=N(0,1^2+1^2)$

（2）若$X_1,\cdots,X_n$为独立 n 个正态变量，$X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$

$(i=\overline{1,n})$，则 $Z=b+\sum_{i=1}^{n}a_iX_i$ 亦为正态变量（$a_1,\cdots,a_n$不全为0）且

$$Z \sim N\left(b+\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^{\ 2}\right)$$ 3 分

五、**解**：$X \sim B(2,\frac{1}{3})$ $Y \sim U[0,1]$ $F_Y(y)=\begin{cases}0, & x<0 \\ x, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1\end{cases}$

$$F_Z(z)=P(Z \le z)=P(X+Y \le z)$$

$$=P(X=0)P(Y \le z)+P(X=1)P(Y \le z-1)+P(X=2)P(Y \le z-2)$$

$$=\frac{4}{9}F_Y(z)+\frac{4}{9}F_Y(z-1)+\frac{1}{9}F_Y(z-2)$$

$$=\begin{cases} 0 & , \quad z<0 \\ \frac{4}{9}z & , \quad 0 \le z < 1 \\ \frac{4}{9}+\frac{4}{9}(z-1)=\frac{4}{9}z, & 1 \le z < 2 \\ \frac{1}{9}z+\frac{2}{3} & , \quad 2 \le z < 3 \\ 1 & , \quad z \ge 3 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , \quad z<0 \\ \frac{4}{9}z & , \quad 0 \le z < 2 \\ \frac{1}{9}z+\frac{2}{3}, & 2 \le z < 3 \\ 1 & , \quad z \ge 3 \end{cases}$$

4 分

$$EZ=E(X+Y)=EX+EY=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$$ 4 分

六、解：

（1）由题设$\begin{cases} EX=\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2} \\ DX=EX^2-(EX)^2=\dfrac{(\theta_1-\theta_2)^2}{12} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_1+\theta_2=2EX \\ \theta_2-\theta_1=\sqrt[2]{3}\sqrt{EX^2-(EX)^2} \end{cases}$$

解得：$\begin{cases} \theta_1=EX-\sqrt{3}\sqrt{EX^2-(EX)^2} \\ \theta_2=EX+\sqrt{3}\sqrt{EX^2-(EX)^2} \end{cases}$

于是θ_1,θ_2矩估计为$\begin{cases} \hat{\theta}_1=\bar{x}-\sqrt{3}s^* \\ \hat{\theta}_2=\bar{x}+\sqrt{3}s^* \end{cases}$ $s^*=\sqrt{s^{*^2}}$ 4 分

（2）似然函数 $L\left(x_1,\cdots,x_n;\theta_1,\theta_2\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{\left(\theta_1-\theta_2\right)^n}, & \theta_1\le x_1\le\theta_2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\left(\theta_2-\theta_1\right)^n}, & \theta_1\le x_{(1)}\le\cdots\le x_{(n)}\le\theta_2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

∴利用似然估计定义：

θ_1,θ_2 似然估计为：$\begin{cases}\hat{\theta}_1=x_{(1)}\\ \hat{\theta}_2=x_{(n)}\end{cases}$ 4 分

(3)已知在 $\theta_2=2$ 条件下

似然函数 $L\left(x_1,\cdots,x_n;\theta_1,\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{\left(2-\theta_1\right)^n}, & \theta_1\le x_i\le 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$（$i=1,2,\cdots,n$)

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\left(2-\theta_1\right)^n}, & \theta_1\le x_{(1)}\le\cdots\le x_{(n)}\le 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

由似然估计定义：θ_1 的似然估计为 $\hat{\theta}_1=x_{(1)}$

令 $Z=\hat{\theta}_1=x_{(1)}$ 之 $d\cdot fF_Z(E)$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=1-P(Z>z)=1-P\left(\min\left(X_1,\cdots,X_n\right)>z\right)$$

$$=1-P\left(X_1>z,\cdots,X_n>z\right)\overset{\text{独立同}}{\underset{\text{分布}}{===}}1-P\left[P\left(X_i>z\right)\right]^n$$

$$=1-\left[1-F(z)\right]^n$$

$$=\begin{cases}0, & z\le\theta_1\\ 1-\left(1-\dfrac{z-\theta_1}{2-\theta_1}\right)^n, & \theta_1<z<2\\ 1, & z\ge 2\end{cases}=\begin{cases}0, & z\le\theta_1\\ 1-\left(\dfrac{2-z}{2-\theta_1}\right)^n, & \theta_1<z<2\\ 1, & z\ge 2\end{cases}$$

（$F(z)=\begin{cases}0, & z\le\theta_1\\ \dfrac{z-\theta_1}{2-\theta_1}, & \theta_1<z<2\\ 1, & z\ge 2\end{cases}$ ）

$$f_Z(z)=\begin{cases} n\times\dfrac{1}{2-\theta_1}(\dfrac{2-z}{2-\theta_1})^{n-1}, \theta_1<z<2 \\ 0, \qquad\qquad \text{其它} \end{cases}$$

$$EZ=\int_{\theta_1}^{2} zf_Z(z)dz=\frac{2}{n+1}+\frac{n}{n+1}\theta_1\neq\theta_1, \text{但} EZ\to\theta_1(n\to\infty)$$

$\therefore x_{(1)}$为θ_1的渐进无偏估计。 4 分

七、解：令A.表示器皿产生了甲类细菌而没有产生乙类细菌事件，而A_i表示产生了i个细菌的事件（$i=1,2,3,\ldots$）。

于是有：

$$A=\sum_{i=1}^{\infty}A_iA$$

$$P(A)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)P(A|A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}(\frac{1}{2})^i \qquad 2\text{ 分}$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(\frac{\lambda}{2})^i}{i!}=e^{-\lambda}(e^{\frac{\lambda}{2}}-1)=e^{-\frac{\lambda}{2}}-e^{-\lambda}$$

2 分