



第11章 CPS中的控制技术

11.1、自动控制系统基本概念

11.2、自动控制系统数学模型

11.3、PID控制技术

11.4、PID控制器整定技术

11.5、其它先进控制技术



11.2、CPS自动控制系统数学模型

- 11.2.1 关于数学模型
- 11.2.2 时域模型
- 11.2.3 复频域模型



11.2.1 关于数学模型

- 数学模型：描述系统输入、输出变量以及内部各变量之间关系的数学表达式
- 建模方法：解析法，实验法
 - 解析法（机理分析法），根据系统工作所依据的物理定律列写运动方程
 - 实验法（系统辨识法），给系统施加某种测试信号，记录输出响应，并用适当的数学模型去逼近系统的输入输出特性



11.2、自动控制系统数学模型

- 11.2.1 关于数学模型
- 11.2.2 时域模型
- 11.2.3 复频域模型



11.2.2 时域模型

- 时域模型--微分方程
- 元部件及系统微分方程的建立
- 线性定常系统微分方程的特点
- 非线性方程的线性化
- 微分方程求解



11.2.2 时域模型

- 线性定常系统微分方程的一般形式

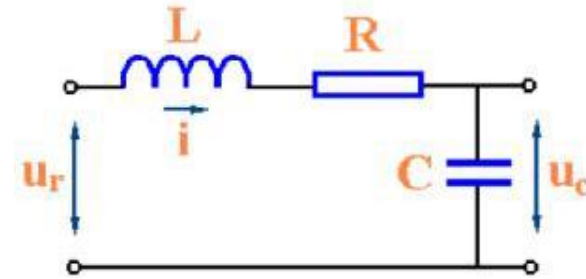


$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) \\ &= b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t) \end{aligned}$$



11.2.2 时域模型—线性部件及系统

- 1) R-L-C 串连电路



$$\begin{aligned} u_r(t) &= L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + u_c(t) \\ i(t) &= C \frac{du_c(t)}{dt} \\ \Rightarrow & LC \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u_c(t) = \frac{1}{LC} u_r(t)$$



11.2.2 时域模型—线性部件及系统

- 2) 弹簧—阻尼器系统

$$A: \begin{cases} F_i = K_1(x_i - x_m) \end{cases}$$

$$B: \begin{cases} F_m = f(\dot{x}_m - \dot{x}_o) \\ F_o = K_2 x_o \end{cases}$$

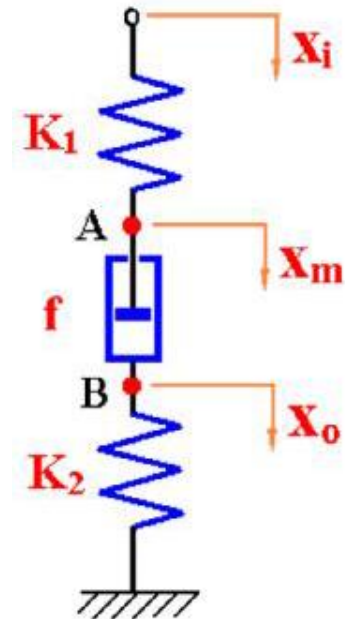
$$K_1(x_i - x_m) = f(\dot{x}_m - \dot{x}_o) = K_2 x_o$$

$$K_1 \dot{x}_m = K_1 \dot{x}_i - K_2 \dot{x}_o$$

$$\dot{x}_m = \dot{x}_i - \frac{K_2}{K_1} \dot{x}_o = \frac{K_2}{f} x_o + \dot{x}_i$$

$$\frac{K_1 + K_2}{K_1} \dot{x}_o + \frac{K_2}{f} x_o = \dot{x}_i$$

$$\dot{x}_o + \frac{K_1 K_2}{f(K_1 + K_2)} x_o = \frac{K_1}{K_1 + K_2} \dot{x}_i$$





11.2.2 时域模型—线性部件及系统

• 3) 电枢控制式直流电动机

电枢回路： $u_r = Ri + E_b$ — 克希霍夫

电枢反电势： $E_b = c_e \cdot \omega_m$ — 楞次定律

电磁力矩： $M_m = c_m i$ — 安培定律

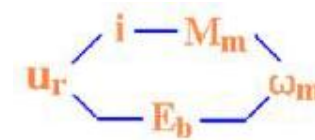
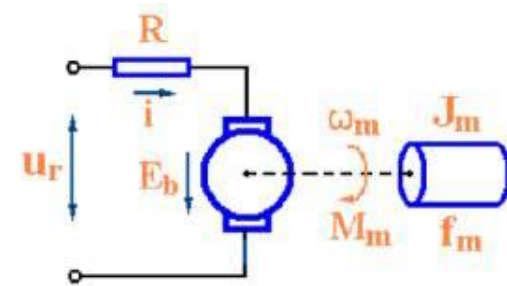
力矩平衡： $J_m \dot{\omega}_m + f_m \omega_m = M_m$ — 牛顿定律

$$\omega_m = \dot{\theta}_m$$

消去中间变量 i, M_m, E_b 可得：

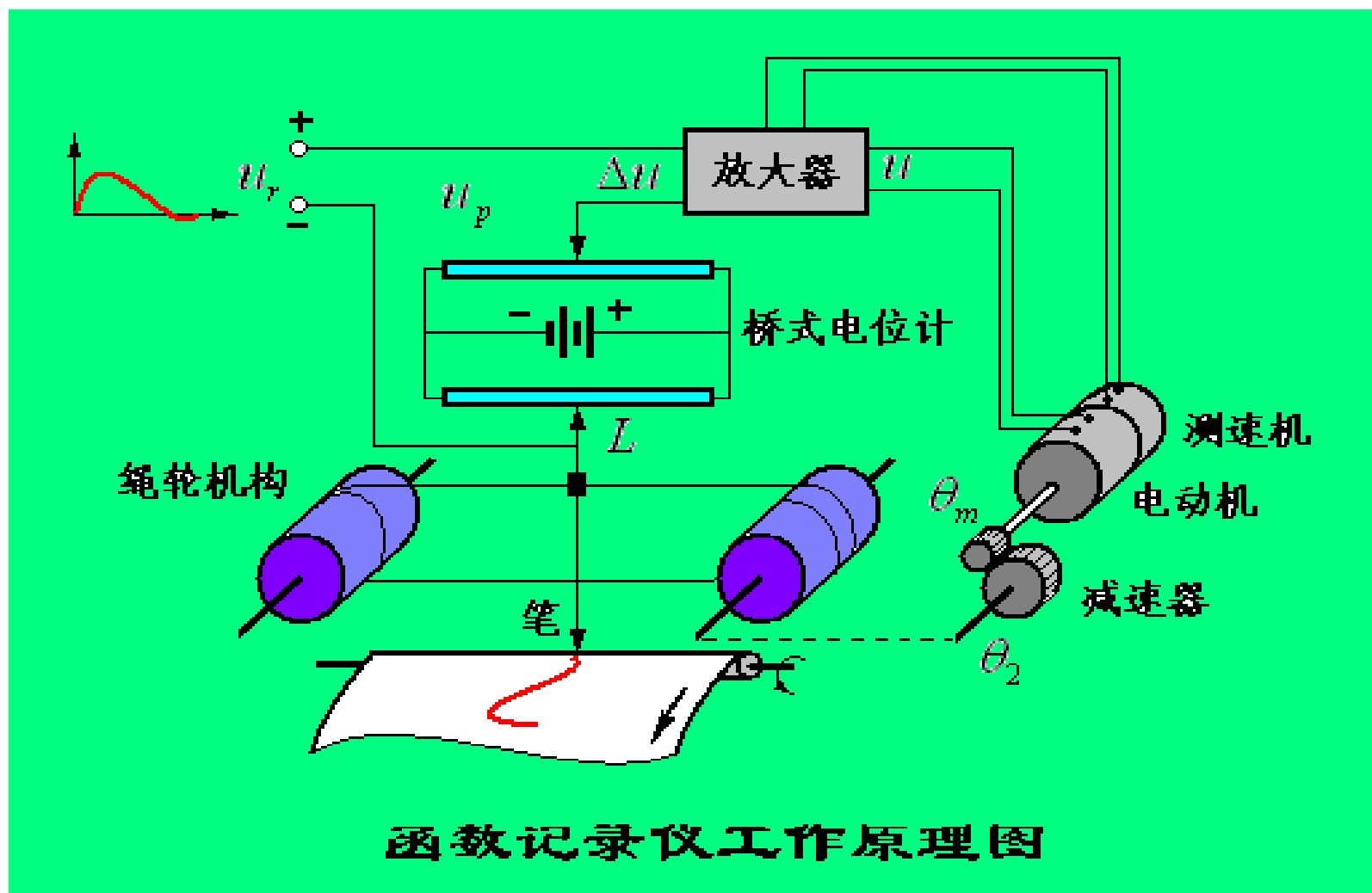
$$T_m \dot{\omega}_m + \omega_m = K_m u_r \quad T_m \dot{\theta}_m + \theta_m = K_m u_r$$

$$\begin{cases} T_m = J_m R / (R \cdot f_m + c_e \cdot c_m) & \text{电机时间常数} \\ K_m = c_m / (R \cdot f_m + c_e \cdot c_m) & \text{电机传递系数} \end{cases}$$





11.2.2 时域模型—线性部件及系统





11.2.2 时域模型—线性部件及系统

• 4) X-Y 记录仪

反馈口： $\Delta u = u_r - u_p$

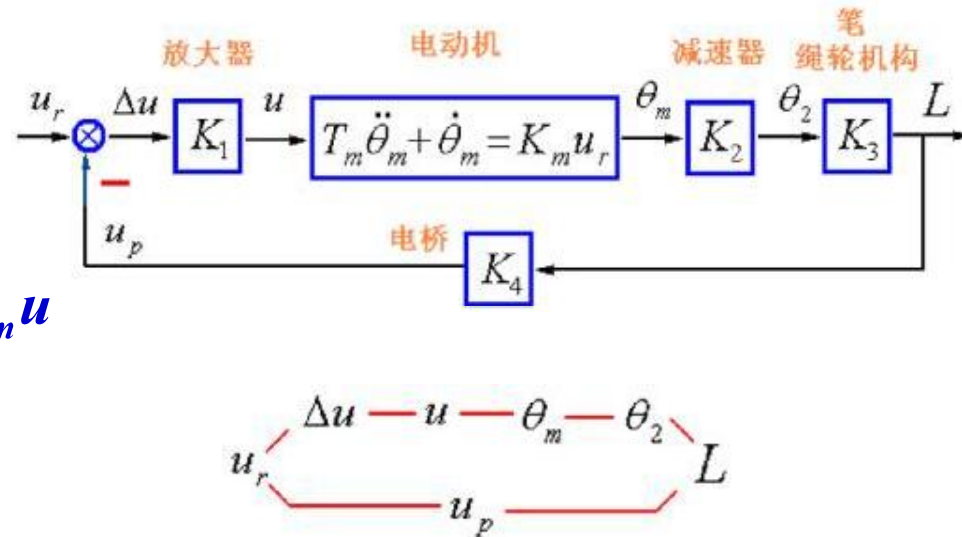
放大器： $u = K_1 \Delta u$

电动机： $T_m \ddot{\theta}_m + \dot{\theta}_m = K_m u$

减速器： $\theta_2 = K_3 \theta_m$

绳 轮： $L = K_3 \theta_2$

电 桥： $u_p = K_4 L$

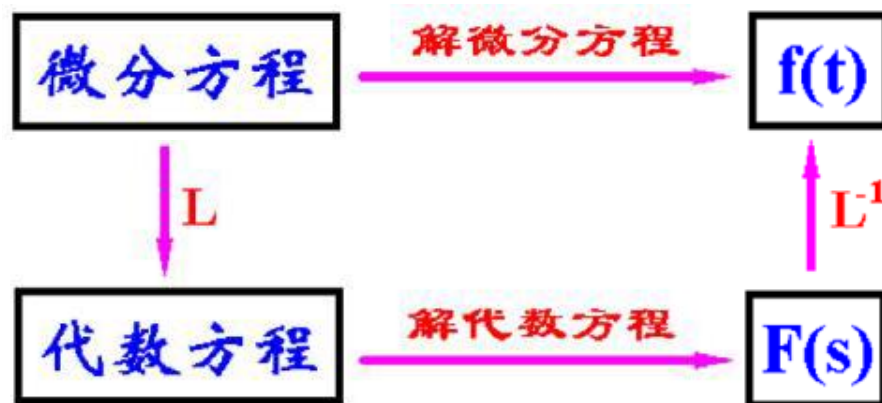


消去中间变量可得：

$$T_m \ddot{L} + \frac{1}{K_3} \dot{L} + \frac{K_1 K_2 K_3 K_4 K_m}{T_m} L = \frac{K_1 K_2 K_3 K_4 K_m}{T_m} u_r$$



11.2.2 时域模型—微分方程解法





11.2、自动控制系统数学模型

- 11.2.1 关于数学模型
- 11.2.2 时域模型
- 11.2.3 复频域模型



11.2.3 复频域模型-复习拉氏变换1

1) 拉氏变换的定义 $F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-ts} dt$

2) 常见函数L变换	$f(t)$	$F(s)$
(1) 单位脉冲	$\delta(t)$	1
(2) 单位阶跃	$1(t)$	$1/s$
(3) 单位斜坡	t	$1/s^2$
(4) 单位加速度	$t^2/2$	$1/s^3$
(5) 指数函数	e^{-at}	$1/(s+a)$
(6) 正弦函数	$\sin \omega t$	$\omega/(s^2 + \omega^2)$
(7) 余弦函数	$\cos \omega t$	$s/(s^2 + \omega^2)$



11.2.3 复频域模型-复习拉氏变换2

3) L变换重要定理

(1) 线性性质 $L[a f_1(t) \pm b f_2(t)] = a F_1(s) \pm b F_2(s)$

(2) 微分定理 $L[f'(t)] = s \cdot F(s) - f(0)$

(3) 积分定理 $L\left[\int f(t)dt\right] = \frac{1}{s} \cdot F(s) + \frac{1}{s} f^{(-1)}(0)$

(4) 实位移定理 $L[f(t - \tau_0)] = e^{-\tau \cdot s} \cdot F(s)$

(5) 复位移定理 $L[e^{A \cdot t} f(t)] = F(s - A)$

(6) 初值定理 $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$

(7) 终值定理 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$



11.2.3 复频域模型-复习拉氏变换3

4) 拉氏反变换

(1) 反演公式
$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) \cdot e^{ts} ds$$

(2) 查表法 (分解部分分式法)
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{试凑法} \\ \text{系数比较法} \\ \text{留数法} \end{array} \right.$$

例1 已知 $F(s) = \frac{1}{s(s+a)}$, 求 $f(t) = ?$

解.
$$F(s) = \frac{1}{a} \cdot \frac{(s+a)-s}{s(s+a)} = \frac{1}{a} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} \right]$$

$$f(t) = \frac{1}{a} [1 - e^{-at}]$$



11.2.3 复频域模型

- 1) 传递函数的定义

- 在零初始条件下，线性定常系统输出量拉氏变换与输入量拉氏变换之比。

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$$



- 2) 传递函数的标准形式

- 微分方程一般形式:

$$a_n c^{(n)} + a_{n-1} c^{(n-1)} + \dots + a_1 c' + a_0 c = b_m r^{(m)} + b_{m-1} r^{(m-1)} + \dots + b_1 r' + b_0 r(t)$$

- 拉氏变换:

$$[a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0] C(s) = [b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0] R(s)$$

- 传递函数:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = G(s)$$



11.2.3 复频域模型

- 3)首1标准型

$$G(s) = \frac{K^* \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

- 尾1标准型

$$G(s) = K \frac{\prod_{k=1}^{m_1} (\tau_k s + 1) \prod_{l=1}^{m_2} (\tau_l^2 s^2 + 2\xi_l \tau_l s + 1)}{s^v \prod_{i=1}^{n_1} (T_i s + 1) \prod_{j=1}^{n_2} (T_j^2 s^2 + 2\xi_j T_j s + 1)}$$



11.2.3 复频域模型

例 已知 $G(s) = \frac{4s - 4}{s^3 + 3s^2 + 2s}$

将其化为首1、尾1标准型，并确定其增益。

解. $G(s) = \frac{4(s-1)}{s^3 + 3s^2 + 2s} = \frac{4(s-1)}{s(s+1)(s+2)}$ 首1标准型

$$G(s) = \frac{4}{2} \cdot \frac{s-1}{s(\frac{1}{2}s^2 + \frac{3}{2}s + 1)} = 2 \cdot \frac{(s-1)}{s(\frac{1}{2}s + 1)(s+1)}$$
 尾1标准型

$$K = 2$$

增益



11.2.3 复频域模型

用拉氏变换方法解微分方程

系统微分方程

$$\begin{cases} y''(t) + a_1 \cdot y'(t) + a_2 \cdot y(t) = 1(t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

L变换 $(s^2 + a_1 s + a_2) \cdot Y(s) = \frac{1}{s}$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + a_1 s + a_2)}$$

L⁻¹变换 $y(t) = L^{-1}[Y(s)]$



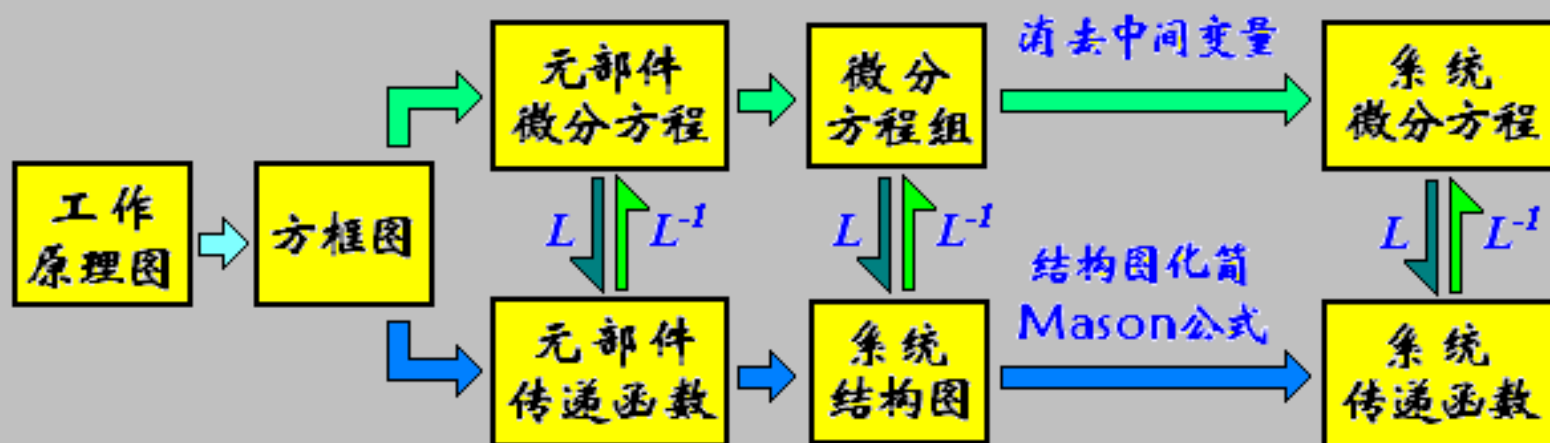
11.2.3 复频域模型

- 4) 传递函数的性质
 - (a) $G(s)$ 是复函数；
 - (b) $G(s)$ 只与系统自身的结构参数有关；
 - (c) $G(s)$ 与系统微分方程直接关联；
 - (d) $G(s) = L[k(t)]$ ；
 - (e) $G(s)$ 与 s 平面上的零极点图相对应。



11.2.3 复频域模型典型环节传递函数

序号	环节名称	微分方程	传递函数	例
1	比例环节	$c = K \cdot r$	K	电位器, 放大器, 自整角机
2	惯性环节	$Tc + c = r$	$\frac{1}{Ts + 1}$	CR电路, 交、直 流电动机
3	振荡环节	$T^2c + 2\xi Tc + c = r$ $0 < \xi < 1$	$\frac{1}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1}$	R-L-C电路, 弹簧 质块阻尼器系统
4	积分环节	$c = r$	$\frac{1}{s}$	水箱 (流量Q—液位h)
5	微分环节	$c = r$	s	
6	一阶复合 微分环节	$c = \tau r + r$	$\tau s + 1$	
7	二阶复合 微分环节	$c = \tau^2 r + 2\xi \tau r + r$	$\tau^2 s^2 + 2\xi \tau s + 1$	



系统模型及其建立过程



• 谢谢！