Northeastern University

数值分析

理学院　　数学系

计算数学教研室

2017年12月13日

求房贷利率的模型（等额本息）

如果你要买一套房子，那么房产公司的代理人会根据当前的贷款利率和贷款年限很快的给出总还款额以及月付还款额等信息。

比如你看中了一套建筑面积为120m2,单价10000元/m2的房子。你计划首付30%，其余70%用30年按揭贷款，根据以下信息如何求出房贷年利率？

总价（万元）	首付30%（万元）	按揭70%（万元）	总利息（元）	每月还款（元）
120	36	84	764917.60	4458.10

- 有人可能会这样算

年利率=76.491760/30/84=3.04%

错，因为你并不是等到30年后一次性还款。

- 等额本息又称为定期付息，即借款人每月按相等的金额偿还贷款本息，其中每月贷款利息按月初剩余贷款本金计算并逐月结清。

设x_k—第k个月的欠款数；a—月还款数；r—为月利率，我们得到迭代关系式

$$x_{k+1}=(1+r)x_k-a$$

那么

$$x_k=(1+r)x_{k-1}-a=(1+r)^2x_{k-2}-(1+r)a-a=\dots$$

$$=\dots$$

$$=(1+r)^kx_0-a[(1+r)^k-1]/r$$

根据$a=0.44581, x_0=84, x_{360}=0$得到

$$84(1+r)^{360}-0.44581[(1+r)^{360}-1]/r=0$$

这是一个关于月利率r的高次代数方程（年利率R=12r），利用传统的方法求出精确解不是很容易，在此可以引入数值方法求解此类非线性方程。

说到一元代数方程，最简单的线性方程ax+b=0求根显而易见，在此不做赘述。而对于一元二次方程，我们也有常用的求根公式。

然而一元三次方程的求根公式是1545年由意大利学者卡尔丹发表在《关于代数的大法》一书中，人们就把它叫做卡尔丹公式。可是事实上，发现公式的人并不是其本人，而是塔塔利亚，故关于该公式的命名也是历史的误会。

随着人们对虚数认识的加深，到了1732年，才由瑞士数学家欧拉找到了一元三次方程三个根的完整表达式。

至于一元四次方程的求根公式由卡尔丹的学生费拉里发现的。

一元三次、四次方程求根公式找到后，人们又努力地去寻找一元五次方程的求根公式，三百多年过去了，没人成功。后来年轻的挪威数学家阿贝尔于1824年证实， n次方程(n≥5)没有公式解。

不过对这个问题的研究，其实并没结束，因为人们发现有些n次方程(n≥5)可有求根公式。那么又是什么样的一元n次方程才没有求根公式呢？

这一问题在19世纪上半期，被法国天才数学家伽罗华利用他创造的全新的数学方法所证明，由此一门新的数学分支“群论”诞生了。

虽然经过了几代数学家坚持不懈的努力，但是求解一个普通高次代数方程的精确解依然很困难。

除少数特殊的方程，一般都没有解析求解方法，只能靠数值方法求得近似解。

因此我们引入了求解非线性方程的数值方法——迭代法。

诸葛亮的故事

相传有一天，诸葛亮把将士们召集在一起，说：“你们中间不论谁，从1~1024中，任意选出一个整数，记在心里，我最多提10个问题，只要求回答‘是’或‘不是’。10个问题全答完以后，我就会‘算’出你心里记的是哪个数。”

诸葛亮刚说完，一个谋士站起来说，他已经选好了一个数。诸葛亮问道：“你这个数大于512？”　谋士答：“不是。”诸葛亮又接连向这位谋士提了9个问题，这位谋士都一一如实做了回答。诸葛亮听完，最后给出了正确答案。

你知道诸葛亮是怎样进行妙算的吗？

什么是二分法？

设$f(x)$在区间$[a, b]$上连续且$f(a)f(b)<0$，根据连续函数的介值定理，区间$[a, b]$上必有方程$f(x)=0$的根，称$[a, b]$为方程$f(x)=0$的有根区间。

通过不断地把函数 $f(x)$ 的零点所在的区间一分为二，使区间的两个端点逐步逼近零点，进而得到零点近似值的方法叫做二分法.

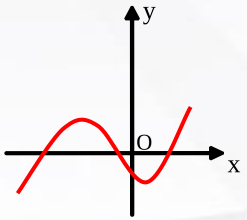
给定精确度ε ,用二分法求函数f(x)零点近似值的步骤如下:

1. 确定有根区间[a，b], 验证f(a)f(b)<0, 给定精确度ε；
2. 求有根区间[a，b]的中点c；
3. 计算f(c);
   （1）若f(c)=0，则c就是函数的零点；
   （2）若f(a)f(c)<0，则令b=c, 确定新的有根区间。
   （3）若f(b)f(c)<0，则令a=c, 确定新的有根区间。
4. 判断是否达到精确度ε：即若| b-a| <ε，则得到零点近似值a（或b）；否则重复2～4。

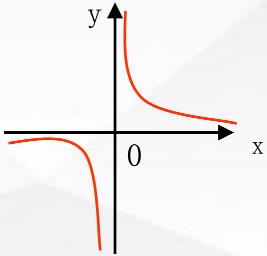
知识点2　二分法

二分法要求函数在区间[a，b]上连续，且在区间两端点函数值符号相反，二分法运算简便、可靠、易于在计算机上实现。但是，若方程$f(x)=0$在区间[a，b]上根多于1个时，也只能求出其中的一个根。另外，若方程$f(x)=0$在区间[a，b]有重根时，也未必满足$f(a)f(b)<0$. 而且由于二分法收敛的速度不是很快, 一般不单独使用, 而多用于为其他方法提供一个比较好的初始近似值.

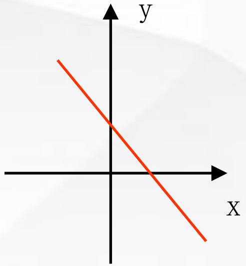
例1 下列图象中不能用二分法求函数零点的是（ ）



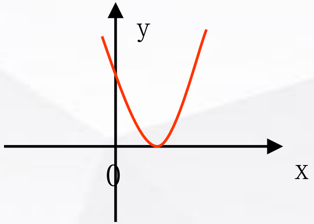
(1)



(2)



(3)



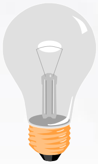
(4)

例2　一位商人有9枚银币，其中有1枚假银币(质量略轻)，你能用天平(不用砝码)将假银元找出来吗？

简单迭代方法的构造

$$f(x)=0 \xleftrightarrow{\text{等价变换}} x=\varphi(x)$$

$f(x)$ 的根 ⟷ $\varphi(x)$ 的不动点



思路

从一个初值 x_0 出发，计算 $x_1=\varphi(x_0)$，$x_2=\varphi(x_1)$，…，$x_{k+1}=\varphi(x_k)$，… 若 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛，即存在 x^* 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$，且 φ 连续，则由 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim\limits_{k\to\infty}\varphi(x_k)$

可知 $x^*=\varphi(x^*)$，即 x^* 是 φ 的不动点，也就是 f 的根。

这种求方程根的方法称为简单迭代法，或逐次逼近法。

其中φ(x) 称为迭代函数，$x_{k+1}=\varphi(x_k)$，$k=0,1,2\ldots$ 称为迭代格式.

K	x_k(第1种形式）	x_k(第2种形式）	x_k(第3种形式）
1	1.2869538	0.8165	-0.875
2	1.4025408	2.9969	6.732
3	1.3454584	-8.65	-469.7
4	1.3251703		$1.03*10^8$
5	1.3600942		
…	…		
23	1.3652300		
24	1.3652300		
25	1.3652300		

可见迭代公式不同, 收敛情况也不同. 第1种形式收敛，第2种形式计算过程出现负数开平方，第3种形式也不收敛.

只有收敛的的迭代过程才有意义，为此我们首先要研究$\varphi(x)$的不动点的存在性及迭代法的收敛性.

首先，从上一讲的数值例子可以看出，迭代法要想收敛，迭代函数$\varphi(x)$应使初值 x_0 产生的序列$\{x_k\}\subseteq[a, b]$，即$\varphi(x)$的值域落在定义域内。

其次，从迭代法的几何角度来看，求方程$x=\varphi(x)$的根，实质上就是求直线$y=x$与曲线 $y=\varphi(x)$的交点的横坐标。

什么形式的迭代法能够收敛呢?

（1）如果迭代公式$x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 收敛，则迭代函数 $y=\varphi(x)$曲线走势平坦，即

$$|\varphi'(x)|<1$$

（2）如果迭代公式$x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 发散，则迭代函数$y=\varphi(x)$ 曲线走势陡峭，即

$$|\varphi'(x)|\geq 1$$

迭代法收敛性判定定理

定理 假设函数 $\varphi(x)$ 满足下列两项条件：

1° 对于任意 $x\in[a,b]$ ，有

$$a\le\varphi(x)\le b$$

（迭代函数在 $[a,b]$ 上）

2° 存在正数 $0\le L<1$，使对于任意 $x,y\in[a,b]$，有

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\le L|x-y|$$

或 $|\varphi'(x)|\le L<1$ （迭代函数一阶导数小于1）

知识点4 简单迭代法的收敛条件

$$|x^*-x_k| \le L|x^*-x_{k-1}| \le L(|x \quad\quad | + |x \quad - x \quad |)$$

$$|x^*-x_k| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0| \ ?$$

$$|x_k-x_{k-1}| = |\varphi(x_{k-1}) - \varphi(x_{k-2})| = |\varphi'(\xi)(x_{k-1} - x_{k-2})|$$

$$\le L| \quad\quad x_0|$$

可用$|x_{k+1}-x_k|$来控制收敛精度

L 越小 收敛越快

设在区间[a, b]上方程 $x=\varphi(x)$ 有根x^*, 且对一切$x\in[a,b]$ 都有$|\varphi'(x)|\ge 1$，则对于该区间上任意$x_0(\ne x^*)$, 迭代公式 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 一定发散。

知识点4 简单迭代法的收敛条件

由计算结果可知，如果保留7位有效数字，则x_8与x_9已完全相同，此时可取$x \approx x_9 = 1.618034$。

此外，方程也可改写成$x = \varphi_2(x) = (x^4 - 2)/3$，建立迭代格式

$$x_{k+1} = (x_k^4 - 2)/3 \quad , \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

仍取初值$x_0 = 1.5$，则有

k	x_k	k	x_k
0	1.5	8	-0.617881
1	1.020833	9	-0.618082
2	-0.304676	10	-0.618019
3	-0.663794	11	-0.618039
4	-0.601951	12	-0.618032
5	-0.622902	13	-0.618035
6	-0.616483	14	-0.618034
7	-0.618520	15	-0.618034

可见，序列$\{x_k\}$ 依然收敛，但却收敛到方程的其他根。对此迭代格式，若取初值$x_0=1.7$ ，迭代计算得到

$x_1=2.117367$，$x_2=6.033156$，$x_3=440.9617$

显然, $k\to\infty$, $x_k\to\infty$时，此迭代格式是发散的。

结合收敛性判定定理，我们可以粗略的验证：
$\varphi_1'(1.5)=0.75(3*1.5+2)^{-0.75}<1$, 所以第一种迭代格式收敛；
$\varphi'_2(1.5)>1$，虽然迭代序列收敛到了方程的另一个根，但也无法收敛到$[1,2]$内的根，而 $\varphi'_2(1.7)>1$导致迭代序列完全发散了。

从此例可知，虽然简单迭代法的构造很容易，然而其收敛性不但取决于迭代函数$\varphi(x)$ ，同时也取决于初值x_0的选取，从而引进简单迭代法的局部收敛性。

定义 若存在 x^* 的某个邻域 $S=\{|x-x^*|\le\delta\}\subset[a,b]$，使迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$，对于任意初值 $x_0\in S$ 均收敛，则称迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 在根 x^* 邻近具有**局部收敛性**。

定理 设 x^* 为方程 $x=\varphi(x)$ 的根，$\varphi'(x)$ 在 x^* 的邻近连续，且

$$|\varphi'(x^*)|<1,$$

则迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 在根 x^* 邻近具有局部收敛性。

可得一个不严格的准则:

只要在一个不大的有根区间上，$|\varphi'(x)|$ 明显地小于1，那么从该区间内一点 x_0 出发，$x=\varphi(x)$ 产生的迭代序列 $\{x_k\}$ 一般是收敛的.

记迭代误差 $e_k = x^* - x_k$,

定义 设迭代过程$x_{k+1}=\varphi(x_k)$收敛于方程$x=\varphi(x)$的根x^*，如果存在常数$p\geq 1$和非零常数C，使得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}=C$$

则称迭代过程是p阶收敛的，C是称为渐进误差常数.

特别地，p=1时称线性收敛，p>1时称超线性收敛，p=2时称平方收敛.

定理 如果x^*是$\varphi(x)$的不动点，$\varphi'(x)$在x^*的邻域连续，且 $\varphi'(x)\neq 0$，则迭代过程$x_{k+1}=\varphi(x_k)$在x^*的邻域是线性收敛的.

证明 由

$$e_{k+1}=x^*-x_{k+1}=\varphi(x^*)-\varphi(x_k)=\varphi'(\xi)e_k,\ \xi\text{在}x^*\text{与}x_k\text{之间}.$$

故有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|}=|\varphi'(\xi)|\neq 0$$

因此迭代过程$x_{k+1}=\varphi(x_k)$是线性收敛的.

定理 如果x^*是$\varphi(x)$ 的不动点，对于整数$p>1$，迭代函数$\varphi(x)$及其p阶导数在x^*的邻域上连续，且满足

$$\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0,\quad \varphi^{(p)}(x^*)\neq 0.$$

则迭代过程$x_{k+1}=\varphi(x_k)$在x^*的邻域是p阶收敛的，且有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^p}=\frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}$$

证明 由于$\varphi'(x^*)=0$，根据定理立即可以断定迭代过程$x_{k+1}=\varphi(x_k)$具有局部收敛性.

再将$\varphi(x_k)$在根x^*处做泰勒展开, 利用条件

$$\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0,$$

则有

$$\varphi(x_k)=\varphi(x^*)+\frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!}(x_k-x^*)^p,\quad \xi\text{在}x_k\text{与}x^*\text{之间}$$

注意到$\varphi(x_k)=x_{k+1}$，$\varphi(x^*)=x^*$，由上式得

$$\varphi(x_k)=\varphi(x^*)+\frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!}(x_k-x^*)^p,\ \xi在x_k与x^*之间$$

注意到$\varphi(x_k)=x_{k+1}$，$\varphi(x^*)=x^*$，由上式得

$$x_{k+1}-x^*=\frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!}(x_k-x^*)^p,$$

因此对迭代误差，令$k\to\infty$时有

$$\frac{e_{k+1}}{e_k^p}\to\frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}.$$

这表明迭代过程$x_{k+1}=\varphi(x_k)$确实为p阶收敛. 证毕.

上述定理告诉我们，迭代过程的收敛速度依赖于迭代函数$\varphi(x)$的选取. 如果$x\in[a, b]$但$\varphi'(x)\neq 0$时，则该迭代过程只可能是线性收敛.

原理：将非线性方程线性化

——Taylor 展开

取 x_0 作为初始近似值，将 $f(x)$在 x_0 做一阶Taylor展开:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2，\ \xi \text{在 } x_0 \text{ 和 } x \text{ 之间。}$$

高阶小量

$$0=f(x^*)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x^*-x_0)\Rightarrow\quad x^*\approx x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

线性

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$ 作为第一次近似值

重复上述过程 $\Rightarrow\quad x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

Newton 迭代公式

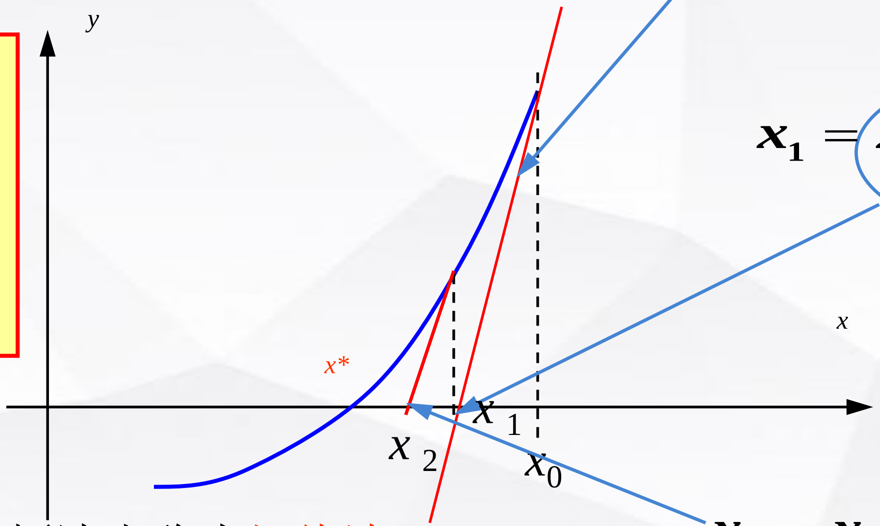
只要 $f\in C^1$，每一步迭代都有$f'(x_k)\neq 0$，而且 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x^*$，则 x^*就是 f 的根。

牛顿法的几何意义

设x_k是根x^*的某个近似值，过曲线$y=f(x)$上横坐标为x_k的点P_k引切线，并将该切线与x轴交点的横坐标x_{k+1}作为x^*的新的近似值.

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

以直代曲



$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

牛顿法也称为切线法。

例 用牛顿迭代法求方程$xe^x-1=0$的近似根.

解 令$f(x)=xe^x-1$，则$f'(x)=e^x(1+x)$，

牛顿迭代公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k e^{x_k}-1}{e^{x_k}(1+x_k)},k=0,1,\cdots$$

取 $x_0=0.5$，迭代得

$x_1=0.57102$, $x_2=0.56716$,
$x_3=0.56714$, …

故方程的近似根为$x^*=0.5671$

普通迭代法18次才能得到的计算结果。

知识点7 牛顿迭代法的收敛性分析

定理 设$f\in C^2[a, b]$, 若x^*为$f(x)=0$在$[a, b]$上的根，且$f'(x^*)\neq 0$，则牛顿迭代法是二阶收敛的，且

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^2}=\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}.$$

平方收敛

证明 牛顿迭代法实际上是一种特殊的不动点迭代，迭代函数为

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

设x^*是$f(x)$的一个单根，即$f(x^*)=0$，$f'(x^*)\neq 0$, 有

$$\varphi'(x^*)=\frac{f(x^*)f''(x^*)}{[f'(x^*)]^2}=0,$$

$$\varphi''(x^*)=\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}\neq 0.$$

知识点7 牛顿迭代法的收敛性分析

若记 $C=\dfrac{M_2}{2m_1}$，其中

$M_2=\max|f''(x)|, m_1=\min|f'(x)|$。

$$|x_{k+1}-x^*|\le C|x_k-x^*|^2$$

$$C|x_{k+1}-x^*|\le (C|x_k-x^*|)^2\le (C|x_{k-1}-x^*|)^4$$

$$\le\cdots\le (C|x_0-x^*|)^{2^{k+1}}$$

可见,当$C|x_0-x^*|<1$, 即$|x_0-x^*|<2m_1/M_2$时,Newton迭代法是收敛的.

例 设函数 $f(x)=(x^3-a)^2$，写出解 $f(x)=0$ 的牛顿迭代格式，并证明此格式的收敛阶。

解 将 $f(x)=(x^3-a)^2$， $f'(x)=6(x^3-a)x^2$，代入牛顿迭代法，

有

$$x_{k+1}=x_k-\frac{(x_k^3-a)^2}{6(x_k^3-a)x_k^2}=\frac{5}{6}x_k+\frac{a}{6x_k^2}$$

迭代函数 $\varphi(x)=\frac{5}{6}x+\frac{a}{6x^2}$ ， $\varphi'(x)=\frac{5}{6}-\frac{a}{6x^3}$， $x^*=\sqrt[3]{a}$ ，

由收敛阶的定义， φ（x）在根x*处的一阶导数值为零，二阶导数值不为零，所以牛顿迭代格式为二阶收敛。

迭代格式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{M}, k = 0,1,2,\cdots$$

称为简化Newton迭代法.

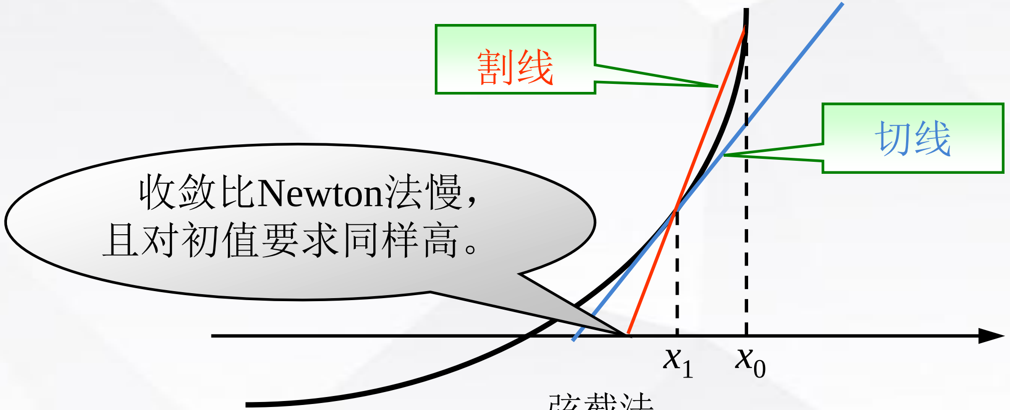
在区间I=[x^*-δ, x^*+δ]上,取M与$f'(x)$同号,且M>1/2max|$f'(x)$|

时,简化Newton迭代法对$x_0 \in$ I收敛.通常取M=$f'(x_0)$.

简化Newton迭代法一般只具有线性收敛.

知识点8 Newton迭代法的变形

Newton法一步要计算 f 和 f'，相当于2个函数值，比较费时。现用 f 的值近似 f'，可少算一个函数值。



弦截法

切线斜率 $\approx$ 割线斜率 $\Rightarrow f'(x_k) \approx \dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}}$$

需要2个初值 x_0 和 x_1。

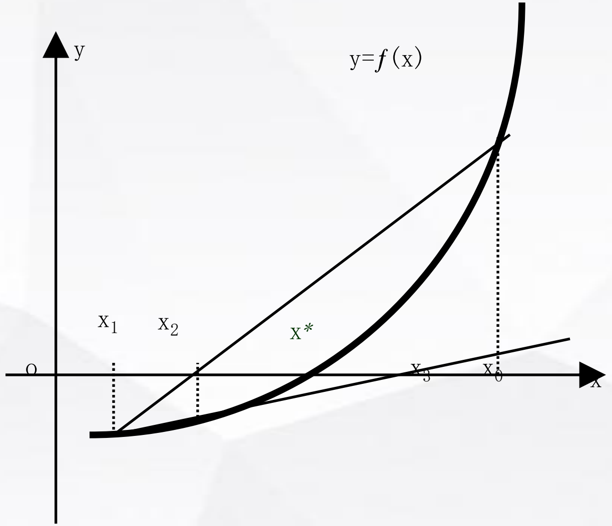
知识点8 Newton迭代法的变形

称 $$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1}),\quad k=1,2,3,\cdots$$

为**割线法.**

若f(x)在根x*附近二次连续可微,且$f'(x^*)\neq 0$,可以证明割线法是收敛的,且有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k e_{k-1}}=-\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$



割线法收敛的阶为

$$p=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.618.$$

例 用快速弦截法求方程$xe^{x}-1=0$的根. 设方程的两个初始近似根为$x_0=0.5$, $x_1=0.6$.

解 方程化为 $x-e^{-x}=0$, 令 $f(x)=x-e^{-x}$ ，代入迭代格式

$$\boxed{x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1}),k=1,2,\cdots}$$

弦截迭代公式 $$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-e^{-x_k}}{(x_k-x_{k-1})-(e^{-x_k}-e^{-x_{k-1}})}(x_k-x_{k-1})$$

知识点8 Newton迭代法的变形

称x^*是方程$f(x)=0$的m重根，是指$f(x)=(x-x^*)^m h(x)$，其中$h(x)$在$x=x^*$处连续且$h(x^*)\neq 0$，若$h(x)$在x^*处充分可微，则 $f(x^*)=f'(x^*)=\ldots=f^{(m-1)}(x^*)=0$，$f^{(m)}(x^*)\neq 0$

由于

$$[f(x)]^{\frac{1}{m}}=(x-x^*)[h(x)]^{\frac{1}{m}}$$

可见，x^*恰是方程 $[f(x)]^{\frac{1}{m}}=0$ 的单根. 应用Newton迭代法可得：

$$x_{k+1}=x_k-\frac{[f(x_k)]^{\frac{1}{m}}}{\frac{1}{m}[f(x_k)]^{\frac{1}{m}-1}f'(x_k)}=x_k-m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\quad k=0,1,2,\cdots$$

称之为**带参数m的Newton迭代法**，它是求方程$f(x)=0$的m重根的具有平方收敛的迭代法.

再看函数:

$$u(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{(x-\alpha)h(x)}{mh(x)+(x-\alpha)h'(x)}$$

可见, x^*恰是方程$u(x)=0$的单根, 应用Newton迭代法有

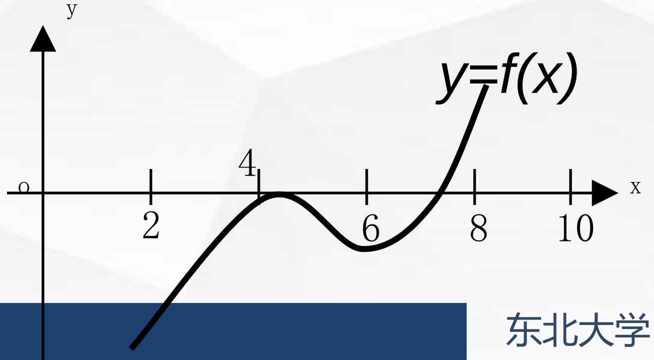
$$x_{k+1}=x_k-\frac{u(x_k)}{u'(x_k)}=x_k-\frac{f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2-f(x_k)f''(x_k)},k=0,1,2,\cdots$$

这是求方程$f(x)=0$重根的具有平方收敛的迭代法, 而且不需知道根的重数.

例7 利用Newton迭代法求方程

$f(x)=x^4-8.6x^3-35.51x^2+464.4x-998.46=0$的正实根.

解 $y=f(x)$的图形为



可见, 方程在$x=4$附近有一个重根, 在$x=7$附近有一单根.

利用Newton迭代法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad ,k=0,1,2,\cdots$$

求方程的单根，取初值x_0=7，精度ε =10^{-6}，计算可得：

x_4=7.34846923，x_5=7.348469229，$|x_5-x_4|$=0.000000001

可见，迭代5次就得到满足精度的解x_5=7.348469229

利用求重根的Newton迭代法(1)求重根，取x_0=4，可得

x_3=4.300000，x_4=4.300000，$|x_4-x_3|$=0.000000006

可见，迭代4次就得到满足精度的解x_4=4.300000.

然而若用一般的Newton迭代法求重根，取x_0=4，虽然也收敛，却需要迭代19次才能得到满足精度要求的解.

利用带参数2的Newton迭代法，取x_0=4可得x_2=4.2999898.