第二章　条件概率与独立性

§2-1条件概率　乘法原理

引子：直到现在，我们计算事件的概率是在样本空间已知的情况下进行的，即除了样本空间（一组固有条件）外得不到其它试验信息。但是，有时知道一个事件H发生了。当陈述与之有关另一事件A的结果时，怎样使用这个信息呢？

例1 考虑有两个孩子的家庭，假设男女出生率一样，则两孩子性别（依大小排列）$S=\{(B,B),(B,G),(G,B),(G,G)\}$且每一个基本事件发生是等可能的。若任选一家庭至少有一个女孩子事件H发生了。求此家庭有一男一女事件A的概率。

解：$P(A)=\frac{2}{4}$， $P(H)=\frac{3}{4}$ $,P(AH)=\frac{2}{4}$

$$P(A|H)=\frac{2}{3}=\frac{P(AH)}{P(H)}>P(A)=\frac{2}{4}$$

例2．设甲袋中装了4个白球2个黑球，乙袋中装了4个黑球，2个白球。掷一枚质量均匀硬币，若正面朝上（H），便从甲袋中随机取一个球；否则（T）从乙袋中随机地取一球。设E_0表示取出黑球事件，若已知H信息条件下，求E_0发生的概率。

解：$S=\{HW_{11},HW_{12},HW_{13},HW_{14},Hb_{11},Hb_{12},$
$TW_{21},TW_{22},Tb_{21},Tb_{22},Tb_{23},Tb_{24}\}$

$P(E_0)=P\{Hb_{11},Hb_{12},Tb_{21},Tb_{22},Tb_{23},Tb_{24}\}=\frac{6}{12}$

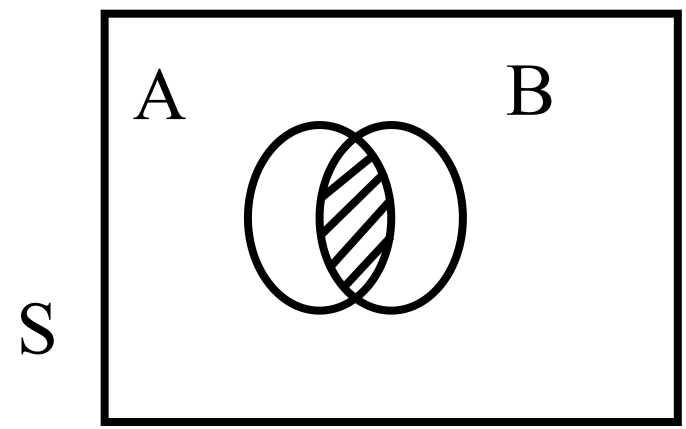
$P(H)=\frac{1}{2}$

$P(HE_0)=P\{Hb_{11},Hb_{12}\}=2/12$

$$P\left(E_0 \mid H\right)=\frac{2}{6}=\frac{\frac{2}{12}}{\frac{1}{2}}=\frac{P\left(E_0 H\right)}{P\left(H\right)}<P\left(E_0\right)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

- Note：对于$\forall e_i \in s,\ P(e_i)=\frac{1}{n}$ 这样才满足古典概型E条件；不难构造反例（只需把例2两袋球对称结构破坏即可！）

例3．考虑E：向有界区域（S）内均匀地掷随机点，事件A表示随机点落在区域A中，事件B表示随机点落在区域B中,这是几何概型随机试验E。求 $P(A|B)$



- 解：$P(A)=L(A)/L(S)$

  $P(B)=L(B)/L(S)$

  $P(AB)=L(AB)/L(S)$

$$P(A|B)=L(AB)/L(B)=\frac{L(AB)}{L(S)}/\frac{L(B)}{L(S)}=P(AB)/P(B)$$

Note：上述古典概型和几何概型例中适用规律在一般情况下不能用纯数学逻辑推导出来，我们需要用此比值$P(A|B)$作为条件概率定义。

（例条件频率--条件统计概率）

定义1 ($P(B)>0$)设A、B为任意两个事件，且$P(B)>0$，则称比值$P(AB)/P(B)$为事件A在事件B发生的条件下的条件概率，记为$P(A|B)$

由事件发生的频率概念亦可类似地引出条件频率，从而与第一章方法与思路类似，我们引入概率的三条公理。

定理1，条件概率$P(A|B)=P(AB)/P(B)$ $(P(B)>0)$满足公理1~3 .

(1) $1\geq P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}\geq 0$

(2) $P(S|B)=P(SB)/P(B)=1$

(3) 设A_1，A_2， …互不相容，则A_1B，A_2B，…，A_nB，…也互不相容，因此

$P\{(A_1+A_2+\ldots+A_n+\ldots)|B\} =P\{(A_1+\ldots+A_n+\ldots)B\}/P(B)$

$=P(A_1B+A_2B+\ldots+A_nB+\ldots)/P(B)$

$=P(A_1|B)+P(A_2|B)+\ldots$

Note：条件概率如同（古典、几何）概率一样满足：

(4)

$$P(\overline{A}\mid B)=1-P(A\mid B)$$

(5) $P(\Phi \mid B)=0$

(6) 若$A_1 \subset A_2$则$P(A_1|B) \le P(A_2|B)$

$P((A_2-A_1)|B))=P(A_2|B)-P(A_1|B)$

(7) $P(A_1 \cup A_2|B)$

$=P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1A_2|B)$

当$B=S$时 $P(A|S)=P(A)$

关系：条件概率可当作无条件概率的一般形式，事件概率有条件！

下面观察公式：$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ (P(B)>0)

$$P(AB)=P(B)P(A|B)\ (P(B)>0)$$

$$P(AB)=P(A)P(B|A)\ (P(A)>0)$$

具有重要理论与实际意义

定理2（乘法原理）若A，B为两个事件，

$P(A)>0, P(B)>0$

则

$$P(AB)=P(A)P(B|A)\ (P(A)>0)$$

$$P(AB)=P(B)P(A|B)\ (P(B)>0)$$

定理3 设A_1，A_2，…,A_n为n 个事件，

$P(A_1 \ldots A_{n-1})>0$,

则有：

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\ldots P(A_n|A_1\ldots A_{n-1})$$

证由于 $A_1 \supset A_1A_2 \supset \cdots \supset A_1A_2\ldots A_{n-1}$

$P(A_1)\geq P(A_1A_2) \geq\ldots \geq P(A_1A_2\ldots A_{n-1})>0$

因此右边= $P(A_1)\dfrac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}\cdots\dfrac{P(A_1A_2\cdots A_n)}{P(A_1A_2\cdots A_{n-1})}$

$$= P(A_1A_2\cdots A_n)$$

例4 包装了的玻璃器皿第一次扔下了被打破概率为0.4，若第一次扔下未打破，第二次扔下被打破概率为0.6，若第二次扔下未打破，第三次扔下被打破概率为0.9，今将这种包装了的器皿连续扔三次，求器皿被打破A的概率。 A_i

解：设A_i表示第i次扔下器皿被打破事件（i=1，2，3）

(1) $P(A)= 1-P(\overline{A_1},\overline{A_2},\overline{A_3})$

$$=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)=0.976$$

(2) $A=A_1+\overline{A_1}A_2+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$

$$P(A)=P(A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})+P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(A_3|\overline{A_1}\,\overline{A_2})=0.4+(1-0.4)\times 0.6+(1-0.4)\times(1-0.6)\times 0.9$$

$$=0.976$$

例5（Polye摸球罐）

§2.2　全概率公式

概率论的重要研究课题之一是希望从已知的简单事件的概率算出未知的复杂事件的概率。于是一个复杂事件常常分解为若干

个互不相容的简单事件的和，再利用概率的可加性和条件概率乘法公式可计算复杂事件的概率。——全概率公式作用重要性。

定理4（全概率公式）设$A_1, \ldots, A_n, \ldots$ 为互不相容事件且$P(A_i)>0$,则有：

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i = S, \forall \text{事件 } A \subset S$$

$$P(A)= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) P(A \mid A_i)$$

证明：

$$\because A \subset S = A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots$$

$$\therefore A = AS = \sum_{i=1}^{\infty} A_i A$$

$\because A_1, \cdots, A_n, \cdots$是互不相容事件

$\therefore A_1 A, \cdots, A_n A, \cdots$也是互不相容事件

故$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) P(A \mid A_i)$

例1、设某袋中有6个白球4个黑球，甲、已、丙三人依次摸一球，求甲、已、丙三人分别摸到黑球的概率。

补充（一般抓阄问题）(利用Polya摸球罐）

解：设A,B,C分别表示甲、已、丙三人摸到黑球。

则

$$P(A)=\frac{4}{10},\quad B=AB+\overline{A}B,\overline{B}=A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{B}$$

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{4}{10}$$

$$C=BC+\overline{B}C=(AB+\overline{A}B)C+(A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{B})C$$

$$P(C)=P(ABC+\overline{A}BC+A\overline{B}C+\overline{A}\,\overline{B}C)=\frac{4}{10}$$

$$P(C)=P(ABC+\overline{A}BC+A\overline{B}C+\overline{A}\,\overline{B}C)$$

$$=P(ABC)+P(\overline{A}BC)+P(A\overline{B}C)+P(\overline{A}\,\overline{B}C)$$

$$=P(A)P(B\mid A)P(C\mid AB)+P(\overline{A})P(B\mid \overline{A})P(C\mid \overline{A}B)$$

$$+P(A)P(\overline{B}\mid A)P(C\mid A\overline{B})+P(\overline{A})P(\overline{B}\mid \overline{A})P(C\mid \overline{A}\,\overline{B})$$

$$=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}+\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}+\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}+\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}$$

$$=\frac{4}{10}$$

例2（EX18) 甲、乙、丙三人向一飞机射击，设他们命中率分别为0.4,0.5,0,7，又设飞机中一弹被击落概率0.2，中两弹飞机被击落概率为0.6，中三弹飞机必然被击落，今三人各射击一次，求飞机被击落A的概率。

解：设A_i表示飞机中i弹(i=0,1,2,3)，B_j(j=1,2,3)分别表示甲、乙、丙三人分别击中飞机事件。

这里有：$A \subset S = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$

$A_0 = \overline{B_1}\,\overline{B_2}\,\overline{B_3}$，$A_3 = B_1 B_2 B_3$

$$A_1 = B_1\overline{B_2}\,\overline{B_3} + \overline{B_1}\,B_2\overline{B_3} + \overline{B_1}\,\overline{B_2}\,B_3$$

$$A_2 = B_1 B_2\overline{B_3} + B_1\overline{B_2}\,B_3 + \overline{B_1}\,B_2 B_3$$

$$P(A_1) = P(B_1\overline{B}_2\overline{B}_3 + \overline{B}_1 B_2\overline{B}_3 + \overline{B}_1\overline{B}_2 B_3) = 0.36$$

$$P(A_2) = P(\overline{B}_1 B_2 B_3 + B_1\overline{B}_2 B_3 + B_1 B_2\overline{B}_3) = 0.41$$

$$P(A_3) = P(B_1)P(B_2)P(B_3) = 0.4 \times 0.5 \times 0.7 = 0.14$$

已知$P(A|A_1)=0.20$

$P(A|A_2)=0.60$

$P(A|A_3)=1$

于是可利用全概率公式：

$$P(A)$$

$$=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(A\mid A_i)$$

$$=0.20\times0.36+0.60\times0.41+1\times0.14=0.458$$

例3(EX6). 设甲袋中有3个白球2个黑球，乙袋中有4个白球4个黑球，从甲袋中任取2球放入乙袋，再从乙袋中任取一球，求该球为白球A的概率。

解：设A_i表示从甲袋中取出i个白球事件（i=0,1,2）

$$A \subset S = A_0 + A_1 + A_2$$

$$P(A) = P(A_0)P(A|A_0) + P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) = 13/25$$

$$\because\ A = A_0 A + A_1 A + A_2 A$$

$$\therefore\ P(A) = \sum_{i=0}^{2} P(A_i) P(A \mid A_i)$$

$$= \frac{C_2^2}{C_5^2} \times \frac{4}{10} + \frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} \times \frac{5}{10} + \frac{C_3^2}{C_5^2} \times \frac{6}{10}$$

$$= \frac{13}{25}$$

例4（EX9). 一盒中装有15只乒乓球，其中9个新球，第一次抽取三只，赛完后放回盒子中；第二次同样任取三只，求第二次取出三球均为新球事件A的概率。

解：设A_i表示第一次取出i个新球事件（i=0,1,2,3）

$$\mathrm{A}\subset\mathrm{S}=\sum_{i=0}^{3}A_i$$

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(A|A_i)$$

$$= \frac{C_6^3}{C_{15}^3} \times \frac{C_9^3}{C_{15}^3} + \frac{C_9^1 C_6^2}{C_{15}^3} \times \frac{C_8^3}{C_{15}^3}$$

$$+ \frac{C_9^2 C_6^1}{C_{15}^3} \times \frac{C_7^3}{C_{15}^3} + \frac{C_9^3}{C_{15}^3} \times \frac{C_6^3}{C_{15}^3}$$

$$= 0.089$$

§2.3 贝叶公式

1763年一位精通数学和哲学的英国牧师已逝世二周年，其生前朋友普赖斯将他的遗著《论机遇理论中一个问题的解决》推荐给皇家学会并将此作发表于当年的《哲学会报》上，贝叶斯因此而不朽，后来的数学家将之简化为今天的贝叶斯公式。它是利用先验概率计算后验

概率的计算公式，此工作在故障诊断，模式识别、数理统计，预测理论等方面有十分广泛的用途。

例1．电报发射台发出“·”“－”比例为5:3，由于干扰，传送“·”时失真率为2/5，传送“－”时失真率为1/3，求接受台收到“·”时发出信号恰是“·”概率。

解：设A_0，A_1分别表示发射台发出“.”，“—”事件，B_0,B_1分别表示接受台接到信号“.”“—”事件。

由题设

$$P(A_0)=\frac{5}{8} \qquad P(A_1)=\frac{3}{8}$$

$$P(B_1|A_0)=\frac{2}{5} \qquad P(B_0|A_0)=\frac{3}{5}$$

$$P(B_0|A_1)=\frac{1}{3} \qquad P(B_1|A_0)=\frac{2}{3}$$

$$P(A_0|B_0)=P(A_0)P(B_0|A_0)/[P(A_0)P(B_0|A_0)+P(A_1)P(B_0|A_1)]$$

$$=\frac{5}{8}\times\frac{3}{5}/\left(\frac{5}{8}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{4}$$

$[\because B_o \subset S = A_0 + A_1$

$\therefore B_0 = A_0B_0 + A_1B_0$

于是$P(B_0) = P(A_0)P(B_0|A_0) + P(A_1)P(B_0|A_1)$

$$=\frac{5}{8}\times(1-\frac{2}{5})+\frac{3}{8}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}]$$

$$P(A_1|B_1)=P(A_1)P(B_1|A_1)/[P(A_0)P(B_1|A_0) +P(A_1)P(B_1|A_1)]$$

$$= \frac{3}{8}\times\frac{2}{3} \Big/ \left(\frac{5}{8}\times\frac{2}{5}+\frac{3}{8}\times\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

例2 在医疗诊断中，为了诊断病人到底患了毛病中的哪一种($A_1,A_2,\ldots A_n$，…)，对病人进行观察与检查，确定了某个指标B（例体温、脉博、血液中转氨酶含量等），他想利用这类指标帮助诊断，亦可用Bayes公式，首先必须确定先验概率 $P(A_i)$ 以往资料可给出一些初步数据；其次是要确定$P(B|A_i)$,这里主要依靠医学知识、信息B引起了对事前概率的重新估价

于是利用Bayes 公式可算出$P(A_i|B)$，显然对应于较大$P(A_i|B)$的病因“A_i”，应多加考虑，在实际中，检查指标B一般有多个，综合所有的后验概率，对诊断有很大帮助，（此法常用于计算机自动诊断或辅助诊断）

图表：

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[dr] & & \\
A_2 \arrow[r] & B \arrow[r] & P(A_i|B) \\
A_\mathrm{n} \arrow[ur] & & (i=1,2,\ldots,n,\ldots)
\end{tikzcd}$$

定理(Bayes' theorem）设$A_1,\ldots A_n,\ldots$为可数无穷多个互不相容事件，

$P(A_i)>0(i=1,2,\cdots)$且有 $S=\sum_{i=1}^{\infty}A_i$，若对于 $\forall$事件$B\subset S$， $P(B)>0$

则有：

$$P(A_i|B)=P(A_i)P(B|A_i)/\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)P(B|A_i)$$

$(i=1,2,\ldots n,\ldots)$

Note:上式中$P(A_i)$称为先验概率：在试验前就已知的，它常常是以往经验的总结。$P(A_i|B)$称为后验概率：它反映了试验之后对各种原因发生的可能性大小的新知识。Bayes formula实质：利用$P(A_i)$，$P(B|A_i)$，(i=1,2,…n,…)求$P(A_i|B)$，(i=1,2,…n,…)信息B引起了对先验概率$P(A_i)$的重新估价。

例3　设袋1中装了5个白球与4个黑球，把4个球转移到第二只袋中去，然后从袋2 中取出一个球，发现它是黑球，求从剩下的三个球中取到一个白球概率。

解：设A_i表示从袋1中取出4个球中有i个黑球事件(i=0，1,2,3,4),B表示从袋2中取到一个黑球事件,A表示从剩下的三个球中取到一个白球事件

$$B\subset S=\sum_{i=0}^{4} A_i\,,\qquad B= B\,S=\sum_{i=0}^{4} BA_i$$

$$P(B)=\sum_{i=0}^{4} P(A_i)\ P(B|A_i)$$

$$=\ \sum_{i=0}^{4}\frac{C_4^i C_5^{4-i}}{C_9^4}\cdot\frac{i}{4}=\frac{4}{9}$$

$$P\left(A\mid B\right)=\frac{P\left(AB\right)}{P\left(B\right)}=\frac{P\sum_{i=0}^{4} A_i BA}{P\left(B\right)}$$

$$=\sum_{i=0}^{4}\ P(A_i)P(B|A_i)P(A|A_iB)/P(B)$$

$$=[\frac{C_4^0C_5^4}{C_9^4}\times\frac{0}{4}\times\frac{3}{3}+\frac{C_4^1C_5^3}{C_9^4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{3}+$$

$$\frac{C_4^2C_5^2}{C_9^4}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{C_4^3C_5^1}{C_9^4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{C_4^4C_5^0}{C_9^4}\times\frac{4}{4}\times\frac{0}{3}]/\frac{4}{9}$$

=0.625

[因为 P(AB)=$\sum_{i=0}^{4} P(A_i)P(B|A_i)P(A \mid A_iB)$

=5/18]

例4 在上节例3中已知乙袋中取出的球是白球B，求从甲袋中取出的球是一白一黑A_1的概率。

解：由例3知：

$$P(B)=\sum_{i=0}^{2}P(A_i)P(A\mid A_i)=\frac{13}{25}$$

∴所求概率为：

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1 B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{13/25}$$

$$= \left(\frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2} \times \frac{5}{10} \right) \Big/ \frac{13}{25} = \frac{15}{26}$$

§2.4 事件的独立性

2.4.1　两个事件的独立性

引子：前边论述过，一般来说条件概率 $P(B|A)\neq P(B)$，即事件A发生对事件B发生的概率是有影响的，若事件A发生对B发生概率无影响，有：$P(B|A)=P(B)$ $(P(A)>0)$于是

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(A)P(B)$$

这就是事件A，B相互独立的意义。显然它是事件概率性质，它是条件概率的特例。

举例说明，事件的独立性在事件概率计算与概率论理论研究中具有重要地位。

定义1　设A、B为S中两个事件，若$P(AB)=P(A)P(B)$，则称A，B两个事件相互独立。

定理1 若$P(A)>0$且A,B独立，则

$$P(B|A)=P(B)$$

定理2 若A、B相互独立，则A与$\overline{B}$, $\overline{A}$与B, $\overline{A}$与$\overline{B}$亦独立。

证明:

$$\because P(A\overline{B}) = P(A-B) = P(A-AB)$$

$$= P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B)$$

$$= P(A)(1-P(B)) = P(A)P(\overline{B})$$

$\therefore A$与$\overline{B}$独立，同理 $\overline{A}$与B

$$P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{B} - A) = P(\overline{B} - A\overline{B})$$

$$= P(\overline{B}) - P(\overline{B}A) = P(\overline{B}) - P(\overline{B})P(A)$$

$$= P(\overline{B})(1 - P(A)) = P(\overline{B})P(\overline{A})$$

$\therefore \overline{A}$与$\overline{B}$独立

Note:（1）事件A,B中有一个概率为0or1，则A，B相互独立；

特别A、B中有一个为S or ϕ，则A、B独立。

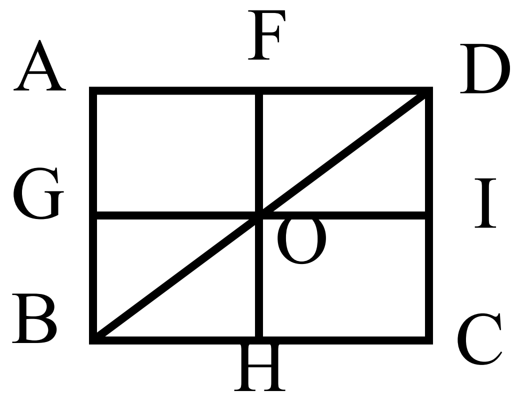
（2）两个事件独立与两个事件互斥是两个不同的概念；（三个例子）

(3)定理2应用的注。

例1 设E为几何概型E，令

M_1="M落在矩形$AGID$内"，

M_2="M落在矩形$ABHF$内"，M_3="M落在ABD内"，其中ABCD为正方形，而F,G,H,I为正方形四边的中点，问M_1 ,M_2, M_3事件是否两两独立？



解　　　M_1, M_2独立，

M_1, M_3不独立,

M_2, M_3不独立,

$$P(M_1) = P(M_2) = \frac{1}{2} = P(M_3)$$

$$P(M_1 M_2) = \frac{1}{4} = P(M_1)P(M_2)$$

但

$$P(M_1M_3)=\frac{3}{8}\neq P(M_1)P(M_3)=\frac{1}{4}$$

$$P(M_2M_3)=\frac{3}{8}\neq P(M_2)P(M_3)=\frac{1}{4}$$

∴M_1与M_2独立，但M_1与M_3，M_2与M_3均不独立。

例2 设甲、乙二人独立地射击同一目标，他们击中目标概率分别为0.9和0.8，今各射击一次，求目标被击中的概率。

解：设A、B表示甲、乙两人分别击中目标事件，C表示目标被击中事件：

$$(1) C = A \cup B$$

$$P(C)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.98$$

（∵ A、B独立，∴P(AB)=P(A)P(B))

$(2)P(C)=1-P(\overline{C})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})=0.98$

定义2（三个事件独立性）

2.4.2 多个事件的独立性

- 定义3 设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$是n个事件，若对

$\forall k(1<k\le n)$与$\forall 1\le i_1<\cdots<i_k\le n$满足：

$$P(A_{i1}A_{i2}\ldots A_{ik})=P(A_{i1})\ldots P(A_{ik})$$

则称：$A_1,\ldots,A_n$相互独立的。

理论上验算：

$C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=(1+1)^n-(C_n^0+C_n^1)=2^n-(1+n)$次

$n=3$，验算：$2^3-(3+1)=4$等式。

推论：若n个事件相互独立，则它们中的任何$m(2\le m\le n)$个事件亦相互独立。

补充定理：设$A_1,\ldots,A_n$这n个事件相互独立，若把其中$m(1\le m\le n)$个事件相应地换成它们的对立事件，则新的n个事件亦相互独立。

（数学归纳法）

Note：**判定多个事件独立性的实际原则。**（例：保险，测量问题，可靠性问题，破译密码，打靶问题等。）

m^2-1

例3．有m^3块外形相同的木板，其中 m^2-1

A_0 m^2-1

上分别写有 B_0 一块上写有$A_0B_0C_0$，其余

C_0

不写，今从m^3块上随机地抽取一块，设抽取

一块写有A_0、B_0、C_0事件分别为A，B，C，问A，

B，C是否相互独立？

解：$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{m}$

$$P(AB)=P(AC)=P(BC)$$

$$=1/m^3 \neq P(A)P(B)=\frac{1}{m^2}$$

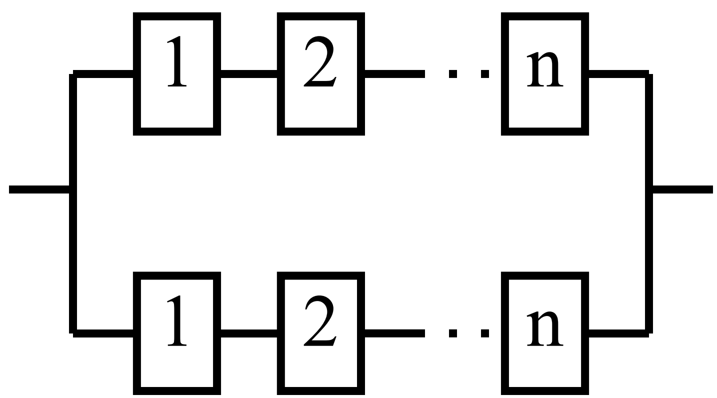
但

$$P(ABC)=\frac{1}{m^3}=P(A)P(B)P(C)$$

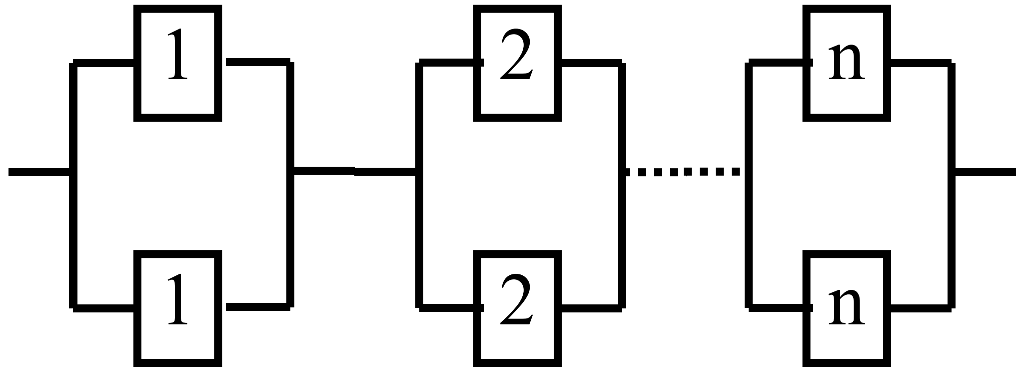
所以，A，B，C是不两两独立。（为证明三个事件独立性，必须证明四个等式都成立。）

- 例3’（三个事件独立性反例）
- 1)(Bernstain反例);
- 2)若一个均匀对称色子;若1点(红,白,黑),2点(红),3点(红,黑), 4点(红,白),5点(白),6点(黑)或红(1;2;3;4);黑(1;3;6);白(1;4;5); 用A,B,C分别表示色子出现红,白,黑事件,问A,B,C是否相互独立?为什么?

例4．（关于可靠性系统例）元件可靠性，系统之可靠性。求下面系统I和系统II之可靠性。并比较（I）（II）系统可靠性大小。设每个元件可靠性为$r(0<r<1)$且每个元件能否正常工作相互独立。



I



II

解：

（1）R_C—每条支路的可靠性

R_S—系统I之可靠性

A_i表示每个元件正常工作事件,G_1,G_2表示通路（一），（二）正常工作事件

$$R_C = P(A_1 A_2 \cdots A_n) = r^n,$$

或者

$$R_S = P(G_1 \cup G_2) = 1 - P(\overline{G_1}\,\overline{G_2})$$

$$R_S = P(G_1) + P(G_2) - P(G_1 G_2)$$

$$= 2R_C - R_C^2 = R_C(2 - R_C)$$

$R_S > R_C$表明增加一条通路增强了系统之可靠性。

（2）R_S'—系统II可靠性

R'—每对并联元件可靠性。

$$R' = r(2-r),$$

$$R_S' = (R')^n = r^n(2-r)^n = R_C(2-r)^n$$

$R_S' > R_S$（数学归纳法）

用附加元件方法亦能增加系统可靠性。

例5．某考生想借一本书，分别到三个图书馆借。对每一个图书馆而言，有无此书概率相等；若有，能否借到概率亦相等。假设这三个图书馆采购，出借图书相互独立，求该生借到书事件A概率。

解：设C_i表示第i个图书馆有此书事件（i=1,2,3）

B_i表 示从第i个图书馆借到此书（i=1,2,3）

$$A = AC_1 \cup AC_2 \cup AC_3 = B_1 \cup B_2 \cup B_3$$

$$P(A) = P(B_1 \cup B_2 \cup B_3)$$

$$= 1 - P(\overline{B_1}\,\overline{B_2}\,\overline{B_3})$$

由题设 B_1，B_2，B_3 相互独立：

$$P(B_i) = P(C_i)P(A \mid C_i) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} (i = 1,2,3)$$

$$P(\overline{B_i}) = 1 - 1/4 = 3/4$$

$$\therefore P(A) = 1 - (\frac{3}{4})^3 = \frac{37}{64}$$

§2-5重复独立试验、二项概率公式

引子：在第一章我们曾经论述了概率论是研究随机现象统计规律的一门数学学科。研究随机现象的基本手段：在相同条件下进行大量的重复试验或观察。

例：掷一枚质量均匀对称硬币或骰子n次；Galton板；n次打靶E；从一批产品中有放回地抽取n件产品检验；从某袋中有放回地摸n次球检验。等等，这些例子共性：n次E对应n个结果相互独立。于是n次重复独立E的数学刻划需借助于n个事件独立性概念！

重复独立试验：$\Omega_1=\Omega_2=\ldots=\Omega_n$（or $S_1=S_2=\ldots=S_n$）且有关事件的概率保持不

变，各次E是相互独立的。它是作为“在同样条件下重复试验”的数学模型而出现的，它在概率论中很有地位：因为随机现象的统计规律性只有在大量重复试验中才会显示出来。n次不放回摸球模型则是n个试验不独立的简单例子。

定义1 在相同条件下将同一E重复进行n次。而每次E对应一个可能结果。若这任

意n个结果之间 相互独立，则称这n次E是相互独立的或称这n次E为n次重复独立的试验。怎样判断n次重复独立试验呢？基于实际原则（利于解决实际问题），理论上证明繁杂！

一类重要的重复独立E：n重贝努里E。

定义2 若E只有两个结果：A与$\overline{A}$,则这 随机试验称之为贝努里E；它的n次重复独立E，称为n重贝努里E。

（1）对于一次贝努里E, $S=\{A,\overline{A}\}$, $A-E$成功, $\overline{A}-E$ 失败，$P(A)=P$, $P(\overline{A})=1-P$

（2）n重贝努里E是相互独立的，令

$A_i=\{$第i次E中出现$A\}$ $i=\overline{1,n}$, $\overline{A_i}=\{$第i次E中出现$\overline{A}\}$，对 $\forall C_1$，C_2, …，C_n，其中

$C_i=A_i$ or $\overline{A_i}$ $i=\overline{1,n}$，则利用试验独立性及补充定理：

$$P(C_1C_2\cdots C_n)=P(C_1)P(C_2)\cdots P(C_n)$$

（3）有些E的结果虽然不止两个，但若我们只注意某一事件发生，则这些E亦可化为n重贝努里E（例摸球，有放回检验产品）

例1．设有一批N件产品，其中含有M件正品，从中分别按有放回的抽样方式任取$n(n\le N)$件，问抽取的n件产品中恰有m件正品B_m概率是多少？

解：设B_m表示恰好抽得m件正品事件，A_i表示第i次取得正品事件（$i=\overline{1,n}$），$\overline{A_i}$表示第i次取得次品事件。

这是一个n重贝努里E，$P(A_i)=\dfrac{M}{N}$，

$P(\overline{A_i})=1-\dfrac{M}{N}$（$i=\overline{1,n}$），$\overline{A_i}$表示第 i 次取得次品事件。

于是：

$$B_m = A_1 \cdots A_m \overline{A}_{m+1} \cdots \overline{A}_n + A_1 \cdots A_{m-1} \overline{A}_m A_{m+1} \overline{A}_{m+2} \cdots \overline{A}_n + \cdots + \overline{A}_1 \overline{A}_2 \cdots \overline{A}_{n-m} A_{n-m+1} \cdots A_{n-1} A_n$$

因为：

$A_1 \cdots A_m \overline{A}_{m+1} \cdots \overline{A}_n, \cdots,$

$\overline{A}_1 \cdots \overline{A}_{n-m} A_{n-m+1} \cdots A_n$

共C_n^m个事件互不相容，利用试验独立性与补充Th知：

$$P(B_m)=P(A_1\cdots A_m\overline{A}_{m+1}\cdots\overline{A}_n)+\cdots+$$

$$P(\overline{A}_1\cdots\overline{A}_{n-m}A_{n-m+1}\cdots A_n)$$

$$=C_n^m(P(A))^m(1-P(A))^{n-m}$$

$$=C_n^m(\frac{M}{N})^m(1-\frac{M}{N})^{n-m}$$

Theorem1.若在n重贝努里E中，成功的概率为P（0<P<1）则在n重贝努里E中成功恰好发生k次概率为：

$$P_n(k) = C_n^k P^k q^{n-k}$$

其中：$p + q = 1, k = 0,1,2\cdots,n$

推论：$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1$

两种方法证明

（1）B_k表示成功k次事件（k=0,1,2,…n）

证 $\because S=B_0+B_1+\ldots+B_n$ *or* $S=\sum_{i=0}^{n}B_i$

$$\therefore \quad 1=P(S)=\sum_{k=0}^{n}P(B_k)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k p^k q^{n-k}$$

(2)利用Newton二项式公式

$$\sum_{k=0}^{n}P_n(k)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k p^k q^{n-k}=(q+p)^n=1$$

例2．已知一大批某种产品中有30%的一级品，现从中随机地抽取5个样品，求：

（a）5个样品恰有两个一级品概率；

（b）5个样品至少两个一级品的概率。

解：设B_i表示5个样品中恰有i个一级品事件（i=0,1,2,3,4,5）由于5个样品相对于一

大批产品而言是小样本。于是无放回抽取5件产品可当作有放回抽取5件产品。这问题可处理为5重贝努里E，成功概率p=0.30。

(a)

$$P(B_i) = C_5^i p^i (1-p)^{5-i} (i = 0,1,2,4,5)$$

$$P(B_2) = C_5^2 p^2 (1-p)^{5-2} = 0.309$$

(b) $$P(B)=1-P(\overline{B})=1-P(B_0)-P(B_1)$$
$$=1-\sum_{i=0}^{1}C_5^i p^i(1-p)^{5-i}=0.472$$

例3 设昆虫产k个卵的概率 $p_k=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, 又设一个卵能孵化成昆虫的概率为$p$，若卵的孵化是相互独立的，问此昆虫的下一代有$L$条虫事件A的概率。

解；设A_k表示昆虫产k个卵事件（k=0,1,2,…）

$$A \subset S = A_0 + A_1 + \cdots + A_L + A_{L+1} + \cdots$$

$$P(A) = \sum_{k=0}^{\infty} P(A_k) P(A \mid A_k)$$

$$= \sum_{k=L}^{\infty} P(A_k) P(A \mid A_k)$$

$$= \sum_{k=L}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot C_k^L p^L (1-p)^{k-L}$$

$$= \sum_{k=L}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot \frac{k!}{L!(k-L)!} P^L (1-P)^{k-L}$$

$$= [\sum_{k=L}^{\infty} \frac{\lambda^{k-L}}{(k-L)!} (1-p)^{k-L}] \frac{(\lambda p)^L}{L!} e^{-\lambda}$$

$$= \frac{(\lambda p)^L}{L!} e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^m}{m!}$$

$$= \frac{(\lambda p)^L}{L!} e^{\lambda(1-p)} \cdot e^{-\lambda} = \frac{(\lambda p)^L}{L!} e^{-\lambda P}$$

$$L = 0, 1, 2, \cdots$$

例4 设某种数字传输器以512×10^3个0或1/S的序列传送消息，由于干扰，在传送过程中会将0或1误为1或0的情况，这两种情形称为“误码”。误码概率为$P=10^{-7}$，求在10S内出现一个误码概率。

解：这是n=512×10³×10重贝努里E，成功概率P=10^{-7}

$$P_{512\times10^4}(1)=C^1_{512\times10^4}10^{-7}(1-10^{-7})^{512\times10^4-1}$$

直接计算十分复杂，这是计算的复杂性问题！关于计算的复杂性问题被美籍华人著名数字家陈省身教授将之列为21世纪待解决问题，称之为算法世纪！

引入二项概率近似计算公式：泊松近似公式！

§2.6　泊松逼近

引子：若在每次贝努里E中成功概率P很小，则称之为稀有事件。那么当n充分大时，n重贝努里E中稀有事件恰好出现k次概率计算相当复杂。为此1837年法国数学家Poisson引入了二项概率的一个逼近定理，从而为我们实际计算提供了一个切实可行的近似公式！

定理2（泊松定理）在n重贝努里E中，事件A在一次试验中出现的概率为P_n（它与E的总数n有关），若$np_n= \lambda$（正常数）则有：

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k = 0,1,2,\cdots$$

Proof：$\because P_n = \frac{\lambda}{n}$对于$\forall k$,

$$P_n(k) = C_n^k \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

[Note：nP$_n$= λ 条件可改为

$$\lim_{n \to +\infty} nP_n = \lambda, \qquad P_n = \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad]$$

$$(n \to +\infty)$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^k \cdot \lambda^k \cdot$$

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \cdot \left[\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right]^{-\lambda} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Note：（1）当 $n \geq 10, P \leq 0.1$ 时 $\lambda \approx np$

$$P_n(k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

例1 计算概率

$$P_{512\times10^4}(1) = C_{512\times10^4}^1 10^{-7} (1-10^{-7})^{512\times10^4-1}$$

解： $n = 512\times 10^4 >> 10, p = 10^{-7} << 0.1$

$\lambda \approx np = 0.512$

应用泊松近似公式：

（1） $P_{512\times 10^4}(1) \dot{=} \frac{0.512}{1!} e^{-.512} \approx 0.512\times 0.6 \approx 0.30$

（2）

$$\frac{0.512\, e^{-.512}}{1!} \approx \frac{0.512\, e^{-.512}}{1!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-0.5}\times 0.5^k}{k!} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{-0.5}\times 0.5^k}{k!}$$

$$= 0.393469 - 0.090204 \approx 0.30$$

Note：参保人为同年龄和同社会阶层的人

例2（寿命保险问题）在保险公司里有2500人参加了人寿保险，每个参加保险的人，一年要付保险费12元，一年内死亡，其家属可到公司领取2000元丧葬费。设一年内每人死亡的概率为0.002，求（a）保险公司亏本事件A概率；（b）保险公司获利不少于10000元事件B的概率。

解：（a）一年内总收入：2500×12=30000（元），设一年内死亡X人，于是保险公司亏本A发生

$$\Leftrightarrow 2000X>30000 \Leftrightarrow X>15\text{（人）}$$

这是一个n=2500重，成功概率P=0.002，贝努里E。

$$P(A)=\sum_{k=16}^{2500} C_{2500}^{k} P^{k}(1-p)^{2500-k} = 1-\sum_{k=0}^{15} C_{2500}^{k} P^{k}(1-p)^{2500-k}$$

$$\approx 1-\sum_{k=0}^{15}\frac{5^{k}}{k!}e^{-5} = \sum_{k=16}^{\infty}\frac{5^{k}}{k!}e^{-5} = 0.000069 \qquad \lambda \approx np = 2500\times 0.002 = 5$$

（b）事件B发生等价于30000-2000x$\geq$ 10000

即x$\leq$ 10

$$P(B)=\sum_{k=0}^{10} C_{2500}^{k} P^{k}(1-p)^{2500-k} \approx \sum_{k=0}^{10} \frac{5^{k}}{k!} e^{-5}$$

$$=1-\sum_{k=11}^{\infty} \frac{5^{k}}{k!} e^{-5}$$

$$=1-0.013695=0.986305$$

保险公司发财的秘密！！

例3 设一批产品次品率不超过0.5%，今从中随机地抽取200件样品进行检查，发现5件次品，问能否相信"次品率不超过0.5%"假设。

解：假设这批产品次品样率为p=0.5%，设A表示抽取200件产品中次品数不少于5的事件。

$$P(A)=\sum_{k=5}^{200} C_{200}^{k} P^{k}(1-P)^{200-k}$$

- 因 $n=200>>10, P=0.5\%<<0.1$

$$\lambda \doteq np=1$$

$$P(A) \doteq 1-\sum_{k=0}^{4} \frac{1}{k!} e^{-1}=\sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{k!} e^{-1}=0.0036$$

小概率原理：（1）概率很小的事件在一次E中，实际上几乎不可能发生；（2）当n充分大时事件A一定能够发生！

据此判断，事件A在一次E中几乎不可能发生，但事件A实际上发生了，与小概率原理矛盾，从而推断这批产品的次品率不超过0.5%假设不可信。

习题集（Chapter2)

1　设M件产品有m件废品，从中任取两件，

（1）在所取产品中发现有一件是废品，求另一件也是废品的概率。

（2）在所取产品中发现有一件是正品，求另一件是废品的概率。

解：设A_i="两件中恰有i件废品"，$i=0,1,2$

B=“两件中有一件废品”

C=“两件中有一件正品”

（1）$B= A_1 \cup A_2$，因A_1与A_2互不相容，故

$$P(B)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{C_{M-m}^{1}C_{m}^{1}}{C_{M}^{2}}+\frac{C_{m}^{2}}{C_{M}^{2}}$$

$$=\frac{2(M-m)m+m(m-1)}{M(M-1)}=\frac{(2M-m-1)m}{M(M-1)}$$

所求概率为

$$P(A_2 \mid B)=\frac{C_m^2}{C_M^2} / \frac{(2M-m-1)m}{M(M-1)}=\frac{m-1}{2M-m-1}$$

（2） $C = A_0 \bigcup A_1$

$$P(C)=\frac{C_{M-m}^2}{C_M^2}+\frac{C_{M-m}^1 C_m^1}{C_M^2}=\frac{(M-m)(M+m-1)}{M(M-1)}$$

所求概率为

$$P(B \mid C)=\frac{P(BC)}{P(C)}=\frac{P(A_1)}{P(C)}=\frac{2(M-m)m}{M(M-1)}$$

$$/ \frac{(M-m)(M+m-1)}{M(M-1)}=\frac{2m}{M+m-1}$$

2.设 $P(A)=P$，$P(B)=1-\varepsilon$，证明

$$\frac{P-\varepsilon}{1-\varepsilon} \le P(A|B) \le \frac{P}{1-\varepsilon}$$

证 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(AB)}{1-\varepsilon}$

因 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)\le 1$ 故

$$P(AB)\ge P(A)+P(B)-1$$

$$=P(A)-[1-P(B)]=P-\varepsilon$$

即 $$\frac{p-\varepsilon}{1-\varepsilon} \le \frac{P(AB)}{1-\varepsilon}$$

又 $$P(AB) \le P(A) = P$$

故不等式得证。

3．一批产品中有 96%的产品是合格品，而在 100 个合格品中平均有 75 个是一等品，今从这批产品中任取一件，求它是一等品的概率。

解：设 A=“任取一件产品是合格品”，
B=“任取一件产品是一等品”，则 B=AB，
于是

$$P(B) = P(AB) = P(A)P(B \mid A)$$
$$= 0.96 \times 0.75 = 0.72$$

4．一批产品共 100 个，其中有 10 个是次品，每次从中任取一个产品，取后不放回，求第三次才取到正品的概率。

解：设 A_i=“第 i 次取到的产品是正品”，i=1,2,3,A=“第三次才取到正品”，则

$$A=\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$$

$$P(A)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}\mid\overline{A_1})P(A_3\mid\overline{A_1}\,\overline{A_2})$$

$$=\frac{10}{100}\times\frac{9}{99}\times\frac{90}{98}=0.0084$$

5　电报发射台发出“ •”和“—”的比例是5:3。由于干扰，传送“ •”时失真率为2/5，传送“—”时失真率为1/3，求接收台到“ •”时发出信号恰是“ •”的概率。

解：设 A=发出“ •”，B=收到“ •”则

$$B = AB \cup \overline{A}B$$

由贝叶斯公式

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)P(B \mid A)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{8} \times \frac{3}{5}}{\frac{5}{8} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

6．一袋中装有 m 个正品硬币，n 个次硬币（两面均有国徽），在袋中任取一枚硬币，将其投掷 r 次，每次都得到国徽，求这只硬币是正品的概率。

解：设 A=“所取硬币为正品”，B=“任取一硬币掷 r 次得 r 次国徽”，则

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$$

$$=\frac{m}{m+n}\left(\frac{1}{2}\right)^r+\frac{n}{m+n}\times 1=\frac{m+n\cdot 2^r}{(m+n)2^r}$$

$$P(A|B)=P(A)P(B|A)\Big/P(B)=\frac{m}{m+n\cdot 2^r}$$

7　甲、乙、丙三人分别向一架飞机进行射击，设他们的命中率分别为 0.4,0.5,0.7。又设飞机中一弹而被击落的概率为 0.2，中两弹而击落的概率为 0.6，中三弹必然被击落。今三人各射击一次，求飞机被击落的概率。

解：设 A=飞机被击落，B_i=飞机中 i 弹，i=1,2,3

则 $A = B_1 A \bigcup B_2 A \bigcup B_3 A$

由全概率公式

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)$$

$$+ P(B_3)P(A|B_3) = 0.2 \times P(B_1)$$

$$+ 0.6 \times P(B_2) + P(B_3)$$

为求出 $P(B_1)$，$P(B_2)$，$P(B_3)$，设 C_j=第 j 个人击中，j=1(甲)，2（乙），3（丙），则

$$B_1 = C_1 \overline{C_2}\,\overline{C_3} + \overline{C_1} C_2 \overline{C_3} + \overline{C_1}\,\overline{C_2} C_3$$

$$B_2 = C_1 C_2 \overline{C_3} + \overline{C_1}\,\overline{C_2} C_3 + \overline{C_1} C_2 C_3$$

$$B_3 = C_1 C_2 C_3$$

由加法公式和独立性得

$$P(B_1) = P(C_1 \overline{C_2}\,\overline{C_3}) + P(\overline{C_1} C_2 \overline{C_3}) + P(\overline{C_1}\,\overline{C_2} C_3)$$

$$= 0.4 \times 0.5 \times 0.3 + 0.6 \times 0.5 \times 0.3$$

$$0.6 \times 0.5 \times 0.7 = 0.36$$

$$P(B_2) = 0.41, P(B_3) = 0.14,$$

$$P(A) = 0.2 \times 0.36 + 0.6 \times 0.41 + 0.14 = 0.458$$

8　事件 A、B 相互独立，若这两个事件仅发生 A 的概率或仅发生 B 的概率都是$\frac{1}{4}$，求 $P(A)$和 $P(B)$。

解：依题意

$$P(A\overline{B}) = P(\overline{A}B) = \frac{1}{4}$$

由 A 与 B 独立知

$$P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}),$$

$$P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B),$$

$$P(A)[1-P(B)]=\frac{1}{4}, \qquad (1)$$

$$P(B)-P(A)P(B)=\frac{1}{4}, \qquad (2)$$

将（1）之$P(A)=\dfrac{1}{4[1-P(B)]}$代入（2）

得

$$[P(B)]^2-P(B)+\frac{1}{4}=0$$

从而 $P(B)=\dfrac{1}{2}$，同理可得 P（A）＝ $\dfrac{1}{2}$

例9 某袋中有6个白球4个黑球，从中任取3个，求（1）取到白球的概率；（2）第三次取到白球的概率；（3）第三次才取到白球的概率。

（注：可用多种手法）

第三章 条件概率与独立性总结

两个内容：

（1）条件概率与独立性的概念；

（2）四个重要公式：

条件概率的乘法公式；

全概率公式；Bayes公式；

二项概率公式与Poisson近似公式。