§2.6自然演绎推理系统(ND)

自然演绎推理系统是基于多规则少公理的推理系统，它采用了5种逻辑联结词 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ 因此比较符合人的逻辑推理思维习惯，与PC相比是一个更加实用的逻辑推理系统。

1. 公理:ND仅采用一个公理模式:

$$\Gamma ; A \vdash A$$

(相当于肯定前提的规则)

2. 推理规则: ND的推理规则主要是围绕5个联结词展开的，共7对14个推理规则.

1) 假设引入规则：

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma; A \vdash B}$$

2) 假设消除规则：

$$\frac{\Gamma; A \vdash B, \quad \Gamma; \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

3) ∨引入规则：

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B \vee A}$$

4) ∨消除规则：

$$\frac{\Gamma; A \vdash C,\ \Gamma; B \vdash C,\ \Gamma \vdash A \vee B}{\Gamma \vdash C}$$

5) ∧引入规则：

$$\frac{\Gamma \vdash A, \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$$

6) ∧消除规则：

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$$

7) →引入规则：

$$\frac{\Gamma; A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}$$

（即PC中的演绎定理）

8) →消除规则：

$$\frac{\Gamma \vdash A, \quad \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B}$$

（即PC中的分离规则）

9)¬ 引入规则：

$$\frac{\Gamma; A \vdash B, \quad \Gamma; A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}$$

(即反证法)

10)¬ 消除规则：

$$\frac{\Gamma \vdash \mathrm{A}, \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B}$$

(即不一致)

11)¬¬引入规则：

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \neg\neg A}$$

12)¬¬消除规则：

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$$

13) $\leftrightarrow$ 引入规则：

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \quad \Gamma \vdash B \rightarrow A}{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B}$$

14) $\leftrightarrow$ 消除规则：

$$\frac{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B}{\Gamma \vdash B \rightarrow A}$$

3. ND的定理

定义1 演绎结果：在ND中，若有 $\Gamma \vdash_{ND} A$

即存在序列：$\Gamma_1 \vdash A_1, \cdots, \Gamma_m \vdash A_m (A_m = A)$

使得 $\Gamma_i \vdash_{ND} A_i (1 \le i \le m)$

或为公理，或为 $\Gamma_j \vdash A_j (j < i)$

或是对 $\Gamma_{j_1} \vdash A_{j_1}, \cdots, \Gamma_{j_k} \vdash A_{j_k} (j_1, \cdots j_k < i)$

使用推理规则导出。

ND定理：若$\Gamma = \phi$即$\vdash_{ND} A$则称A为ND定理

定理1 $\vdash A \vee \neg A$

定理2 $\vdash \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

定理3 $\vdash \neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

定理4 $\neg A \rightarrow B \dashv\vdash A \vee B$

定理5 $A \rightarrow B \dashv\vdash \neg A \vee B$

定理6 $\vdash (A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

定理7 证明PC的公理均为ND的定理，即有：

1) $\vdash_{ND} A \to (B \to A)$

2) $\vdash_{ND} (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

3) $\vdash_{ND} (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$