"离散数学"课后习题参考解答 （计算机研究专部）

习题3.2　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　高立涛整理

1. 给出一个既不是自反，又不是反自反的二元关系。

解：如 $X=\{a,b,c\}$，$R=\{(a,a),(b,c),(a,c)\}$。

2. 是否存在一个同时不满足自反性、对称性、反对称性、传递性和反自反性的二元关系？

解：如 $X=\{a,b,c,d\}$，$R=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,c)\}$。

3（课本P86.3）

4. 实数集上的"小于"关系 $<$ 是否是反自反的？集合 X 的幂集 2^X 上的"真包含"关系 $\subset$ 是否是反自反的？为什么？

解：因为 $\forall x\in R$，$x \not< x$，故"$<$"关系是反自反的。

因为 $\forall A\in 2^X$，$A\not\subset A$，故"真包含"关系是反自反的。

5. 设 R 与 S 是 X 上的二元关系。证明：

a) $(R^{-1})^{-1}=R$；　　　　b) $(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$；

c) $(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$；　　　　d) 如果 $R\subseteq S$，则 $R^{-1}\subseteq S^{-1}$；

证明：(a) 设 $(x,y)\in R$，则 $(y,x)\in R^{-1}$，则 $(x,y)\in(R^{-1})^{-1}$ $\therefore (R^{-1})^{-1}\supseteq R$

设 $(x',y')\in(R^{-1})^{-1}$ $\therefore (y',x')\in R^{-1}$，$\therefore (x',y')\in R$ 故 $R\supseteq(R^{-1})^{-1}$

因此 $(R^{-1})^{-1}=R$。

b) 设 $(x,y)\in(R\cup S)^{-1} \Rightarrow (y,x)\in R\cup S \Rightarrow (y,x)\in R$ 或 $(y,x)\in S$

$\Rightarrow (x,y)\in R^{-1}$ 或 $(x,y)\in S^{-1} \Rightarrow (x,y)\in R^{-1}\cup S^{-1}$

$\Rightarrow (R\cup S)^{-1}\subseteq R^{-1}\cup S^{-1}$

7176820029

高立峰整理

习题3.2.3.

(b) $\forall (x,y)\in R\cup S \Leftrightarrow (x,y)\in R$ 或 $(x,y)\in S \Leftrightarrow (y,x)\in R$ 或 $(y,x)\in S$
$\Leftrightarrow (y,x)\in R\cup S$. 故 $R\cup S$ 是对称的.

$\forall (x,y)\in R\cap S \Leftrightarrow (x,y)\in R$ 且 $(x,y)\in S \Leftrightarrow (y,x)\in R$ 且 $(y,x)\in S$
$\Leftrightarrow (y,x)\in R\cap S$ 故 $R\cap S$ 是对称的.

(a). R,S 自反 $\Rightarrow I_X\subseteq R$, $I_X\subseteq S$. 则 $I_X\subseteq R\cup S$, $I_X\subseteq R\cap S$
$\Leftrightarrow R\cup S$, $R\cap S$ 是自反的.

(c) 若 $(x,y)\in R\cap S$ 且 $(y,z)\in R\cap S$ 则 $(x,y)\in R$ 且 $(x,y)\in S$,
$(y,z)\in R$ 且 $(y,z)\in S$ 而 R,S 是传递的, 所以 $(x,z)\in R$
且 $(x,z)\in S$, 即 $(x,z)\in R\cap S$ 故 $R\cap S$ 是传递的.

(d) 例如 $X=\{a,b\}$ $R=\{(a,a)\}$, $S=\{(b,b)\}$. 则 R,S 都不是自反的
但 $R\cup S=\{(a,a),(b,b)\}$ 是自反的. 故命题假.

(e) R,S 是反自反的. $\forall x\in X$, $(x,x)\notin R(S)$ $(x,x)\notin R\cup S$, $(x,x)\notin R\cap S$.
$\therefore R\cup S$、$R\cap S$ 是反自反的.

(f) $\forall x\in X$, $(x,x)\in R \Leftrightarrow (x,x)\notin R^c$ $\therefore R^c$ 是反自反的.

(g). 假.

高立均整理.

设 $(x',y')\in R^{-1}\cup S^{-1} \Rightarrow (x',y')\in R^{-1}$ 或 $(x',y')\in S^{-1}$

$\Rightarrow (y',x')\in R$ 或 $(y',x')\in S \Rightarrow (y',x')\in R\cup S$

$\Rightarrow (x',y')\in (R\cup S)^{-1} \Rightarrow R^{-1}\cup S^{-1}\subseteq (R\cup S)^{-1}$

故 $(R\cup S)^{-1} = R^{-1}\cup S^{-1}$

c) $(x,y)\in (R\cap S)^{-1} \Rightarrow (y,x)\in R$ 且 $(y,x)\in S \Rightarrow$ ~~$(x,y)\in R$~~

$(x,y)\in R^{-1}$ 且 $(x,y)\in S^{-1} \Rightarrow (x,y)\in R^{-1}\cap S^{-1}$

$\Rightarrow$ ~~$(x,y)\in$~~ $(R\cap S)^{-1}\subseteq R^{-1}$ ~~$\cup S$~~ $\cap S^{-1}$

若 $(x,y)\in R^{-1}\cap S^{-1} \Rightarrow (y,x)\in R$ 且 $(y,x)\in S \Rightarrow (y,x)\in R\cap S$

$\Rightarrow (x,y)\in (R\cap S)^{-1} \Rightarrow R^{-1}\cap S^{-1}\subseteq (R\cap S)^{-1}$

故 $(R\cap S)^{-1} = R^{-1}\cap S^{-1}$.

d) 若 $\forall (x,y)\in R$，则由 $R\subseteq S$，得 $(x,y)\in S$

故有 $\forall (y,x)\in R^{-1}$，且使 $(y,x)\in S^{-1}$，$\therefore R^{-1}\subseteq S^{-1}$.

6. 设 R 是 X 上的二元关系。证明：$R\cup R^{-1}$ 是对称的二元关系。

证法一：设 $x,y\in X$，且 $(x,y)\in R$，则 $(y,x)\in R^{-1}$

且 $(x,y)\in R\cup R^{-1}$，$(y,x)\in R\cup R^{-1}$　故 $R\cup R^{-1}$ 是对称关系

证法二：$(R\cup R^{-1})^{-1}=(R^{-1})^{-1}\cup R^{-1}=R\cup R^{-1}$　故 $R\cup R^{-1}$ 是对称关系

7. 设 R 是 X 上的反自反和传递的二元关系。证明：R 是反对称的。

证明：对于 $\forall x,y\in X$，$x\neq y$，令其 $(x,y)\in R$，则 $(y,x)\notin R$。

否则由 R 的传递性知 $(x,x)\in R$，与 R 是反自反的矛盾。

故 R 不是对称的，∴ R 是反对称的。

8. 设 R 是 X 上的任一二元关系。证明：R 是反对称的当且仅当 $R\cap R^{-1}\subseteq I_X$。

证明：先证充分性。若 ~~$(x,y)\in R$~~ R 是反对称的，若 $(x,y)\in R$，$(y,x)\in R$ 则 $x=y$。且 $(y,x)\in R$ 表明 $(x,y)\in R^{-1}$，则 $(x,y)\in R\cap R^{-1}$ 且 $x=y$，∴ $(x,y)\in I_X$　故 $R\cap R^{-1}\subseteq I_X$。

再证必要性。若 $R\cap R^{-1}\subseteq I_X$ 成立，则对于 $(x,x)\in R\cap R^{-1}$ 都满足 $(x,x)\in R$，$(x,x)\in R$ 且 $x=x'$。故 R 是反对称的。

9. 推理没错，但结论有误。R 是自反的，当且仅当 $\forall x\in X$，使 $(x,x)\in R$。由该人的推理不能得 $\forall x\in X$，$(x,x)\in R$ 的结论，故 R 未必是自反的。

2. $R\circ S=\{(1,3),(2,3),(3,2)\}$ $S\circ R=\{(2,4),(3,2),(4,2)\}$

$R^2=\{(1,2),(2,2)\}$ $S^2=\{(2,1),(4,3)\}$

$R\circ(S\circ R)=\{(1,4),(2,4),(3,2)\}$ $(R\circ S)\circ R=\{(1,4),(2,4),(3,2)\}$.

3. a)真 b)真

c)假 如: $R=\{(a,b)\}$, $S=\{(b,a)\}$ 但 $R\circ S=\{(a,a)\}$

d)假 如 $R=\{(c,b),(a,b)\}$ $S=\{(b,c),(b,a)\}$ 但 $R\circ S=\{(a,a),(a,c),(c,c),(c,a)\}$

e)假. 如 $R=\{(1,2),(2,3),(1,3),(4,8)\}$ $S=\{(2,4),(4,7),(2,7),(8,9)\}$

$R\circ S=\{(1,4),(1,7),(4,9)\}$

4. 错误在于 由 $(a,b)\in R_1$, $(b,c)\in R_2 \not\Rightarrow (a,c)\in R_1\circ R_2$

因为可能存在 $(a,d)\in R_1$, $(d,c)\in R_2$ 此时 $(a,c)\in R_1\circ R_2$.

习题3.4 P98

1. a) 证明: ∵ R^+是关系R的传递闭包 ∴ R^+是传递关系.

则$(R^+)^+=R^+$

b) 证明: ∵ R^*是R的自反传递闭包 ∴ R^*是自反传递的

则$(R^*)^*=R^*$

c) 证明 ∵ $R^*=\bigcup_{n=0}^{\infty}R^n$

∴ $R\circ R^*=R\circ(\bigcup_{n=0}^{\infty}R^n)=\bigcup_{n=1}^{\infty}R^n=R^+$

$R^*\circ R=(\bigcup_{n=0}^{\infty}R^n)\circ R=\bigcup_{n=1}^{\infty}R^n=R^+$

综上 $R\circ R^*=R^*\circ R=R^+$

d) 证明: ∵ R^*是传递的 ∴ $(R^*)^+ = R^*$

又 $(R^+)^* = (R^+)^0 \cup (R^+)^+ = I_X \cup R^+ = R^*$.

综上 $(R^*)^+ = (R^+)^* = R^*$.

2\. 解 $R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4$ $(R^i = \phi, i \geq 5)$.

$= \{(a,b),(b,c),(c,d),(d,e),(a,c),(b,d),(c,e),(a,d),(b,e),(a,e)\}$

$R^* = R^0 \cup R^+ = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(b,c),(c,d),(d,e)$

$(a,c),(b,d),(c,e),(a,d),(b,e),(a,e)\}$

3\. 证明 a) $\forall (a,b) \in R^+ \cup S^+$ ∴ $(a,b) \in R^+$ 或 $(a,b) \in S^+$

∵ $R \subseteq R \cup S$, $S \subseteq R \cup S$ ∴ $R^+ \subseteq (R \cup S)^+$, $S^+ \subseteq (R \cup S)^+$

∴ $(a,b) \in (R \cup S)^+$

即 $(R \cup S)^+ \supseteq R^+ \cup S^+$

b) $\forall (a,b) \in R^* \cup S^*$ ∴ $(a,b) \in R^*$ 或 $(a,b) \in S^*$

∵ $R \subseteq R \cup S$, $S \subseteq R \cup S$ ∴ $R^* \subseteq (R \cup S)^*$, $S^* \subseteq (R \cup S)^*$

∴ $(a,b) \in (R \cup S)^*$

即 $(R \cup S)^* \supseteq R^* \cup S^*$.

8\. 解. 存在. 如 $X = \{a,b,c,d,e\}$

$R = \{(a,b),(b,c),(c,d),(d,e)\}$ $R^2 = \{(a,c),(b,d),(c,e)\}$

$R^3 = \{(a,d),(b,e)\}$ $R^4 = \{(a,e)\}$ $R^5 = \phi$

显然 $R \neq R^2 \neq R^3 \neq R^4 \neq R^5$.

9. 证明: 由R对称性 $\forall (x,y)\in R$ 则 $(y,x)\in R$.

又∵ $R\subseteq R^+$

∴ $(x,y)\in R^+$, $(y,x)\in R^+$

∴ R^+也是对称的.

11. 证明: 由定义3.4.1, R^+即一切包含R的传递关系的交, 是包含R关系中最小的.

∵ R^+包含R $\Longleftrightarrow$ 当$(a,b)\in R$ 则$(a,b)\in R^+$

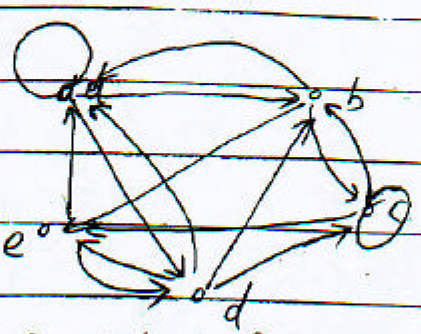
R^+为传递关系 $\Longleftrightarrow$ $(a,b)\in R^+$且$(b,c)\in R$即$(b,c)\in R^+ \Rightarrow (a,c)\in R^+$

除1°2°外, 如还有别的序对, 则与定义3.4.1 R^+的最小性矛盾

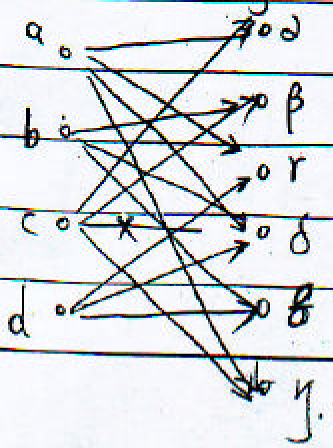
综上故1°2°3°定义与定义3.4.1等价, 可定义传递闭包R^+

习题3.5 P105

1. $B=\begin{bmatrix}1&1&0&1&0\\1&0&1&0&1\\0&1&1&0&1\\1&1&0&0&1\\1&0&0&1&0\end{bmatrix}$



2. $R=\{(a,\alpha),(a,\gamma),(a,\delta),(a,\eta),(b,\beta),(b,\delta),(b,\varepsilon),(c,\alpha),(c,\beta),(c,\eta),(d,\gamma),(d,\delta),(d,\varepsilon)\}$



5. $R=\{(a,b),(b,e),(b,d),(c,c),(c,a),(c,b),(d,c),(d,d),(d,e),(e,a),(e,d)\}$

$B=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&1&1\\1&1&1&0&0\\0&0&1&1&1\\1&0&0&1&0\end{bmatrix}$

习题 3.2.

高靖整理

1. 给出一个既不是自反，又不是反自反的二元关系。

解：如 $X=\{a,b,c\}$，$R=\{(a,a),(b,c),(a,c)\}$

2. 是否存在一个同时不满足自反性、对称性、反对称性、传递性和反自反性的二元关系？

解：如 $X=\{a,b,c,d\}$，$R=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,c)\}$.

3（课本 P86.3）

4. 实数集上的“小于”关系 $<$ 是否是反自反的？集合 X 的幂集 2^X 上的“真包含”关系 $\subset$ 是否是反自反的？为什么？

解：因为 $\forall x\in R$，$x\nless x$，故“$<$”关系是反自反的。

因为 $\forall A\in 2^X$，$A\not\subset A$，故“真包含”关系是反自反的。

5. 设 R 与 S 是 X 上的二元关系。证明：

a) $(R^{-1})^{-1}=R$；　　b) $(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$；

c) $(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$；　　d) 如果 $R\subseteq S$，则 $R^{-1}\subseteq S^{-1}$；

证明：(a) 设 $(x,y)\in R$，则 $(y,x)\in R^{-1}$，则 $(x,y)\in(R^{-1})^{-1}$　$\therefore (R^{-1})^{-1}\subseteq R$

设 $(x',y')\in(R^{-1})^{-1}$　$\therefore (y',x')\in R^{-1}$，$\therefore (x',y')\in R$　故 $R\subseteq (R^{-1})^{-1}$

因此 $(R^{-1})^{-1}=R$.

b) 设 $(x,y)\in ~~R\cup~~ (R\cup S)^{-1} \Rightarrow (y,x)\in R\cup S \Rightarrow (y,x)\in R$ 或 $(y,x)\in S$

$\Rightarrow (x,y)\in R^{-1}$ 或 $(x,y)\in S^{-1} \Rightarrow (x,y)\in R^{-1}\cup S^{-1}$

$\Rightarrow (R\cup S)^{-1}\subset R^{-1}\cup S^{-1}$

7176820029

《离散数学》课后习题参考解答 （计算机科学系部）

练习3.2

高超峰整理

1. 给出一个既不是自反，又不是反自反的二元关系

解：如 $X=\{a,b,c\}$，$R=\{(a,a),(b,c),(a,c)\}$

2. 是否存在一个同时不满足自反性、对称性、反对称性、传递性和反自反性的二元关系？

解：如 $X=\{a,b,c,d\}$，$R=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,c)\}$.

3（课本P86.3）

4. 实数集上的"小于"关系 < 是否是反自反的？集合 X 的幂集 2^X 上的"真包含"关系 ⊂ 是否是反自反的？为什么？

解：因为 $\forall x\in R$，$x \nless x$，故"<"关系是反自反的。

因为 $\forall A\in 2^X$，$A\not\subset A$，故"真包含"关系是反自反的。

5. 设 R 与 S 是 X 上的二元关系。证明：

a) $(R^{-1})^{-1}=R$；　　b) $(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$；

c) $(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$；　　d) 如果 $R\subseteq S$，则 $R^{-1}\subseteq S^{-1}$；

证明：(a) 设 $(x,y)\in R$，则 $(y,x)\in R^{-1}$，则 $(x,y)\in(R^{-1})^{-1}$ $\therefore (R^{-1})^{-1}\subseteq R$

设 $(x',y')\in(R^{-1})^{-1}$ $\therefore (y',x')\in R^{-1}$，$\therefore (x',y')\in R$ 故 $R\subseteq(R^{-1})^{-1}$

因此 $(R^{-1})^{-1}=R$.

b) 设 $(x,y)\in(R\cup S)^{-1}\Rightarrow(y,x)\in R\cup S\Rightarrow(y,x)\in R$ 或 $(y,x)\in S$

$\Rightarrow(x,y)\in R^{-1}$ 或 $(x,y)\in S^{-1}\Rightarrow(x,y)\in R^{-1}\cup S^{-1}$

$\Rightarrow(R\cup S)^{-1}\subset R^{-1}\cup S^{-1}$

7176820029

《离散数学》课后习题参考解答　　(计院计算机系编)

习题3.2

高立清整理

1. 给出一个既不是自反，又不是反自反的二元关系。
解：如 $X=\{a,b,c\}$，$R=\{(a,a),(b,c),(a,c)\}$。 3.

2. 是否存在一个同时不满足自反性、对称性、反对称性、传递性和反自反性的二元关系？
解：如 $X=\{a,b,c,d\}$，$R=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,c)\}$。

3.（课本P86.3）

4. 实数集上的"小于"关系 $<$ 是否是反自反的？集合 X 的幂集 2^X 上的"真包含"关系 $\subset$ 是否是反自反的？为什么？
解：因为 $\forall x\in R$，$x \not< x$，故"$<$"关系是反自反的。
因为 $\forall A\in 2^X$，$A\not\subset A$，故"真包含"关系是反自反的。

5. 设 R 与 S 是 X 上的二元关系。证明：
a) $(R^{-1})^{-1}=R$；　　b) $(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$；
c) $(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$；　　d) 如果 $R\subseteq S$，则 $R^{-1}\subseteq S^{-1}$；

证明：(a) 设 $(x,y)\in R$，则 $(y,x)\in R^{-1}$，则 $(x,y)\in(R^{-1})^{-1}$　$\therefore (R^{-1})^{-1}\supseteq R$
设 $(x',y')\in(R^{-1})^{-1}$　$\therefore (y',x')\in R^{-1}$，$\therefore (x',y')\in R$　故 $R\subseteq(R^{-1})^{-1}$
因此 $(R^{-1})^{-1}=R$。

b) 设 $(x,y)\in(R\cup S)^{-1} \Rightarrow (y,x)\in R\cup S \Rightarrow (y,x)\in R$ 或 $(y,x)\in S$
$\Rightarrow (x,y)\in R^{-1}$ 或 $(x,y)\in S^{-1} \Rightarrow (x,y)\in R^{-1}\cup S^{-1}$
$\Rightarrow (R\cup S)^{-1}\subset R^{-1}\cup S^{-1}$

7176820029

P121

1. $[a,b]$ 是一个有限区间，令 S 是区间 $[a,b]$ 上的有限划分的集合。$[a,b]$ 的一个划分是指由

$a=x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，$n\in N$ 的点的集合。在 S 上定义二元关系 R 如下。

$\forall \pi_1,\pi_2\in S$，$\pi_1 R\pi_2 \Leftrightarrow \pi_2$ 的每个分点也是 π_1 的分点。证明：R 是 S 上的偏序关系。

显然 $\pi R\pi$，于是 R 是自反的。

若 $\pi_1 R\pi_2$ 且 $\pi_2 R\pi_1$，则说明 π_1 与 π_2 的分点完全一致，也就是说 $\pi_1=\pi_2$，故 R 是反对称的。

若 $\pi_1 R\pi_2$，$\pi_2 R\pi_3$，则 π_1 的每个分点也是 π_2 的分点，π_2 的每个分点又是 π_3 的分点，那么 π_3 的每个分点也是 π_1 的分点 $\therefore \pi_1 R\pi_3$，说明 R 是传递的。

$\therefore R$ 是 S 上的偏序关系。

2. 令 $(S,\leq_1)$，$(T,\leq_2)$ 是偏序集，在 $S\times T$ 上定义二元关系 $\leq_3$ 如下：$\forall (s,t),(s',t')\in S\times T$，$(s,t)\leq_3(s',t')$ 当且仅当 $s\leq_1 s'$，$t\leq_2 t'$。证明：$\leq_3$ 是 $S\times T$ 上的偏序关系。

证 $(S,\leq_1)$，$(T,\leq_2)$ 是偏序集，即 $\forall s\in S$，有 $s\leq_1 s$，$\forall t\in T$，有 $t\leq_2 t$

$(s,t)\leq_3(s,t)$ $\therefore \leq_3$ 是自反的。

若 $(s,t)\leq_3(s',t')$ 且 $(s',t')\leq_3(s,t)$，则 $s\leq_1 s'$ 且 $s'\leq_1 s$，就有 $s=s'$，$t\leq_2 t'$ 且 $t'\leq_2 t$，就有 $t=t'$。所以 $(s,t)=(s',t')$，$\leq_3$ 是反对称的。

若 $(s,t)\leq_3(s',t')$，$(s',t')\leq_3(s'',t'')$ 易证 $(s,t)\leq_3(s'',t'')$，$\leq_3$ 是传递的。

所以 $\leq_3$ 是 $S\times T$ 上的偏序关系。

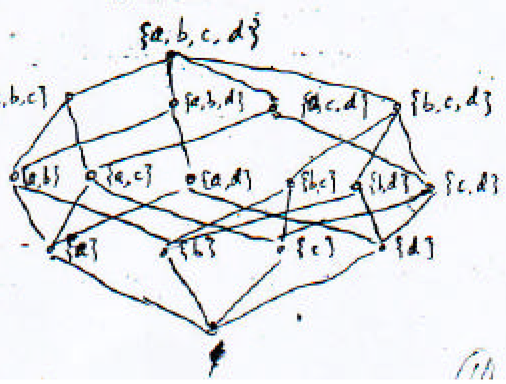
3. 存在一个偏序关系 $\leq$，使 $(X,\leq)$ 中有唯一极大元素，但没有最大元素？如果有请举出一个这样的例子，如果没有，请证明之。

存在这样的偏序关系。

设 $A\subseteq X$，若 A 中有且唯一极大元素 a，则没有元素 b，使得 $b\neq a$ 且 $a\leq b$，也就是说 $\forall x\in A$，有 $x\leq a$，则 a 是 A 中的最大元素。

~~$(X,\leq)$，$A\subseteq X$，如果 A 中有唯一极大元素，必有最大元素，那么要无最大元素，则 $x\notin A$~~

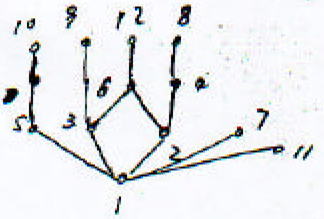
4. 设 $X=\{a,b,c,d\}$，画出偏序集 $(2^X,\subseteq)$ 的 Hasse 图。



付

5. 令 $S=\{1,2,\cdots,12\}$，画出偏序集 $(S,|)$ 的 Hass 图，其中"|"是整除关系。它有几个极大(小)元素，列出这些极大(小)元素。

解：



极大元素共有6个： 7, 8, 9, 10, 11, 12

极小元素共有1个： 1.

7. 设 R 是 X 上的偏序关系。证明：R 是 X 上的全序关系当且仅当 $X\times X=R\cup R^{-1}$。

证：$\Rightarrow$ 若 R 是 X 上的全序关系，则 X 的元素可以按"从小到大"的顺序排成一排。

$$a_1<a_2<a_3\cdots\cdots<a_n\cdots\cdots$$

这样 $\forall(a_i,a_j)\in X\times X$，要么 $a_i<a_j$，则 $(a_i,a_j)\in R$，要么 $a_i>a_j$，则 $(a_j,a_i)\in R$，有 $(a_i,a_j)\in R^{-1}$ 总之 $(a_i,a_j)\in R\cup R^{-1}$ 故 $X\times X\subseteq R\cup R^{-1}$。

而显然 $X\times X\supseteq R\cup R^{-1}$ $\therefore$ $X\times X=R\cup R^{-1}$。

$\Leftarrow$ 当 $X\times X=R\cup R^{-1}$ 时，对 $\forall(a_{i_1},a_{j_1})\in X\times X$，有 $(a_{i_1},a_{j_1})\in R$ 或 $(a_{i_1},a_{j_1})\in R^{-1}$ 即 $(a_{j_1},a_{i_1})\in R$

不妨设 $(a_{i_1},a_{j_1})\in R$。

再从 X 中任取一数 a_0 显然 $(a_0,a_{i_1})\in X\times X$，$(a_0,a_{j_1})\in X\times X$，则

对于 (a_0,a_{i_1}) 要么 $(a_0,a_{i_1})\in R$，要么 $(a_0,a_{i_1})\in R^{-1}$。

当 $(a_0,a_{i_1})\in R$ 时，可将 a_0,a_{i_1},a_{j_1} 排"从小到大"顺序排： $a_0<a_{i_1}<a_{j_1}$

当 $(a_0,a_{i_1})\in R^{-1}$ 时，则比较 (a_0,a_{j_1}) 若 $a_0Ra_{j_1}$，则排成 $a_{i_1}<a_0<a_{j_1}$。

若 $a_0R^{-1}a_{j_1}$，即 $a_{j_1}Ra_0$ 则排成 $a_{i_1}<a_{j_1}<a_0$

这样，再取一数设 $a_j\in X$，它仍可以按上述方法与 a_0，a_{i_1}，a_{j_1} 排序。

经过多次选取后，重复排序，从可将 X 中的元素按"从小到大"顺序排成一排。

$\therefore$ R 是 X 上的全序关系。