§1.3 信号分解

一、直流分量与交流分量

1．直流分量

①也称信号平均值

②定义： $f_D = \lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$

2．交流分量

①定义： $f_A(t) = f(t) - f_D$

②特性： $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_A(t)dt = f_D - f_D = 0$

3．平均功率=直流功率+交流功率

$$P = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[f_D + f_A(t)]^2 dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[f_D{}^2 + 2f_D f_A(t) + f_A{}^2(t)]dt = f_D{}^2 + \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_A{}^2(t)dt$$

注：若为周期信号不必加$T\to\infty$

§1.3 信号分解

二、偶分量与奇分量

1．偶分量

①定义：$f_e(t)=\dfrac{f(t)+f(-t)}{2}$

②特性：偶函数，即 $f_e(t)=f_e(-t)$

2．奇分量

①定义： $f_o(t)=\dfrac{f(t)-f(-t)}{2}$

②特性：

i)奇函数，即 $f_o(t)=-f_o(-t)$ ii)平均值为0，即 $\dfrac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_o(t)dt=0$

3．平均功率=偶分量功率+奇分量功率

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[f_e^{\ 2}(t)+f_o^{\ 2}(t)+2f_e(t)f_o(t)]dt$$

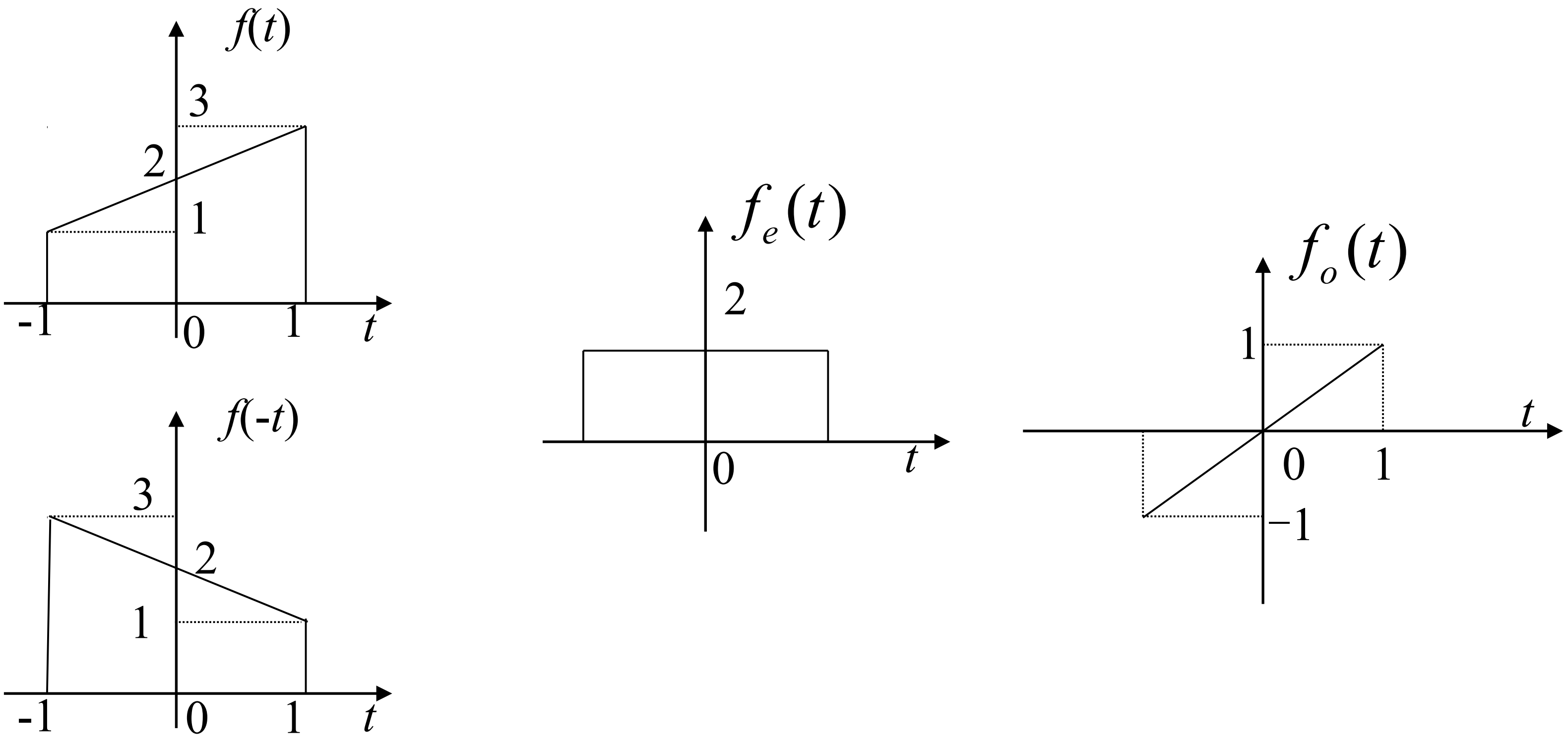
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_e^{\ 2}(t)dt+\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_o^{\ 2}(t)dt=P_e+P_o$$

注：若为周期信号不必加$T\to\infty$

§1.3 信号分解

[例1]：求下面信号的奇分量和偶分量

解：



§1.3 信号分解

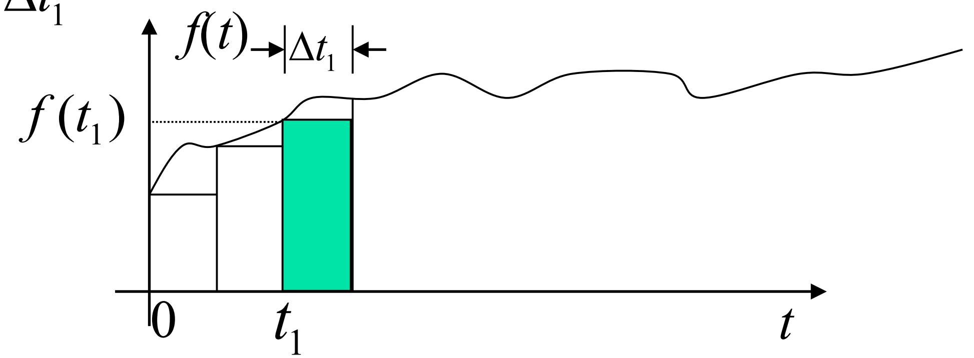
三、脉冲分量

1．信号分解为冲激信号叠加

①先将信号近似为矩形窄脉冲分量 $f(t_1)[u(t-t_1)-u(t-t_1-\Delta t_1)]$ 的叠加，即

$$f(t) \approx \sum_{t_1=-\infty}^{+\infty} f(t_1)[u(t-t_1)-u(t-t_1-\Delta t_1)]$$

$$= \sum_{t_1=-\infty}^{+\infty} f(t_1)\frac{u(t-t_1)-u(t-t_1-\Delta t_1)}{\Delta t_1}\Delta t_1$$



§1.3 信号分解

②取极限

i) $$f(t)=\lim_{\Delta t_1\to 0}\sum_{t_1=-\infty}^{+\infty} f(t_1)\frac{u(t-t_1)-u(t-t_1-\Delta t_1)}{\Delta t_1}\Delta t_1$$

$$=\lim_{\Delta t_1\to 0}\sum_{t_1=-\infty}^{+\infty} f(t_1)\delta(t-t_1)\Delta t_1$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1)\delta(t-t_1)dt_1 \Rightarrow f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

ii)<*根据上式以及冲激函数为偶函数*>可得抽样特性：

$$f(t_0)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt$$

§1.3 信号分解

2．将信号分解为阶跃信号之和(设$f(t)$=0 (t<0))

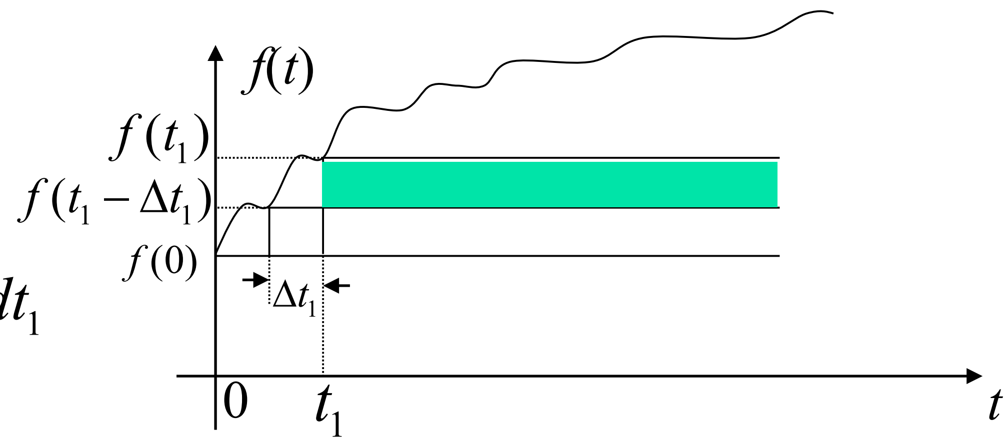
①先将信号近似为阶跃信号分量$[f(t_1)-f(t_1-\Delta t_1)]u(t-t_1)$的叠加，即

$$f(t)\approx f(0)u(t)+\sum_{t_1=\Delta t_1}^{\infty}[f(t_1)-f(t_1-\Delta t_1)]u(t-t_1)$$

$$=f(0)u(t)+\sum_{t_1=\Delta t_1}^{\infty}\frac{[f(t_1)-f(t_1-\Delta t_1)]}{\Delta t_1}\cdot\Delta t_1 u(t-t_1)$$

②取极限

$$f(t)=f(0)u(t)+\int_0^{\infty}\frac{df(t_1)}{dt_1}u(t-t_1)dt_1$$



§1.3 信号分解

四、实部分量与虚部分量

1． $f(t)=f_r(t)+jf_i(t)$

2． $f^*(t)=f_r(t)-jf_i(t)$

3． $\left|f(t)\right|^2=f(t)f^*(t)=f_r^{\,2}(t)+f_i^{\,2}(t)$

4． 实际不存在，但可借助其来研究实信号或简化运算

§1.3 信号分解

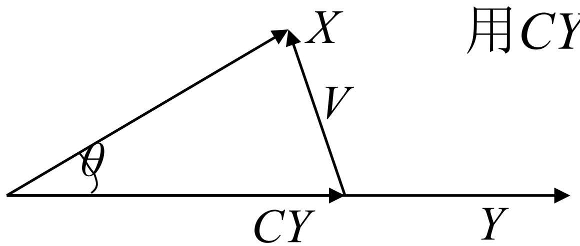
五、正交函数分量

1. 二维空间正交矢量

①矢量内积定义：$\langle X,Y\rangle=\sum_{i=1}^{2}X_iY_i$ 其中 $X=(X_1,X_2)$ $Y=(Y_1,Y_2)$

②矢量长度定义：$\|X\|_2=\sqrt{X_1{}^2+X_2{}^2}=\sqrt{\langle X,X\rangle}$

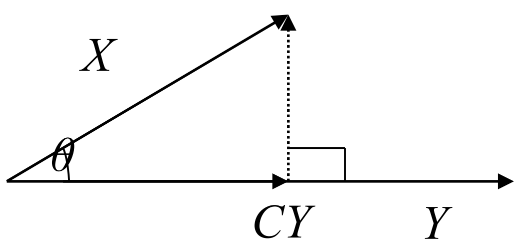
③用一个二维矢量Y近似另一个矢量X



用CY近似X，误差 $V=X-CY$

最小误差是垂直情况，此时

$$C=\frac{\|X\|_2\cos\theta}{\|Y\|_2}=\frac{\|X\|_2\|Y\|_2\cos\theta}{\|Y\|_2{}^2}=\frac{\langle X,Y\rangle}{\langle Y,Y\rangle}$$



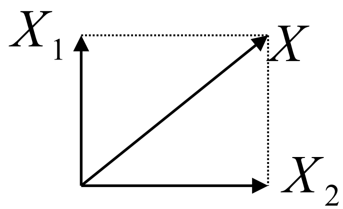
若 $\theta=90^0$，C=0，此时$X\perp Y$正交，即$\langle X,Y\rangle=0$

§1.3 信号分解

④任何二维矢量均可分解为两个正交矢量

$$X = X_1 + X_2$$

$$X_1 \perp X_2$$



⑤由二维空间可推广到n维空间

i) n维空间两个矢量的内积

$$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n); Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \quad < X, Y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

ii) n维空间两个矢量的长度 $\|X\|_2 = \sqrt{< X, X >} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

iii) n维空间一个矢量Y表示另一个矢量X误差最小时

$$C = \frac{< X, Y >}{< Y, Y >} \quad 当 C = 0, X \perp Y$$

§1.3 信号分解

2．正交函数

①用$c_{12}f_2(t)$近似$f_1(t)$($t_1<t<t_2$)何时误差$f_1(t)-c_{12}f_2(t)$最小

$$\overline{\varepsilon^2}=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}[f_1(t)-c_{12}f_2(t)]^2dt$$

令：$\dfrac{d\overline{\varepsilon^2}}{dc_{12}}=0$ 则：$\dfrac{2}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}f_1(t)f_2(t)dt-\dfrac{2c_{12}}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}f_2{}^2(t)dt=0$

即：

$$c_{12}=\frac{\int_{t_1}^{t_2}f_1(t)f_2(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2}f_2{}^2(t)dt}$$

§1.3 信号分解

②定义函数内积

$$< f_1(t), f_2(t) >= \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt$$

则：

$$c_{12} = \frac{< f_1(t), f_2(t) >}{< f_2(t), f_2(t) >}$$

当 $c_{12} = 0$时，$f_1(t)$与$f_2(t)$正交

§ 1.3 信号分解

[例2]： 用$f_2(t)=\sin t(\ t\in(0,2\pi))$逼近 $f_1(t)=\begin{cases}1 & 0<t<\pi\\ -1 & \pi<t<2\pi\end{cases}$

求 c_{12}

解: 使$f_1(t)-c_{12}f_2(t)$最小， 可得

$$c_{12}=\frac{<f_1(t),f_2(t)>}{<f_2(t),f_2(t)>}=\frac{\int_0^{\pi}\sin t dt-\int_{\pi}^{2\pi}\sin t dt}{\int_0^{2\pi}\sin^2 t dt}=\frac{-\cos t\Big|_0^{\pi}+\cos t\Big|_{\pi}^{2\pi}}{\frac{1}{2}(2\pi-0)}=\frac{4}{\pi}$$

即：

$$f_1(t)\approx\frac{4}{\pi}\sin t$$

§1.3 信号分解

[例3]： 用sin$t$在区间(0,2π)内来逼近cos$t$，求 c_{12}

解：

$$c_{12} = \frac{< \sin t, \cos t >}{< \sin t, \sin t >} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2t dt}{\pi} = 0$$

即：

$$\sin t \perp \cos t$$

§1.3 信号分解

3．正交函数集

①定义：$\{g_1(t), g_2(t) \cdots g_n(t)\}(t_1, t_2)$满足 $< g_i(t), g_j(t) >= 0 \ (i \neq j)$，$< g_i(t), g_i(t) >= k_i$

即：
$$\begin{cases} \int_{t_1}^{t_2} g_i(t) g_j(t) dt = 0 & i \neq j \\ \int_{t_1}^{t_2} g_i^{\,2}(t) dt = k_i \end{cases}$$

② $f(t)$用正交函数集的线性组合近似，何时误差最小？

$$f(t) \approx c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) + \cdots + c_n g_n(t) = \sum_{r=1}^{n} c_r g_r(t)$$

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - \sum_{r=1}^{n} c_r g_r(t)]^2 dt$$

$$\frac{\partial \overline{\varepsilon^2}}{\partial c_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial c_i} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - \sum_{r=1}^{n} c_r g_r(t)]^2 dt \right\} = 0 \Rightarrow c_i = \frac{< f(t), g_i(t) >}{< g_i(t), g_i(t) >}$$

将这些 c_i代入$\overline{\varepsilon^2}$表达式 计算出

$$\overline{\varepsilon^2}_{\min} = \frac{1}{t_2 - t_1} [\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt - \sum_{r=1}^{n} c_r^{\,2} k_r]$$

§1.3 信号分解

③归一化正交函数集

对于$k_i=1$的归一化正交函数集 即 $\int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t)dt=1$

$$\overline{\varepsilon^2}_{\min}=\frac{1}{t_2-t_1}\left[\int_{t_1}^{2} f^2(t)dt-\sum_{r=1}^{n} c_r^2\right]$$

④复变函数正交特性

i) $c_{12}=\dfrac{<f_1(t),f_2(t)>}{<f_2(t),f_2(t)>}=\dfrac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2^*(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2}\left|f_2(t)\right|^2 dt}$

ii) 正交条件 $\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2^*(t)=0$

iii)正交函数集定义 $\{g_1(t),\cdots,g_r(t)\}\begin{cases}\int_{t_1}^{t_2} g_i(t)g_j^*(t)=0 & i\neq j\\ \int_{t_1}^{t_2}\left|g_i(t)\right|^2=k_i\end{cases}$

§1.3 信号分解

4．完备正交函数集

①定义方法一：若 $\{g_1(t), g_2(t), \cdots g_n(t)\}$在（t1，t2）内近似表示

$$f(t) \approx \sum_{r=1}^{n} c_r g_r(t)$$

若令$n\to\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{\varepsilon^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}[f(t) - \sum_{r=1}^{n} c_r g_r(t)]^2 dt = 0$

则称此函数集为完备正交函数集

此时$f(t) = c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) + \cdots + c_r g_r(t) + \cdots$

②定义方法二：$g_1(t), g_2(t), \cdots g_n(t)$之外不存在函数$x(t)(0 < \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt < \infty)$

满足等式$\int_{t_1}^{t_2} x(t) g_i(t) dt = 0$，$i$为$1 \ldots n$的任意正整数，

则称此函数集为完备正交函数集

§1.3 信号分解

③帕塞瓦尔方程：由$\overline{\varepsilon^2}=0 \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt=\sum_{r=1}^{\infty} c_r{}^2 k_r$

对 $k_i=1$的归一化正交函数集：

$$\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt=\sum_{r=1}^{\infty} c_r{}^2$$

④广义傅立叶级数展开：

$$f(t)=c_1 g_1(t)+c_2 g_2(t)+\cdots+c_r g_r(t)+\cdots$$

常用完备正交函数集：

i)三角函数集：

$$\{\sin\omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \cdots, 1, \cos\omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \cdots\}\ (t_0, t_0+\frac{2\pi}{\omega_0})$$

ii)复指数函数集：

$$\{1, e^{j\omega_0 t}, e^{-j\omega_0 t}, e^{j2\omega_0 t}, e^{-j2\omega_0 t}, \cdots\}$$

iii)沃尔什函数集

§1.3 信号分解

[例4]： $1, x, x^2, x^3$是否是区间(0,1)的正交函数集？区间(-1,1)呢？

解： 由于$\int_0^1 1 \cdot x dx = \frac{1}{2} \neq 0$，故$1, x, x^2, x^3$不是区间(0,1)的正交函数集

$\int_{-1}^{1} 1 \cdot x dx = 0$，$\int_{-1}^{1} 1 \cdot x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \neq 0$也不是(-1,1)上的正交函数集

§1.3 信号分解

[例5]：证明$\cos t, \cos 2t, \ldots\ldots \cos nt$为区间$(0,2\pi)$中的正交函数集，又问是否为区间$(0,\frac{\pi}{2})$中的正交函数集？

证明：对于任意正整数$i \neq j$ 可以证明

$$\int_0^{2\pi} \cos it \cos jt dt = \frac{\sin(i+j)t}{2(i+j)} + \frac{\sin(i-j)t}{2(i-j)} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

故得证。对于函数$\cos t$和函数$\cos 2t$可证

$$\int_0^{\pi/2} \cos t \cos 2t dt = \left(\frac{\sin 3t}{6} + \frac{\sin t}{2}\right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3} \neq 0$$

故不是区间$(0, \frac{\pi}{2})$中的正交函数集。

§1.3 信号分解

[例6]: 已知: $f(t)=\begin{cases}1 & 0<t<\pi \\ -1 & \pi<t<2\pi\end{cases}$

$$f(t)\approx c_1\sin t+c_2\sin 2t+c_3\sin 3t+c_4\sin 4t\,(0<t<2\pi)$$

求: c_1, c_2, c_3, c_4 及 $\overline{\varepsilon^2}$

解:

$$c_1=\frac{\langle f(t),\sin t\rangle}{\langle \sin t,\sin t\rangle}=\frac{\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\,dt}{\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt}=\frac{\int_0^{\pi}\sin t\,dt-\int_{\pi}^{2\pi}\sin t\,dt}{\pi}$$

$$=\frac{-\cos t\,|_0^{\pi}+\cos t\,|_{\pi}^{2\pi}}{\pi}=\frac{4}{\pi}$$

§1.3 信号分解

$$c_2=\frac{\langle f(t),\sin 2t\rangle}{\langle \sin 2t,\sin 2t\rangle}=\frac{\int_0^{\pi}\sin 2t dt-\int_{\pi}^{2\pi}\sin 2t dt}{\int_0^{2\pi}\sin^2 2t dt}=\frac{0}{\pi}$$

$$c_3=\frac{4}{3\pi}$$

$$c_4=0$$

$$\overline{\varepsilon^2}=\frac{1}{2\pi}\Big[\int_0^{2\pi}f^2(t)dt-c_1^2k_1-c_3^2k_3\Big]=1-\frac{1}{2\pi}\Big(\frac{4}{\pi}\Big)^2\cdot\pi-\frac{1}{2\pi}\Big(\frac{4}{3\pi}\Big)^2\cdot\pi$$

$$=1-\frac{80}{9\pi^2}$$

§1.3 信号分解

[例7]： 试证明sin$t$,sin2t…,sinnt,…不是区间(0,2π)上的完备正交函数集。

证明： （用反证法）存在函数1，满足0< $\int_0^{2\pi} 1^2 dt = 2\pi < +\infty$

和 $\int_0^{2\pi} 1 \cdot \sin t dt = 0$，即至少函数1与sin$t$正交，

故sin$t$,sin2t,…sinnt,…不够完备。

§1.3 信号分解

[例8]：用二次方程在区间(-1,1)上近似表示函数e^t

求使方均误差最小的a,b,c。

解：注意：由于$1,t,t^2$不是(-1,1)上的正交函数集，故不能用公式：

$$a=\frac{\langle e^t,t^2\rangle}{\langle t^2,t^2\rangle},\ b=\frac{\langle e^t,t\rangle}{\langle t,t\rangle},\ c=\frac{\langle e^t,1\rangle}{\langle 1,1\rangle}$$

来做题；只能用定义按下述方法去做：

$$\overline{\varepsilon^2}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}[e^t-at^2-bt-c]^2\,dt$$

§1.3 信号分解

令：

$$\frac{\partial \overline{\varepsilon^2}}{\partial a}=0 \Rightarrow \int_{-1}^{1}[-2e^t \cdot t^2+2(at^2+bt+c)t^2]dt=0$$

$$\frac{\partial \overline{\varepsilon^2}}{\partial b}=0 \Rightarrow \int_{-1}^{1}[-2e^t \cdot t+2(at^2+bt+c)t\ ]dt=0$$

$$\frac{\partial \overline{\varepsilon^2}}{\partial c}=0 \Rightarrow \int_{-1}^{1}[-2e^t+2(at^2+bt+c)]dt=0$$

§1.3 信号分解

可得如下方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{4}{5}a+\dfrac{4}{3}e=\displaystyle\int_{-1}^{1}2e^{t}\cdot t^{2}dt \\ \dfrac{4}{3}b=\displaystyle\int_{-1}^{1}2e^{t}\cdot tdt \\ \dfrac{4}{3}a+4c=\displaystyle\int_{-1}^{1}2e^{t}dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{5}a+\dfrac{4}{3}e=2e-10e^{-1} \\ \dfrac{4}{3}b=4e^{-1} \\ \dfrac{4}{3}a+4c=2e-2e^{-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{15}{4}(e-\dfrac{7}{e}) \\ b=3e^{-1} \\ c=-3e+\dfrac{33}{e} \end{cases}$$