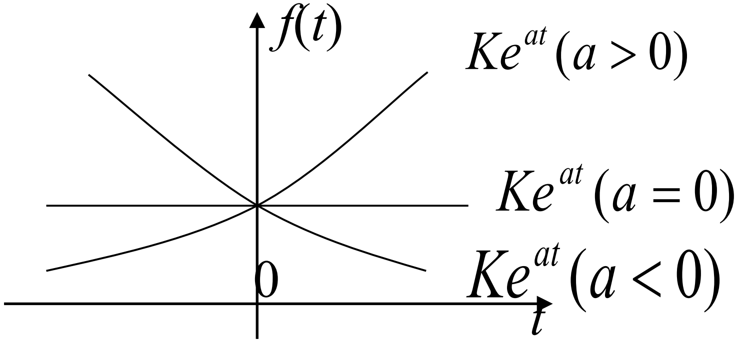
§1.2 信号描述与信号运算

一、典型连续时间信号

1．指数信号

①表达式:

$$f(t)=Ke^{at}$$



②参数a的含义

i)a>0幅度增长

ii)a=0直流

iii)a<0幅度衰减

iv)定义 $\tau=\dfrac{1}{|a|}$时间常数，$\tau\uparrow\Rightarrow$衰减或增长速度越慢

③特性：微积分后仍为指数信号

§1.2 信号描述与信号运算

2．正弦信号

①表达式：

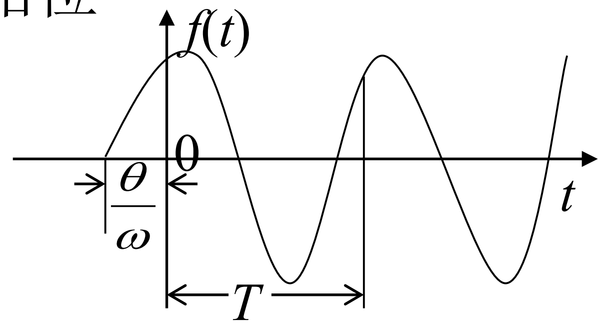
$$f(t) = K\sin(\omega t + \theta)$$

②参数：K振幅， ω角频率，θ初相位

③特性

i)周期信号,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$



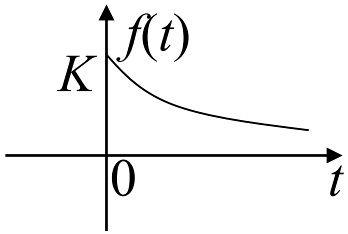
ii)微积分后仍为正弦信号

§1.2 信号描述与信号运算

3．单边指数衰减信号

①表达式

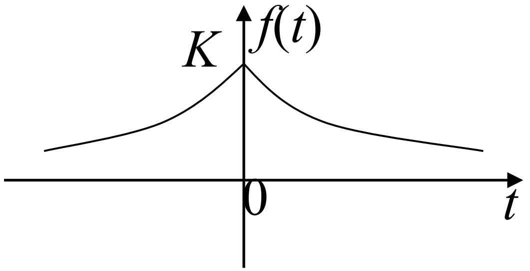
$$f(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ Ke^{-\frac{t}{\tau}} & (t\geq 0)\end{cases}\quad (\tau>0)$$



②实际例子：电容放电曲线

4．双边指数脉冲信号

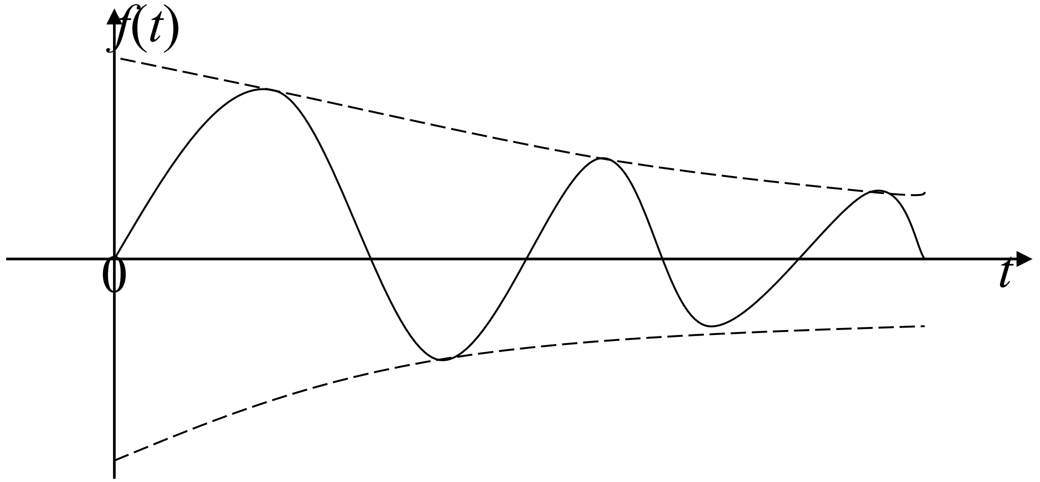
$$f(t)=Ke^{-\frac{|t|}{\tau}}\quad(\tau>0)$$



§1.2 信号描述与信号运算

5．衰减正弦信号（单边）

$$f(t)=\begin{cases}0(t<0)\\ Ke^{-at}\sin\omega t(t\geq 0)\end{cases}$$



§1.2 信号描述与信号运算

6．复指数信号

①表达式： $f(t)=Ke^{(\sigma+j\omega)t}=Ke^{\sigma t}(\cos\omega t+j\sin\omega t)$

②参数

i) σ 为指数因子实部，$\sigma>0$ 增幅振荡,$\sigma<0$ 衰减振荡,$\sigma=0$ 等幅振荡

ii) ω 为振动角频率， $\omega=0$ 变为指数信号

iii) $\sigma=0$ 且 $\omega=0$，变为直流信号

③可用来表示正余弦信号

i) $\sin\omega t=\dfrac{1}{2j}(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t})$

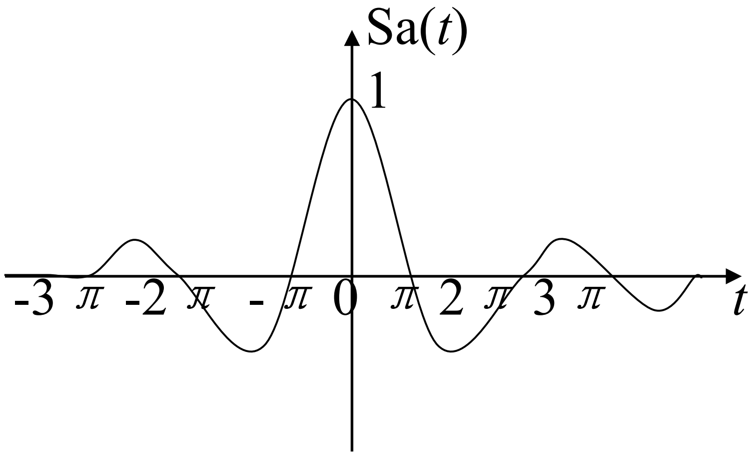
ii) $\cos\omega t=\dfrac{1}{2}(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t})$

④实际中不存在，但它具有概括性，简化分析

§1.2 信号描述与信号运算

7．Sa(t)信号（抽样信号）

①定义： $\mathrm{Sa}(t)=\dfrac{\sin t}{t}$



②特性

i) $t=\pm\pi,\pm2\pi,\ldots,\pm n\pi$， Sa($t$)=0

ii)偶函数

iii)两边衰减

iv)能量集中在$(-\pi,\pi)$

v) $\int_0^{+\infty}Sa(t)dt=\dfrac{\pi}{2}$ $\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}Sa(t)dt=\pi$

③其他定义

i) $\mathrm{sinc}(t)=\dfrac{\sin\pi t}{\pi t}$

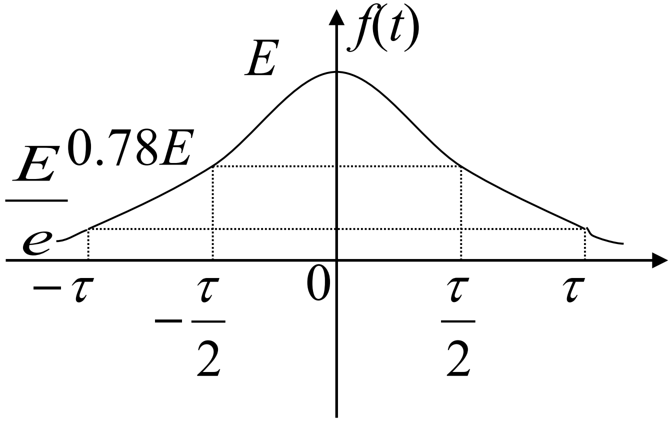
ii) $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{sinc}(t)dt=1$

§1.2 信号描述与信号运算

8．钟形信号（高斯函数）

①定义：

$$f(t) = Ee^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$$



②特性

i) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} dt = \sqrt{\pi} \cdot \tau$

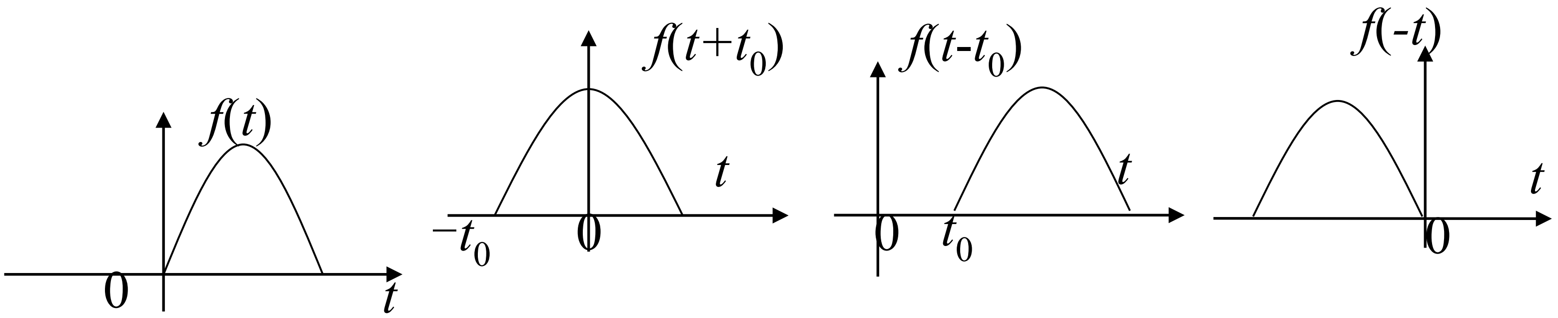
ii) $f(\frac{\tau}{2}) = E \cdot e^{-\frac{1}{4}} = 0.78E$

③主要用于随机信号分析中

§1.2 信号描述与信号运算

二、信号运算

1．移位：左移$f(t)\rightarrow f(t+t_0)$，右移$f(t)\rightarrow f(t-t_0)$ $(t_0>0)$



2．反褶：$f(t)\rightarrow f(-t)$

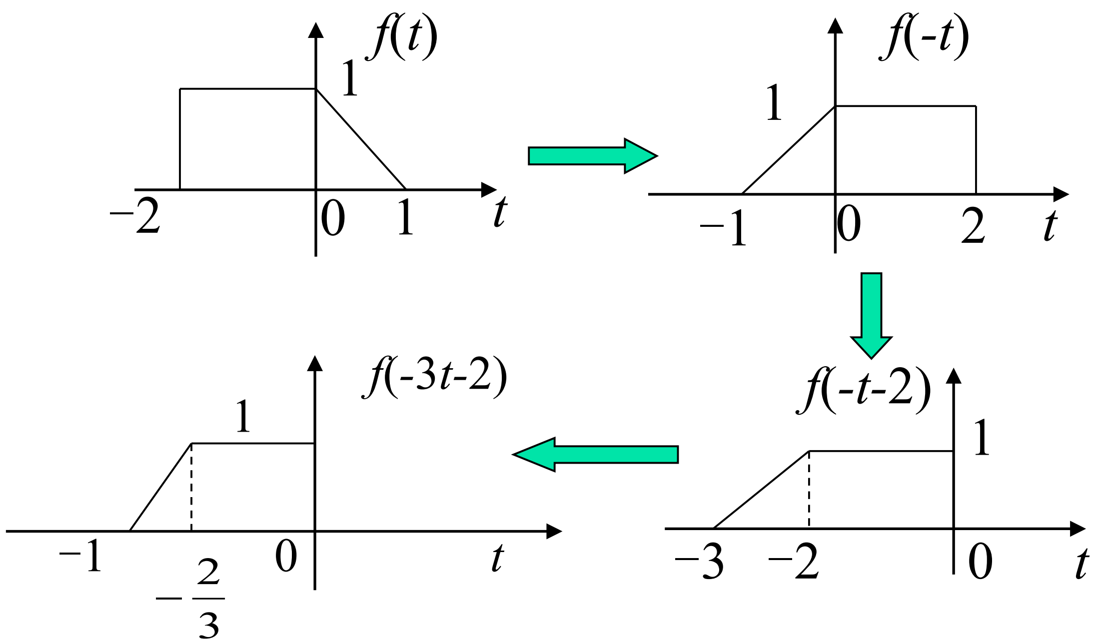
3．尺度：$f(t)\rightarrow f(at)$ $(a>0)$ $\begin{cases} a>1 & \text{时间轴上压缩} \\ a<1 & \text{时间轴上扩展} \end{cases}$

§ 1.2 信号描述与信号运算

[例1]:

①已知$f(t)$如下图，画出$f(-3t-2)$

解：$f(t) \to f(-t) \to f[-(t+2)] \to f(-3t-2)$



§1.2 信号描述与信号运算

②已知$f(t)$定义域为[−1,4]，求$f(-2t+5)$的定义域

解：

i)方法一：$f(t)\to f(-t)$ $[-4,1]$；$f(-t)\to f(-t+5)$ $[1,6]$；

$f(-t+5)\to f(-2t+5)$ $[\frac{1}{2},3]$

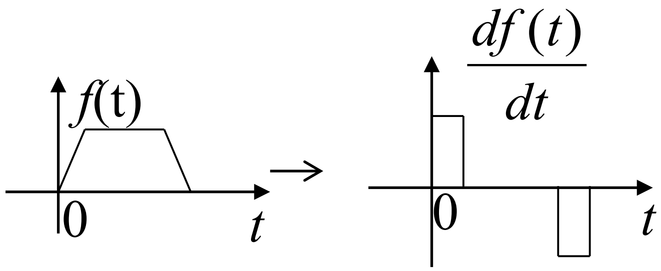
ii)方法二：$-1\le -2t+5\le 4\Rightarrow\ -6\le -2t\le -1\Rightarrow$

$$\frac{1}{2}\le t\le 3$$

§1.2 信号描述与信号运算

4.微分

①$f(t) \rightarrow \dfrac{df(t)}{dt}$



②作用：突出信号变化部分

5．积分

①$f(t) \rightarrow \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$

②作用：使信号突变部分平滑

6．信号相加

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

§1.2 信号描述与信号运算

7. 信号相乘

① $f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t)$

②常用在调制解调中

8. 卷积

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

9. 相关

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t-\tau) d\tau$$

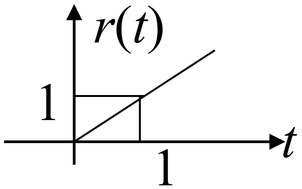
§1.2 信号描述与信号运算

三、奇异信号

1．定义：含有不连续点（跳变点）或其倒数与积分有不连续点

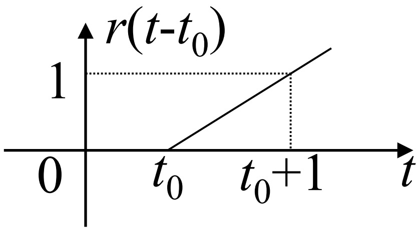
2．单位斜变：

$$r(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & t\geq 0\end{cases}$$



3．延迟单位斜变：

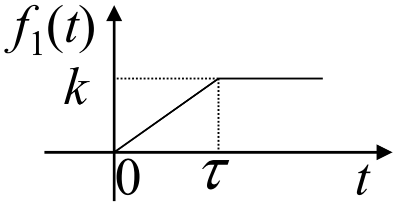
$$r(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ t-t_0 & t\geq t_0\end{cases}$$



§ 1.2 信号描述与信号运算

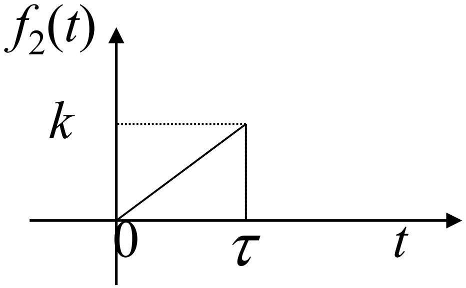
4．截平斜变：

$$f_1(t)=\begin{cases}\dfrac{k}{\tau}r(t) & t\le\tau\\ k & t>\tau\end{cases}$$



5．三角脉冲：

$$f_2(t)=\begin{cases}\dfrac{k}{\tau}r(t) & t\le\tau\\ 0 & t>\tau\end{cases}$$



§1.2 信号描述与信号运算

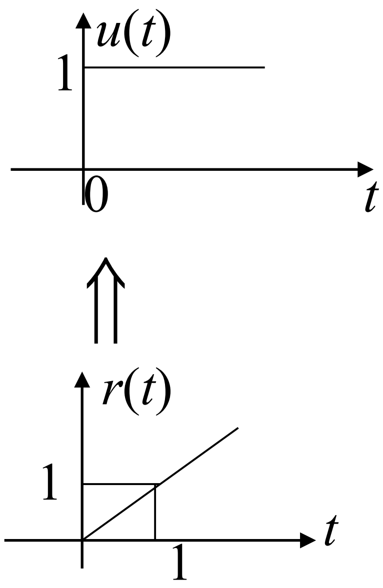
6．单位阶跃

①定义： $u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$

②t=0处：无定义或可定义为 $u(0)=\dfrac{1}{2}$

③关系：

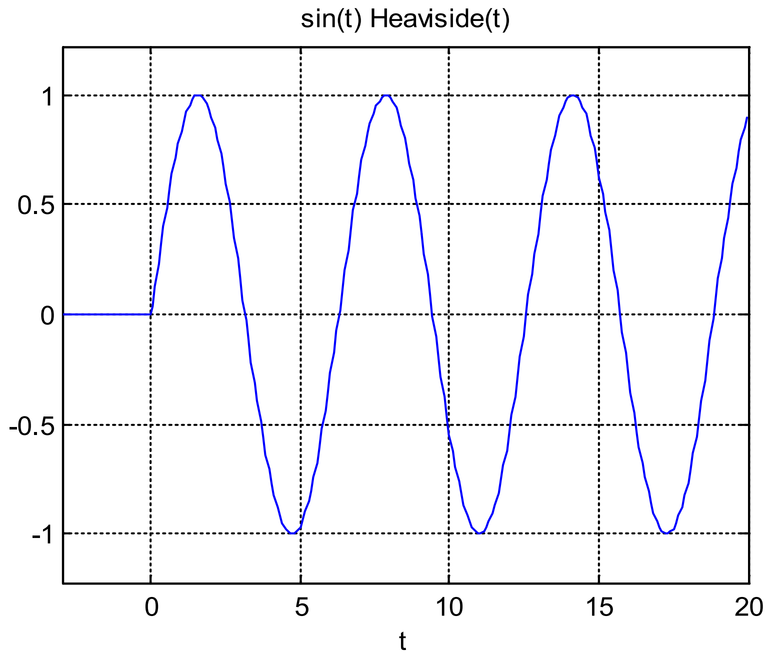
$$u(t)=\frac{dr(t)}{dt}$$

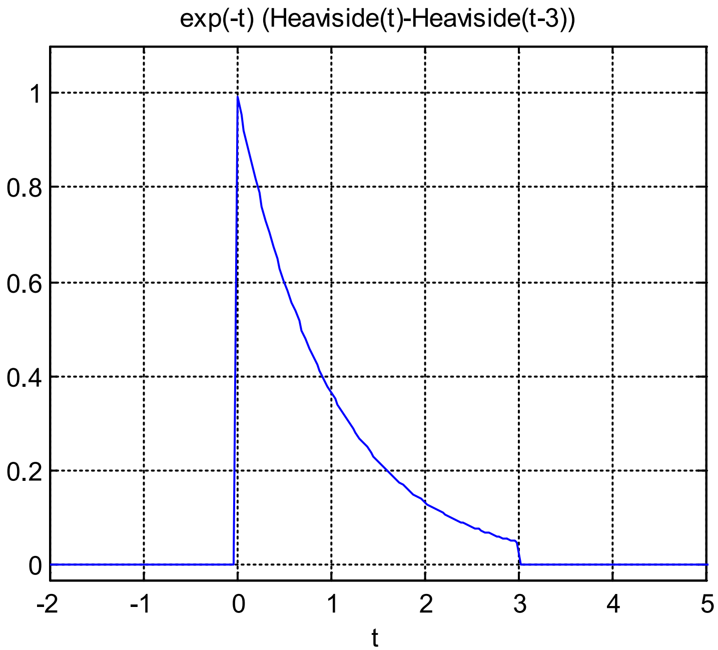


④物理背景：t=0时刻加入激励

⑤作用：表示信号单边特性和窗特性

§1.2 信号描述与信号运算





i)例

$$f_1(t) = \sin t u(t)$$

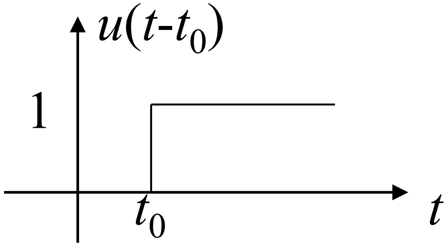
ii)例

$$f_2(t) = e^{-t}[u(t) - u(t - t_0)]$$

§1.2 信号描述与信号运算

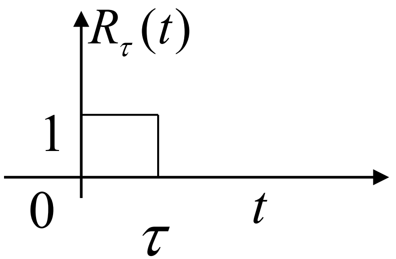
7. 延迟单位阶跃

$$u(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ 1 & t>t_0\end{cases}$$

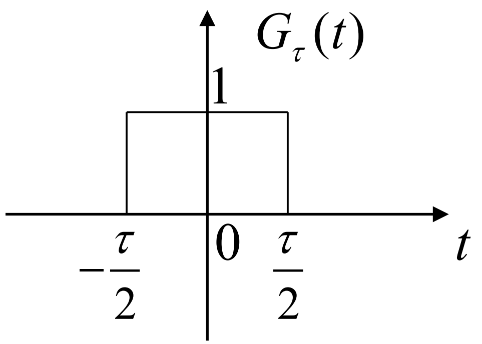


8. 矩形脉冲

① $R_\tau(t)=u(t)-u(t-\tau)$



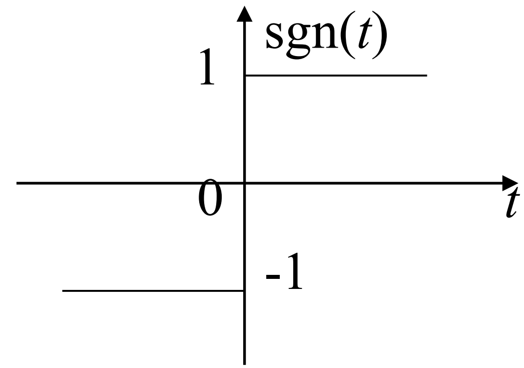
② $G_\tau=u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})$



§1.2 信号描述与信号运算

9．符号函数

$$\mathrm{sgn}(t)=2u(t)-1=\begin{cases}-1 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$



10．单位冲激

①物理背景：时间极短幅度极大现象的理想化

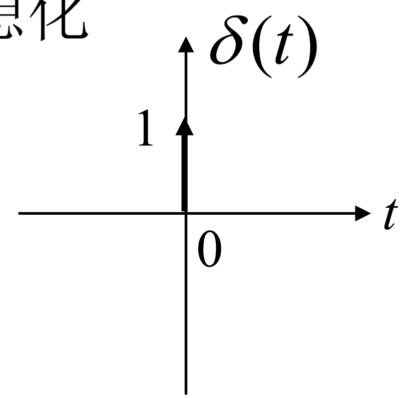
②极限定义方法：

i)矩形脉冲：

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\left[u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})\right]$$

ii)三角脉冲：

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}(1-\frac{|t|}{\tau})[u(t+\tau-u(t-\tau)]$$



§1.2 信号描述与信号运算

iii)双边指数脉冲：

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\tau}e^{-\frac{|t|}{\tau}}$$

iv)钟型脉冲：

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}e^{-\pi(\frac{t}{\tau})^2}$$

v)抽样脉冲：

$$\delta(t)=\lim_{k\to \infty}\frac{k}{\pi}Sa(kt)$$

③狄拉克定义：
$$\begin{cases}\delta(t)=0 & t\neq 0\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1 & \end{cases}$$

§1.2 信号描述与信号运算

④基本性质：

i) $\delta(t)f(t)=f(0)\delta(t)$

ii)抽样特性：$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)dt=f(0)$

iii)偶函数：$\delta(t)=\delta(-t)$

证明: $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(-t)f(t)dt=\int_{+\infty}^{-\infty}\delta(\tau)f(-\tau)d(-\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau)f\left(0\right)d\tau=f\left(0\right)$

iv)延时抽样：$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-t_0\right)f\left(t\right)dt=f\left(t_0\right)$

v)关系：

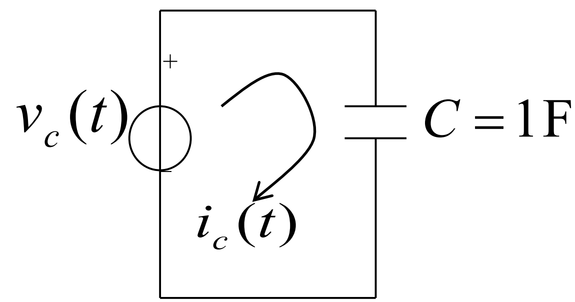
$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=u(t)$$

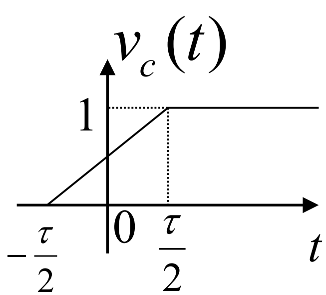
$$\frac{d}{dt}u(t)=\delta(t)$$

§1.2 信号描述与信号运算

⑤理解：

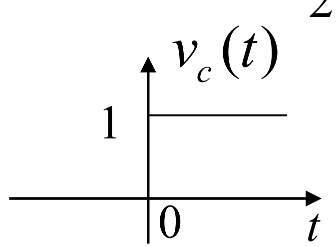
$$v_c(t)=\begin{cases}0 & t<-\dfrac{\tau}{2}\\ \dfrac{1}{\tau}\left(t+\dfrac{\tau}{2}\right) & -\dfrac{\tau}{2}<t<\dfrac{\tau}{2}\\ 1 & t>\dfrac{\tau}{2}\end{cases}$$

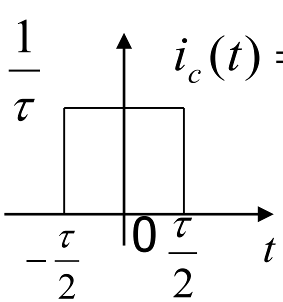




$\tau\to 0$

$\rightarrow$

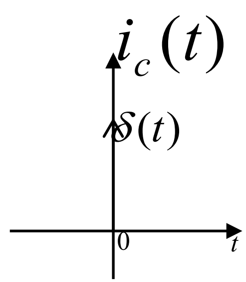




$$i_c(t)=\frac{dv_c(t)}{dt}$$

$\tau\to 0$

$\rightarrow$



i)阶跃电压作用在电容上将产生冲激电流

ii)阶跃电流作用在电感上将产生冲激电压

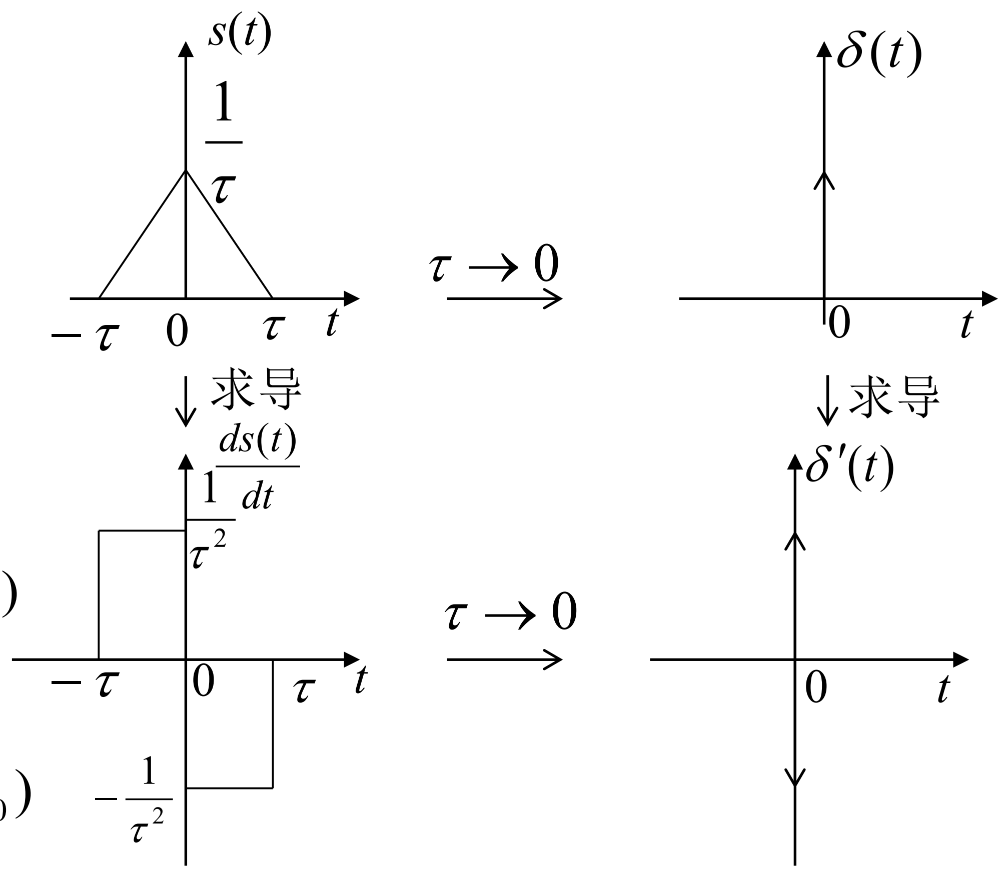
§ 1.2 信号描述与信号运算

11．冲激偶

①定义：

$$\delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$$

②形成过程：



③性质

i) $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t)=0$

ii) $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t)f(t)dt=-f'(0)$

iii)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t-t_0)f(t)dt=-f'(t_0)$$

§1.2 信号描述与信号运算

[例2]：绘图 **(三点一限法)**

① $f(t)=(3e^{-t}-6e^{-2t})u(t)$

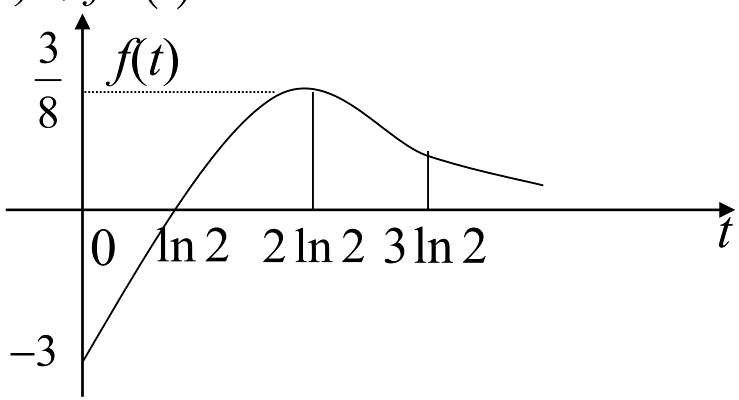
解：i) $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t)=-3$ ；$\lim\limits_{t\to +\infty} f(t)=0$

ii)令 $f(t)=0 \Rightarrow 3e^{-t}-6e^{-2t} \Rightarrow e^{t}=2 \Rightarrow t=\ln 2$

iii)令 $f'(t)=0 \Rightarrow -3e^{-t}+12e^{-2t}=0 \Rightarrow e^{t}=4 \Rightarrow t=2\ln 2$

$f(2\ln 2)=\dfrac{3}{8}$

iv)令 $f''(t)=0 \Rightarrow 3e^{-t}-24e^{-2t}=0 \Rightarrow e^{t}=8 \Rightarrow t=3\ln 2$



§ 1.2 信号描述与信号运算

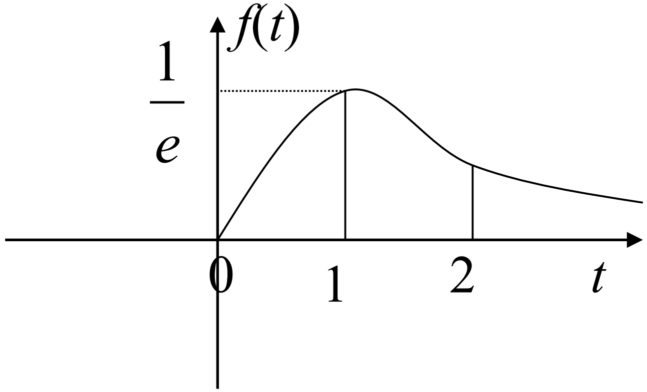
[例2]：绘图

② $f(t)=te^{-t}u(t)$

解：i) $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t)=0 \qquad \lim\limits_{t\to\infty} f(t)=0$

ii)令 $f'(t)=0 \Rightarrow e^{-t}-te^{-t}=0 \Rightarrow t=1$

iii)令$f''(t)=0 \Rightarrow -e^{-t}-e^{-t}+te^{-t}=0 \Rightarrow t=2$

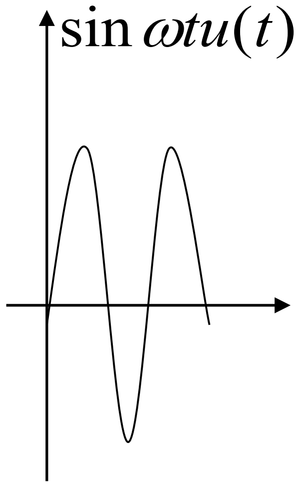


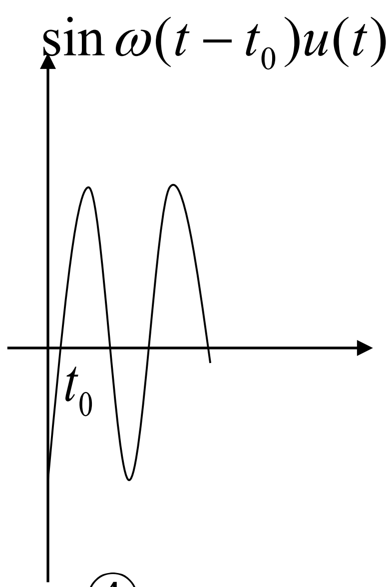
§ 1.2 信号描述与信号运算

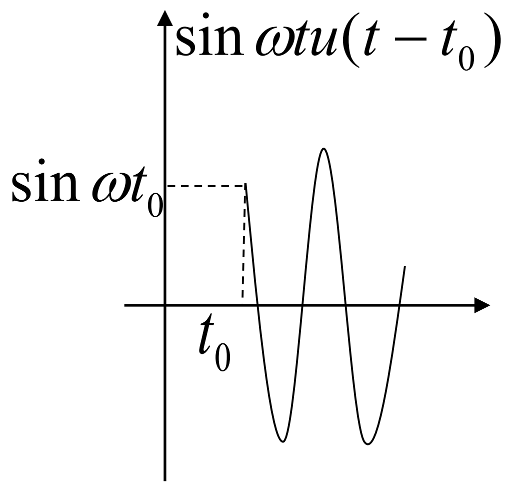
[例2]：绘图

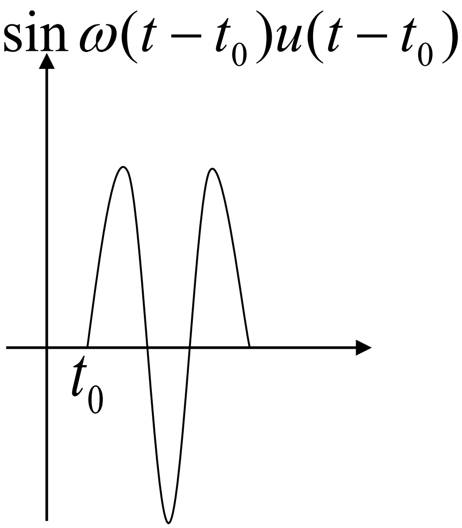
③ $\sin \omega t u(t)$ ④ $\sin \omega (t-t_0)u(t)$

⑤ $\sin \omega t u(t-t_0)$ ⑥ $\sin \omega (t-t_0)u(t-t_0)$









§1.2 信号描述与信号运算

[例3]： 求下列函数值

① $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{-t}+t\right)\delta\left(t-1\right)dt$ ② $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t}\left(\delta\left(t\right)+\delta'(t)\right)dt$

③ $\int_{-1}^{3}e^{-t^2+\sqrt{5}t+3}\delta\left(t+2\right)dt$

解：

① $\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{-t}+t)\delta\left(t-1\right)dt=e^{-1}+1$

② $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t}\left[\delta\left(t\right)+\delta'\left(t\right)\right]dt=1+1=2$

③ 0