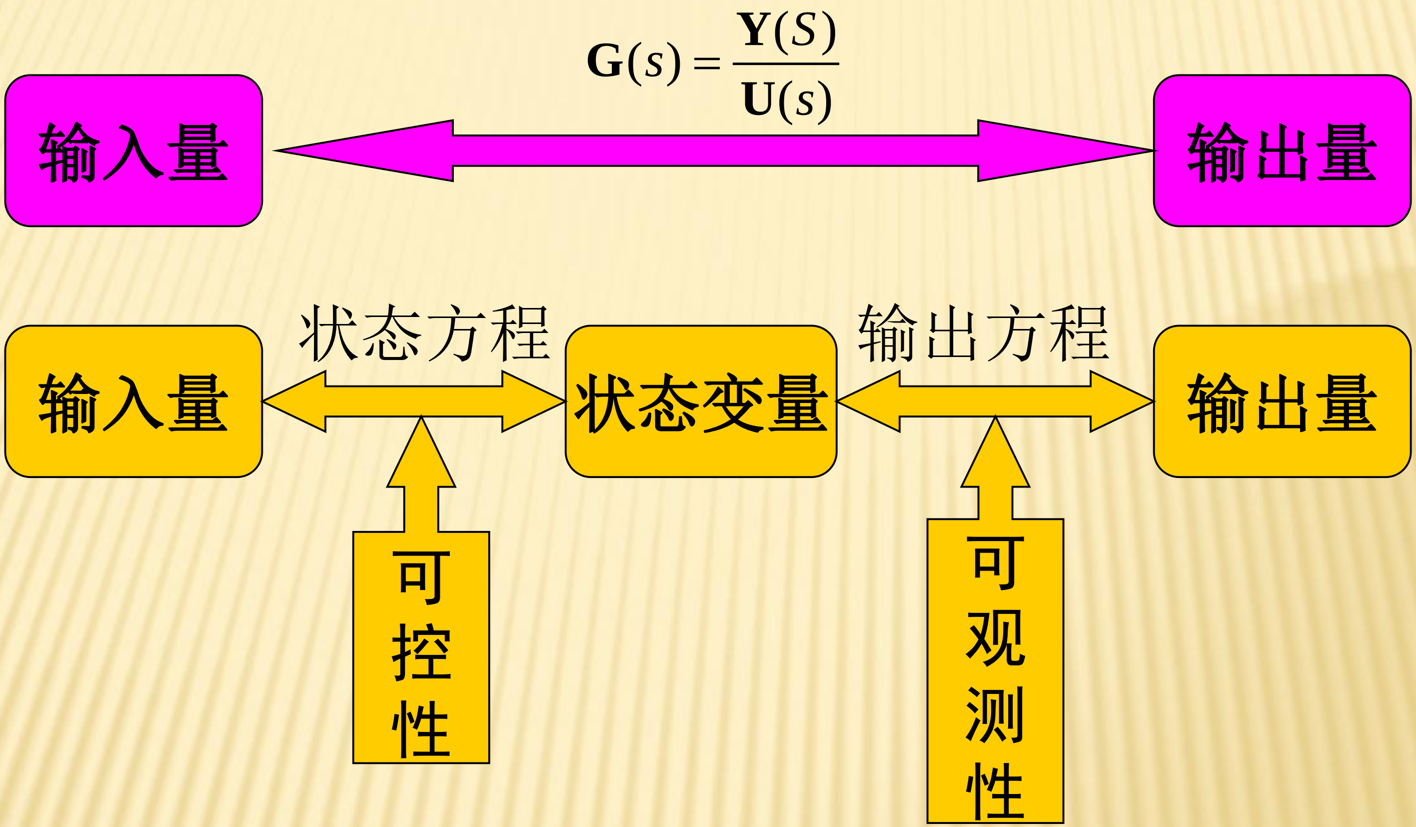


A —n*n— 系数矩阵 —— 表示系统内部状态

B —n*p— 输入/控制 矩阵 —— 表示输入对状态的作用

C —q*n— 输出矩阵 —— 表示输出与状态的关系

D —q*p— 直接传递/前馈 矩阵（系数） —— 直接联系输入量与输出量，与系统状态无关

（若q=p=1，则D记为 d）

8.7.1.线性定常系统的可控性

讨论系统$\sum:\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx\end{cases}$的可控性 $\Rightarrow$ (A,B)

定义　存在允许输入量$\mathbf{u}(t)$，能在有限时间内使状态从任意初态$\mathbf{x}(t_0)$，转移到任意希望的终态$\mathbf{x}(t_f)$，称状态完全可控，简称系统可控。

定理一　n 阶线性定常连续系统 $\dot{\mathbf{x}}=A\mathbf{x}+B\mathbf{u}$ 完全可控的充要条件是：可控性矩阵$Q_k=[B\ \ AB\ \ A^2B\ \ \cdots\ \ A^{n-1}B]$的秩为 n。

8.7.2.线性定常系统的可观测性

讨论系统$\sum:\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx\end{cases}$的可观测性 $\Rightarrow$ (A,C)

定义　对于任意的初始时刻t_0，若能在有限的时间间隔$[t_0,t_\mathrm{f}]$内，根据对$\mathbf{y}(t)$的测量值和$\mathbf{u}(t)$，惟一地确定系统的初始状态$\mathbf{x}(t_0)$，则称系统的状态是完全可观的。

定理三　线性定常系统 $\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}=A\mathbf{x}+B\mathbf{u}\\ \mathbf{y}=C\mathbf{x}\end{cases}$ 完全可观测的充要条件是:

可观测性矩阵$Q_g=\begin{bmatrix}C\\ CA\\ \vdots\\ CA^{n-1}\end{bmatrix}$的秩为 n。

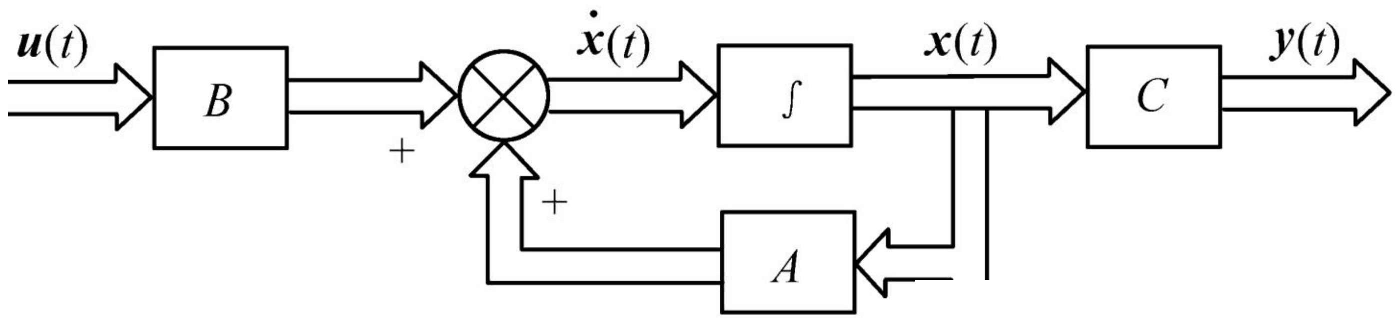
8.8 线性系统的状态反馈与极点配置

闭环系统性能与闭环极点位置密切相关，经典控制理论经常利用串联、并联校正装置及调整开环增益使系统具有希望的闭环极点位置。

现代控制理论利用状态变量表示系统内部特性，从而建立了利用状态反馈这一新的方式来配置极点。

8.8 线性系统的状态反馈与极点配置

8.8.1.状态反馈



n阶系统 $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$ $\mathbf{y} = C\mathbf{x}$

$\mathbf{u} = -K\mathbf{x}$

状态反馈 $\mathbf{u} = \mathbf{r} - K\mathbf{x}$

8.8.2.单变量(控制)系统的极点配置

研究极点配置的原因：

极点配置直接决定了系统的性能；

解决了控制是否有解的问题。

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu \qquad \mathrm{y} = \mathrm{C}\mathbf{x}$$

特征方程 $|sI - A| = 0$

$$\boxed{\text{状态反馈} \quad u = r - K\mathbf{x} \qquad \Rightarrow}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = (A - BK)\mathbf{x} + Br \qquad \mathrm{y} = \mathrm{C}\mathbf{x}$$

特征方程 $|sI - (A - BK)| = 0$

可见，状态反馈可改变系统的极点

8.8.2.单变量(控制)系统的极点配置

状态反馈进行极点配置的条件：

定理：用状态反馈使闭环极点配置在任意位置上的充要条件是：被控系统可控。

证明：

【1】先证充分性

若系统完全可控，存在非奇异矩阵P $\Rightarrow$ 可控规范型

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

8.8.2.单变量(控制)系统的极点配置

若在变换后状态空间内引入（1 x n）维状态反馈矩阵

$K=\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$

其中, $k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n$ 分别为 由状态变量

$\mathrm{x}_1 \quad \mathrm{x}_2 \quad \cdots \quad x_n$ 引出的反馈系数。

引入状态反馈 $u=r-K\mathbf{x}$,

则变换后的状态反馈动态系统动态方程为:

$$\dot{\mathbf{x}}=(A-BK)\mathbf{x}+Br$$

$$\mathrm{y}=\mathrm{C}\mathbf{x}$$

8.8.2.单变量(控制)系统的极点配置

式中，

$$A-BK=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -(a_n+k_1) & -(a_{n-1}+k_2) & -(a_{n-2}+k_3) & \cdots & -(a_1+k_n) \end{bmatrix}$$

输出矩阵仍为B

仍为可控标准型，故引入状态反馈后，系统能控性不变。

8.8.2.单变量(控制)系统的极点配置

输出方程不变，传递函数分子不变。

考察传递函数分母，即闭环特征多项式：

$$|sI-(A-BK)| = s^n+(a_1+k_n)s^{n-1}+\cdots+(a_{n-1}+k_2)s+(a_n+k_1)$$

设希望的闭环极点是 λ_i ， 希望的特征多项式是

$$\prod_{i=1}^{n}(s-\lambda_i)=s^n+b_1s^{n-1}+\cdots+b_{n-1}s+b_n$$

令两式对应项系数相等，可求出所有k。

8.8.2.单变量(控制)系统的极点配置

$$\begin{cases} a_n + k_1 = b_n \\ a_{n-1} + k_2 = b_{n-1} \\ \quad\vdots \\ a_1 + k_n = b_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = b_n - a_n \\ k_2 = b_{n-1} - a_{n-1} \\ \quad\vdots \\ k_n = b_1 - a_1 \end{cases}$$

可见，状态反馈可实现闭环极点的任意配置，充分性得证。

再证必要性：

(逆否命题)

若系统不完全可控，则不能控部分的状态变量将不受输入的控制，其对应的极点将是不可能配置的。

例 8-8-1 系统为 $G(s)=\dfrac{100}{s(s+1)(s+2)}$

设计反馈阵，使闭环极点为 $\lambda_1=-5, \lambda_{2,3}=-2\pm \mathrm{j}2$。

解 $G(s)=\dfrac{100}{s^3+3s^2+2s} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & -3\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$

设反馈阵 $K=\begin{bmatrix}k_1 & k_2 & k_3\end{bmatrix}$

引入反馈后系数阵：$A-BK=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -k_1 & -k_2-2 & -k_3-3\end{bmatrix}$

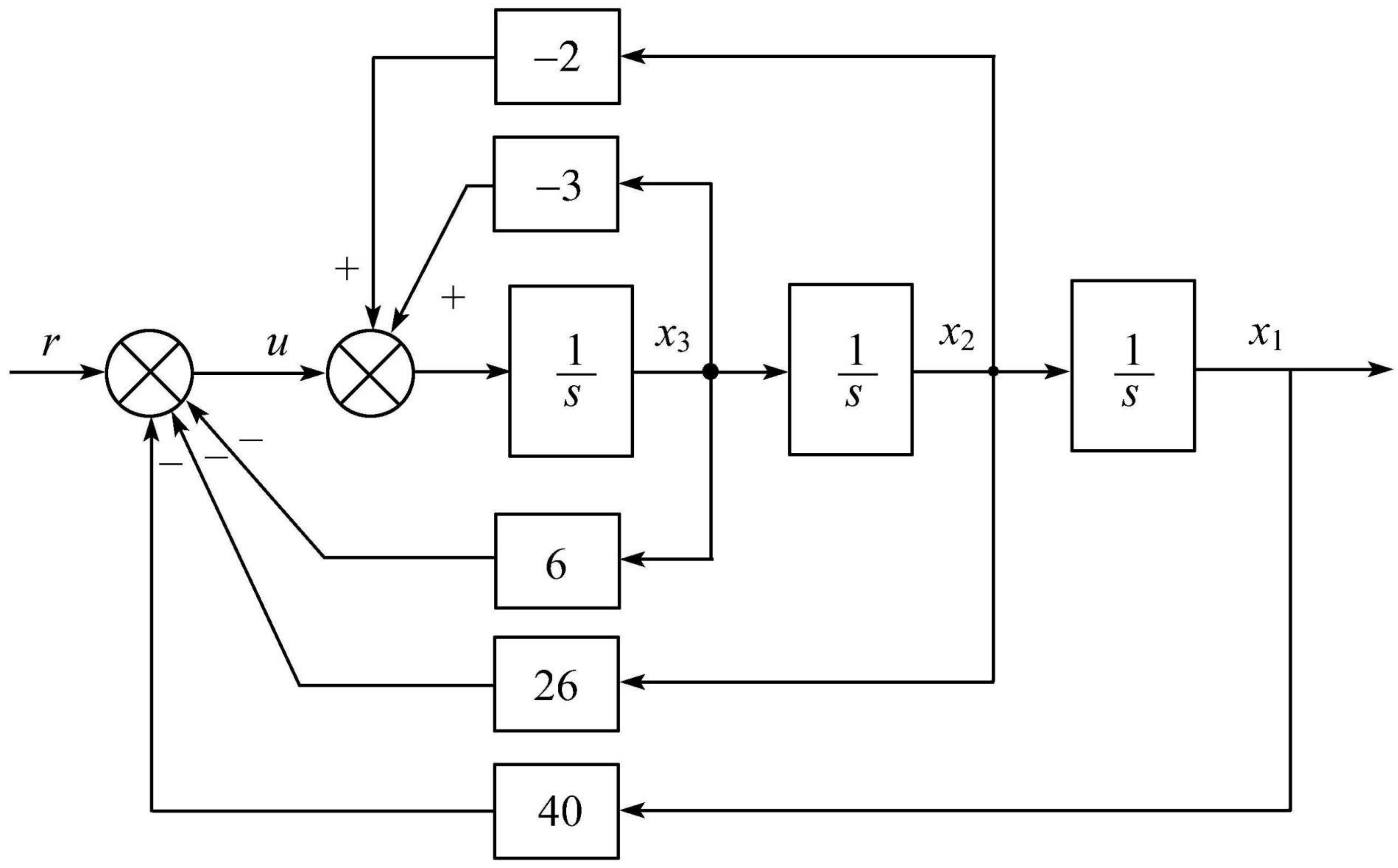
特征多项式 $\left|sI-(A-BK)\right| = s^3 + (k_3+3)s^2 + (k_2+2)s + k_1$

要求的特征多项式 $(s+5)(s+2+\mathrm{j}2)(s+2-\mathrm{j}2) = s^3 + 9s^2 + 28s + 40$

对应项系数相等得：

$$\begin{cases} k_1 = 40 \\ k_2 + 2 = 28 \\ k_3 + 3 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 40 \\ k_2 = 26 \\ k_3 = 6 \end{cases} \Rightarrow K = \begin{bmatrix} 40 & 26 & 6 \end{bmatrix}$$

状态变量图



8.9 状态观测器

8.9.1.全维状态观测器

状态观测器：对象的仿真装置，状态逼近实际对象

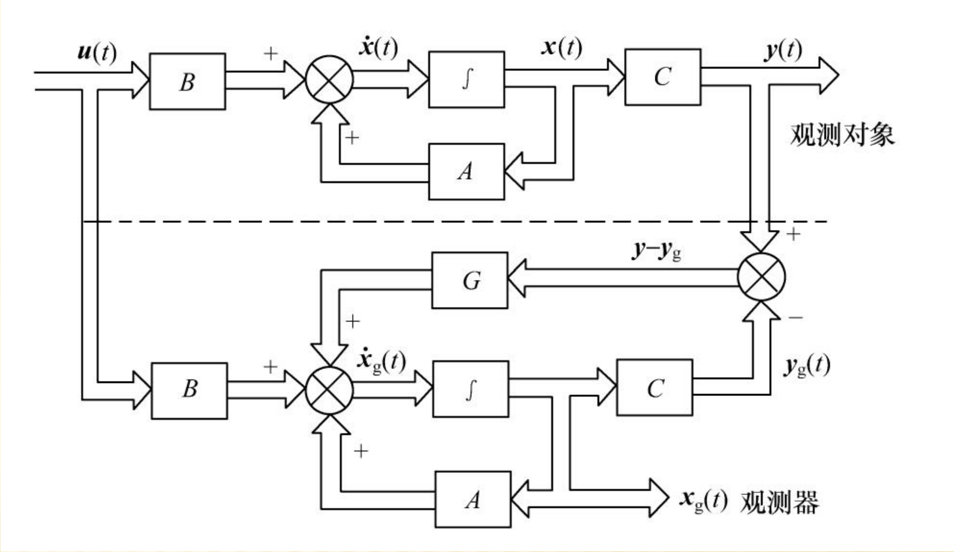
全维状态观测器：维数等于实际对象的状态维数

- 1.全维状态观测器的结构

对象 $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} \end{cases}$ 仿真器 $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_g = A\mathbf{x}_g + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y}_g = C\mathbf{x}_g \end{cases}$

把$(\mathbf{y}_g - \mathbf{y})$输入到仿真器以便使$\mathbf{x}_g \to \mathbf{x}$。

$$\dot{\mathbf{x}}_g = A\mathbf{x}_g + B\mathbf{u} - G(\mathbf{y}_g - \mathbf{y})$$



$$\dot{\mathbf{x}}_g = (A - GC)\mathbf{x}_g + B\mathbf{u} + G\mathbf{y}$$

观测器系数矩阵是$(A-GC)$。

$$\Rightarrow (\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_g) = (A - GC)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_g)$$

上式是以$(\mathbf{x}-\mathbf{x}_g)$为状态变量的齐次状态方程。只要$(A-GC)$的特征值都有负实部，系统稳定，且有

$$\lim_{t\to\infty}[\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_g(t)] = 0$$

$(A-GC)$的特征值的位置决定$\mathbf{x}_g \to \mathbf{x}$的趋近速度。

希望观测器状态的趋近速度和动态性能满足要求$\Rightarrow$

$(A-GC)$的特征值可任意配置，即$(A^T-C^TG^T)$的特征值可任意配置。

系数阵为A^T，输入阵为C^T，反馈阵为G^T。

特征值可任意配置的条件是(A^T, C^T)可控，对偶系统可观。对偶系统的系数阵为A，输出阵为C。

观测器$(A-GC)$的特征值可任意配置的充要条件是：

系统(A,C)状态完全可观测。

例8-9-1对象 $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, y = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

设计观测器，极点为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$。

解 对象可观，反馈阵为 $G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$

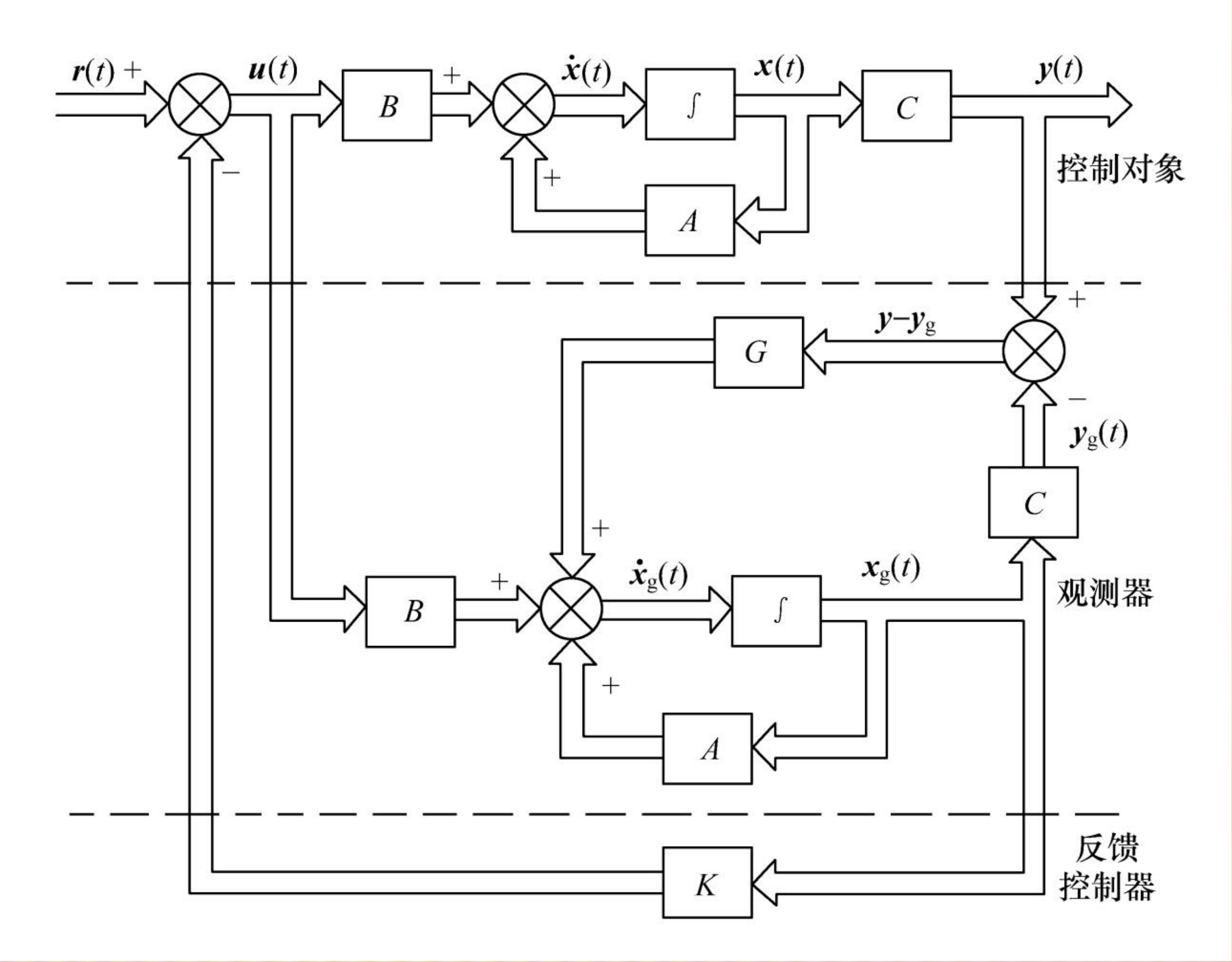
$$A - GC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2g_1 & 1 \\ -2g_2 - 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\left| sI - (A - GC) \right| = s^2 + (3 + 2g_1)s + (6g_1 + 2g_2 + 2)$$

期望的特征多项式 $(s+3)^2 = s^2 + 6s + 9$，对应的系数相等$\Rightarrow$

$$\begin{cases} 3 + 2g_1 = 6 \\ 6g_1 + 2g_2 + 2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_1 = 1.5 \\ g_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow G = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2. 带观测器的闭环控制系统



- 1.系统特征多项式是纯反馈系统的特征多项式与观测器特征多项式的积。
- 2.状态反馈和观测器可分别独立设计。
- 3.观测器的极点与虚轴的距离，应比系统极点更远。

例8-9-2 $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$

设计带观测器的反馈系统，反馈系统极点$s_{1,2} = -1 \pm \mathrm{j}$。

解 1）对象可控可观。

2)设计状态反馈阵 $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$

$$|sI - (A - BK)| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ k_1 & s + 5 + k_2 \end{vmatrix} = s^2 + (5 + k_2)s + k_1$$

$$(s + 1 - \mathrm{j})(s + 1 + \mathrm{j}) = s^2 + 2s + 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 = 2 \\ 5 + k_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 2 \\ k_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow K = \begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix}$$

3)设计观测器反馈阵 $G=\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$,观测器特征多项式为

$$|sI-(A-GC)|=\begin{vmatrix} s+g_1 & -1 \\ g_2 & s+5 \end{vmatrix}=s^2+(5+g_1)s+5g_1+g_2$$

取观测器极点 $\lambda_1=\lambda_2=-5$，希望的特征多项式为

$$(s+5)^2=s^2+10s+25 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 5+g_1=10 \\ 5g_1+g_2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_1=5 \\ g_2=0 \end{cases} \Rightarrow G=\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$