1) 证明或否证： $f(n)+o(f(n))=\Theta(f(n))$

2) 试证明：$O(f(x)) + O(g(x)) = O(max(f(x), g(x)))$.

3) 证明或给出反例：$\theta(f(n))\cap o(f(n))=\varnothing$。

4) 证明：设 k 是任意常数正整数，则 $log^k n = o(n)$。

5) 用迭代法解方程 $T(n)=T(9n/10)+n$.

6) 解方程 $T(n)=6T(n/3)+log\ n$.

解方程 $T(n) = 3T(n/3+5) + n/2$.

7) 解方程 $T(n)= T(n/2)+1$.

8) 解方程 ：$T(n)=9T(n/3)+n$；

9) 解方程：$T(n)=T(n/2)+n^3$；

10) 解方程： $T(n)=2T(\sqrt[4]{n})+(\log_2 n)^2$；

11) 解方程：$T(n) \le \begin{cases} C_1 & n<20 \\ C_2 n+4T(n/5) & n\ge 20 \end{cases}$；

5) 用迭代法解方程 $T(n)=T(9n/10)+n$.

解: $T(n) = T(\frac{9}{10}n)+n$

$\because T(\frac{9}{10}n) = T((\frac{9}{10})^2 n)+\frac{9}{10}n$

$\therefore T(n) = T((\frac{9}{10})^2 n)+\frac{9}{10}n+n$

$= T((\frac{9}{10})^3 n)+(\frac{9}{10})^2 n+\frac{9}{10}n+n$

$= \cdots$

$= T((\frac{9}{10})^i n)+((\frac{9}{10})^{i-1}+(\frac{9}{10})^{i-2}+\cdots+1)n$

$= T((\frac{9}{10})^i n)+10((\frac{9}{10})^i-1)$

令 $(\frac{9}{10})^i n=1$，那么 $(\frac{9}{10})^i=\frac{1}{n}$，于是

$T(n) = T(1)+10(\frac{1}{n}-1)$

$= 10\frac{1}{n}-10+T(1)$

$= \Theta(\frac{1}{n})$

6) 解方程 $T(n)=6T(n/3)+\log n$.

解方程 $T(n) = 3T(n/3+5) + n/2$.

6) 解: $T(n) = 6T(n/3) + \log n$

$T(n/3) = 6T(n/3^2) + \log n/3$

$T(n) = 6^2 T(n/3^2) + \log n + \log n/3$

$= \cdots$

$= 6^i T(n/3^i) + \log n + \log n/3 + \cdots + \log n/3^{i-1}$

$= 6^i T(n/3^i) + \log \frac{n^i}{3 \times 3^2 \times \cdots \times 3^{i-1}}$

$= 6^i T(n/3^i) + \log \frac{n^i}{3^{\frac{i(i-1)}{2}}}$

$= 6^i T(n/3^i) + \log n^i - \log 3^{\frac{i(i-1)}{2}}$

$= 6^i T(n/3^i) + i\log n - \frac{i(i-1)}{2} \log 3$

$= 6^{\log_3 n} T(1) + \log_3 n \cdot \log n - \frac{(\log n)^2 - \log n}{2} \log 3$

$= n\, 2^{\log_3 n} T(1) + \log_3 n \cdot \log n - \frac{\log n^2 - \log n}{2} \log 3$

$= \Theta(n^{1+\frac{1}{\log_2 3}})$

$n^{\log_3 6}$

$n^{\log_3 6}$ 1.5 $n^{1.5}$

$\log n = O(n^{\log_3 6 - \varepsilon})$

$f(n) = \Theta(n^{\log_3 6})$

令 $n = m + \frac{15}{2}$, 那么

$T(m+\frac{15}{2}) = 3T(\frac{m}{3} + \frac{15}{2}) + (\frac{m}{2} + \frac{15}{4})$

令 $S(m) = T(m+\frac{15}{2})$, 那么

$S(m) = 3S(\frac{m}{3}) + (\frac{m}{2} + \frac{15}{4})$

由于 $\frac{m}{2} + \frac{15}{4} = \Theta(m^{\log_3 3}) = \Theta(m)$, 那么

$S(m) = \Theta(n\log n)$

$\because T(m+\frac{15}{2}) = \Theta(n\log n)$

即 $T(n) = \Theta(n\log n)$

$f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ $T(n) = \Theta(n^{\log_b a - \varepsilon})$

$f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}\log n)$

$f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$

$af(\frac{n}{b}) \leq c f(n)$ $c<1$

7) 解方程 $T(n)=T(n/2)+1$.

解: $a=1 \quad b=2 \quad \therefore \log_b a=0$, 于是

$1=\Theta(n^{\log_b a})=1$

$\therefore T(n)=\Theta(\log n)$

8) 解方程 ： $T(n)=9T(n/3)+n$；

解: $b=3 \quad a=9 \quad \therefore \log_b a=\log_3 9=2$. ，于是

$n=O(n^{2-1}) \quad \therefore T(n)=\Theta(n^2)$

9) 解方程：$T(n)=T(n/2)+n^3$；

解: $a=1 \quad b=2 \quad \log_b a=0$ ，于是

$f(n)=n^3=\Omega(n^{0+3})$ 且对于足够大的n，有 $af(\frac{n}{b})=(\frac{n}{2})^3 \leq cn^3$成立.且 $c<1$

于是 $T(n)=\Theta(n^3)$

10) 解方程： $T(n)=2T(\sqrt[4]{n})+(\log_2 n)^2$；

解: $T(n)=2T(\sqrt[4]{n})+(\log_2 n)^2$

$(n^2)^2=n^4$

$T(\sqrt[4]{n})=2T(n^{\frac{1}{16}})+(\log_2 n^{\frac{1}{4}})^2$

$(n^2)^3=n^6$

$\therefore T(n)=2^2T((n^{\frac{1}{4}})^2)+2(\log_2(n^{\frac{1}{4}}))^2+(\log_2 n)^2$.

2×3

$=2^3T((n^{\frac{1}{4}})^3)+2^2(\log_2(n^{\frac{1}{4}})^2)^2+(\log_2 n)^2$

$(\frac{1}{4})$

$=\cdots$

$(n^{\frac{1}{4}})^{i-1}$

$=2^iT((n^{\frac{1}{4}})^i)+2^{i-1}(\log_2 n^{\frac{i-1}{4}})^{i-1}+\cdots+2^2(\log_2(n^{\frac{2}{4}}))^2+(\log_2 n)^2$