第六章 平摊分析 习题

1.在数据结构 D 上执行操作序列 $Op_1,...,Op_n$。当 $i=2^k$ 时，Op_i 的代价为 i；当 $i\neq 2^k$ 时, Op_i 的代价为 1。

(a)用聚集方法分析该操作序列的时间复杂度上界；

(b)用会计方法分析该操作序列的时间复杂度上界。

2 在二进制计数器上，除了 Increment 操作外，定义操作 Reset 的意义为将计数器的（所有二进制位）置 0。用数组实现一个 k 位二进制计数器，使得在初始值为 0 的计数器上执行由 Increment 和 Reset 构成的长度为 n 的操作序列的时间复杂度上界为 $O(n)$。

3 设势能函数ϕ使得$\phi(D_i)\geq \phi(D_0)$对所有 i 成立，但$\phi(D_0)\neq 0$。证明：存在势能函数ϕ'使得$\phi'(D_0)=0$ 且$\phi'(D_i)\geq 0$ 对所有 i 成立，并且用ϕ'和ϕ在每个操作上得到的平摊代价相同。

4 完成 6.2.3 节情形 3 的平摊代价计算。

5 有一个存储正整数的链表 A。操作 Add(A,x)的含义如下：如果 x 是奇数，则创建新结点存储 x 并添加到 A 的末尾；如果 x 是偶数，则创建新结点存储 x 并添加到 A 的末尾，再删除 A 中紧邻 x 的所有存储奇数的结点。用平摊分析方法分析，在初始为空的链表上连续执行 n 次 Add 操作的时间复杂度上界。

6 有序队列 Q 用于存储一系列元素，并支持如下两种基本操作 OrderedPush 和 Pop。OrderedPush(x)操作从 Q 的第一个元素开始删除所有小于 x 的所有元素，然后将 x 插入 Q 中作为第一个元素。Pop()操作删除并返回 Q 的第一个元素（如果 Q 为空，则返回空）。假设将有序队列实现为链表，证明：在初始为空的有序队列上执行长度为 n 的操作序列的平摊代价为 $O(1)$。

7 字典这种数据结构通常用来存储一系列元素，通常它需要支持元素插入 Insert 操作和元素查找 Lookup 操作。字典可以实现为有序数组，此时 Lookup 操作的代价为 $O(\log n)$而 Insert 操作的代价为 $O(n)$。字典也可以实现为链表，此时 Insert 操作的代价为 $O(1)$而 Lookup 操作的代价为 $O(n)$。字典也可以按如下更好的方式实现。

将字典实现为一系列数组，第 i 个数组的大小为 2^i,并且每个数组要么是空的要么是满的。每个数组都是有序的，但不同数组的元素之间的大小顺序是任意的。如果字典有 n 个数据项，则 n 的二进制表示给出了字典中不等于空的所有数组。例如，如果 n=11，由于$(11)_2$=1011,故字典中使用了 3 个非空数组，亦即第 1 个数组、第 2 个数组和第 4 个数组，而第 3 个数组为空；此时整个字典如下所示：

A[0][]={6}
A[1][]={2,13}
A[2][]=empty
A[3][]={1,6,7,8,10,15,17,29}

(a) 假设字典的 Lookup 操作实现为对每个非空数组执行二分查找。Lookup 操作的最坏时间复杂度是多少？

(b) 为上述实现方案设计 Insert 操作算法，分析其最坏时间复杂度。

(c) 在初始为空的字典上，连续执行 n 次 Insert 操作，其平摊代价等于多少？