第5章　随机变量的数字特征

- **引子：** 通过三、四章的学习，我们对 $r \cdot v$ 的分布——这一完整描述 $r \cdot v$ 统计规律的概率特征概念有了较全面的认识。事实上，随着我们对概率论知识的加深会逐渐明确这一事实：$r \cdot v$ 的概率分布完全决定了的概率性质和其它一切概率论特征。

- Question：$r\cdot v(X,Y)$ ，$r\cdot vX$ 的数字特征讨论的必要性是什么？ $d\cdot fF(x),F(x,y)$ 局限性

（理论与实际）

（1）怎样表现$r\cdot v$ 取值的集中位置，取值的集中程度(或分散程度)？两个$r\cdot vX$ ，Y

相依程度（除了独立，函数关系外）如何？

（2）实际应用中，有时人们不需要知道或不知道 $r\cdot v$的df ，只需了解 $r\cdot v$ 的其它概率特征（如 $r\cdot v$取值的集中位置，取值的集中程度、金融收益与风险等）即可；这样省时省力。

（3）三、四章知道并掌握了一些在理论与实际中具有重要意义的特殊分布，例

$$X\sim P(\lambda), X\sim B(n,p), X\sim E(\lambda),$$

$$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right), \left(X, Y\right) \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2, \rho\right)$$

若我们知道了 $r \cdot v$ 分布已完全确定，求一个事件的概率亦十分容易，这些参数有何明确的概率特征与意义呢？怎样求之？

综上所述，研究 $r \cdot v$ 的概率特征即数字特征具有十分重要意义。它构成概率论

和数理统计的主要研究对象。本书即将讨论的数字特征有：数学期望（概率平均值）、方差、相关系数、协方差、矩。

• §5.1 数学期望

这一数字特征描述了 $r \cdot v$取值的集中位置，它是一种概率平均值。

一、离散型　$r \cdot vX$:

例1 有甲、乙两射手，他们的射击技术用下表表出：

$X_{甲}$	8	9	10
P	0.25	0.25	0.5

$X_{乙}$	8	9	10
P	0.2	0.4	0.4

若他们两个各射N发子弹，问那个射击手本领好？

解：甲、乙两人射N发子弹，各自击中环数为

甲：$8\times 0.25N+9\times 0.25N+10\times 0.5N=9.25N$

乙：$8\times 0.2N+9\times 0.4N+10\times 0.4N=9.2N$

于是平均来说，9.25环/发（甲）>9.2环/发（乙）因此，甲本领好！

定义1 设离散型 $r\cdot vX$的分布列为：

$$P(X=x_i)=p_i, i=1,2,\cdots$$

若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$绝对 收敛 即 $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < +\infty$

则称 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ 为 rvX数学期望或均值

记 EX or $E(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$

Remark:

（1）当 $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|p_i$ 发散时，则称X的数学期望不存在；

（2）绝对收敛条件保证了求和次序改变而不影响求值；

（3）EX表征离散质点系的重心坐标！

例2 X~(0,1)求EX，特别 $X=\chi_A, A\subset S$

则$EX=P(A)$

$$EX=0(1-p)+1\times p=p$$

X	0	1
P	**1-P**	**P**

$$E\chi_A=0\times(1-P(A))+1\times P(A)=P(A),$$

任意事件的概率等于它的示性函数数学期望。

例3 $X\sim B(n,p)$ 求EX

$$EX=\sum_{k=0}^{n}kC_n^k p^k q^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k\frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(k-1)]}{k!}\cdot p^k q^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)(n-2)\cdots[n-(k-1)]}{(k-1)!}\cdot p^{k-1}q^{n-1-(k-1)}$$

$$= np\sum_{k-1=0}^{n-1} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-1-(k-1)}$$

$$= np(p+q)^{n-1} = np$$

$$P(X = [(n+1)p]) = \max$$

例4　$X \sim P(\lambda)$　　求$EX(\lambda)$

$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

$$P(X = [\lambda]) = \max$$

对于稀有事件 $P \leq 0.10$ 和较大 $n(n \geq 10)$,
我们可用Poisson分布来近似二项分布。

二、连续型 $r\cdot v$ 的数学期望：

定义2 设X为连续型 $r\cdot v$ $P(x)$为pdf，若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$ 为绝对收敛 $\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|x|P(x)dx<+\infty\right)$ 则称 $\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$ 为 $r\cdot vX$ 的数学期望或均值，记为

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xP(x)dx$$

EX——连续质点系的重心坐标位置。

例5 $X \sim U[a,b]$，求EX

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{a}x\times 0dx+\int_{a}^{b}x\times\frac{1}{b-a}dx+\int_{b}^{+\infty}x\times 0dx$$

$$=\frac{1}{b-a}\times\frac{x^{2}}{2}\Big|_{a}^{b}=\frac{a+b}{2}$$

例6 $X \sim E(\lambda)$，求 EX

实际背景，若用X表示寿命，对 λ 具体要求！

解：

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x \times 0 dx + \int_{0}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= -\int_{0}^{+\infty} x de^{-\lambda x} = -xe^{-\lambda x} \Big|_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$$

$$= -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

例7 $X \sim N\left(\mu, \sigma^{2}\right)$，求$EX\left(\mu\right)$（对称中心）

解：

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\xlongequal{令t=\frac{x-\mu}{\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu+\sigma t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \mu$$

例8 柯西分布：设X的pdf为

$$P(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2},-\infty<x<+\infty$$

求EX（不存在）

解：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{dx}{\pi\left(1+x^2\right)}=\int_{-\infty}^{0}\frac{-xdx}{\pi\left(1+x^2\right)}+\int_{0}^{+\infty}\frac{xdx}{\pi\left(1+x^2\right)}$$

$$= 2\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\pi\left(1 + x^2\right)}$$

$$= \frac{1}{\pi} \ln\left(1 + x^2\right)\Big|_0^{+\infty}$$

$$= +\infty$$

故EX不存在.

三、$r\cdot vX,(X,Y)$函数的数学期望与性质：

基于 $r\cdot v$ 函数复杂性和我们知识的局限性，我们只给出$r\cdot v$连续函数的数学期望计算公式。

Theorem1 设$Y=f(X)$，$f(x)$是连续函数。

（1）当X为离散型 $r\cdot v$，分布列为

$$P\left(X=x_i\right)=p_i\left(i=1,2,\cdots\right)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)| p_i < +\infty$$ 则有

$$EY = Ef(X) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) P_i$$

（2）当X是连续型 $r \cdot v$，pdf为 $P_X(x)$

且 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| P_X(x) dx < +\infty$，则有

$$EY = Ef(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) P_X(x) dx$$

Theorem2 设$Z=f(X,Y)$，$f(x,y)$为二元连续函数。

（1）当(X,Y)为二维离散型 $r\cdot v$ ，分布列为 $P_{ij}=P\left(X=x_i,Y=y_i\right)\quad i,j=1,2,\cdots$

且当 $\sum_{i,j=1}^{\infty}|f\left(x_i,y_i\right)|P_{ij}<+\infty$ 时，则有

$$EZ=Ef\left(X,Y\right)=\sum_{i,j=1}^{\infty}f\left(x_i,y_i\right)P_{ij}$$

（2）当(x,y)为二维连续型 $r \cdot v$， 其pdf为

$P(x, y)$且当

则有：$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} | f(x, y) | P(x, y) dxdy < +\infty$

$$EZ = Ef(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) P(x, y) dxdy$$

特别若 $f(X,Y)=X$ or Y，则有：

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x,y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} xP_X(x)\,dx$$

$$EY = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yp(x,y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} yP_Y(y)\,dy$$

例9 已知 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 求

$$E|X-\mu|, Ea^X \ (a>0)$$

解：由Th5.1知

$$E|X-\mu| = \int_{-\infty}^{+\infty} |x-\mu| \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\overset{v=\frac{x-\mu}{\sigma}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma |v| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv$$

$$= 2\sigma \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} d\,\frac{v^2}{2}$$

$$= 2\sigma \frac{-e^{-\frac{v^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \Big|_0^{+\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$$

于是 $$E|X-\mu| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$$

$$Ea^X = \int_{-\infty}^{+\infty} a^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\overset{v=\frac{x-\mu}{\sigma}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} a^{\mu+\sigma v} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = a^{\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v2}{2}+(\sigma \ln a)v} dv$$

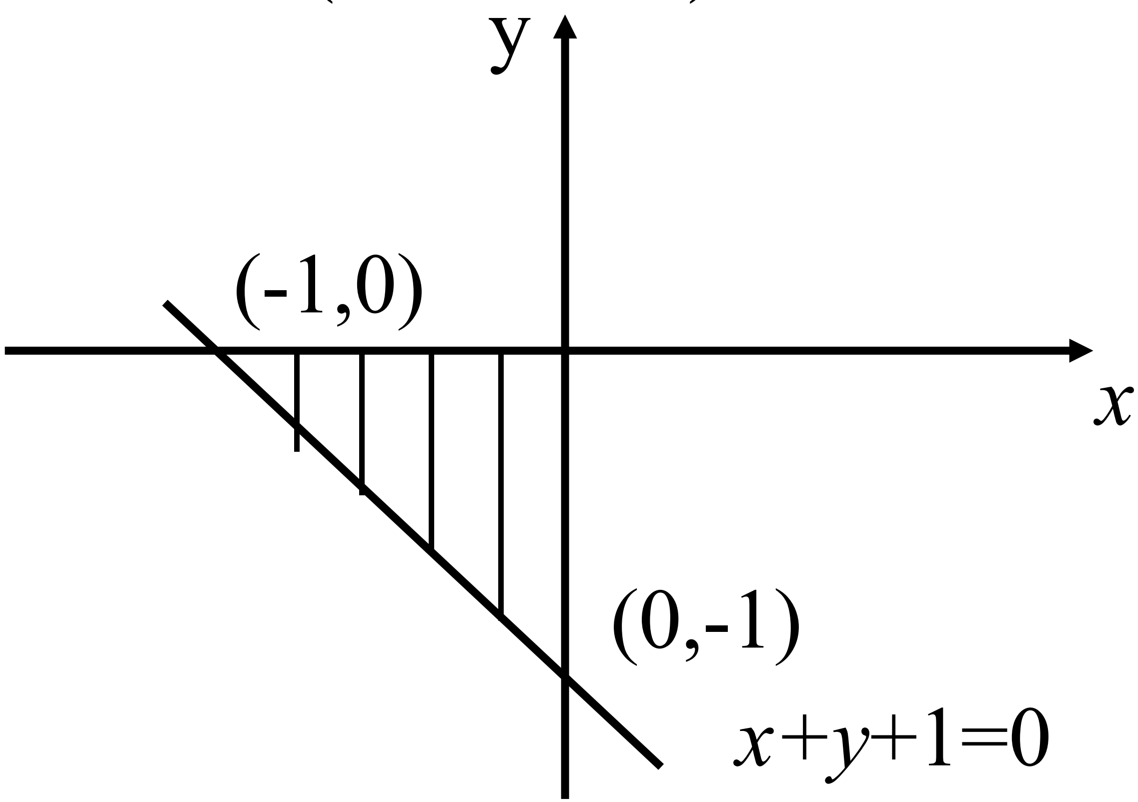
$$= a^{\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(v^2-2(\sigma \ln a)v+(\sigma \ln a)^2\right)+\frac{1}{2}(\sigma \ln a)^2} dv$$

$$= a^{\mu} \cdot e^{\frac{1}{2}(\sigma \ln a)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(v-\sigma \ln a)^2} d(v-\sigma \ln a)$$

$$= a^{\mu} \cdot e^{\frac{1}{2}(\sigma \ln a)^2}$$

例10 设(X,Y)在区域A上服从二维均匀分布，

求 $EX, E(-3X+2Y), EXY$



解：由已知 $r\cdot v(X,Y)$ 的pdf为

$$P(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in A\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

于是 $$EX=\iint_A 2x\,dx\,dy=\int_{-1}^{0}dx\int_{-x-1}^{0}2x\,dy=-\frac{1}{3}$$

$$E(-3X+2Y)=\int_{-1}^{0}dx\int_{-x-1}^{0}2(-3x+2y)dy=\frac{1}{12}$$

$$EXY=\int_{-1}^{0}x\,dx\int_{-x-1}^{0}2y\,dy=\frac{1}{12}$$

例11 设X,Y独立同分布 $r\cdot,v\ X\sim U[0,2]$,

求 $E\max(X,Y),E\min(X,Y)$

∵ X与Y独立同分布，令其pdf分别为（两种方法）

分别为 $P_X(x),P_Y(y)$

∴ $P(x,y)=P_X(x)P_Y(y)$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & 0<x<2,0<y<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$\therefore \ E \max(X, Y)$$

$$= \int_0^2 \int_0^2 \max(x, y) \frac{1}{4} dxdy$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^2 \left[\int_0^x x dy + \int_x^2 y \, dy \right] dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^2 \left(xy \ \Big|_0^x + \frac{1}{2} y^2 \ \Big|_x^2 \right) dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^2 \left(x^2 + 2 - \frac{1}{2} x^2 \right) dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^2\left(\frac{1}{2}x^2+2\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}x^3+2x\right)\Big|_0^2$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{8}{6}+4\right)$$

$$=\frac{4}{3}$$

同理$E\min\left(X,Y\right)=\frac{2}{3}$

另一种方法：分布函数法及利用公式。

数学期望的性质（假设等式两边数学期望存在）

(1)EC=C　C为常数

(2)E（CX）=CEX，　C为常数

(3)$E(X_1+X_2+\ldots+X_n)=\sum_{i=1}^{n} EX_i$

(4)若$X_1,\ldots,X_n$ 相互独立，则有：

$$E(X_1,\cdots X_n) = EX_1 EX_2 \cdots EX_n$$

poof略

例11.X~B(n,p),求X的数学期望EX

解：令X_i表示第i次贝努里E成功次数　$(i = \overline{1,n})$

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad EX_i = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$$

$$EX = \sum_{i=1}^{n} EX_i = np$$

- 例12.r个人在楼的底层进入电梯，楼上有n 层，每个乘客在任一层下电梯概率是相同的。若到某层无乘客下，电梯不停，求直到乘客都下完时电梯停车次数X的数学期望！

解：设X_i表示在第i层电梯停车次数

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{第}i\text{层无人下} \\ 1, & \text{第}i\text{层至少有一个下} \end{cases}$$

易得： $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$ 且 $EX=\sum_{i=1}^{n} X_i$

$\forall i=\overline{1,n}$

令$A_i^j \quad (j=1,2,\ldots,r)$ 表示第j人在第i层下事件。

$$(X_i=1)=A_i^1 \bigcup A_i^2 \bigcup \cdots \bigcup A_i^r$$

$A_i^1, \cdots, A_i^r$ 相互独立。

$(X_i=0)=\overline{A_i^1}\,\overline{A_i^2}\cdots\overline{A_i^r}$ 于是有：

$$P(X_i = 0) = (1 - \frac{1}{n})^r$$

$$P(X_i = 1) = 1 - (1 - \frac{1}{n})^r$$

即

x_i	0	1
p	$(1 - \frac{1}{n})^r$	$1 - (1 - \frac{1}{n})^r$

故

$$EX = \sum_{i=1}^{n} EX_i = n\left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^r\right]$$

Remark:

$r = 10, n = 10, EX = 6.5$ 与经验相符合。

例13.将n只球(编号1，2，…,n)随机地放进n只盒子中去，一只盒放一只球，将一只球放入与球同号的盒子中算一个配对，记X表示配对个数。求EX

解：设X_i表示第i个盒子 与第i个球配对的个数(i=1,2,…,n）

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{个盒子与第}i\text{个球配对}\\ 0, & \text{第}i\text{个盒子与第}i\text{个球不配对}\end{cases}$$

X_i	0	1
P	$1-\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$

$$EX_i = 0 \times (1 - \frac{1}{n}) + 1 \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n}, (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$$EX = \sum_{i=1}^{n} EX_i$$

$$= n \times \frac{1}{n}$$

$$= 1$$

例14.设在国际市场上每年对我国某种出口商品的需求量是 $r \cdot vX$ $X \sim \bigcup[2000,4000]$ 又设每售出这种商品一吨，可为国家挣得外汇3万元，但假如销售不出而囤积于仓库，则每吨需浪费保养费一万元，问需组织多少货源，才能使国家收益最大。（平均收益最大）

解：令y为预备组织货源量

$$y \in [2000, 4000]$$

z表示国家收益(万元)，则由题设知：

$$Z = f(X) = \begin{cases} 3y, & \text{当}X \ge y\text{时} \\ 3X - (y - X), & \text{当}X < y\text{时} \end{cases}$$

下面求EZ，并求使EZ达到最大值

$$EZ = \int_{-\infty}^{+\infty} f(X) P_X(X) dx$$

$$= \int_{2000}^{y} [3x - (y - x)] \frac{1}{2000} dx$$

$$+ \int_{y}^{4000} 3y \cdot \frac{1}{2000} dx$$

$$= -\frac{1}{1000} \left[y^2 - 7000y + 4 \times 10^6 \right]$$

$$= -\frac{1}{1000}\left[(y-3500)^2 - \left(3500^2 - 4\times 10^6\right)\right]$$

故当y=3500时，EZ达到最大值8250，因此组织3500吨此种商品是最佳决策！

Note：此题条件可改为更一般化条件！

r·vX的d ·fF(x),pdf p(x) ，p(x)在[0,+∞]上连续，x<0时p(x)=0；每售出一吨，挣a美元；

积压一吨，损失b美元，为获取最大期望收益，组织货源量s满足：

$$P(X \le S) = \frac{a}{a+b}$$

$$P(X > S) = \frac{b}{a+b}$$

补充3个例子

例15设 X与Y独立同分布，$X \sim U(0,2), Z = |X - Y|$, 求$EZ$

例16设

X与Y独立同分布，$X \sim N(0,1)$，$M = \max(X, Y), N = \min(X, Y)$,

求EM和EN

例17独立和极坐标变换例子。

§ 5.2 方差

- 例1 甲乙二人对同一物理量测量得到如下数据：

$X_{甲}$	99.9	100	100.1
P	1/3	1/3	1/3

$X_{乙}$	90	100	110
P	1/3	1/3	1/3

$EX_{甲}=EX_{乙}=100$

但直观而言，甲测量E比较好，因为测量值偏离数学期望较小。这实际要求我们考察 $r\cdot vX$ 所有可能值与EX偏差大小程度。工程上，考察E精度，技术稳定性，金融风险等！

自然想法：偏差大小程度用$E|X\text{-}EX|$，但带着绝对值符号不利于运算。人们常采用$E(X\text{-}EX)^2$表征 $r\cdot vX$ 与 EX的平均偏差程度，称之为方差。

但基于实际需要，还有其它表述偏差程度的方法，如哈工大黄牌警告中筛选法！（个体偏差程度）

定义：设X是一个$r{\cdot}v$，若$E(X\text{-}EX)^2$存在,则称$E(X\text{-}EX)^2$是$r\cdot vX$ 的方差。记作DX或$D(X)$。

同时称 $\sqrt{DX}$ 为 $r\cdot vX$ 的标准差或均方

差，记作$\sigma_X = \sqrt{DX}$ （σ_X与X具有相同的量纲！）

由§5·1,Th 5·1 :$f(X) = (X - EX)^2$为连续函数

（设Th5-1条件满足）

（1）离散型 $r \cdot vX$:

$$DX = \sum_{i=1}^{\infty} (X_i - EX)^2 P_i, \{P_i\}为r.vX$$

的分布列。

（2）连续型　$r \cdot vX$:

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - EX\right)^2 P_X\left(x\right) dx$$

方差具有下列性质：（假设等式两边方差存在）

（1）DC=0，C为常数

（2）$D(CX)=C^2DX$,C为常数

（3）$DX=EX^2-(EX)^2$

（4）若 $X_1,\cdots,X_n$相互独立，则

$$D\left(X_1,+\cdots,X_n\right)=\sum_{i=1}^{n}DX_i$$

(n个 $r\cdot vX_1,\cdots,X_n$独立$\Leftrightarrow$对$\forall x_1,\cdots,x_n\in R$有：

$$F_{X_1\cdots X_n}\left(x_1,\cdots,x_n\right),=\prod_{i=1}^{n}F_{X_i}\left(x_i\right)$$

（4）之条件可减弱为 $X_1,\cdots,X_n$两两相互独立。）

（5）DX=0 $\Leftrightarrow r\cdot vX$ 取某一常数值a的概率为1，即

$$P\left(X=a\right)=1$$

Proof：

(1) $D(C) = E(C-EC)^2 = E(C-C)^2 = E0^2 = 0$

(2) $D(CX) = E(CX-ECX)^2 = E(CX-CEX)^2$

$= EC^2(X-EX)^2$

$= C^2E(X-EX)^2 = C^2DX$

(3) $DX = E(X-EX)^2 = E(X^2-2(EX)X+(EX)^2)$

$= EX^2-2EXEX+(EX)^2 = EX^2 -(EX)^2$

(4) $n=2$情形

$$D(X_1+X_2)=E[(X_1+X_2)-E(X_1+X_2)]^2$$

$$=E[(X_1-EX_1)+(X_2-EX_2)]^2$$

$$=DX_1+DX_2+2E(X_1-EX_1)(X_2-EX_2)$$

由已知 $r\cdot vX_1,X_2$独立，故由数学期望性质：

$$E(X_1-EX_1)(X_2-EX_2)$$

$$=EX_1X_2-EX_2EX_1-EX_1EX_2+EX_1EX_2$$

$$=EX_1X_2-EX_1EX_2=0$$

$$\therefore D(X_1+X_2)=DX_1+DX_2$$

利用性质（4），求　$r\cdot vX$ 的方差：

例1　$X\sim U[a,b]$, 求DZ

解：　$EX=(a+b)/2$, 而

$$EX^2=\int_a^b x^2\frac{dx}{b-a}=\frac{1}{b-a}\times\frac{1}{3}x^3\Big|_a^b=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

故

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

注记：若X仅在 $[a,b]$内取值且方差 DX 存在，则有：

$$DX \le \frac{(b-a)^2}{4}$$

- 例2 $X \sim E(\lambda)$,求DX

$$EX = 1/\lambda$$,而

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{0} 0x^2 dx + \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = -\int_0^{+\infty} x^2 de^{-\lambda x}$$

$$= -x^2 e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2x e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda} \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= \frac{2}{\lambda} \times \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}$$

故 $$DX = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

- 例3 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,求DX

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

令$\dfrac{x-\mu}{\sigma} = t$,则得

$$DX = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left\{\left[-te^{-\frac{t^2}{2}}\right]\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right\}$$

$$=\sigma^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sigma^2$$

- 例4 $X \sim (0,1)$, 求DX

解： $EX = 0 \times q + 1 \times p = p$

$$EX^2 = 0^2 \times q + 1^2 \times p = p$$

$$DX = p - p^2 = p(1 - p) = pq$$

$$p + q = 1$$

- 例5 $X \sim B(n,p)$求$DX\ (npq)$　　$X=\sum_{i=1}^{n} X_i$

解：令X_i 表示第i次贝努里试验中成功的次数，则X_i的分布列为：

Xi	0	1
P	q	p

$q=1-p;$

$$DX_i = pq, i=1,2,\cdots,n$$

显然,X可用$X_i(i=1,2,\cdots,n)$表示如下:

$$X=\sum_{i=1}^{n} X_i$$

由于$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立,故由方差性质(iii),得

$$DX=\sum_{i=1}^{n} DX_i = npq$$

- 例6 $X \sim P(\lambda)$ 求DX

解： $$EX = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda$$

$$EX^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(k^2 - k\right) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} + \lambda\ e^{-\lambda}\sum_{k-1=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} + \lambda$$

$$= \lambda^2 \sum_{k-2=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}e^{-\lambda} + \lambda$$

$$= \lambda^2 + \lambda$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \lambda$$

§5.3 协方差和相关系数

引子：对于二维$r\cdot v(X,Y)$，我们在第四章已经讨论了如下事实：

(1) $r\cdot vX,Y$ 相互独立关系；

(2)二维 $r\cdot v(X,Y)$ 函数分布（函数关系），而相互独立是一种重要而基本关系，下面我们能找到一种刻划两个不独立$r\cdot vX,Y$的数字特征！

原命题：若 $r \cdot vX, Y$ 相互独立，则有：

$$E(X-EX)(Y-EY)=EXY-EXEY=0$$

（方差性质（4））

其逆否命题：若

$$E(X-EX)(Y-EY)\neq 0$$

则 $r \cdot vX, Y$ 不相互独立，这一结论说明：

$E(X-EX)(Y-EY)$ 数字特征刻划了

$r\cdot vX,Y$是不相互独立的一种依赖关系，它是二维 $r\cdot v(X,Y)$ 的一个重要数字特征，利用它可以引入 $r\cdot vX,Y$ 线性相关系数数字特征，刻划 $r\cdot vX,Y$ 一种特殊随机相依关系—— $r\cdot vX,Y$ 线性相关程度一类重要数字特征！

定义：设(X,Y)为二维 $r\cdot v$，若

$$E(X-EX)(Y-EY)$$

存在，则称之为 $r\cdot v X$与Y的协方差，记作 $\operatorname{cov}(X,Y)$

由定义直接得到：

$$D(X+Y)=DX+DY+2\operatorname{cov}(X,Y)$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=EXY-EXEY$$

协方差性质：

(1) $\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(Y,X)$

(2) $\operatorname{cov}(aX,bY)=ab\operatorname{cov}(X,Y)$

(3) $\operatorname{cov}(X_1+X_2,Y)=\operatorname{cov}(X_1,Y)+\operatorname{cov}(X_2,Y)$

Proof: (1). $\operatorname{cov}(X,Y)=E(X-EX)(EY-EY)$

$$=E(Y-EY)(X-EX)=\operatorname{cov}(Y,X)$$

(2). $\operatorname{cov}(aX,bY)=E(aX-EaX)(bY-EbY)$

$$=Eab(X-EX)(Y-EY)$$

$$=abE(X-EX)(Y-EY)$$

$$=ab\operatorname{cov}(X,Y)$$

(3). $\operatorname{cov}(X_1+X_2,Y)=E(X_1+X_2-E(X_1+X_2))(Y-EY)$

$$=E(X_1-EX_1+X_2-EX_2)(Y-EY)$$

$$=\operatorname{cov}(X_1,Y)+\operatorname{cov}(X_2,Y)$$

定义2　设(X,Y)为二维的$r\cdot v$,若cov(X,Y)存在，且$DX>0$,DY>0，则称

$$\operatorname{cov}(X,Y)/\sqrt{DX}\sqrt{DY}$$

为　$r\cdot vX$与Y的（线性）相关系数，记为ρ

定义3 若 $r\cdot vX$与Y的相关系数 ρ=0，则称 X与Y 不相关。

关于相关系数的二个结论：

Theorem1 设 ρ 为 r.vX与Y 的相关系数（线性相关系数），则有：

（1）$|\ \rho\ | \leq 1$

（2）$|\ \rho\ |=1 \Leftrightarrow P(Y=bX+a)=1, a, b$为二常数。

Proof:(1)　$\forall t \in R$有(线性关系入手)

$$0 \le D(Y-tX) = E[(Y-tX) - E(Y-tX)]^2$$

$$= DY - 2t\operatorname{cov}(X,Y) + t^2 DX \quad (DX, DY > 0)$$

$$= DX\left(t^2 - 2t\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{DX} + \left(\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{DX}\right)^2\right)$$

$$+ DY - \frac{\operatorname{cov}^2(X,Y)}{DX}$$

$$= DX\left(t - \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{DX}\right)^2 + DY\left(1 - \frac{\operatorname{cov}^2(X,Y)}{DXDY}\right)$$

$$当t=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{DX}\hat{=}b时, D(Y-bX)最小.$$

$$D(Y-bX)=DY(1-\rho^2)\geq 0$$

$$又\quad DY>0, D(Y-bX)\geq 1$$

$$1-\rho^2\geq 0 \Leftrightarrow |\rho|\leq 1$$

（2）若

$$|\rho|=1 \Leftrightarrow D(Y-bX)=0 \Leftrightarrow \exists\text{常数}a$$

$$P(Y-bX=a)=1 \Leftrightarrow P(Y=a+bX)=1,$$

其中a,b均为常数.

Remark:

（1）当 $|\rho|=1$时$P(Y=a+bX)=1$即

$r\cdot vY$与X之间存在线性关系事件的概率为1；

（2）由Th1证明过程：$|\rho|$愈接近于1，

$D(Y-bX)$愈接近于0，即 $r\cdot vX$与Y

具有线性关系的可能性愈大（或

$r\cdot vX$ 与Y愈近似地有线性关系），于是ρ刻

划了$r\cdot vX$ ，Y之间线性关系程度的一个数字特征！

Theorem2　$r \cdot v X, Y$ 不相关与下面的每一条件等价

（1）　$\operatorname{cov}(X, Y) = 0$

（2）　$D(X+Y) = DX + DY$

（3）　$EXY = EXEY$

Proof: $r\cdot vX,Y$ 不相关，

$$\rho=0\Leftrightarrow\operatorname{cov}(X,Y)=0$$

$$\Leftrightarrow D(X+Y)=DX+DY$$

$$\Leftrightarrow EXY=EXEY$$

Question: $r\cdot vX,Y$独立与 $r\cdot vX,Y$ 不相关之间关系如何？

$$\left(\sqrt{DX},\sqrt{DY}>0\right)$$

$$r\cdot vX,Y\text{独立}\Rightarrow EXY=EXEY\Leftrightarrow r\cdot vX,Y$$

不相关，但是

$$r\cdot vX,Y\text{不相关}\nRightarrow r\cdot vX,Y\text{相互独立}.$$

Theorem：设F,G为一维分布，其方差非零有限，则存在一对 $r \cdot vX,Y$ 满足

（1）X，Y的分布函数分别为F，G；

（2）X，Y不独立；

（3） $\rho=0$

三条件成立的充要条件是：F、G 中至少有一个不是两点分布。

陈希孺（应用概率统计）

例1 设 $X \sim N(0,1), Y = X^2$ 求X，Y相关系数。

解：因

故 $X \sim N(0,1),\quad EX = 0$

$$COV(X,Y) = EX^3 - EXEY = EX^3$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= 0$$

而 $DX = 1$ $DY = EX^4 - \left(EX^2\right)^2$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - 1$$

$$= 3 - 1$$

$$= 2 > 0$$

故$DX,DY>0$，$r \cdot vX, Y$不相关。

但是 $r \cdot vX, Y$ 不相互独立。

（因 $Y = X^2$ 是 $r \cdot vX$ 函数非线性函数）

取x=2, y=4

$$F(2,4)=P(X\le 2, Y\le 4)=P(X\le 2, -2\le X\le 2)$$

$$=P(-2\le X\le 2)=2\Phi(2)-1$$

$$\ne P(X\le 2)P(-2\le X\le 2)$$

$$=[\Phi(2)](2\Phi(2)-1)$$

即$F(2,4)\ne F_X(2)F_Y(4)$, $\quad r\cdot v X, Y$不独立.

例2 设 $(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho\right)$

求 $r\cdot vX,Y$ 相关系数ρ 。

解： $\operatorname{cov}(X,Y)=E(X-EX)(Y-EY)$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)\rho(x,y)dxdy$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(x-\mu_2)$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\right.$$

$$\left.\left[\frac{\left(x-\mu_1\right)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{\left(x-\mu_1\right)\left(y-\mu_2\right)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{\left(y-\mu_2\right)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}dxdy$$

$$u=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}-\rho\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)$$

$$v = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$$

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int\int (x-\mu_1)(x-\mu_2)$$

$$e^{\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}-\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}} dxdy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma_2 v e^{-\frac{v^2}{2}} dv \int_{-\infty}^{+\infty}\sigma_1\left(\rho v + \sqrt{1-\rho^2}u\right)e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$= \rho \frac{\sigma_1 \sigma_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 e^{-\frac{v^2}{2}} dv \sqrt{2\pi}$$

$$= \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{2\pi}} \rho \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 e^{-\frac{v^2}{2}} dv = \sigma_1 \sigma_2 \rho$$

故 $$\rho_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \rho$$

于是二维正态变量的pdf p(x,y)参数的概论意义全部弄清。

Remark：若 $(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho\right)$

则 $r\cdot vX,Y$ 相互独立 $\Leftrightarrow \rho=0$，对于二维正态变量(X,Y)而言，$r\cdot vX,Y$不相关

$\Leftrightarrow r\cdot vX,Y$相互独立!

（一个应用的例子及反例($E45$)）

一般：X,Y独立推不出X,Y不相关（反例）

例3 设 X_1, X_2, X_3 为两两不相关的 $r \cdot v$ 各有数学期望0及方差1，则 $X_1 + X_2$ 与 $X_2 + X_3$ 的相关系数 $\rho = ?$

解：因为

$$D\left(X_1 + X_2\right) = DX_1 + DX_2 + 2\operatorname{cov}\left(X_1, X_2\right) = 2$$

$$D(X_2 + X_3) = DX_2 + DX_3 = 2(X_2\text{与}X_3\text{不相关）}$$

$$\operatorname{cov}\left(X_1, X_2\right) = E(X_1 - EX_1)(X_2 - EX_2)$$

$$= EX_1X_2 - EX_1EX_2 = 0$$

$$\operatorname{cov}\left(X_2, X_3\right) = E(X_2 - EX_2)(X_3 - EX_3)$$

$$= EX_2X_3 - EX_2EX_3 = 0$$

$$\operatorname{cov}(X_1+X_2, X_2+X_3) = E(X_1+X_2)(X_2+X_3)$$

$$= EX_1X_2 + EX_1X_3 + EX_2{}^2 + EX_2X_3$$

$$= EX_2^2 = DX_2 = 1$$

$$\text{故}\rho = \frac{\operatorname{cov}(X_1+X_2, X_2+X_3)}{\sqrt{DX_1+DX_2}\sqrt{D(X_2+X_3)}}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}$$

Remark:

$$X_1 - X_2\text{与}X_2 - X_3\text{相关系数}\rho = -\frac{1}{2}$$

例4 设 $X \sim B(n,p)$且$p=\dfrac{2}{3}, DX=\dfrac{4}{3}$,求$EX$

解：由题设

$$npq = DX = \frac{4}{3} = np\left(1-\frac{2}{3}\right)$$

故 $\quad np = 4$

故 $\quad EX = 4$

$$or \qquad \begin{cases} p = \dfrac{2}{3} \\ n = 6 \end{cases}$$

$$故 \quad X \sim B\left(6, \frac{2}{3}\right)$$

$$EX = np = 6 \times \frac{2}{3} = 4$$

例5 设 $X \sim N\left(3, \sigma^2\right)$ 且 $P(X > 6) = 0.4$,则

$P(0 < X < 3) = ?$

（数形结合与标准化的思想方法）

解：由题设 $X \sim N\left(3, \sigma^2\right)$

$$P(X > 6) = 1 - \Phi\left(\frac{6-3}{\sigma}\right) = 0.4$$

$$\Phi\left(\frac{3}{\sigma}\right) = 0.6$$

而 $$P(0<X<3)=\Phi\left(\frac{3-3}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{0-3}{\sigma}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\left(1-\Phi\,(\frac{3}{\sigma})\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{3}{\sigma}\right)-\frac{1}{2}$$

$$=0.6-0.5$$

$$=0.1$$

例6 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为相互独立且具有同分布的 $r\cdot v$，方差有限，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

试证明 $X_i-\overline{X}$与$\overline{X}$不相关，$X_i-\overline{X}$与$X_j-\overline{X}$的相关系数 $i\neq j$.

Proof:（1） $D\left(X_i-\overline{X}\right)=E\left(X_i-\overline{X}\right)^2$

$$=E\left(X_i-\mu+\mu-\overline{X}\right)^2$$

$$=\frac{n-1}{n}\sigma^2$$

$$=\sigma^2+E\left(\mu-\overline{X}\right)^2+2E\left(X_i-\mu\right)\left(\mu-\overline{X}\right)$$

$$=\sigma^2+\frac{1}{n^2}n\sigma^2-\frac{2}{n}\sigma^2=(1-\frac{1}{n})\sigma^2$$

$$EX_i=\mu, DX_i=\sigma^2,$$

$$D\overline{X}=\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sigma^2>0$$

$$而\operatorname{cov}\left(X_i-\overline{X},\overline{X}\right)=E\left(X_i-\overline{X}\right)\left(\overline{X}-\mu\right)$$

$$= E\left(X_i - \mu + \mu - \overline{X}\right)\left(\overline{X} - \mu\right)$$

$$= E\left(X_i - \mu\right)\left(\overline{X} - \mu\right) - E\left(\overline{X} - \mu\right)^2$$

$$= \frac{1}{n} E(X_i - \mu)\left(\sum_{j=1}^{n}\left(X_j - \mu\right)\right) - \frac{1}{n^2} E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \mu\right)\right]^2$$

$$= \frac{1}{n}\sigma^2 - \frac{1}{n^2}\left[n\sigma^2\right] = 0$$

故 $r \cdot v X_i - \overline{X}$与$\overline{X}$不相关.

（2）求 $X_i - \overline{X}$与$X_j - \overline{X}$ 之间相关系数。

$$D\left(X_i - \overline{X}\right) = D\left(X_j - \overline{X}\right) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

$$\begin{aligned}
&\operatorname{cov}\left(X_i - \overline{X}, X_j - \overline{X}\right) \\
&= E\left(X_i - \mu + \mu - \overline{X}\right)\left(X_j - \mu + \mu - \overline{X}\right) \\
&= E\left(X_i - \mu\right)\left(\mu - \overline{X}\right) + E\left(X_i - \mu\right)\left(\mu - \overline{X}\right) \\
&\qquad + E\left(\mu - \overline{X}\right)^2
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n} E(X_i - \mu)\left(\sum_{j=1}^{n} (\mu - X_i)\right) + \frac{1}{n} E\left(X_j - \mu\right)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (\mu - X_i)\right) + \frac{1}{n^2} E\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)\right)^2$$

$$= -\frac{2}{n}\sigma^2 + \frac{1}{n^2}\left[n\sigma^2\right]$$

$$= -\frac{1}{n}\sigma^2$$

故

$$\rho=\frac{\operatorname{cov}\left(X_i-\overline{\overline{X}},X_j-\overline{\overline{X}}\right)}{\sqrt{D\left(X_i-\overline{\overline{X}}\right)}\sqrt{D\left(X_j-\overline{\overline{X}}\right)}}$$

$$=\frac{-\frac{1}{n}\sigma^2}{\frac{n-1}{n}\sigma^2}$$

$$=-\frac{1}{n-1}$$

例7 设 $r\cdot vX$与Y 都取两个数值，则当X与Y不相关，X与Y必独立。

Proof: 由题设我们只须令$r\cdot vX,Y$ 不妨均取0，1值，欲证 $r\cdot vX,Y$独立，只须证：

$$P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1) \qquad (1)$$

$$P(X=1,Y=0)=P(X=1)P(Y=0) \qquad (2)$$

$$P(X=0,Y=1)=P(X=0)P(Y=1)\quad（3）$$

$$P(X=0,Y=0)=P(X=0)P(Y=0)\quad（4）$$

若令(X=1)为事件A，（Y=1）为事件B，则(1)—(4)可变化为

（1）' －（4）'

(1)' $P(AB)=P(A)P(B)$

(2)' $P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})$

$$(3)' \qquad P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B)$$

$$(4)' \qquad P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B})$$

但我们只需证明 $\qquad P(AB) = P(A)P(B)$

因为 $\quad r\cdot vX, Y$ 不相关，故有：

$$EXY = EXEY$$

故 $$EXY = P(X=1, Y=1) = P(AB)$$

又 $$EX = P(A), EY = P(B)$$

故 $$P(AB) = P(A)P(B)$$

数学期望的补充性质（假设数学期望存在）

（1）若 $r\cdot vX$ 满足 $X\geq 0$，则 $EX\geq 0$

（2）若X，Y为两个 $r\cdot v$ 且 $X\geq Y$，则

$$EX\geq EY$$

Proof:（1）设X为离散型 $r\cdot v$，其分布列为 $p_i, i=1,2,\cdots$

于是 $$EX=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i \geq 0, \quad x_i \geq 0, \quad i=1,2,\cdots$$

（2）令 $Z=X-Y$，由题设 $X \geq Y, X-Y \geq 0$

$$EX-EY=E(X-Y)=\sum_{i,j=1}^{\infty}(x_i-y_j)p_{ij} \geq 0$$

设(X,Y)为二维离散型 $r\cdot v$分布列为

$$P_{ij}(i,j=1,2,\cdots)$$

故

$$EX \geq EY$$

例8 设 $r\cdot vX$ 仅在（a,b）内取值，求证：

$$DX \le \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

Proof： $\forall c \in R$

$$DX = E(X - EX)^2 = E(X - C + C - EX)^2$$
$$= E(X - C)^2 + (C - EX)^2$$
$$+ 2E(X - C)(C - EX)$$

$$= E(X-C)^2 + (C-EX)^2 + 2(C-EX)(EX-C)$$

$$= E(X-C)^2 + (C-EX)^2 - 2(C-EX)^2$$

$$= E(X-C)^2 - (C-EX)^2 \le E(X-C)^2$$

取$C=\dfrac{a+b}{2}$,于是

$$DX = E(X-EX)^2 \le E\left(X-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

由题设 $r \cdot vX$ 仅在(a,b)内取值，于是有：

$$\left(X-\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$or \quad \left(X-\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

亦即 $$\left(X-\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

利用数学期望性质：

$$E\left(X-\frac{a+b}{2}\right)^2 \le E\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

故 $$E(X-EX)^2 = DX \le \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

利用数学期望性质：

$$E\left(X-\frac{a+b}{2}\right)^2 \le E\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

故 $$E(X-EX)^2 = DX \le \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

例9 设X，Y是相互独立的 $r\cdot v$，证明：

$$D(XY)=DXDY+(EX)^2DY+(EY)^2DX$$

（**补充th**: 设X，Y相互独立， $f(x), g(x)$为连续函数，则$f(x)$与$g(x)$亦相互独立。

Proof: $r\cdot vX,Y$独立,则$r\cdot vX^2,Y^2$亦独立.

$$D(XY)=EX^2Y^2-E(EX)^2(EY)^2$$

$$=EX^2EY^2-(EXEY)^2$$

$$=E(X-EX+EX)^2E(Y-EY+EY)^2$$

$$-(EX)^2(EY)^2$$

$$=(DX+(EX)^2)(DY+(EY)^2)$$

$$-(EX)^2(EY)^2$$

$$=DXDY+(EX)^2DY+(EY)^2DX$$

故有

$$D(XY) = DXDY + (EX)^2 DY + (EY)^2 DX$$

例10.设X,Y为两个具有有限方差的r·v

试证明不等式

$$E^2(XY) \le EX^2 EY^2$$

并证明上式等号成立充要条件：存在数 a 使

$$P(aX + Y = 1) = 1$$

Proof:

$$\forall t \in R \quad E(tX+Y)^2 \geq 0$$

$$= t^2 EX^2 + 2tEXY + EY^2$$

$$EX^2 > 0,$$

$$\Delta = 4(EXY)^2 - 4(EX)^2(EY^2) \leq 0$$

故 $$E^2(XY) \leq EX^2 \cdot EY^2$$

等式成立

$$\Leftrightarrow E(tX+Y)^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 EX^2 + 2tEXY + EY^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 4(EXY)^2 - 4(EX^2)(EY^2) = 0$$

且 $$t = -\frac{EXY}{EX^2} \hat{=} a$$

$$\Leftrightarrow \text{存在} \quad a = -(EXY)/EX^2$$

使得 $$P(aX+Y=0)=1$$

例11. 设X与Y为具有二阶矩的r·v，且设

$$Q(a,b)=E[Y-(a+bX)]^2$$

Proof: $$E[Y-(a+bX)]^2=EY^2-2aEY-2bEXY$$

$$+a^2+2abEX+b^2EX^2$$

令

$$\begin{cases} \dfrac{2Q}{2a} = 0 \\ \dfrac{2Q}{2b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + bEX = EY \\ aEX + bEX^2 = EXY \end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases} a = EY - bEX \\ b = \dfrac{\operatorname{cov}(X, Y)}{DX} \end{cases}$$

故

$$\begin{cases} a = EY - \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{DX} EX \\ b = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{DX} \end{cases}$$

而Qmin(a,b)存在，故取上述a,b使Q(a,b)达最小值期望与方差。

例12 在长为 l 的线段上任取两点，求两点间的距离的数学期望与方差。

解：设X,Y分别表示两点坐标。（线段左端为原点，右端坐标为Q）

由题设，$r\cdot\cdot vX,Y$，独立同分布，$X\sim\bigcup(0,l)$

两点距离为：

$$E|X-Y|=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x-y|P(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^l\int_0^l|x-y|\frac{1}{l^2}dxdy$$

$$= \int_0^l dx \left[\int_0^x (x-y)\frac{1}{l^2}dy + \int_x^l (y-x)\frac{1}{l^2}dy \right]$$

$$= \frac{1}{l^2}\int_0^l \left[\left.(xy-\frac{1}{2}y^2)\right|_0^x + \left.(\frac{1}{2}y^2-xy)\right|_x^l \right] dx$$

$$= \frac{1}{l^2}\int_0^l (\frac{1}{3}x^3 - lx + \frac{1}{2}l^2)dx = \frac{l}{3}$$

$$E|X-Y|^2=\int_0^l\int_0^l \frac{1}{l^2}(x-y)^2dxdy=\frac{l^2}{6}$$

$$D(|X-Y|)=E|X-Y|^2-(E|X-Y|)^2$$

$$=\frac{l^2}{6}-\frac{l^2}{9}=\frac{l^2}{18}$$

另两种方法（分布函数法和公式法）

例13补充例子

（1）两个独立正态随机变量差的绝对值的期望与方差的计算；E32

（2）两个独立正态随机变量极大极小随机变数的期望与方差的计算；E33’,E33

（3）利用随机变数的函数的独立性相关计算；E29

例14补充例子

(4) 交叉随机变数的期望；E39

(5) 与二维正态随机向量相关计算的例子；E45

例15补充例子

(6)超几何分布的期望和方差的计算；E14

（7）几何分布的期望和方差的计算。E5