习 题 课

例 1 设 A,B,C 是三个任意集合，则

（1）若 $A\in B,B\in C,$则 $A\in C$ 可能吗？ $A\in C$ 常真吗?举例说明；

（2）若 $A\subseteq B$，则 $A\in B$ 可能吗？证明你的断言。

解：（1）举例说明如下： $A=\{a\},B=\{\{a\}\},C=\{\{a\},\{\{a\}\}\}$，则有

$$A\in B,B\in C,A\in C\text{。}$$

但 $A\in C$ 不常为真。若 $A=\{a\},B=\{\{a\}\},C=\{\{\{a\}\}\}$，则有

$$A\in B,B\in C,\text{但}A\notin C\text{。}$$

（2）若 $A=\{a\},B=\{a,\{a\}\}$，则有 $A\in B,A\subseteq B$。

例 2 设 A,B,C 是任意三个集合：

（1）若 $A\cup B=A\cup C$，则有 $B=C$ 吗？

（2）若 $A\cap B=A\cap C$，则有 $B=C$ 吗？

（3）若 $A\cup B=A\cup C$ 且 $A\cap B=A\cap C$，则有 $B=C$ 吗？

解：（1）、（2）不成立，（3）成立。

反例如下自己举。

（3）**由集合相等的定义来证明：**

例 3 设 A,B 为任意集合，证明

（1） $A\subseteq B\Rightarrow P(A)\subseteq P(B)\Rightarrow A\subseteq B$

（2） $P(A)=P(B)\Leftrightarrow A=B$

证：（1） $\forall x\in P(A)$，有 $x\subseteq A$，而 $A\subseteq B$，故 $x\subseteq B$，即 $x\in P(B)$。所以 $P(A)\subseteq P(B)$。

反之，$\forall x\in A$，则 $\{x\}\subseteq A$，即 $\{x\}\in P(A)$，又 $P(A)\subseteq P(B)$，所以 $\{x\}\in P(B)$，即 $\{x\}\subseteq B$，所以 $x\in B$，即 $A\subseteq B$。

（2）$P(A)=P(B)\Leftrightarrow(P(A)\subseteq P(B))\wedge(P(B)\subseteq P(A))$

$$\Leftrightarrow A\subseteq B\wedge B\subseteq A\Leftrightarrow A=B。$$

例 4 设 A,B 是两个任意集合，证明：

(1) $2^A\bigcup 2^B\subseteq 2^{A\cup B}$；(2) $2^A\bigcap 2^B=2^{A\cap B}$；(3) 举例说明 $2^A\bigcup 2^B\neq 2^{A\cup B}$。

其中 2^A 表示集合 A 的幂集。

证：(1) 证 $2^A\bigcup 2^B\subseteq 2^{A\cup B}$。

$\forall\ x\in 2^A\bigcup 2^B$，有 $x\in 2^A$ 或 $x\in 2^B$。

若 $x\in 2^A$，则 $x\subseteq A$，而 $A\subseteq A\bigcup B$，故 $x\subseteq A\bigcup B$，因此 $x\in 2^{A\cup B}$。

同理，若 $x\in 2^B$，也有 $x\in 2^{A\cup B}$。

因此 $2^A\bigcup 2^B\subseteq 2^{A\cup B}$。

(2) 证 $2^A\bigcap 2^B=2^{A\cap B}$。

证 $\forall x\in 2^A\bigcap 2^B\Leftrightarrow x\in 2^A$ 且 $x\in 2^B\Leftrightarrow x\subseteq A$ 且 $x\subseteq B$

$$\Leftrightarrow x\subseteq A\bigcap B\Leftrightarrow x\in 2^{A\cap B}。$$

所以 $2^A\bigcap 2^B=2^{A\cap B}$。

(3) 下面举例说明 $2^A\bigcup 2^B\neq 2^{A\cup B}$。

设 $A=\{1\},B=\{2\}$，则 $2^A=\{\varnothing,\{1\}\},2^B=\{\varnothing,\{2\}\}$。

$2^A\bigcup 2^B=\{\varnothing,\{1\},\{2\}\}$，而 $A\bigcup B=\{1,2\},2^{A\cup B}=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$，

所以 $2^A\bigcup 2^B\neq 2^{A\cup B}$。

例 5 (多项选择) 设集合 A 是以空集 $\varnothing$ 为唯一元素的集合，集合 $B=2^{2^A}$，则下列各式那个正确？

(1) $\varnothing\in B$；(2) $\varnothing\subseteq B$；(3) $\{\varnothing\}\subseteq B$；(4) $\{\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}\subseteq B$；(5) $\{\varnothing,\{\{\varnothing\}\}\}\in B$。

解： 选（1），（2），（3），（4）。

例 6 设 A,B 是任意集合，则

（1）若 $A\setminus B=B$，则 A， B 有何关系？

（2） $A\setminus B=B\setminus A$，则 A 与 B 又有何关系。

证：（1）由 $A\setminus B=B$，则可得出 $A=B=\phi$。

（2）由 $A\setminus B=B\setminus A$，可导出 $A=B$。〔决不是 $A=B=\phi$〕

例 7 (1)举例说明，结合律不适用于集合的差运算之中。

(2) 证明：对任意集合 A,B,C，有 $\{1,2\}\subseteq\{1,2,3\}$，即 $(A\setminus B)\setminus C\subseteq A\setminus(B\setminus C)$。

解： (1) 若 $A=\{1,2,3\},B=C=\{2\}$，则 $\left(A\setminus B\right)\setminus C\subseteq A\setminus\left(B\setminus C\right)$。

(2) 证明：$\forall\ x\in\left(A\setminus B\right)\setminus C$，有 $x\in\left(A\setminus B\right),x\notin C$，即 $x\in A$ 但 $x\notin B,x\notin C$，从而 $x\notin B\setminus C$，于是 $x\in A\setminus\left(B\setminus C\right)$，即 $\left(A\setminus B\right)\setminus C\subseteq A\setminus\left(B\setminus C\right)$。

例 8 设 A,B,C 是集合，求下列各式成立的充分必要条件

（1） $(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)=A$；（2） $(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)=\phi$；

（3） $(A\setminus B)\bigcap(A\setminus C)=\phi$；（4）。$(A\setminus B)\Delta(A\setminus C)=\phi$

解：（1） $A\bigcap B\bigcap C=\phi$。

（2） $(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)=\phi\Rightarrow A\setminus(B\bigcap C)=\phi\Leftrightarrow A\subseteq(B\bigcap C)$。

（3） $A\subseteq B\bigcup C$

（4）A\B=A\C。

例 9 设 A,B 是集合，证明：

（1） $A=\phi\Leftrightarrow B=A\Delta B$；（2） $(A\setminus B)\bigcup B=(A\bigcup B)\setminus B\Leftrightarrow B=\varnothing$。

证：（1） $\Rightarrow$ 显然。

$\Leftarrow$ 反证法：假设 $A\neq\phi$，则 $\exists x_0\in A$，若 $x_0\in B$，则 $x_0\in$ 左，但 $x_0\notin$ 右，矛盾。

若 $x_0\overline{\in}B$，则 $x_0\overline{\in}$ 左，但 $x_0\in$ 右，矛盾。故假设不成立，即 $A=\phi$。

（2）两边同时 交上 B，即得 $B=\varnothing$。

例 11 设 A,B,C 是任意三个集合，则

$$(A\bigcap B)\bigcup C=A\bigcap(B\bigcup C)\Leftrightarrow C\subseteq A$$

证： $\Rightarrow$两边同并上 A 有：

$A\cup((A\cap B)\cup C)=A\cup[A\cap(B\cup C)]=A$，$[A\cup(A\cap B)]\cup C=A\cup C=A$；

$\Rightarrow C\subseteq A$

$\Leftarrow$若$C\subseteq A$，则$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)=(A\cap B)\cup C$。

例 12 设 V 是任一集合，证明：

$\forall S,T,W\in 2^V$ 有 $S\subseteq T\subseteq W$ 当且仅且 $S\Delta T\subseteq S\Delta W$ 且 $S\subseteq W$。

证： $\Rightarrow$因为$S\subseteq T\subseteq W$，故$S\Delta T=T\setminus S\subseteq W\setminus S\subseteq S\Delta W$。

$\Leftarrow$**先证** $S\subseteq T$。设$x\in S$，则

若$x\notin T$，则$x\in S\setminus T\subseteq S\Delta T\subseteq S\Delta W=W\setminus S$，故$x\in W$且$x\notin S$，矛盾。

所以$x\in T$，即$S\subseteq T$。

其次，证明$T\subseteq W$。设$x\in T$，则有两种情况：

若$x\notin S$。则$x\in T\setminus S\subseteq S\Delta T\subseteq S\Delta W=W\setminus S$，故$x\in W$。

若$x\in S$。由$S\subseteq W$，知$x\in W$。

总之，$\forall x\in T$，有$x\in W$，故$T\subseteq W$。

习 题 课

例 1 (P_{16}^3) 设 A,B,C 是三个任意集合，证明：$A\Delta\left(B\Delta C\right)=\left(A\Delta B\right)\Delta C$。

证：两边展开 $=\left(A\cap B^C\cap C^C\right)\cup\left(A\cap B\cap C\right)\cup\left(B\cap C^C\cap A^C\right)\cup\left(C\cap B^C\cap A^C\right)$

故结论成立。

例 2 (P_{20}^2) 设 A,B,C 为任意集合，化简

$$(A\cap B\cap C)\cup(A^C\cap B\cap C)\cup(A\cap B^C\cap C)\cup(A\cap B\cap C^C)\cup$$
$$(A^C\cap B^C\cap C)\cup(A\cap B^C\cap C^C)\cup(A^C\cap B\cap C^C)$$

$$(A\cap B\cap C)\cup(A^C\cap B\cap C)\cup(A\cap B^C\cap C)\cup(A\cap B\cap C^C)\cup$$
$$(A^C\cap B^C\cap C)\cup(A\cap B^C\cap C^C)\cup(A^C\cap B\cap C^C)$$

答案：$A\cup B\cup C$。

例 3 (P_{20}^{4}) 设 $M_1,M_2,\cdots$ 和 $N_1,N_2,\cdots$ 是集合 S 的子集的两个序列，对 $i\neq j$，$i,j=1,2,\cdots$，有 $N_i\bigcap N_j=\phi$。令 $Q_1=M_1,Q_n=M_n\bigcap(\bigcup\limits_{k=1}^{n-1}M_k)^C,n=2,3,\cdots$。试证：

$$N_n\Delta Q_n\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)。$$

证： $\forall x\in N_n\Delta Q_n=(N_n\setminus Q_n)\bigcup(Q_n\setminus N_n)$，则

当 $n=1$ 时，$x\in N_1\Delta Q_1=N_1\Delta M_1\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)$，故 $N_n\Delta Q_n\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)$；

当 $n\geq 2$ 时，设 $x\in N_n\Delta Q_n=(N_n\setminus Q_n)\bigcup(Q_n\setminus N_n)$，有 $x\in(N_n\setminus Q_n)$ 或 $x\in(Q_n\setminus N_n)$。则

1. 若 $x\in(N_n\setminus Q_n)$，则 $x\in N_n$，但 $x\notin Q_n=M_n\bigcap(\bigcup\limits_{i=1}^{n-1}M_i)^c$,即$x\notin M_n$或$x\in\bigcup\limits_{i=1}^{n-1}M_i$，因此有 $x\notin M_n$或$x\in M_i(i\leq n-1)$。于是

（1）若 $x\in N_n$ 且 $x\notin M_n$，有 $x\in N_n\setminus M_n\subseteq N_n\Delta M_n\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)$；

（2）若 $x\in N_n$ 且 $x\in M_i(i\leq n-1)$，由 $N_i\bigcap N_j=\varnothing(i\neq j)$，有 $x\notin N_i$ 且 $x\in M_i$ $(i\leq n-1)$，于是 $x\in M_i\setminus N_i\subseteq M_i\Delta N_i\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)$。

2. 若 $x\in Q_n\setminus N_n$，则 $x\in Q_n=M_n\bigcap(\bigcup\limits_{i=1}^{n-1}M_k)^c$，即$x\in M_n$ 但 $x\notin N_n$。于是

$x\in M_n\setminus N_n\subseteq M_n\Delta N_n\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)$。

综上可得：$N_n\Delta Q_n\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)$。

例 4 (P_{25}^{2}) 设 A,B 为集合，证明：$A\times B=B\times A$ 充要条件是下列三个条件至少一个成立：（1）$A=\varnothing$；（2）$B=\varnothing$；（3）$A=B$。

1．若 $A\times B=B\times A=\varnothing$，则 $A=\varnothing$ 或 $B=\varnothing$。

2．若 $A\times B=B\times A\neq\varnothing$，则 $\forall x\in A,y\in B$，有 $(x,y)\in A\times B=B\times B$。于是

$x \in B, y \in A$，因此 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，故 $A = B$。

例 6 (P_{33}^4) 马大哈写 n 封信，n 个信封，把 n 封信放入到 n 个信封中，求全部装错的概率是多少？〔n 个人，n 顶帽子，全部戴错的概率是多少？〕

解： n 封信放入到 n 个信封中的全部排列共有：$|S_n| = n!$；

令 A 表示所有信都装错的集合，即

$A = \{i_1, i_2, \cdots, i_n \mid i_1 \neq 1, i_2 \neq 2, \cdots, i_n \neq n\}$。

令 A_i 表示第 i 个信封恰好装对的集合，则 $A_i^C \subseteq A$。所以全部装错的集合为：

$$A = A_1^C \cap A_2^C \cap \cdots \cap A_n^C。$$

于是，易得

$|A_i| = (n-1)!, |A_i \cap A_j| = (n-2)!, i \neq j$。

对于 $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$，有 $|A_{i1} \cap A_{i2} \cap \cdots \cap A_{ik}| = (n-k)!$。又

$$|A| = |A_1^C \cap A_2^C \cap \cdots \cap A_n^C| = |S_n| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = n! - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j|$$

$$- \cdots + (-1)^n \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| = n! - C_n^1 (n-1)! + C_n^2 (n-2)! - \cdots + (-1)^n C_n^n (0)!$$

$$= n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}),$$ 故

$$P = \frac{|A|}{|S_n|} = \frac{|A|}{n!} = \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) \approx e^{-1} = 0.3679$$

〔答案：0.3679，当 n≥10 时，概率都近似等于 0.3679〕。

例 7 (P_{33}^5) 毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞，已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有姑娘跳过。同样地，每个姑娘也至少与一个小伙子跳舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙与姑娘中，必可找到两个小伙子和两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙中的一个跳过舞。

证： 设 $F = \{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ 是小伙的集合，$G = \{g_1, g_2, \cdots, g_m\}$ 是姑娘的集合。

与 f_1 跳舞的姑娘的集合用 G_{f_1} 表示；

与 f_2 跳舞的姑娘的集合用 G_{f_2} 表示；

$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$

与 f_n 跳舞的姑娘的集合用 G_{f_n} 表示；

于是，由题意：$G_{f_1} \cup G_{f_2} \cup \cdots \cup G_{f_n} = G$ 且 $G_{f_i} \neq \phi$ 且 $G_{f_i} \neq G$，$i = 1,2,3,\cdots,n$。

若存在 $G_{f_i}, G_{f_j} (i \neq j)$，使得 $G_{f_i} \not\subseteq G_{f_j}$ 且 $G_{f_j} \not\subseteq G_{f_i}$，则结论成立。

反证法：假设不存在 G_{f_i} 和 G_{f_j} 满足 $G_{f_i} \not\subseteq G_{f_j}$ 且 $G_{f_j} \not\subseteq G_{f_i}$。于是

$\forall i, j (i \neq j), G_{f_i}$ 与 G_{f_j} 应满足：$G_{f_i} \subseteq G_{f_j}$ 或 $G_{f_j} \subseteq G_{f_i}$ 必有一个成立。

因此把 G_{f_1}，$G_{f_2}, \cdots$，G_{f_n} 重新排列有：$G_{f_{i1}} \subseteq G_{f_{i2}} \subseteq \cdots \subseteq G_{f_{in}}$。从而 f_{in} 与所有的姑娘都跳过舞，矛盾。

因此假设不成立，本题得证。

例 8 甲每 5 秒放一个爆竹，乙每 6 秒放一个，丙每 7 秒放一个，每人都放 21 个爆竹，共能听见多少声响。

解： 设 $A = \{0,5,10,15,\cdots,100\}, B = \{0,6,12,18,\cdots,120\}, C = \{0,7,14,21,\cdots,140\}$，则能听见多少声响相当于并集的个数，即

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$= 21 \times 3 - \left(\left[\frac{100}{5 \times 6} \right] + 1 \right) - \left(\left[\frac{100}{5 \times 7} \right] + 1 \right) - \left(\left[\frac{120}{6 \times 7} \right] + 1 \right) + \left(\left[\frac{100}{5 \times 6 \times 7} \right] + 1 \right) = 54$$

$0, 30, 60, 90 \qquad 0, 35, 70 \qquad 0, 42, 84 \qquad 0$

习 题 课

例 1 令 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\},Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，问：

(1)有多少不同的由 X 到 Y 的关系？(2)有多少不同的由 X 到 Y 的映射？

(3)有多少不同的由 X 到 Y 的双射？(4)有多少不同的从 X 到 Y 的单射？

答案：（1）$2^{|X\times Y|}=2^{m\cdot n}$。（2）$n^m$。

（3）只有 m＝n 时，才存在 X 到 Y 的双射，共有 $m!$ 否则不存在。

（4）若 m＝n，则单射的个数为 m!。

若 m＞n，则单射的个数为 0。

若 m＜n，则单射的个数为$C_n^m\bullet m!$。

例 2 设 $f:X\to Y,\ A,B\subseteq \mathrm{X}$，证明

(1) $f(A\bigcup B)=f(A)\bigcup f(B)$;(2) $f(A\bigcap B)\subseteq f(A)\bigcap f(B)$;

(3) $f(A\setminus B)\supseteq f(A)\setminus f(B)$;(4) $f(A\Delta B)\supseteq f(A)\Delta f(B)$。

分析：本例题是书上的定理，但定理的结果和证明的方法很重要，因此在此处列出来。证明这样的问题主要利用“$\subseteq$”的定义及映射的定义，采用按定义证明方法来证明。

证：（1）设 $y\in f(A\bigcup B)$，则 $\exists x\in A\bigcup B$,使得 $y=f(x)$。于是，$x\in A$或$x\in B$。因此，$y\in f(A)$或$y\in f(B)$，所以 $y\in f(A)\bigcup f(B)$，故

$$f(A\bigcup B)\subseteq f(A)\bigcup f(B)$$

反之，设 $y\in f(A)\bigcup f(B)$，则 $y\in f(A)$或$y\in f(B)$。于是 $\exists x\in A$ 或 $x\in B$，使得 $f(x)=y$。因此不论何种情况都 $\exists x\in A\bigcup B$，使得 $f(x)=y$。因此 $y\in f(A\bigcup B)$，故

$$f(A)\bigcup f(B)\subseteq f(A\bigcup B)$$

因此，$f(A)\bigcup f(B)=f(A)\bigcup f(B)$。

（2）设 $y\in f(A\bigcap B)$，则 $\exists x\in A\bigcap B$，使得 $y=f(x)$。于是，$x\in A$ 且 $x\in B$。

从而，$y \in f(A)$ 且 $y \in f(B)$，所以 $y \in f(A) \cap f(B)$，故

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)\text{。}$$

（3）设 $y \in f(A) \setminus f(B)$，则 $y \in f(A)$ 但 $y \notin f(B)$。于是 $\exists x \in A$，使得 $f(x) = y$ 且 $x \notin B$，从而 $\exists x \in A \setminus B$，使得 $f(x) = y$。故 $y = f(x) \in f(A \setminus B)$，即

$$f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)\text{。}$$

（4）$f(A \Delta B) = f((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = f(A \setminus B) \cup f(B \setminus A)$

$$\supseteq (f(A) \setminus f(B)) \cup (f(B) \setminus f(A)) = f(A) \Delta f(B)\text{。}$$

说明：（1）注意，两个集合的交、差、对称差的象不一定与它们的象的交、差、对称差相重合。

（2）例：设 $X = \{a,b,c\}, Y = \{1,2,3\}$，$f: X \to Y, f(a) = 1, f(b) = f(c) = 2$。令 $A = \{a,b\}, B = \{c\}$。于是 $A \cap B = \varnothing, f(A \cap B) = \varnothing$。但是

$f(A) \cap f(B) = \{1,2\} \cap \{2\} = \{2\} \neq \varnothing$。这表明 $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$。

又 $f(A \setminus B) = \{1,2\}, f(A) \setminus f(B) = \{1,2\} \setminus \{2\} = \{1\}$，于是 $f(A \setminus B) \supset f(A) \setminus f(B)$。

又 $f(A \Delta B) = f((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = f(\{a,b,c\}) = \{1,2\}$，而

$f(A) \Delta f(B) = \{1,2\} \Delta \{2\} = \{1\}$。于是，$f(A \Delta B) \supset f(A) \Delta f(B)$。

（3）定理 1 和定理 2 可以推广到有穷或无穷多个集合的并与交集的情况。

例 3(P_{39}^2) 设 X 是一个有限集合，从 X 到 X 的部分映射有多少？

解： 设 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，则

$\phi \to X, C_{|X|}^0$

$\{x_i\} \to X, C_{|X|}^1 |X|, i = 1,2,\cdots,n$。

$\{x_i, x_j\} \to X, C_{|X|}^2 |X|^2, i,j = 1,2,\cdots,n$。

$\{x_i, x_j, x_k\} \to X, C_{|X|}^3 |X|^3, i, j, k = 1, 2, \cdots, n$。

$\vdots$

$X \to X, C_{|X|}^{|X|} |X|^{|X|}$

于是共有：

$$C_{|X|}^0 + C_{|X|}^1 |X| + C_{|X|}^2 |X|^2 + \cdots + C_{|X|}^{|X|} |X|^{|X|} = (1 + |X|)^{|X|}$$

例 4(P_{39}^3) 设 $u_1, u_2, \cdots, u_{mn+1}$ 是一个两两不相同的整数构成的数列，则必有长至少为 $n+1$ 的递增子序列或有长至少为 $m+1$ 的递减子序列。

证：令 $A = \{u_1, u_2, \cdots u_{mn+1}\}$，则 $|A| = mn + 1$。

设以 u_i 为首项的最长递增子序列的长度为 ℓ_i^+，

设以 u_i 为首项的最长递减子序列的长度为 ℓ_i^-。

反证法：假设题中结论不成立，则 $\ell_i^+ \le n, \ell_i^- \le m, i = 1, 2, 3, \cdots, mn+1$。

令 $\varphi: A \to \{1, 2, \cdots, n\} \times \{1, 2, \cdots, m\}, \forall u_i \in A$，$\varphi(u_i) = (\ell_i^+, \ell_i^-)$，则 φ 是单射。

实际上，$\forall u_i, u_j \in A$ 且 $u_i \ne u_j (i < j)$，则

若 $u_i > u_j$，则 $\ell_i^- > \ell_j^-$，所以 $(\ell_i^+, \ell_i^-) \ne (\ell_j^+, \ell_j^-)$；

即 $\varphi(u_i) \ne \varphi\ (u_j)$。

若 $u_i < u_j$，则 $\ell_i^+ > \ell_j^+$，所以 $(\ell_i^+, \ell_i^-) \ne (\ell_j^+, \ell_j^-)$；

即 $\varphi(u_i) \ne \varphi(u_j)$。

故 φ 为单射，从而就有 $mn + 1 \le mn$ 矛盾。

例 5(P_{43}^2) 已知 m 个整数 $a_1, a_2, \cdots a_m$，试证：存在两个整数 $k, \ell, 0 \le k < \ell \le m$，使得 $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_\ell$ 能被 m 整除。

证：考察下式：

a_1
a_1+a_2
$a_1+a_2+a_3$
$\vdots$
$a_1+a_2+\cdots+a_m$

若第i式能被m整除，则显然成立，此时$k=0,\ell=i$；

若任一式都不能被m整除，则考察各式被m整除后的余数，如下式：

$a_1=q_1m+r_1$
$a_1+a_2=q_2m+r_2$
$a_1+a_2+a_3=q_3m+r_3$
$\vdots$
$a_1+a_2+\cdots+a_m=q_mm+r_m$

由于每一个都不能被m整除，故共有m个余数—相当于m个物体。而任意整数被m除后，只有m－1 个余数——相当于m－1 抽屉，于是由抽屉原理可知必有两个余数相等。设这两个余数为$r_i,r_j,i\neq j(i<j)$，对应两式相减便有：

$a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_j$可被$m$整除，此时$k=i,\ell=j$。

例 6 设X是一个无穷集合，$f:X\to X$。证明：存在 X 的一个真子集E，使得$f(E)\subseteq E$。

证： 取$x_0\in X$，令$x_1=f(x_0),x_2=f(x_1),\cdots,x_n=f(x_{n-1}),\cdots$。

若到某一位与前面有重复项，设为第k项，即$f(x_k)=x_i(i<k)$。则

令$E=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_k\}\subset X$，则 $f(E)\subseteq E$；

若x_i互不相同，则令$E=X\setminus\{x_0\}\subset X$，则$f(E)\subseteq E$。

例 7 设$N=\{1,2,3,\cdots\}$，试构造两个映射f和 g：$N\to N$，使得$gf=I_N$，但$fg\neq I_N$。

例 8(P_{55}^2)设$f:X\to Y$则

（1）若存在唯一的一个映射$g:Y\to X$，使得$gf=I_X$，则f是可逆的吗？

（2）若存在唯一的一个映射$g:Y\to X$，使得$fg=I_Y$，则f是可逆的吗？

答案：（1）f不一定可逆。

当$|X|=1$时，f不一定可逆。

当$|X|\geq 2$时，f可逆。

（2）f一定可逆。

证：由$fg=I_Y$，得f是满射。假设f不是单射，则g不唯一，矛盾。

例 9(P_{55}^{3})设$f:X\to Y,|X|=m,|Y|=n$，则

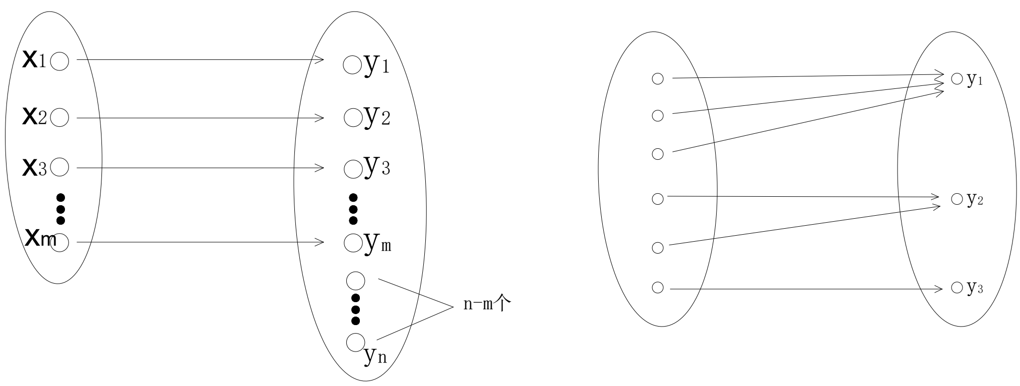
（1）若f是左可逆的，则f有多少个左逆映射？

（2）若f是右可逆的，则f有多少个右逆映射？

解：令$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\},Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，则

（1）如图 1(a)所示：有m^{n-m}；（2）如图 1(b)所示：有

$$|f^{-1}(y_1)|\bullet|f^{-1}(y_2)|\bullet\cdots\bullet|f^{-1}(y_n)|。$$



（a）　　　　　　　　　　　　　　(b)

图 1

例 10(1)设$X=\{1,2,3,4,5\}$，$Y=\{a,b\}$，求 X 到 Y 的满射的个数。$(2^5-2=30)$

(2)设$X=\{1,2,\cdots,m\}$，$Y=\{a,b\}$，求 X 到 Y 的满射的个数。(2^m-2)

(3)设$X=\{1,2,\cdots,m\},Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，$m\geq n$，若$f:X\to Y$，求 X 到 Y 的满射的个数。

证：在Y上的定义 n 个性质$P_1,P_2,\cdots,P_n$，满足各性质的Y^X中映射之集分别记为$A_1,A_2,\cdots,A_n$。若$f\in Y^X(f:X\to Y),\forall x\in X,f(x)\neq y_i$，则称$f$不具有性质，于是令$A_i$为$X$中每个元素在$f$下的象都不等于$y_i$，即

$A_i=\{f\mid f:X\to Y,\forall x\in X,f(x)\neq y_i\}$，$i=1,2,\cdots,n$。于是

$A_i^C=\{f\mid f:X\to Y,x\exists X,f(x)\neq y_i\}$，$i=1,2,\cdots,n$，即

$$\left|A_1^C\cap A_2^C\cap\cdots\cap A_n^C\right|=\left|Y^X\right|-\left|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\right|=$$

$$=\left|Y^X\right|-\sum_{i=1}^{n}\left|A_i\right|+\sum_{1\le i<j\le n}\left|A_i\cap A_j\right|-\sum_{1\le i<j<k\le n}\left|A_i\cap A_j\cap A_k\right|+\cdots+(-1)^n\bigcap_{i=1}^{n}\left|A_i\right|$$

$$=n^m-C_n^1(n-1)^m+C_n^2(n-2)^m-C_n^3(n-3)^m+\cdots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}1^m+C_n^n0^m$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^kC_n^k(n-k)^m(k=0\text{就是}n^m)$$

在这里A_i不以y_i为函数值，则$\left|A_i\right|=(n-1)^m$

$A_i\cap A_j$不以y_i与y_j为函数值，则$\left|A_i\cap A_j\right|=(n-2)^m$。

例 11(P_{51}^2)设 X, Y, Z 是三个非空集合，$\left|Z\right|\ge 2$。证明：$f:X\to Y$是满射当且仅当不存在从 Y 到 Z 的映射g_1和g_2，使得$g_1\neq g_2$，但$g_1\bullet f=g_2\bullet f$。

证：$\Rightarrow$因$f:X\to Y$且f为满射，故$\forall y\in Y,\exists x\in X$，使得$f(x)=y$。

假设存在$g_1,g_2,g_1\neq g_2$，所以$\exists y_0\in Y$，使得$g_1(y_0)\neq g_2(y_0)$，因为$\left|Z\right|\ge 2$，因此必存在这样的g_1和g_2。对于上面的y_0，$\exists x_0\in X$（f是满射），使得$f(x_0)=y_0,g_1(f(x_0))\neq g_2(f(x_0))$。

$[g_1(y_0)\neq g_2(y_0)]$，即$g_1f(x_0)\neq g_2f(x_0)$。故$g_1\bullet f\neq g_2\bullet f$与$g_1\bullet f=g_2\bullet f$，矛盾。所以假设不成立。

<u>也可以用如下方法：</u>

f满射$\Leftrightarrow$ f右可逆$\Leftrightarrow\exists h:Y\to X$，使得$f\bullet h=I_Y\Leftrightarrow$假设$g_1\bullet f=g_2\bullet f$得到$g_1=g_2$，命题得证。

$\Leftarrow f:X\to Y$，假设f不是满射，则$\exists y_0\in Y$，使得$\forall x\in X,f(x)\neq y_0$。构造

两个映射$g_1, g_2: Y \to Z$，

当$y = y_0$时，$g_1(y_0) \neq g_2(y_0)$；

当$y \neq y_0$时，$g_1(y) = g_2(y)$。

因为$|Z| \geq 2$，故此时$g_1 \neq g_2$，但

$\forall x \in X, g_1 \bullet f(x) = g_1(y \neq y_0) = g_2(y \neq y_0) = g_2 \bullet f(x)$

即$g_1 \bullet f = g_2 \bullet f$，与题设不存在$g_1 \neq g_2$，但$g_1 \bullet f = g_2 \bullet f$矛盾，故假设不成立，即$f$一定是满射。

习 题 课

例 1 (P_{47}^3)设$f: X \to Y$，$A \subseteq X, B \subseteq Y$，证明：

$$f(f^{-1}(B) \cap A) = B \cap f(A)。$$

证： 设$y \in f(f^{-1}(B) \cap A)$，则$\exists x \in f^{-1}(B) \cap A$，使得$f(x) = y$。于是$x \in f^{-1}(B)$且$x \in A$，因此$y = f(x) \in B$且$y \in f(A)$，即$y \in B \cap f(A)$，从而

$$f(f^{-1}(B) \cap A) \subseteq B \cap f(A)。$$

反之，设$y \in B \cap f(A)$，则$y \in B$且$y \in f(A)$。于是$\exists x \in A$且$x \in f^{-1}(B)$，使得$f(x) = y$。从而$\exists x \in f^{-1}(B) \cap A$，使得$f(x) = y$，因此$y \in f(f^{-1}(B) \cap A)$。从而

$$B \cap f(A) \subseteq f(f^{-1}(B) \cap A)。$$

所以$f(f^{-1}(B) \cap A) = B \cap f(A)$。

例 2 (P_{47}^8)设$f: A \to B$，证明：$\forall T \in 2^B$，有$f(f^{-1}(T)) = T \cap f(A)$。

证： 若$T = \varnothing$，则$f(f^{-1}(T)) = \varnothing, T \cap f(A) = \varnothing$，从而$f(f^{-1}(T)) = T \cap f(A)$。

若$T \neq \varnothing$，设$y \in f(f^{-1}(T))$，则$\exists x \in f^{-1}(T)$，使得$f(x) = y$且$x \in A$，于是$y = f(x) \in T$且$y = f(x) \in f(A)$，因此$y \in T \cap f(A)$。故

$$f(f^{-1}(T)) \subseteq T \cap f(A)$$

反之，设 $y\in T\bigcap f(A)$，则 $y\in T$ 且 $y\in f(A)$。于是 $\exists x\in A$ 且 $x\in f^{-1}(T)$，使得 $f(x)=y$。因此 $\exists x\in A\bigcap f^{-1}(T)$，使得 $y=f(x)\in f(f^{-1}(T)\bigcap A)$。而 $f^{-1}(T)\subseteq A$，所以 $y\in f(f^{-1}(T))$，故 $T\bigcap f(A)\subseteq f(f^{-1}(T))$

从而 $T\bigcap f(A)=f(f^{-1}(T))$

例 3 $(P_{47}^{5,6})$ 设 $f:X\to Y$，证明：f 是单射 $\Leftrightarrow \forall F\in 2^X, f^{-1}(f(F))=F$。

证： $\Rightarrow \forall x\in f^{-1}(f(F))$，则 $f(x)\in f(F)$，于是 F 中必存在 x_1，使得 $f(x)=f(x_1)$。因为 f 是单射，故必有 $x=x_1$。即 $x\in F$，所以 $f^{-1}(f(F))\subseteq F$。

反过来，$\forall x\in F, f(x)\in f(F)$，从而有 $x\in f^{-1}(f(F))$，所以 $F\subseteq f^{-1}(f(F))$。

因此 $f^{-1}(f(F))=F$。

$\Leftarrow$ 假设 f 不是单射，则 $\exists x_1,x_2\in X, x_1\neq x_2$，但 $f(x_1)=f(x_2)=y$。令 $F=\{x_1\}\in 2^X$，于是

$$f^{-1}(f(F))=f^{-1}(f(\{x_1\})=f^{-1}(\{y\})=\{x_1,x_2\},$$

故有 $\{x_1,x_2\}=F=\{x_1\}$，矛盾。

即 f 一定为单射。

例 4 (P_{47}^{7}) 设有映射 $f:A\to B, H\subseteq A$，令 H 在 A 中的余集 $H^c=A\setminus H$，当 f 分别是单射和满射时，给出 $f(H^c)$ 和 $(f(H))^c$ 之间的关系，并给予证明。

解：由定理知，$(f(H^c))=f(\mathrm{A}\backslash\mathrm{H})\supseteq f(\mathrm{A})\backslash f(H)$。

若 f 是满射，即 $f(A)=B$，有 $f(H^c)\supseteq B\setminus f(H)=(f(H))^c$。

举例说明：

设 $A=\{1,2,3\}, B=\{a,b\}, f(1)=f(2)=a, f(3)=b$，则 f 为满射。

令 $\mathrm{H}=\{1,3\}$，则 $H^c=\{2\}, f(H^c)=\{a\}$, 而 $(f(H))^c=B\setminus f(H)=\varnothing$。

若 f 是单射时，有 $f(H^c)\subseteq (f(H))^c$。

$\forall y\in f(H^c)$，存在 $x\in H^c$，即 $x\notin H$，使得 $y=f(x)$；由 f 是单射，有

$y=f(x)\notin f(H)$ 且 $y=f(x)\in B$（否则存在 $x_1\in H$，使 $f(x_1)=f(x)$，与 f 是单设矛盾），故 $y=B\setminus f(H)\in(f(H))^c$。于是 $f(H^c)\subseteq(f(H))^c$。

举例说明：

设 $A=\{1,2,3\},B=\{a,b,c,d\},f(1)=a,f(2)=b,f(3)=c,H=\{1,2\}$，则

$f(H^c)=f(\{3\})=\{c\}$，而 $(f(H))^c=B\setminus f(H)=\{d,c\}$。

例 5（1）若 $f:T\to U,f$ 是单射，$g,h:S\to T$，满足 $f\circ g=f\circ h$，证明：$g=h$。

（2）给出映射 f,g,h 的实例，$f:T\to U,g,h:S\to T$，$f\circ g=f\circ h$，但 $g\neq h$。

（3）$f:A\to B$，$g,h:B\to C$。给出 f 的条件，使得由 $g\circ f=h\circ f$ 可以得出 $g=h$。

证：（1）$\forall s\in S$，由条件知，$(f\circ g)(s)=(f\circ h)(s)$，即 $f(g(s))=f(h(s))$。因为 f 为单射，所以有 $g(s)=h(s)$，且 g,h 都是 S 到 T 映射，从而 $g=h$。

（2）f 不为单射时不成立。

例：$\mathrm{S}=\{1\}$，$T=\{a,b\},U=\{0\},f(x)=0;g(1)=a;h(1)=b$。则

$f\circ g(x)=f(g(x))=0,f\circ h(x)=f(h(x))=0$，但 $\mathrm{g}\neq\mathrm{h}$。

（3）f 为满射时，结论成立。

$\forall b\in B$，因为 f 是满射，所以存在 $a\in A$，使得 $f(a)=b$。由 $g\circ f=h\circ f$，

得 $g(f(a))=h(f(a))$，即 $g(b)=h(b)$，从而 $g=h$。

例 6 设 $f:N\times N\to N,f((x,y))=xy$。求 $f(N\times\{1\}),f^{-1}(\{0\})$，并说明是否是单射、满射或双射？（在此处 N 必包含 0）

解： 容易说明 f 不是单射：$f((1,4))=f((2,2))$，但 $(1,4)\neq(2,2)$。

f 是满射：$\forall y\in N,$ 有 $f((1,y))=1\cdot y=y$，任一元素都存在有原象。

$f(N\times\{1\})=\{n\cdot 1|n\in N\}=N$；

$f^{-1}(\{0\})=\{(x,y)|xy=0\}=(N\times\{0\})\cup(\{0\}\times N)$。

例 7 设 $f:X\to Y, g:Y\to Z$ 是两个映射，$g\circ f$ 是一个满射，若 g 是单射，证明 f 是满射。

证：假设 f 不是满射，则有 $f(X)\neq Y$。即存在 $y_0\in Y$，使得 $\forall x\in X, f(x)\neq y_0$。

又由 g 是映射，则有 $g(y_0)=z_0\in Z$；

因 $g\circ f$ 是满射，故对上面 $z_0\in Z$，必存在 $x\in X$，使得 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=z_0$，取 $f(x)=y_1$，有 $g(y_1)=z_0$，而 $y_1\neq y_0$，但 $g(y_1)=g(y_0)=z_0$，故 g 不是单射，与题设矛盾。于是假设不成立，即 f 是满射。

例 8 一个人步行了十小时，共走 45 公里，已知他第一个小时走了 6 公里，而最后一小时只走了 3 公里，证明：一定存在连续的两个小时，在这两个小时之内至少走了 9 公里。

证：设 a_i 为第 i 小时步行的路程，连续两小时一共有 9 种：

$a_1+a_2, a_2+a_3, \cdots, a_8+a_9, a_9+a_{10}$。即相当于有 9 个抽屉，而

$\sum\limits_{i=1}^{9}(a_i+a_{i+1})=2\sum\limits_{i=1}^{10}a_i-a_1-a_{10}=2\times 45-6-3=81$。即相当于有 81 个物体，于是把 81 个物体放入 9 个抽屉里，必有一个抽屉里至少有 9 个物体，所以至少存在一个 k，使得 $a_k+a_{k+1}\geq 9$。此题解法可推广到连续 n 个小时的情况。

对本题还可简单证明如下：$a_1=6, a_{10}=3, a_2+a_3+\cdots+a_9=36$。

8 个小时路程分四段，$a_2+a_3, a_4+a_5, a_6+a_7, a_8+a_9$，但

$(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+(a_6+a_7)+(a_8+a_9)=36$，由抽屉原理可知，必存在某一段的路程至少为 9 公里。

习 题 课

例 1 设 X 是一个集合，$|X|$＝n，求：

1. X 上的二元关系有多少？$\left(2^{n^2}\right)$

2. X 上的自反的二元关系有多少？

3. X 上的反自反的二元关系有多少？

解：因为把所有的反自反的二元关系的每个都加上对角线上的序对，就变成了自反的关系，因此，自反的与反自反的个数一样多。即 2^{n^2-n}

4. X 上的对称的二元关系有多少？

$\dfrac{n^2-n}{2}+n=\dfrac{n^2+n}{2}$，故共有 $2^{\frac{n^2+n}{2}}$ 个对称的关系。

5. X 上的反对称的二元关系有多少？$(3^{\frac{n^2-n}{2}}\bullet 2^n)$

6. X 上既是自反的也是反自反的二元关系的个数；(0个)

7. X 上既不是自反的也不是反自反的二元关系有多少？$(2^{n^2-n}\bullet(2^n-2))$

解：解：可用容斥原理来计算

设 B 表示所有自反关系构成的集合，C 表示所有反自反关系构成的集合，则 $|B|=|C|=2^{n^2-n}$。而 $B\cap C=\phi$，故 $|B\cup C|=|B|+|C|$，从而

$$|B^C\cap C^C|=|S|-|B\cup C|=|S|-|B|-|C|$$

$$=2^{n^2}-2^{n^2-n}-2^{n^2-n}=2^{n^2}-2\bullet 2^{n^2-n}=2^{n^2-n}\bullet(2^n-2)$$

于是，既不是自反的，也不是反自反关系共有 $2^{n^2-n}\bullet(2^n-2)$ 个。

8. 自反的且对称的关系有多少？[此结果与“反自反的且对称的关系有多少？”是一样多]即有 $2^{\frac{n^2-n}{2}}$（对角线上全去掉）

9. 自反的或对称的关系有多少？

解：设 B 表示自反关系的集合，C 表示对称关系的集合，则自反或对称关系的集合为：$|B\cup C|=|B|+|C|-|B\cap C|=2^{n^2-n}+2^{\frac{n^2+n}{2}}-2^{\frac{n^2-n}{2}}$。

10. X 上既是反自反的也是反对称的二元关系的个数为：$3^{\frac{n^2-n}{2}}$；

11. X 上既是对称的也是反对称的关系个数；

解： X 上既是对称的也是反对称的关系 $R\subseteq I_X$，故有 2^n。

12. X 上既不是对称的也不是反对称的关系个数；$(2^{n^2}-2^{\frac{n^2+n}{2}}-2^n\bullet 3^{\frac{n^2-n}{2}}+2^n)$

解： 设 A 表示对称、B 表示反对称，则

既不是对称的也不是反对称的二元关系为：

$$|A^C\cap B^C|=|S|-|A\cup B|=|S|-|A|-|B|+|A\cap B|=2^{n^2}-2^{\frac{n^2+n}{2}}-2^n\bullet 3^{\frac{n^2-n}{2}}+2^n$$

例 2 设有集合 A，$|A|=3$，求 A 上具有反自反且反对称性的二元关系的数目，并写出计算过程。

解： 不妨设 $A=\{a,b,c\}$，将 (a,b)，(b,a) 看作一个抽屉，(b,c)，(c,b) 看作一个抽屉，(a,c)，(c,a) 看作一个抽屉。若要获得具有反对称性且反自反性的关系，其中的元素只能在三个抽屉中取且每个抽屉中至多取一个元素，分几种情况：

（1）一个也不取，有 $C_3^0=1$ 种取法。

（2）只取一个元素，有 $C_3^1\bullet 2=6$ 种取法。

（3）取二个元素，有 $C_3^2\bullet 2\bullet 2=12$ 种取法。

（4）取三个元素，有 $C_3^3\bullet 2\bullet 2\bullet 2=8$ 种取法。

故具有反自反性且反对称性的二元关系数目共有 1＋6＋12＋8＝27 个。

若 $|A|=n$，结果又为多少？

抽屉数：$|A|=\dfrac{n^2-n}{2}$，每个抽屉有 3 种选择，故共有 $3^{\frac{n^2-n}{2}}$ 个。

例 3 设 $A=\{1,2,3\}$，R 是 A 的幂集 $2^A=\{\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$ 上的二元关系且 $R=\{(a,b)\mid a\cap b\neq\phi\}$，则 R 不满足下列哪些性质？为什么？

（1）自反性；（2）反自反性；（3）对称性；（4）反对称性；（5）传递性。

$R=\{(a,b)\mid a\cap b\neq\phi\}$ 等价于 $aRb\Leftrightarrow a\cap b\neq\phi\Leftrightarrow (a,b)\in R=a\cap b\neq\phi$。

解： (1) 自反性。

因为 $\phi\in 2^A$，但 $\phi\cap\phi=\phi$，所以 $(\phi,\phi)\notin R$，故 R 不是自反的。

（2）反自反性。

因为$\{1\}\in 2^A$， $\{1\}\cap\{1\}=\{1\}\neq\phi$，故$(\{1\},\{1\})\in R$，故$R$不是反自反的。

（3）对称性。

$\forall x,y\in 2^A$，若$(x,y)\in R$，则$x\cap y\neq\phi$，所以$y\cap x\neq\phi$，故$(y,x)\in R$，从而R是对称的。

（4）反对称性。

令$x=\{1,2\}$， $y=\{1,3\}$，则$x\cap y=y\cap x=\{1\}\neq\phi$，故$(x,y)\in R$且$(y,x)\in R$，但$x\neq y$，所以$(x,y)\neq(y,x)$，从而$R$不是反对称的。

（5）传递性。

令$x=\{1\}$， $y=\{1,2\}$， $z=\{2\}$，则有$x\cap y=\{1\}\neq\phi$且$y\cap z=\{2\}\neq\phi$，故$(x,y)\in R$且$(y,z)\in R$，但$x\cap z=\phi$，故$(x,z)\notin R$，所以R不是传递的。

习题课

例 1 证明：$R\circ R^*=R^*\circ R=R^+$，其中$R^*=R^0\cup R^1\cup R^2\cup\cdots=\bigcup_{i=0}^{\infty}R^i$

证： $R\circ R^*=R\circ(R^0\cup R^1\cup R^2\cup\cdots)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots=t(R)=R^+$；

同理可证$R^*\circ R=R^+$

例 2 [书上做为定理出现] 设 R、S 是X上的二元关系，则

（1）$\phi^+=\phi$，ϕ是空关系。

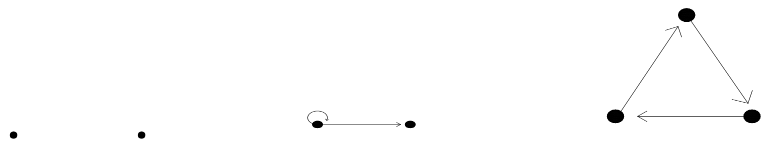
（2）$(R^+)^+=R^+$

证：因为R^+是传递的，故$(R^+)^+=R^+$。

（3）$(R\cup S)^+\supseteq R^+\cup S^+$

证：因为$R\cup S\supseteq R$且$R\cup S\supseteq S$，故$(R\cup S)^+\supseteq R^+$，且$(R\cup S)^+\supseteq S^+$，从而$(R\cup S)^+\supseteq R^+\cup S^+$

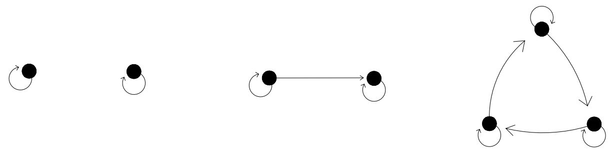
例 3 如图 5 所示给出下图中每个关系的自反、对称和传递闭包。



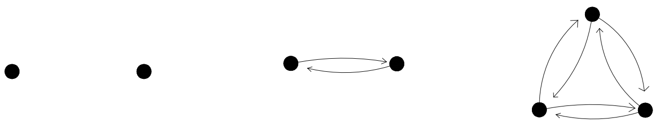
（a）　　　　　　（b）　　　　　　（c）

图 5

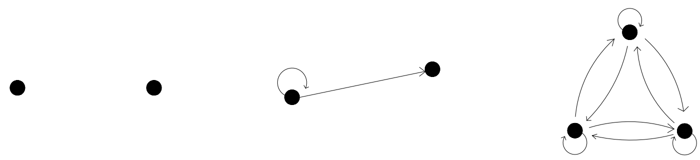
（1）自反闭包



（2）对称闭包



（3）传递闭包



例 4 设 R 是集合 A 上的反对称关系，则 t(R)一定是反对称的吗？

证：t(R)在 A 上不一定是反对称的。

例：$A=\{a,b,c,d\}$，$R=\{(a,b),(b,c),(c,d),(d,a)\}$ 则 R 的传递闭包为：

$t(R)=\{(a,b),(b,c),(c,d),(d,a),(a,c),$

$(a,d),(d,c),(d,d),(c,a),(b,d),(d,b),(b,a),(c,b),(a,a),(b,b),(c,c)\}$

t(R)是全关系，故 t(R)不是反对称的而是对称的。

例 5 举例说明$s(t(R))$与$t(s(R))$确实不相等。

解：设$N=\{1,2,3,\cdots\}$，在N上定义小于关系“$<$”，则

$s(t(<))=s(<)=$“不等关系$\neq$”；

而 $t(s(<)) = t(\neq) =$ “全关系”。

因此的确不相等。

例 7（P_{98}^{8}）是否存在 X（$|X| = n$）上的一个二元关系 R，使得 $R, R^2, \cdots, R^n$ 两两不相等。

解： 存在。令 $X = \{1,2,3,\cdots,n\}$， $R = \{(1,2),(2,3),\cdots,(n-1,n)\}$ 即可。

例 8 证明：如果 R 是对称的，则 R^+ 也是对称的。

证：证 1 $\forall (x, y) \in R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$，则 $\exists m \in N$，使得 $(x, y) \in R^m$。于是存在 m－1 个元素 $y_1, y_2, \cdots, y_{m-1}$，使得 $(x_1, y_1) \in R, (y_1, y_2) \in R, \cdots, (y_{m-2}, y_{m-1}) \in R, (y_{m-1}, y) \in R$。由 R 的对称性有：$(y, y_{m-1}) \in R, (y_{m-1}, y_{m-2}) \in R, \cdots, (y_2, y_1) \in R, (y_1, x) \in R$。于是 $(y, x) \in R^m$，从而 $(y, x) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R^+$，即 $R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 是对称的。

习 题 课

例 1 设 R 是整数集 I 上的关系，mRn 定义为 $m^2 = n^2$，则

（1）证明：R 是等价关系；

（2）确定 R 的等价类。

证：（1）因为 $\forall m \in I$，有 $m^2 = m^2$，故 mRm，即 R 是自反的。

$\forall m, n \in I$，若 mRn，即 $m^2 = n^2$，则 $n^2 = m^2$，因此 nRm，即 R 是对称的。

$\forall m, n, k \in I$，若 mRn， nRk，即 $m^2 = n^2$ 且 $n^2 = k^2$，故 $m^2 = k^2$，即 mRk，所以 R 是传递的。

由此可知：R 是 I 上的等价关系。

（2）因为 $\forall i \in I$， $[i]_R = \{i, -i\}$，所以 R 的等价类有：$\{[0]_R, [1]_R, [2]_R, \cdots\}$。

例 2 设 R 是 A 上的一个自反关系，证明：R 是等价关系 $\Leftrightarrow$ 若 $(a,b) \in R$ 且 $(a,c) \in R$，则 $(b,c) \in R$。［书上习题］

证： $\Rightarrow$ R 是 A 上的等价关系。

若 $(a,b)\in R$ 且 $(a,c)\in R$，由 R 的对称性有：$(b,a)\in R$ 且 $(a,c)\in R$，再由 R 的传递性有：$(b,c)\in R$

$\Leftarrow$R 是自反的，故 $\forall a\in A$ 有 $(a,a)\in R$。

若 $(a,b)\in R$，由 $(a,a)\in R$，有 $(b,a)\in R$，所以 R 是对称的。

若 $(a,b)\in R$ 且 $(b,c)\in R$，由 R 的对称性有：

$(b,a)\in R$ 且 $(b,c)\in R$，故由题意得 $(a,c)\in R$，所以 R 是传递。

因此，R 是 A 上的等价关系。

例 3. 令 $A=\{1,2,3\}$，A 上的两个关系如图 3 所示，它们是否是等价关系？

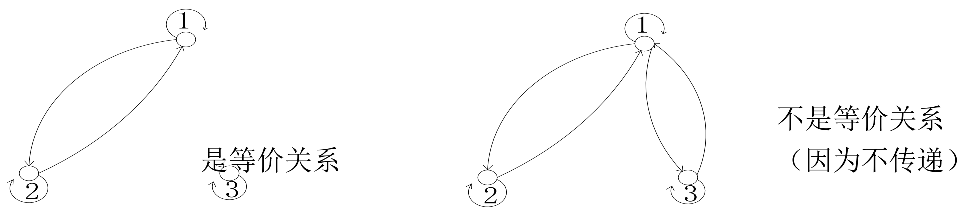


图 3

例 4 设 R_1，R_2 是 A 上的等价关系，则 $R_1\cup R_2$ 也是 A 上的等价关系吗？

解： $R_1\cup R_2$ 不一定是 A 的等价关系。因为 $R_1\cup R_2$ 不一定具有传递性。

举例：设 $A=\{a,b,c\}$，$R_1=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a)\}$，

$R_2=\{(a,a),(b,b),(c,c),(b,c),(c,b)\}$，则

$R_1\cup R_2=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(b,c),(c,b)\}$

因为 $(a,b)\in R_1\cup R_2$ 且 $(b,c)\in R_1\cup R_2$，但 $(a,c)\notin R_1\cup R_2$，故 $R_1\cup R_2$ 不满足传递性，即 $R_1\cup R_2$ 不一定是 A 上的等价关系。

例 5 设 $X=\{1,2,\cdots,n\}, S\subseteq X\times X$。“$\cong$”是 S 上如下的二元关系：$\forall (i,j),(k,l)\in S$，

$(i,j)\cong(k,l)$ 当且仅当 $i+j=k+l$。

证明：(1) $\cong$ 等价关系；(2) 求等价类数。

证： (1) 等价关系显然；

(2)等价类数为：$2n-1$。

$i+j$只能取 2，3，…，2n，故等价类数有$2n-1$个。

例 6 设 R 是 A 上的对称和传递的关系。若对 A 中每个 a，$\exists b\in A$，使得$(a,b)\in R$，证明：R 是 A 上的等价关系。

证：$\forall a\in A$，$\exists b\in A$，使得$(a,b)\in R$。由 R 的对称性有：$(b,a)\in R$。再由 R 的传递性有：$(a,a)\in R$。由 a 的任意性可知，R 是 A 上的自反关系，故 R 是 A 上的等价关系。

例 7 设 R 是集合 A 上的一个自反的和传递的关系；T 是 A 上的一个关系，使得$(a,b)\in T\Leftrightarrow(a,b)\in R$且$(b,a)\in R$。证明：T 是 A 上的等价关系。

证：（1）因为 R 是A上的自反关系，所以$\forall a\in A$，有$(a,a)\in R$，故由 T 的定义有：$(a,a)\in T$，即 T 是A上的自反关系。

（2）若$(a,b)\in T$，由题设：$(a,b)\in R$且$(b,a)\in R$。显然，$(b,a)\in T$，即 T 是A上的对称关系。

（3）若$(a,b)\in T$且$(b,c)\in T$，由题设可知：$(a,b)\in R$，$(b,a)\in R$且$(b,c)\in R$，$(c,b)\in R$。由 R 传递性得：$(a,c)\in R$且$(c,a)\in R$，故$(a,c)\in T$，所以 T 是A上的传递关系。

由（1），（2），（3）即得 T 是A上的等价关系。

例 8 设R是A上的一个二元关系，设$S=\{(a,b)\mid\exists c\in A$，使得$(a,c)\in R$且$(c,b)\in R\}$。证明：若$R$是$A$上的等价关系，则$S$也是$A$上的等价关系；

证： 证明若R是等价关系，则S也是等价关系。

（1）自反性

因为R是自反的，所以$\forall a\in A$，有$(a,a)\in R$。根据S的定义，有$(a,a)\in S$，所以S是自反的；

（2）对称性：

若$(a,b)\in S$，则$\exists c\in A$，使得$(a,c)\in R$且$(c,b)\in R$。因为R是对称的，所以$(b,c)\in R$且$(c,a)\in R$，根据S的定义有$(b,a)\in S$，所以S是对称的；

（3）传递性：

若$(a,b)\in S$，$(b,c)\in S$，则$\exists d\in A$，使得$(a,d)\in R$且$(d,b)\in R$。因为R是传递的，所以$(a,b)\in R$。

且$\exists e\in A$，使得$(b,e)\in R$且$(e,c)\in R$。因为R是传递的，所以$(b,c)\in R$。

根据S的定义有$(a,c)\in S$。

所以S是传递的。

由（1），（2），（3）可知：S是等价关系。

例 9 设$\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$是集合 A 的划分，若$A_i\cap B\neq\phi$，1≤i≤n，

证明：$\{A_1\cap B,A_2\cap B,\cdots,A_n\cap B\}$是集合$A\cap B$的划分。

证：因为$\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$是集合 A 的划分，故$A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$，$A_i\cap A_j\neq\phi$，i≠j。但

$$A\cap B=\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\cap B=\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\cap B),$$

当 i≠j 时，$(A_i\cap B)\cap(A_j\cap B)=\phi$。

当 i＝j 时，$(A_i\cap B)\cap(A_j\cap B)=A_i\cap B$。

所以$\{A_1\cap B,A_2\cap B,\cdots,A_n\cap B\}$是$A\cap B$的划分。

例 10 设R_1和R_2是集合X上的等价关系，C_1和C_2是由R_1和R_2所诱导产生的划分，证明：当且仅当C_1的每个划分块都包含在C_2的某个划分块中，$R_1\subseteq R_2$。

分析：只要理解等价关系和划分的概念以及它们之间的一一对应关系，就很容易证明。

证：令划分$C_1=\{A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots\}$，$C_2=\{B_1,B_2,\cdots,B_e,\cdots\}$。

充分性。

若$R_1\subseteq R_2$，则C_1的每个划分块都包含在C_2的某个划分块中。于是

$\forall A_k\in C_1$，即A_k为C_1中任一划分块，所以$A_k\neq\varnothing$。在A_k中任取一个元素$a\in A_k$。因为C_2是X的划分且$a\in X$，所以存在$B_e\in C_2$，使得$a\in B_e$。于是$\forall b\in A_k$，有$(a,b)\in R_1$，又因为$R_1\subseteq R_2$，所以$(a,b)\in R_2$。

根据划分的定义有$b \in Be$，所以$A_k \subseteq Be$。

由A_k的任意性知，C_1的每一划分块都包含在C_2的某一划分块中。

必要性

若C_1的每个划分块都包含在C_2的某个划分块中，则$R_1 \subseteq R_2$。

$\forall (a,b) \in R_1$，则a,b在C_1的同一划分块中。根据题设，必有a,b在C_2的同一划分块中，故$(a,b) \in R_2$。因此$R_1 \subseteq R_2$。

例 11 $\left(P_{113}^{1,2,3}\right)$设$X = \{1,2,3\}, Y = \{1,2\}, S = \{f \mid f : X \to Y\}$。$\cong$是 S 上的二元关系，若$\forall f, g \in S, f \cong g \Leftrightarrow I_m(f) = I_m(g)$，证明：$\cong$是$S$上的等价关系；求等价类。

证：因为$f : X \to Y$，所以X到Y的映射共有 8 个，如图 2 所示。

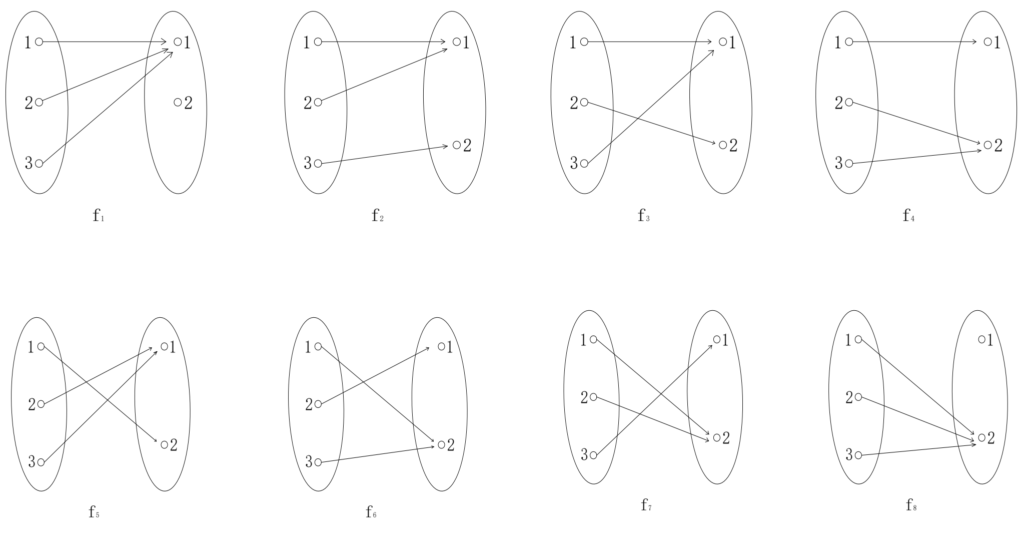


图 2

（1）等价关系显然。

（2）$\forall f \in S$，$[f]_R = \{g \mid I_m(f) = I_m(g)\}$，故

$[f_1]_R = \{f_1\}$，$[f_2]_R = \{f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\}$，$[f_3]_R = \{f_8\}$。

所以等价类集合为$\{[f_1]_R, [f_2]_R, [f_3]_R\}$。

例 12 设$S = \{1,2,3,4\}$，并设$A = S \times S$，在A上定义关系R为:

$$(a,b)R(c,d) \in R \Leftrightarrow a + b = c + d 。$$

证明：(1)R 是等价关系；(2)计算出 A/R。

证：I(1)自反性。$\forall(a,b)\in A$，有$a+b=a+b$，所以$(a,b)R(a,b)$，即 R 是 A 上的自反关系。

(2)对称性。$\forall(a,b)$，$(c,d)\in A$，若$(a,b)R(c,d)$，则$a+b=c+d$，故$c+d=a+b$，所以$(c,d)R(a,b)$，即 R 是 A 上的对称关系。

(3)传递性。$\forall(a,b)$，(c,d)，$(e,f)\in A$，若$(a,b)R(c,d)$且$(c,d)R(e,f)$，则$a+b=c+d$且$c+d=e+f$，即$a+b=e+f$，所以$(a,b)R(e,f)$，故 R 是 A 上的传递关系。

由(1)，(2)，(3)可知，R 是 A 上的等价关系。

II 首先求出 A=S×S 的全部元素，然后找出所有元素对应的等价类即可。在求等价类时，记住以下几条性质：

(1) $a\in[a]_R$；(2)若$(a,b)\in R$，则$[a]_R=[b]_R$。

因为$A=S\times S=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),$

$$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$$

$[(1,1)]_R=\{(1,1)\},[(1,2)]_R=\{(2,1),(1,2)\}=[(2,1)]_R$

$[(1,3)]_R=\{(1,3),(3,1),(2,2)\}=[(3,1)]_R=[(2,2)]_R$

$[(1,4)]_R=\{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\}=[(4,1)]_R=[(2,3)]_R=[(3,2)]_R$

$[(2,4)]_R=\{(2,4),(3,3),(4,2)\}=[(4,2)]_R=[(3,3)]_R$

$[(3,4)]_R=\{(4,3),(3,4)\}=[(4,3)]_R$　　$[(4,4)]_R=\{(4,4)\}$

所以，$A/R=\{[(x,y)]_R\mid x,y\in A\}=\{[(1,1)]_R,[(1,2)]_R,$

$$[(1,3)]_R,[(1,4)]_R,[(2,4)]_R,[(3,4)]_R,[(4,4)]_R\}$$

例 13 设R_1是A上的等价关系，R_2是B上的等价关系。关系R满足：

$$(x_1,y_1)R(x_2,y_2)\Leftrightarrow(x_1,x_2)\in R_1\text{且}(y_1,y_2)\in R_2$$

$$\left[\left((x_1,y_1),(x_2,y_2)\right)\in R\text{当且仅当}\left(x_1,x_2\right)\in R_1\text{且}\left(y_1,y_2\right)\in R_2\right]$$

证明：R是$A\times B$上的等价关系。

解：（1）自反性：$\forall\left(x,y\right)\in A\times B$，有$x\in A$，$y\in B$；因为$R_1$和$R_2$分别为$A$和$B$上的自反关系，所以$\left(x,x\right)\in R_1$，$\left(y,y\right)\in R_2$，故$\left(\left(x,y\right),\left(x,y\right)\right)\in R$，因此$R$是

自反性的；

（2）对称性：$\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in A\times B$，若$((x_1,y_1),(x_2,y_2))\in R$，则$(x_1,x_2)\in R_1$，$(y_1,y_2)\in R_2$；因为$R_1$和$R_2$分别为$A$和$B$上的对称关系，所以有$(x_2,x_1)\in R_1$，$(y_2,y_1)\in R_2$，从而$((x_2,y_2),(x_1,y_1))\in R$，因此$R$是对称性的；

(3) 传递性：$\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)\in A\times B$，若$((x_1,y_1),(x_2,y_2))\in R$且$((x_2,y_2),(x_3,y_3))\in R$，则有 $(x_1,x_2)\in R_1$，$(y_1,y_2)\in R_2$，$(x_2,x_3)\in R_1$，$(y_2,y_3)\in R_2$；因为R_1和R_2分别为A和B上的传递关系，所以有$(x_1,x_3)\in R_1$，$(y_1,y_3)\in R_2$，从而$((x_1,y_1),(x_3,y_3))\in R$，因此$R$是传递性的。

综上可知：R是$A\times B$上的等价关系。

例 14 设N是自然数集合，定义N上的二元关系R：

$$R=\{(x,y)|x\in N,y\in N,x+y\text{是偶数}\}，则$$

（1）证明R是一个等价关系；

（2）求关系R的等价类；

证：（1）自反性：$\forall x\in N$，$x+x$是偶数，所以有xRx。因此R是自反的；

对称性：若$(x,y)\in R$，即$x+y$是偶数，则$y+x$是偶数，所以有$(y,x)\in R$。因此R是对称的；

传递性：若$(x,y)\in R$，$(y,z)\in R$，即$x+y$是偶数，$y+z$是偶数，则$x+z=(x+y)+(y+z)-2y$是偶数，所以有$(x,z)\in R$。因此R是传递的。

综上可知：R是等价关系。

（2）关系R的等价类有：$[0]_R=\{0,2,4,\cdots\},[1]_R=\{1,3,5,\cdots\}$。

（3）设$f:N\to N$，$f(x)=\begin{cases}0 & x\text{为偶数}；\\ 1 & x\text{为奇数}。\end{cases}$则$f$所诱导的等价关系就是$R$。

例 15 设$A=\{1,2,3,4\}\times\{1,2,3,4\}$，A 上的二元关系 R 定义为：

$$(x,y)R(u,v)\Leftrightarrow|x-y|=|u-v|，$$

证明：1.R 是 A 上的等价关系；2.确定由 R 对集合 A 的划分。

证：1. 首先证明 R 是 A 上的等价关系。

(1) 自反性。$\forall x,y\in A$，因为$|x-y|=|x-y|$，故$(x,y)R(x,y)$，即 R 是自反的。

(2) $\forall (x,y),(u,v)\in A$，若$(x,y)R(u,v)$，有$|x-y|=|u-v|$，则$|u-v|=|x-y|$，从而$(u,v)R(x,y)$，即 R 是对称的。

(3) $\forall (x,y),(u,v),(p,q)\in A$，若$(x,y)R(u,v),(u,v)R(p,q)$, 即$|x-y|=|u-v|$，$|u-v|=|p-q|$，得$|x-y|=|p-q|$，从而$(x,y)R(p,q)$，故 R 是传递的。

由(1)、(2)、(3)可知，R 是 A 上的等价关系。

2. 由定理知，由 R 的等价类可确定对集合 A 的划分。划分中的元素分别为元素的等价类，它们是：

$$[(1,1)]_R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\},[(1,2)]_R=\{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3)\}$$
$$[(1,3)]_R=\{(1,3),(3,1),(4,2),(2,4)\},[(1,4)]_R=\{(1,4),(4,1)\}$$

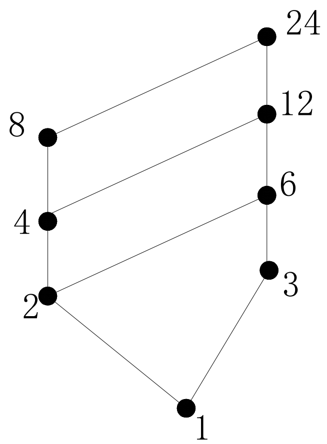
即集合 A 的划分$\pi=\{[(1,1)]_R,[(1,2)]_R,[(1,3)]_R,[(1,4)]_R\}$。

习 题 课

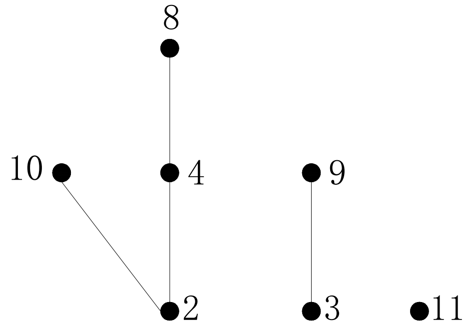
例 1 非空集合 A 上存在二元关系 R,使得 R 既是 A 上的等价关系又是 A 上的偏序关系吗？

解：存在。A 上的恒等关系就满足。

例 2 在 A＝{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24} 和 B＝{2, 3, 4, 8, 9, 10, 11} 上定义的整除关系“|”，画出 Hasse 图，指出最大（小）元，极大（小）元。



(a)



(b)

图 1

解：如图 1(a)所示

最大元：24　最小元：1；

极大元：24　极小元：1；

如图 1(b)所示

最大元：无　极大元：8，9，10，11；

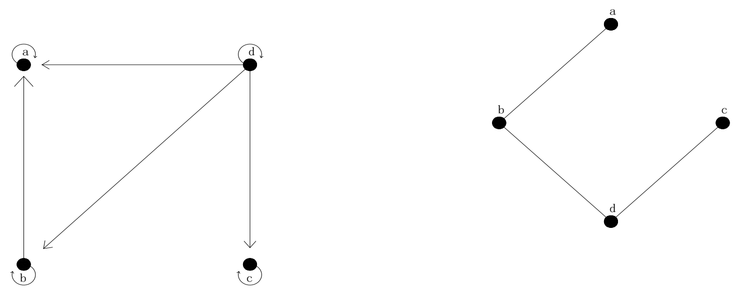
最小元：无　极大元：2，3，11

（元素 11 既是极大元又是极小元）。

例 3 设偏序集$(A,\leq)$的关系图如图 2(a)所示。

(1)画出$(A,\leq)$的 Hasse 图。

(2)设 B＝{b,c}，求 B 的上界集合 C 和上确界；下界集合 D 和下确界。



(a)　　　　(b)

图 2

解：1. $(A,\leq)$的 Hasse 图如图 8(b)所示。

1. 设 B＝{b,c}，则 A 中无任意元素“大于”b，也同时“大于”c，故 C＝ϕ，此时，无上确界，而 D＝ {d}，下确界：d。

例 4 设集合$A=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$上的偏序关系如图 9 所示。则

1.求出 A 的最大（小）元，极大（小）元。

2.求出$\{x_2,x_3,x_4\},\{x_3,x_4,x_5\},\{x_1,x_2,x_3\}$的上界、下界、上确界和下确界。

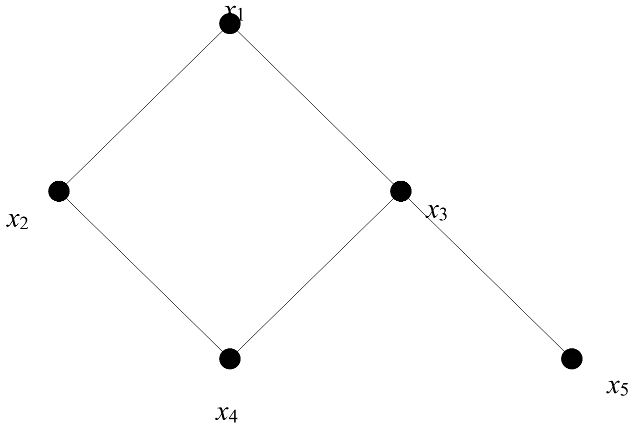


图 2

解： 1. 最大元：x_1, 最小元：无

极大元：x_1, 极小元：x_4， x_5

2. **令** $A=\{x_2,x_3,x_4\}$**，则**

上界：x_1, 下界 x_4；　　　　上确界：x_1, 下确界：x_4

令 $B=\{x_3,x_4,x_5\}$**，则**

上界：x_1,x_3，下界：无；　上确界：x_3，下确界：无；

令 $C=\{x_1,x_2,x_3\}$**，则**

上界：x_1，下界：x_4；　　上确界：x_1，下确界：x_4。

例 5 设集合 $A=\{a,b,c,d,e\}$， A 上的关系定义如下：

$$R=\{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,b),(b,c),$$

$$(b,e),(c,c),(c,e),(d,d),(d,e),(e,e)\}$$ 。则

（1）写出 R 的关系矩阵；

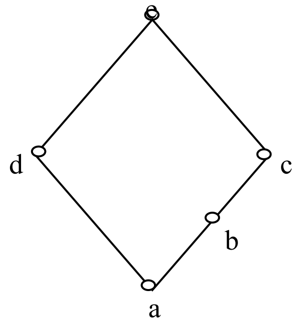
（2）验证 (A,R) 是偏序集；

（3）并画出 Hasse 图。

（4）若 A 上的关系如下：$R=\{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,b),(b,c),(b,e),$

$(c,c),(c,d),(c,e),(d,d),(d,e),(e,e)\}$，则又如何？

解：（1） R 所对应的关系矩阵为 B_R 为：



$$B_R=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

（2）由关系矩阵可知：

对角线上的所有元素全为 1，故 R 是自反的；

$r_{ij}+r_{ji}\le 1$，故 R 是反对称的；

图 10

R^2 对应的关系矩阵 B_{R^2} 为：

$$B_{R^2}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}=B_R。$$

因此 R 是传递的。

综上可知：故 R 是 A 上的偏序关系，从而 (A,R) 是偏序集。

（3）(A,R) 对应的 Hasse 图如图 10 所示。

（4） R 的关系矩阵为：$B_R=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&0&1\\0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$

因为 $(b,c)\in R$，$(c,d)\in R$，但 $(b,d)\notin R$，故 R 不是传递的。

因此，R 不是 A 上的偏序关系。

实际上，也可通过计算 R^2 的关系矩阵来说明：

$$B_{R^2}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}>B_R，故 R 不是传递的。$$

因此 R 不是 A 上的偏序关系。

例 6 证明：每个由 n^2+1 个实数组成的数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{n^2+1}$ 中必有一个长至少为

$n+1$的不减子序列，或有一个长至少为$n+1$的不增子序列。

证：不妨设n^2+1个数是互不相同的。于是，这n^2+1个数构成的集合 A，且$|A|=n^2+1$。在 A 上定义二元关系"$\le_1$"如下：

$$a_i \le_1 a_j \text{ 当且仅当 } a_i \le a_j \text{ 且 } i \le j 。$$

其中≤是实数间的通常的小于或等于关系。

显然，二元关系$\le_1$是自反的，传递的。设$a_i \le_1 a_j$且$a_j \le_1 a_i$，则$a_i \le a_j$，$a_j \le a_i$，且$i \le j$，$j \le i$，从而$a_i = a_j$，$i = j$。所以，$\le_1$是反对称的。因此$\le_1$是 A 上的偏序关系，$(A,\le_1)$是偏序集。

由推论可知，A 中或有长至少为$n+1$的链或有长至少为$n+1$的反链。A 中长至少为$n+1$的链，就是序列$a_1,a_2,\cdots,a_{n^2+1}$的长至少为$n+1$的不减（在$\le_1$下）的子序列。而 A 的长至少为$n+1$的反链，实际上就构成了$a_1,a_2,\cdots,a_{n^2+1}$的不增子序列。设反链中元素按下标递增顺序排列成

$$a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_{n+1}}(i_1<i_2<\cdots<i_{n+1})$$

因$a_{i_k} \nleq_1 a_{i_{k+1}}$，而$i_k<i_{k+1}$，所以$a_{i_k} \nleq a_{i_{k+1}}$，故$a_{i_k}>a_{i_{k+1}}$，$k=1,2,\cdots,n$。于是便有：

$$a_{i_1}>a_{i_2}>\cdots>a_{i_{n+1}} 。$$

例 7 设R是实数集，令X为$[0,1]$到R的所有映射所构成的集合。若$f,g \in X$，定义：$(f,g)\in S \Leftrightarrow \forall x \in [0,1], f(x)-g(x) \ge 0$，

证明：（1）S是偏序关系；（2）S是全序关系吗?

分析：证明S是偏序关系，首先搞清S是定义在什么集合上，S中的元素是什么形式；然后再按偏序关系的定义分别证明S的自反性，反对称性，传递性；证明这三个性质，可以直接采用按定义方法证明。显然S是定义在以映射$f:[0,1]\to R$作为元素的集合上，因此，S中的序对是以映射作为元素的。

证明：（1）证明S是偏序关系。

自反性：$\forall f \in X$，则$f:[0,1]\to R$，$\forall x \in [0,1]$，都有$f(x)-f(x)=0$，即

$f(x)-f(x)\geq 0$，故$(f,f)\in S$，所以S是自反的。

反对称性：$\forall f,g\in X$，若$(f,g)\in S$且$(g,f)\in S$，则$\forall x\in[0,1]$，有

$f(x)-g(x)\geq 0$，　$g(x)-f(x)\geq 0$，即$f(x)\geq g(x)$，$g(x)\geq f(x)$，故

$f(x)=g(x)$，即$f=g$，从而S是反对称的。

传递性：$\forall f,g,h\in X$，若$(f,g)\in S$且$(g,h)\in S$，则$\forall x\in[0,1]$，有

$f(x)-g(x)\geq 0$，$g(x)-h(x)\geq 0$，即$f(x)\geq g(x)$，$g(x)\geq h(x)$，所以$f(x)\geq h(x)$，即$f(x)-h(x)\geq 0$，因此有$(f,g)\in S$，从而S是传递的。

综上可知：S是偏序关系。

（2）S不是全序关系。

例如：设$f(x)=x,g(x)=-x+1$，则$f(0)-g(0)=-1$，$g(1)-f(1)=-1$，故f与g是不可比较的，即S不是全序关系。

例 8 设$(A,\leq)$是偏序集，$\forall a\in A$，$f(a)=\{x|x\in A,x\leq a\}$，证明：$f:A\to 2^A$是一个单射，且当$a\leq b$时，有$f(a)\subseteq f(b)$。

证： 由f的定义，因$x\leq x$，有$x\in f(x)$。$\forall x,y\in A$，若$f(x)=f(y)$，则有$x\in f(x)=f(y)$，即$x\leq y$；

同理可证$y\leq x$。

由于偏序关系是反对称的，所以有$x=y$，于是f是单射。

当$a\leq b$时，$\forall x\in f(a)$，有$x\leq a$，由于偏序关系是传递的，有$x\leq b$，即$x\in f(b)$。于是$f(a)\subseteq f(b)$。

例 9 已知集合 A 和 B，其中 A$\neq\phi$，（B，≤）是偏序集，定义$B^A=\{f\mid f:A\to B\}$

上的二元关系如下：

$$fRg \Leftrightarrow f(x) \le g(x)，\quad \forall x \in A$$

1．证明：R 为 2^A 上的偏序关系。

2．给出 (B^A, R) 存在最大元的必要条件和最大元的一般形式。

证：1．（1）$\forall f \in B^A$ 及 $\forall x \in A$ 有 $f(x) \in B$，因为 $(B, \le)$ 是偏序集，所以“≤”是偏序关系，故“≤”具有自反性。所以 $f(x) \le f(x)$，即 $\forall x \in A$，$(f, f) \in R$。

（2）$\forall f, g \in B^A$，若 $(f, g) \in R$ 且 $(g, f) \in R$，则 $\forall x \in A$，有 $f(x), g(x) \in B$，并且 $f(x) \le g(x)$ 且 $g(x) \le f(x)$。因为（B，≤）是偏序集，所以“≤”具有反对称性，所以 $f(x) = g(x)$。由 x 的任意性可得 $f = g$，故 R 具有反对称性。

（3）$\forall f, g, h \in B^A$，若 $(f, g) \in R$ 且 $(g, h) \in R$，则 $\forall x \in A$ 有 $f(x), g(x), h(x) \in B$，并且 $f(x) \le g(x)$ 且 $g(x) \le h(x)$。因为（B，≤）是偏序集，所以“≤”具有传递性。所以 $f(x) \le h(x)$，由 x 的任意性可知 $(f, h) \in R$，所以 R 具有传递性。

由（1）（2）（3）可知，R 是 B^A 上的偏序关系。

2．由 R 是 B^A 上的偏序关系，则 (B^A, R) 就是偏序集。若 (B^A, R) 存在最大元，即 $\exists f \in B^A$，使得 $\forall g \in B^A$，都有 $(g, f) \in R, 则 \forall x \in A, 有 g(x) \le f(x)$。

因为 g 是任取的，所以 $f(x)$ 对任意选取的 x 都要“最大”，即 $\forall y \in B$，都要有 $y \in f(x)$，所以 (B^A, R) 存在最大元的必要条件是（B，≤）存在最大元。

假设（B，≤）存在最大元 b_o，设 (B^A, R) 的最大元为 f_o，则 $\forall a \in A$，有 $f_0(x) = b_0$。

第四章 无穷集合及其基数习题

P_{136} 1. 设 A 为由序列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

的所有项组成的集合，则是否市可数的？为什么？

解：因为序列是可以重复的，故

若 A 是由有限个数组成的集合，则 A 是有限的集合；

若 A 是由无限个数组成的集合，则 A 是可数的。

故本题 A 是至多可数的。

2. 证明：直线上互不相交的开区间的全体所构成的集合至多可数。

证：在每个开区间中取一个有理数，则这些有理数构成的集合是整个有理数集合 Q 的子集，因此是至多可数的。

3. 证明：单调函数的不连续点的集合至多可数。

证：设 A 是所有不连续点的集合，f 是一个单调函数，则 $\forall x_0 \in A, x_0$ 对应着一个区间 $(f(x_0-0), f(x+0))$，于是由上题便得到证明。

4. 任一可数集 A 的所有有限子集构成的集族是可数集合。

证：设 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}, B=\{a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ik}\}$, 则 $B \subseteq A$ 且 $|B| = k < \infty$。

令 $\mathrm{B} = \{B \mid B \subseteq A, |B| < \infty\}$，

设 $\varphi: A \to \{0,1\}$，则 φ 是 A 的子集的特征函数。

$\forall B \in \mathrm{B}, \varphi(B) =$ ｛0，1 的有穷序列｝，即 $\forall a_i \in A$，

若 $a_i \in B$，则对应 1；若 $a_i \notin B$ 则对应 0。于是

$\forall B \in \mathrm{B}, \varphi(B)$ 就对应着一个由 0，1 组成的有限序列 0，1，1，0，⋯，0，1。此序列对应着一个二进制小数，而此小数是有理数。于是，可数集 A 的所有有限子集 B 对应着有理数的一个子集。

又 $\forall B_1, B_2 \in \mathrm{B}, B_1 \neq B_2, B_1, B_2$ 对应的小数也不同，故 φ 是单射。而可数集 A 的所有有限子集 B 是无穷的，故 B 是可数的。

5．判断下列命题之真伪：

(1) 若 $f: X \to Y$ 且 f 是满射，则只要 X 是可数的，那么 Y 是至多可数的；

(2) 若 $f: X \to Y$ 且 f 是单射，那么只要 Y 是可数的，则 X 也是可数的；

(3) 可数集在任一映射下的像也是可数的；

答案：对，错，错。

7．设 A 是有限集， B 是可数集，证明： $B^A = \{f \mid f: A \to B\}$ 是可数的。

证：由第四题可得。

8. 设 Σ 为一个有限字母表，Σ 上所有字（包括空字）之集记为 Σ^*。证明 Σ^* 是可数集

证 1：设有限字母 Σ 上所有字（包括空字 ε）所形成的集 Σ^*，则 Σ^* 是可数的。

A_1＝{长度为 1 的字符串}

A_2＝{长度为 2 的字符串}

⋮　　　⋮

A_n＝{长度为 n 的字符串}

⋮　　　⋮

因为 A_i 中每个长度都是有限的，而 $\Sigma^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} Ai$，故 Σ^* 是至多可数的。又 Σ^* 显然是无穷的，故 Σ^* 是可数的。

证 2：不妨假设 $\Sigma = \{a, b, c\}$ **（令 $\Sigma = \{0,1\}$ 也是可以）**，则可按字典序排序为：

$\varepsilon, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, \cdots, aaa, aab, \cdots$。由于 Σ^* 的全部元素可以排成无重复项的无穷序列，故 Σ^* 是可数的。

2.4 习题

P_{142} 2. 找一个初等可数 $f(x)$，使得它是 $(0,1)$ 到实数 R 的一一对应。

解： $Ctgx$，或 tgx，或 $tg(x - \frac{\pi}{2})$

3. 试给出一个具体的函数，使得它是从 $(0,1)$ 到 $[0,1]$ 的一一对应。

证： $(0,1)$ 中包含一个可数子集 $A=\{\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\cdots\}$ 可数。

$A_1=A\bigcup\{0,1\}=\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\cdots\}$——可数的，故 $A\sim A_1$。

令 $\varphi:(0,1)\to[0,1],\forall x\in(0,1)$

$$\varphi(x)=\begin{cases} x & \text{当} x \bar{\in} A \\ 0 & \text{当} x=\frac{1}{2} \\ 1 & \text{当} x=\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2^{i-2}} & \text{当} x=\frac{1}{2^i}, i\ge 3 \end{cases}$$

$\varphi(x)$ 即为所求。

4. 证明：若 A 可数，则 2^A 不可数。（用对角线方法）。

证： A 可数，则令 $A=\{1,2,3,\cdots\}$。

假设 2^A 可数，则 A 的子集（即 2^A 的元素）是可数的，故 2^A 中元素可排成一个无重复项的无穷序列：

$$A_1,A_2,\cdots,A_n\cdots$$

而 $2^A\sim Ch(A)=\{f\,|\,f:A\to\{0,1\}\}$，于是特征函 $Ch(A)$ 可数，即 $Ch(A)$ 可写成下列无穷序列形式：

$$f_1,f_2,\cdots,f_n\cdots$$

$$\begin{array}{l} f_1:a_{11}a_{12}a_{13}\cdots \\ f_2:a_{21}a_{22}a_{23}\cdots \\ f_3:a_{31}a_{32}a_{33}\cdots \\ \vdots\quad\ \vdots\quad\ \vdots \\ f_n:a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots \\ \vdots\quad\ \vdots\quad\ \vdots \end{array}$$

其中 $a_{ij}=0$ 或 $1, j=1,2,3,\cdots$。

造一个特征函数 β。令 $\beta=\{b_i\}_1^\infty$

$$b_1 = \begin{cases} 1 & 若 a_{11} = 0 \\ 0 & 若 a_{11} = 1 \end{cases};$$

$$b_2 = \begin{cases} 1 & 若 a_{22} = 0 \\ 0 & 若 a_{22} = 1 \end{cases};$$

$$\vdots$$

$$b_n = \begin{cases} 1 & 若 a_{nn} = 0 \\ 0 & 若 a_{nn} = 1 \end{cases}$$

$$\vdots$$

则 $\beta \neq f_1, f_2, f_3, \cdots, f_n, \cdots$，但 β 确实是 A 到 $\{0,1\}$ 的一个映射，即 β 是 A 的子集的特征函数，矛盾。故 2^A 不可数。

例 8 设 G 是一个 $p(p\geq 3)$ 个顶点的连通图。u 和 v 是 G 的两个不邻接的顶点,并且 $\deg u+\deg v\geq p$ 。

证明：G 是哈密顿图 $\Leftrightarrow G+uv$ 是哈密顿图。

证明： $\Rightarrow$ 显然成立。

$\Leftarrow$ 假设 G 不是哈密顿图，则由题意知，在 G 中必有一条从 u 到 v 的哈密顿路。不妨设此路为 $uv_2v_3\cdots v_{p-1}v$，令 $\deg u=k,\deg v=l$，则在 G 中与 u 邻接的顶点为 $u_{i_1},u_{i_2},\cdots,u_{i_k}$，其中 $2=i_1<i_2<\cdots<i_k\leq p-1$ 。此时顶点 $u_{i_r-1}(r=2,3,\cdots,k)$ 不能与顶点 v 邻接。否则 G 有哈密顿回路 $uv_2\cdots v_{i_r-1}vv_{p-1}\cdots v_{i_r}u$，因此 v 至少与 $u,v_2,\cdots,v_{p-1}$ 中的 k 个顶点不邻接。于是 $l\leq p-1-k$，从而 $k+l\leq p-1$，即 $\deg u+\deg v\leq p-1$，与题设矛盾。故假设不成立，因此 G 是哈密顿图。

例 9 设 $G=(V,E)$ 是连通图且顶点数为 p，最小度数为 δ 。若 $p>2\delta$，则 G 中有一长至少为 2δ 的路。

证: 假设 G 中的最长路为 L：$L=v_0v_1\cdots v_l$,其长度为 $l<2\delta$ 。因为 $\deg v_0\geq\delta$，$\deg v_l\geq\delta$，所以存在 $0\leq i\leq l-1$，使 v_0v_{i+1} 与 v_iv_l 在 G 中相邻，得一长为 $l+1$ 的

回路：$v_0v_1\cdots v_iv_lv_{l-1}\cdots v_{i+1}v_0$ 。

又因为 G 连通，且 G 的顶点数 $p>2\delta$，故存在 $v\neq v_i(0\leq i\leq l)$ 与回路上 $v_j(0\leq j\leq l)$ 相邻,则把回路在 v_j 处断开,并把 v 连入回路中,得到一条长为 $l+1$ 的路，矛盾。

所以 G 中有一长至少为 2δ 的路。

例 10 设 G 为有 p 个顶点的简单无向图，证明：

（1）若 G 的边数 $q=(p-1)\cdot(p-2)/2+2$，则 G 为哈密顿图；

（2）若 G 的边数 $q=(p-1)\cdot(p-2)/2+1$，则 G 是否一定为哈密顿图?

证:（1）首先证明 G 中任意两个不相邻的顶点的度数之和均大于等于 p，否则存在 v_i,v_j 不相邻，且 $\deg(v_i)+\deg(v_j)\leq p-1$ 。

令 $V_1=\{v_i,v_j\}$，$G_1=G\setminus V_1$，则 G_1 是有 $p-2$ 个顶点图，它的边数 q 应满足：

$q \geq (p-1)(p-2)/2+2-(p-1)=(p-2)(p-3)/2+1$，

这与 G_1 是有 $p-2$ 个顶点的简单图，矛盾。

所以 G 中任意两个互不相邻的顶点的度数之和均大于等于 p 。

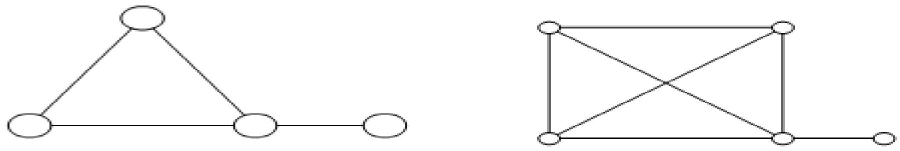
根据定理可知，G 是哈密顿图。

（2）若 G 的边数 $q=(p-1)\cdot(p-2)/2+1$，则 G 不一定是哈密顿图。

例如：如图 7 所示的两个图都不是哈密顿图。

例 11 证明：完全图 K_9 中至少存在彼此无公共边的两条哈密顿回路和一条哈密顿路？

证：在 K_9 中，$\forall v \in V, \deg v = 8 \geq p/2$，由定理可知，必有一条哈密顿回路 C_1；令 G_1 为 K_9 中删除 C_1 中全部边之后的图，则 G_1 中每个顶点的度均为 $\deg v = 6 \geq p/2$，故 G_1 仍为哈密顿图，因而存在 G_1 中的哈密顿回路 C_2，显然 C_1 与 C_2 无公共边。再设 G_2 为 G_1 中删除 C_2 中的全部边后所得图，则 G_2 每个顶点的度均为 $\deg v = 4$ 。又由定理可知 G_2 为半哈密顿图，因而 G_2 中存在哈密顿路。设 L 为 G_2 中的一条哈密顿路，显然 C_1, C_2, L 无公共边。



例 12 已知 9 个人 $v_1, v_2, \cdots, v_9$，其中 v_1 和两个人握过手，v_2, v_3, v_4, v_5 各和 3 个人握过手，v_6 和 4 个人握过手，v_7, v_8 各和 5 个人握过手，v_9 和 6 个人握过手。证明这 9 个人中一定可以找出 3 个人互相握过手。

证：设 $v_1, v_2, \cdots, v_9$ 为图 G 的 9 个顶点，v_i与v_j 握过手就连一条边 v_iv_j，于是得到图 G 。根据题意有：

$$\deg(v_1)=2, \deg(v_2)=\deg(v_3)=\deg(v_4)=\deg(v_5)=3,$$

$$\deg(v_6)=4, \deg(v_7)=\deg(v_8)=5, \deg(v_9)=6。$$

与 v_9 相邻的点有 6 个，其中必有一点 v_k 为 v_6, v_7, v_8 之一，因此有 $\deg(v_k) \geq 4$ 。

与 v_9 相邻的其余 5 个点中必存在一点 v_k 与 v_k 相邻如图 4 所示，否则有 $\deg(v_k)\le 8-5=3$，矛盾。由此 v_9,v_k,v_k 三个人互相握过手。

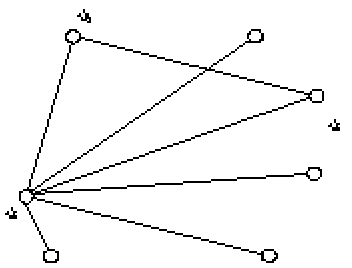


图 5

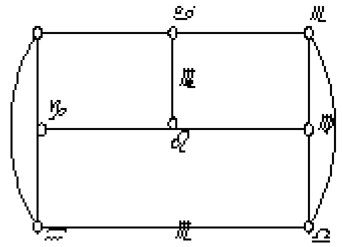


图 6

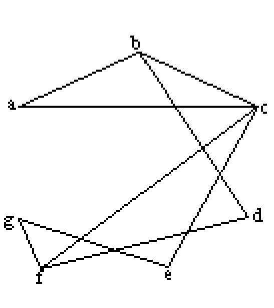
图 7

例 13 某次会议有 20 人参加，其中每个人都至少有 10 个朋友，这 20 人围一圆桌入席，要想使与每个人相邻的两位都是朋友是否可能？根据什么？

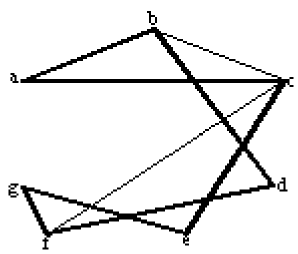
例 14 图 G 是哈密顿图。试证明：若图中的哈密顿圈中含边 e1，则它一定同时也含 e2。

例 15 已知 a,b,c,d,e,f,g 7 个人中，a 会讲英语；b 会讲英语和汉语；c 会讲英语、意大利语和俄语；d 会讲汉语和日语；e 会讲意大利语和德语；f 会讲俄语、日语和法语；g 会讲德语和法语。能否将他们的座位安排在圆桌旁，使得每个人都能与他身边的人交谈？

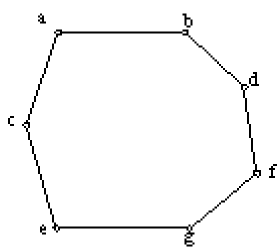
证：用 a,b,c,d,e,f,g 7 个顶点代表 7 个人，若两人能交谈（会讲同一种语言），就在代表他们的顶点之间连一条无向边，所得无向图如图 4$^{(a)}$ 所示，此图中存在哈密顿回路：$abdfgeca$（如图 4$^{(b)}$ 所示），于是按图 4$^{(c)}$ 所示的顺序安排座位即可。



(a)



(b)



(c)

例 16 设$G=(V,E)$是$p(p\geq 3)$个顶点的简单无向图,设G中最长的路L的长度为$l\ (l\geq 2)$，起点与终点分别为u，v，而且$\deg u+\deg v\geq p$。证明：G中必有与L不完全相同但长度也为l的路。

证：设图G的最长的路L为：$uv_1\cdots v_{l-1}v$，其长度为l。因L为最长的路，所以与u，v相邻的顶点必在L上。

若u和v相邻，则构成一个回路$uv_1\cdots v_{l-1}vu$，回路长为$l+1$；

若u和v不相邻，设与u相邻的顶点为$v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_r}$，其中$1=v_{i_1}<v_{i_2}<\cdots<v_{i_r}<l-1$，则$v$必与某个$v_{i_j-1}(2\leq j\leq r)$邻接。否则，$v$至多与最长路上其余的顶点邻接，所以

$$\deg u+\deg v\leq r+(p-1-r)<p$$

这是不可能的。于是$uv_{i_j}v_{i_j+1}\cdots v_{l-1}vv_{i_j-1}v_{i_j-2}\cdots v_1u$是$G$中的一个回路，此回路长度为$l+1$。去掉这个回路的任意一条边，便得到一条相应的最长的路，所以对于这个回路有$l+1$个不同的最长的路且$l\geq 2$。

故G中必有与L不完全相同，但长度也为l的路。

例5 证明：在一个连通图中，两条最长的路有一个公共的顶点。

证：设L_1与L_2是图中的两条最长的路，$L_1:v_1v_2\cdots v_i\cdots v_n$，$L_2:u_1u_2\cdots u_j\cdots u_n$。

假设L_1与L_2没有公共顶点，因为G是连通的，所以L_1与L_2之间必有一条路P连接且$|P|\geq 1$。令P与L_1上的v_i连接，与L_2上的u_j连接，则

若$i\geq j$，则路$v_1v_2\cdots v_iPu_ju_{j+1}\cdots u_m$比$L_2$长，矛盾；

若$i\leq j$，则路$u_1u_2\cdots u_jPv_iv_{i+1}\cdots v_n$比$L_1$长，矛盾。
故假设不成立，即两条最长的路必有公共顶点。

例 6 设 G 是图，证明：若 δ(G)≥2，则 G 中包含长至少是 δ(G)+1 的圈。

例 7 设 G 为 p 阶简单无向图，$p>2$ 且 p 为奇数，G 和 G 的补图 G^c 中度数为奇数的顶点的个数是否一定相等？试证明你的结论。

解：一定相等。

因为 $p>2$ 为奇数，则对于奇数个顶点的 p 阶无向完全图，每个顶点的度数必为偶数。若 G 的奇度数顶点为 p_1 个，则对应补图 G^c 在这 p_1 个顶点的度数必为（偶数－奇数）＝奇数。另外，对于 G 中度数为偶数的顶点，其在补图 G^c 中，这些顶点的度数仍为（偶数－偶数）＝偶数。所以，G 中度数为奇数的顶点个数与 G^c 中度数为奇数的顶点个数相同。

例 8 在一个有 n 个人的宴会上，每个人至少有 m 个朋友(2≤m≤n)。试证：有不少于 m+1 个人，使得他们按某种方法坐在一张圆桌旁，使得他们按着某种方法坐在一张圆桌旁，每人的左、右均是他的朋友。

例 9 一个图 G 是连通的，当且仅当将 V 划分成两个非空子集 V1 和 V2 时，G 总有一条联结 V1 的一个顶点与 V2 的一个顶点的边。

例 10 设 G 是一个(p,q)图，证明：

(1)若 q≥p，则 G 中有圈；(2)若 q>p+4，则 G 包含两个边不重的圈；

例 11 图 G 的围长是 G 的最短圈的长；G 中若没圈，则定义 G 的围长为无穷大。证明：围长为 4 的 k-正则图至少有 2k 个顶点，而且(同构意义下)在 2k 个顶点上恰好有一个这样的图。(Kk,k)

例 5 证明：r(3,4)=9。即证明：任何 9 个人的团体里，或有 3 个人互相认识，或有 4 个互相不认识。但 8 个人的团体里，上述性质未必成立。

证：这就是要证任何 9 个顶点的图 G 中，或 G 中包含 K_3，或 G 中包含 K_4^C。并且有的 8 个顶点的图 H，H 中既不包含 K_3 也不包含 K_4^C，图 2 中给出了这样的一个图。

设 $G=(V,E)$，$|V|=9$。若 $\exists v\in V, \deg v\geq 4$，则 G 中有 4 个顶点 v_1,v_2,v_3,v_4 在

G 中与 v 邻接。这时若有 $i \neq j$ ， $v_i v_j \in E$ ，则 $v v_i v_j v$ 是 G 中的一个 K_3 ；否则 v_1, v_2, v_3, v_4 是 G 的互不相邻接的 4 个顶点，所以 G 包含 K_4^C 。

若 $\forall v \in V, \deg v \leq 3$ ，则在 G^c 中每个顶点的度 ≥ 5 。但是 9 是奇数， G^c 中奇度数顶点的个数必为偶数，所以有一个偶度顶点 $u, \deg u \geq 6$ 。 G^c 中与 u 邻接的 6 个顶点导出 G^c 中的 6 个顶点的子图。由定理 1 知 G^c 有 K_3 ，它与 u 形成了 G^c 中的 K_4 ，即 G 中的 K_4^C 或 G^c 中含 K_3^C 即 G 包含 K_3 。

因此， $r(3,4) = 9$ 。

例 3 证明：恰有两个顶点度数为 1 的树必为一条通路。

证：设 T 是一棵具有两个顶点度数为 1 的 (p,q) 树，则 $q=p-1$ 且 $\sum_{i=1}^{p}\deg(v_i)=2q=2(p-1)$。

又 T 除两个顶点度数为 1 外，其他顶点度均大于等于 2，故

$$\sum_{i=1}^{p}\deg(v_i)=2+\sum_{i=1}^{p-2}\deg(v_i)=2(p-1)$$，即

$$\sum_{i=1}^{p-2}\deg(v_i)=2(p-2)$$。

因此 $p-2$ 个分支点的度数都恰为 2，即 T 为一条通路。

23．设 $d_1,d_2,\cdots,d_p$ 是 p 个正整数，$p\geq 2$，且 $\sum_{i=1}^{p}d_i=2p-2$。证明存在一棵顶点度数为 $d_1,d_2,\cdots,d_p$ 的树。

．**证**：对顶点 p 进行归纳证明。

当 $p=2$ 时，$d_1+d_2=2\cdot 2-2=2$，则 $d_1=d_2=1$，故以 d_1,d_2 为度数的树存在，即为一条边。

假设对任意 $p-1$ 个正整数 $d_1,d_2,\cdots,d_{p-1}$，只要 $\sum_{i=1}^{p-1}d_i=2(p-1)-2$，则存在一棵顶点度数为 $d_1,d_2,\cdots,d_{p-1}$ 的树。

对 p 个正整数 $d_1',d_2',\cdots,d_p'$，有 $\sum_{i=1}^{p}d_i'=2p-2$，则 $d_1',d_2',\cdots,d_p'$ 中必有一个数为 1，必有一个数大于等于 2；不妨设 $d_1'=1,d_p'\geq 2$，因此对 $p-1$ 个正整数 $d_2',d_3',\cdots,d_{p-1}',d_p'-1$，有 $\sum_{i=2}^{p-1}d_i'+(d_p'-1)=2(p-1)-2$，故存在一棵顶点度数为 $d_2',d_3',\cdots,d_{p-1}',d_p'-1$ 的树 T'。设 T' 中 u 的度数为 $d_p'-1$，在 T' 中增加一个顶点 v 及边 $\{u,v\}$，得到一个图 T，则 T 为树。又 T 的顶点度数为 $d_1',d_2',\cdots,d_p'$，故由归纳法知原命题成立。

3. 某镇有 1000 人，每天他们中的每个人把昨天听到的消息告诉他认识的人。已知任何消息，只要镇上有人知道，都会经这种方式逐渐地为全镇上所有人知道。试证：可选出 90 个居民代表使得只要同时向他们传达某一消息，经 10 天就会为全镇居民知道。

分析 就是要给出一个把 1000 个点的连通图分成 90 个子图的方法，使每个点都在其中一个子图中，且每个子图的最长的链的长度不超过 10．这样，只要把每个子图的最长链的一个端点选为“代表”，就能完成这个任务．

证明 用 1000 个点代表 1000 个居民，两名居民相识，则在两点之间连一线，如此可得一图，依条件，这个图是连通图．若图中有圈，则我们去掉圈中的一边使圈被破坏而不影响图的连通性，经过有限次这种手续，可得树 T_{1000}．

在 T_{1000} 中取一条主干 $v_1v_2\cdots v_n$，取 v_{11} 作为 1 个代表，把边 $v_{11}v_{12}$ 去掉，则此图分成了 2 个连通分支，在含有 v_1 的一棵树中，每点到 v_{11} 的路的长度都不超过 10，否则 $v_1v_2\cdots v_n$ 在 T_{1000} 中不是主干，故 v_{11} 知道的消息在 10 天内可以传遍它所在分支的点集所代表的居民；余下另一分支再取其主干，又按此法得出第二个代表 v_{22}，依此类推，则 T_{1000} 分割成若干棵树：同样，在含 v_{22}，v_{33}，…的树中，v_{22}，v_{33}，…知道的消息在 10 天内都能传遍树的点集所代表的居民；由于 $1000=11\times89+21$，且每一个小分支树可能还有分支，从而其顶点数可能超过 11，所以这样分法，至多分出 89 棵树并余下一个至多有 21 个点的树，该树的链长≤20，取此链的中心 v，则该链上每个点到 v 的距离都≤10．现在取 v_{11}，v_{22}，v_{33}，…为代表，最后一棵树取其中心 v 为第 90 名代表，只要将消息告诉这些代表，则在 10 天之后，每个分支树的点集所表示的居民全都知道这个消息，问题已获解决．

说明 注意每次在最长链上截去一段后，余下的链的主干不一定就是原来主干的截剩部分，所以每次都要重新确定主干．