第 5 章部分课后习题作业参考

3.

（1） $\vdash (A \to \exists vB) \to \exists v(A \to B)$

只需证 $A \to \neg\forall v\neg B \vdash \neg\forall v\neg(A \to B)$

1) $A \to \neg\forall v\neg B; \forall v\neg(A \to B) \vdash \forall v\neg(A \to B)$ 前提

2) $\forall v\neg(A \to B) \to \neg(A \to B)$ 定理

3) $A \to \neg\forall v\neg B; \forall v\neg(A \to B) \vdash \neg(A \to B)$ 1)2） r_{mp}

4) $\neg A \to (A \to B)$ 定理

5) $\neg(A \to B) \to A$ 4)逆否

6） $A \to \neg\forall v\neg B; \forall v\neg(A \to B) \vdash A$ 3)5） r_{mp}

7） $A \to \neg\forall v\neg B; \forall v\neg(A \to B) \vdash A \to \neg\forall v\neg B$ 前提

8） $A \to \neg\forall v\neg B; \forall v\neg(A \to B) \vdash \neg\forall v\neg B$ 6)7） r_{mp}

9) $B \to (A \to B)$ 公理

10) $\neg(A \to B) \to \neg B$ 9)逆否

11） $A \to \neg\forall v\neg B; \forall v\neg(A \to B) \vdash \neg B$ 3)10） r_{mp}

12） $A \to \neg\forall v\neg B; \forall v\neg(A \to B) \vdash \forall v\neg B$ 11） 全称推广（v 在 A 中无自由出现）

13) $A \to \neg\forall v\neg B \vdash \neg\forall v\neg(A \to B)$，8)12)及反证法定理

//

(2) $\vdash \exists v(A \to B) \to (A \to \exists vB)$

证明：根据前件交换只需证 $\vdash A \to (\exists v(A \to B) \to \exists vB)$

只需证 $\vdash A \to (\neg\forall v\neg(A \to B) \to \neg\forall v\neg B)$

1） $(A \to B) \to (A \to B)$ 定理

2） $A \to ((A \to B) \to B)$ 1）前件交换

3）$((A \to B) \to B) \to (\neg B \to \neg(A \to B))$ 定理

4）$A \to (\neg B \to \neg(A \to B)$ 2）3）传递

5）$\forall v(A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$ 4）全称推广//注意使用条件

6）$\forall vA \to \forall v(\neg B \to \neg(A \to B))$ 5）+公理+r_{mp}

7）$A \to \forall vA$ 公理（v 在 A 无自由出现）

8）$A \to \forall v(\neg B \to \neg(A \to B))$ 7）6）传递

9）$\forall v(\neg B \to \neg(A \to B)) \to (\forall v\neg B \to \forall v\neg(A \to B))$ 公理

10）$A \to (\forall v\neg B \to \forall v\neg(A \to B))$ 8）9）传递

11）$(\forall v\neg B \to \forall v\neg(A \to B)) \to (\neg\forall v\neg(A \to B) \to \neg\forall v\neg B)$ 定理

12）$A \to (\neg\forall v\neg(A \to B) \to \neg\forall v\neg B)$ 10）11）传递

即 $A \to (\exists v(A \to B) \to \exists vB)$

//////////////////////////////////

(3) $\vdash (\forall vB \to A) \to \exists v(B \to A)_1$

证明：只需证 $\vdash (\neg A \to \exists v\neg B) \to \exists v(\neg A \to \neg B)$ //替换原理，等价变换

而由上述题 3.（1）知此结论成立。

当然也可以直接用（1）中的方法来证明。

//

(4) $\vdash \exists v(B \to A) \to (\forall vB \to A)$

证明：只需证 $\vdash \exists v(\neg A \to \neg B) \to (\neg A \to \exists v\neg B)$ //同上

则根据上题 3.（2）可知成立。

//

(5) 若 $\vdash A \to B$，则 $\vdash \forall vA \to \forall vB$

证明：

1）$A \to B$ 已证定理

2）$\forall v(A \to B)$，1）全称推广

3）$\forall v(A \to B) \to (\forall vA \to \forall vB)$ 公理

4）$\forall vA \to \forall vB$ 2）3）r_{mp}

（6）$A \to B \models \forall uA \to \forall uB$ 未必成立，从而 $A \to B \vdash \forall uA \to \forall uB$ 不真。

证明：举例说明该逻辑蕴涵不一定成立：
令个体域 $D = N$
$A: u < u+1$，
$B: u < 100$
则对 $u = 10$ 的指派下，公式 $A \to B$ 为真，

但此时公式 $\forall uA \to \forall uB$ 为假，故 $A \to B \models \forall uA \to \forall uB$ 不成立。

当然也就有 $A \to B \vdash \forall uA \to \forall uB$ 不成立，否则根据 FC 合理性有：

$A \to B \models \forall uA \to \forall uB$ 成立，矛盾。

//
4.

(1) $\forall x(A \to B) \dashv\vdash A \to \forall xB$，且 x 在 A 中无自由出现。

证明：先证 $\forall x(A \to B) \vdash A \to \forall xB$

只需证： $\forall x(A \to B), A \vdash \forall xB$

1) $\forall x(A \to B), A \vdash \forall x(A \to B)$ 前提

2） $\forall x(A \to B) \to (A \to B)$ 定理

3） $\forall x(A \to B), A \vdash A \to B$ 1)2） r_{mp}

4） $\forall x(A \to B), A \vdash A$ 前提

5） $\forall x(A \to B), A \vdash B$ 3)4） r_{mp}

6） $\forall x(A \to B), A \vdash \forall vB$， 5)全称推广

7） $\forall x(A \to B) \vdash A \to \forall xB$

再证 $A \to \forall xB \vdash \forall x(A \to B)$

1) $\forall xB \to B$ 定理

2） $A \to (\forall xB \to B)$ 1)加前件

3) $(A \to \forall xB) \to (A \to B)$ 2)+公理

4) $A \to \forall xB \vdash A \to B$ 3)演绎定理

5) $A\to\forall xB\vdash\forall x(A\to B)$，全称推广

//

(2) $\forall x(A\to B)\vdash\dashv\exists xA\to B$，且 x 在 B 中无自由出现。

证明：只需证 $\forall x(\neg B\to\neg A)\vdash\dashv\neg B\to\forall x\neg A$，由于 x 在 $\neg B$ 中无自由出现，故直接由 4.（1）题的结论即可。

///////////////////////////////////////

(3) $\forall x(A\wedge B)\vdash\dashv\forall xA\wedge\forall xB$

只需证： $\forall x\neg(A\to\neg B)\vdash\dashv\neg(\forall xA\to\neg\forall xB)$

先证 $\forall x\neg(A\to\neg B)\vdash\neg(\forall xA\to\neg\forall xB)$ //反证法

1） $\forall x\neg(A\to\neg B)$， $\forall xA\to\neg\forall xB\vdash\forall x\neg(A\to\neg B)$ 前提

2) $\forall x\neg(A\to\neg B)\to\neg(A\to\neg B)$ 定理

3) $\forall x\neg(A\to\neg B)$， $\forall xA\to\neg\forall xB\vdash\neg(A\to\neg B)$

4) $\neg A\to(A\to\neg B)$ 定理

$\neg B\to(A\to\neg B)$ 公理

5) $\neg(A\to\neg B)\to A$

$\neg(A\to\neg B)\to B$ 4)+逆否

6) $\forall x\neg(A\to\neg B)$， $\forall xA\to\neg\forall xB\vdash A$

$\forall x\neg(A\to\neg B)$， $\forall xA\to\neg\forall xB\vdash\neg B$ 3)5) r_{mp}

7） $\forall x\neg(A\to\neg B)$， $\forall xA\to\neg\forall xB\vdash\forall xA$

$\forall x\neg(A\to\neg B)$， $\forall xA\to\neg\forall xB\vdash\forall x\neg B$ 6)全称推广

8) $\forall x\neg(A\to\neg B)$， $\forall xA\to\neg\forall xB\vdash\forall xA\to\neg\forall xB$ 前提

9） $\forall x\neg(A\to\neg B)$， $\forall xA\to\neg\forall xB\vdash\neg\forall xB$ 7）8） r_{mp}

10) $\forall x\neg(A\to\neg B)\vdash\neg(\forall xA\to\neg\forall xB)$ 7)9)反证法

再证 $\neg(\forall xA\to\neg\forall xB)\vdash\forall x\neg(A\to\neg B)$

1） $\neg(\forall xA \to \neg\forall xB) \vdash \neg(\forall xA \to \neg\forall xB)$ 前提

2） $\neg\forall xA \to (\forall xA \to \neg\forall xB)$ 定理

$\neg\forall xB \to (\forall xA \to \neg\forall xB)$ 公理

3） $\neg(\forall xA \to \neg\forall xB) \to \forall xA$

$\neg(\forall xA \to \neg\forall xB) \to \forall xB$ 2)+逆否

4） $\neg(\forall xA \to \neg\forall xB) \vdash \forall xA$

$\neg(\forall xA \to \neg\forall xB) \vdash \forall xB$ 1)3） r_{mp}

5） $\forall xA \to A$

$\forall xB \to B$ 定理

6) $\neg(\forall xA \to \neg\forall xB) \vdash A$

$\neg(\forall xA \to \neg\forall xB) \vdash B$ 4)5） r_{mp}

7） $A \to (B \to \neg(A \to \neg B))$ 定理

//此结论证明较简单参见教材 3.1.18。//

8） $\neg(\forall xA \to \neg\forall xB) \vdash \neg(A \to \neg B)$ 6）7） r_{mp}

9） $\neg(\forall xA \to \neg\forall xB) \vdash \forall x\neg(A \to \neg B)$ 8）全称推广

//注：这里也可以不调用 3.1.18：

一是证 $\neg(\forall xA \to \neg\forall xB) \vdash \neg(A \to \neg B)$ 的时候用反证法：

$\neg(\forall xA \to \neg\forall xB),\ (A \to \neg B) \vdash$ 互反，此结论由上述第 6）7）步即可看出。

二是转化为证 $\vdash \neg(\forall xA \to \neg\forall xB) \to \neg(A \to \neg B)$，逆否变形即可。//

//

(4)

由(3)题结论有：$\forall x(\neg A \wedge \neg B) \dashv\vdash \forall x\neg A \wedge \forall x\neg B$

从而 $\neg\forall x(\neg A \wedge \neg B) \dashv\vdash \neg(\forall x\neg A \wedge \forall x\neg B)$

即 $\exists x\neg(\neg A \wedge \neg B) \dashv\vdash \neg\forall x\neg A \vee \neg\forall x\neg B)$ //替换原理

即 $\exists x(A \vee B) \dashv\vdash \exists xA \vee \exists xB$

//////////////////////////////

(5)

证明：$P(Oscar) \veebar G(Oscar)$

$$= (P(Oscar) \vee G(Oscar)) \wedge (\neg P(Oscar) \vee \neg G(Oscar))$$

记 $\tau = \{P(Sam), G(Clyde), L(Clyde, Oscar),$

$P(Oscar) \vee G(Oscar), \neg P(Oscar) \vee \neg G(Oscar), L(Oscar, Sam)$

//因为 $A \wedge B \to A$，$A \wedge B \to B$（已证定理），这里为了方便就直接拆开用了//

需证 $\tau \vdash \exists x \exists y (G(x) \wedge P(y) \wedge L(x, y))$，考虑反证法：

记 $\tau' = \tau \cup \{\forall x \forall y (\neg G(x) \vee \neg P(y) \vee \neg L(x, y))\}$

$$= \tau \cup \{\forall x \forall y (L(x, y) \to (G(x) \to \neg P(y)))\}$$

$$= \tau; \forall x \forall y (L(x, y) \to (G(x) \to \neg P(y)))$$

1) $\tau' \vdash \forall x \forall y (L(x, y) \to (G(x) \to \neg P(y)))$

2) $\tau' \vdash L(Clyde, Oscar) \to (G(Clyde) \to \neg P(Oscar)))$　1）+全称消去的公理+r_{mp}

3) $\tau' \vdash L(Clyde, Oscar)$

4) $\tau' \vdash G(Clyde) \to \neg P(Oscar)$

5) $\tau' \vdash G(Clyde)$

6) $\tau' \vdash \neg P(Oscar)$

7) $\tau' \vdash L(Oscar, Sam) \to (G(Oscar) \to \neg P(Sam)))$　1）+全称消去的公理+r_{mp}

8) $\tau' \vdash L(Oscar, Sam)$

9) $\tau' \vdash G(Oscar) \to \neg P(Sam)$

10) $\tau' \vdash P(Sam) \to \neg G(Oscar)$

11) $\tau' \vdash P(Sam)$

12) $\tau' \vdash \neg G(Oscar)$

13) $\tau' \vdash P(Oscar) \vee G(Oscar)$

14) $\tau' \vdash \neg G(Oscar) \to P(Oscar)$

15) $\tau' \vdash P(Oscar)$

16) $\tau \vdash \neg\forall x \forall y(L(x,y) \to (G(x) \to \neg P(y)))$，6)15)反证法

即 $\tau \vdash \exists x \exists y(G(x) \wedge P(y) \wedge L(x,y))$

//

(6)

证明：$E(x) \veebar O(x) = (E(x) \vee O(x)) \wedge (\neg E(x) \vee \neg O(x))$

记 $\tau = \{\forall x(N(x) \to (E(x) \vee O(x)) \wedge (\neg E(x) \vee \neg O(x)))$，

$\forall x(N(x) \to (E(x) \leftrightarrow G(x)))$，$\neg\forall x(N(x) \to G(x))\}$

需证 $\tau \vdash \exists x(N(x) \wedge O(x))$，采用反证法

1) $\tau; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)); N(x) \vdash \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x))$

2) $\tau; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)); N(x) \vdash \neg N(x) \vee \neg O(x)$　1）+全称消去的公理+r_{mp}

3) $\tau; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)); N(x) \vdash N(x) \to \neg O(x)$

4) $\tau; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)); N(x) \vdash N(x)$

5) $\tau; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)); N(x) \vdash \neg O(x)$

6) $\tau; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)); N(x) \vdash \forall x(N(x) \to E(x) \veebar O(x))$

7) $\tau; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)); N(x) \vdash (N(x) \to E(x) \veebar O(x)$

8) $\tau; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)); N(x) \vdash E(x) \veebar O(x)$　4）7）r_{mp}

9) $\tau; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)); N(x) \vdash \neg O(x) \to E(x)$

10) $\tau; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)); N(x) \vdash E(x)$

11) $\tau; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)); N(x) \vdash \forall x(N(x) \to (G(x) \leftrightarrow E(x)))$

12) $\tau; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)); N(x) \vdash G(x) \leftrightarrow E(x)$

13) $\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x));N(x)\vdash E(x)\to G(x)$

14) $\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x));N(x)\vdash G(x)$

15) $\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x))\vdash N(x)\to G(x)$

16) $\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x))\vdash\forall x(N(x)\to G(x))$

17) $\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x))\vdash\neg\forall x(N(x)\to G(x))$

18) $\tau\vdash\neg\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x))$

即 $\tau\vdash\exists x(N(x)\wedge O(x))$

////////////////////////////////
(7)
证：根据全称推广，只需证：

$\exists x[P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y))]$，$\forall x\forall y[P(x)\to(Q(y)\to\neg L(x,y))]\vdash D(y)\to\neg Q(y)$

//根据 $(A\wedge B\to C)\dashv\vdash(A\to(B\to C))$ 及替换原理，这里对第 2 个前提条件做个等价变换，当然也可以在证明里做等价变换//
下面记此处的前提为 τ.

1） $\tau\vdash\exists x[P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y))]$，前提

2） $\tau,P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y))\vdash\forall x\forall y[P(x)\to(Q(y)\to\neg L(x,y))]$

3） $\tau,P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y))\vdash P(x)\to(Q(y)\to\neg L(x,y))$，

由 2)+定理+rmp

4) $\tau,P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y))\vdash P(x)$ （利用已证定理 $A\wedge B\vdash A$）

5） $\tau,P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y))\vdash Q(y)\to\neg L(x,y)$，3）、4）rmp

6） $\tau,P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y))\vdash L(x,y)\to\neg Q(y)$

7） $\tau,P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y))\vdash\forall y(D(y)\to L(x,y))$，同理 4）

8） $\tau,P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y))\vdash D(y)\to L(x,y)$，同理 3）

9） $\tau,P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y))\vdash D(y)\to\neg Q(y)$，6）、8）传递

10） $\tau\vdash D(y)\to\neg Q(y)$，由 1）、9)及存在消除定理

11）$\tau \vdash \forall y(D(y) \to \neg Q(y))$，全称推广

//////////////////////////////////////
5.

(1) $\mathrm{P}_1^{(1)}(v_1) \not\models_T \forall v_1 P_1^{(1)}(v_1)$

证明：即给出解释和指派使得该逻辑蕴涵不成立。

令 $D = R$，$\mathrm{P}_1^{(1)}(v_1)$：$v_1 < 5$

在指派 $s(v_1) = 3$ 下公式 $\mathrm{P}_1^{(1)}(v_1)$ 为真，但是公式 $\forall \mathrm{v}_1 \mathrm{P}_1^{(1)}(v_1)$ 为假。

(2) $\not\models_T P_1^{(1)}(v_1) \to \forall v_1 P_1^{(1)}(v_1)$

证明：证明该公式非永真，只需给出一个结构和指派使得其为假即可，直接由 1）可得。

//////////////////////////////////////

(3) $\models_{\mathrm{T}} \exists v_1(P_1^{(1)}(v_1) \to \forall v_1 P_1^{(1)}(v_1))$

证明：$\models_{\mathrm{T}} \exists v_1(P_1^{(1)}(v_1) \to \forall v_1 P_1^{(1)}(v_1))$

iff 对任意的结构 U 和指派 s，有 $\models_{\mathrm{U}} \exists v_1(P_1^{(1)}(v_1) \to \forall v_1 P_1^{(1)}(v_1))[s]$ 成立

iff $\exists d' \in D,$ 使得 $\not\models_U P_1^{(1)}(v_1)[s(v_1|d')]$ 或 $\models_U \forall v_1 P_1^{(1)}(v_1)[s]$（后面的这个约束变元 v_1 跟前面的 v_1 没关系，完全可以改名为其他变元符号。）

1）若 $\exists d' \in D,$ 使得 $\not\models_U P_1^{(1)}(v_1)[s(v_1|d')]$ 成立，那么原命题得证。

2）若不存在 $d' \in D,$ 使得 $\not\models_U P_1^{(1)}(v_1)[s(v_1|d')]$ 成立，即对 $\forall d \in D,$ 均有 $\models_U P_1^{(1)}(v_1)[s(v_1|d)]$ 成立，

即有：$\models_U \forall v_1 P_1^{(1)}(v_1)[s]$ 成立

综合 1）、2）知 $\models_{\mathrm{U}} \exists v_1(P_1^{(1)}(v_1) \to \forall v_1 P_1^{(1)}(v_1))[s]$ 成立。

(4) 直接给出一个为真的解释和指派即可。

6.

同 5.（4），分别给出为真的解释和指派即可。

7.

（1）$\tau; \mathrm{A} \models_{\mathrm{T}} \mathrm{B}$ 当且仅当 $\tau \models_{\mathrm{T}} \mathrm{A} \to \mathrm{B}$

证明：$\Leftarrow$：若 $\tau \models_{\mathrm{T}} \mathrm{A} \to \mathrm{B}$，则需证 $\tau; \mathrm{A} \models_{\mathrm{T}} \mathrm{B}$。

只需证对任意的使得τ中的公式及公式A为真的U,S必有$|=_U\ B[S]$。

而由$\tau|=_{\mathrm{T}}\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B}$，则必有$|=_U\ (A\rightarrow B)[S]$，即$|\neq_U\ A[S]$或$|=_U\ B[S]$，而$U,S$使得$A$为真，故必有$|=_U\ B[S]$。

$\Rightarrow$：若$\tau;\mathrm{A}|=_{\mathrm{T}}\mathrm{B}$，则需证$\tau|=_{\mathrm{T}}\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B}$。

只需证对任意的使得τ中的公式为真的U,S必有$|=_U\ (A\rightarrow B)[S]$。

①若$|\neq_U\ A[S]$，则显然有$|=_U\ (A\rightarrow B)[S]$成立。

②若$|=_U\ A[S]$，则由$\tau;\mathrm{A}|=_{\mathrm{T}}\mathrm{B}$及在$U,S$的作用下$\tau$中的公式为真，从而根据逻辑蕴涵定义必有$|=_U\ B[S]$，所以$|=_U\ (A\rightarrow B)[S]$。

//////////////////////////////

(2)$|=_{\mathrm{T}}\mathrm{A}$当且仅当$|=_{\mathrm{T}}\forall\mathrm{vA}$（$v$为任一变元）

证明：不妨设变元v在A中自由出现。

$\Leftarrow$：若$|=_{\mathrm{T}}\forall\mathrm{vA}$，需证$|=_{\mathrm{T}}\mathrm{A}$。

即需证对任意的U,S有$|=_{\mathrm{U}}\mathrm{A}[S(v|d)]$，$\forall d\in D$

由$|=_{\mathrm{T}}\forall\mathrm{vA}$知对任意的$U,S$有$|=_{\mathrm{U}}\forall\mathrm{vA}[S]$，即对$\forall d\in D$有：

$|=_{\mathrm{U}}\mathrm{A}[S(v|d)]$

$\Rightarrow$：若$|=_{\mathrm{T}}\mathrm{A}$，需证$|=_{\mathrm{T}}\forall\mathrm{vA}$。

由$|=_{\mathrm{T}}\mathrm{A}$知对任意的$U,S$及对$\forall d\in D$有$|=_{\mathrm{U}}\mathrm{A}[S(v|d)]$（假设变元$v$在$A$中自由出现），即$|=_{\mathrm{U}}\forall\mathrm{vA}[S]$，所以$|=_{\mathrm{T}}\forall\mathrm{vA}$。

//////////////////////////////

（3）$\forall\mathrm{v}(\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B}),\forall\mathrm{vA}|=_{\mathrm{T}}\forall\mathrm{vB}$

证明：只需证对任意的U,S若$|=_U\forall\mathrm{v}(\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B})[S]$且$|=_U\forall\mathrm{vA}[S]$，则必有$|=_U\forall\mathrm{vB}[S]$。

由$|=_U\forall\mathrm{v}(\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B})[S]$知：对任意$d\in D$，有$|=_U\ (\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B})[S(v|d)]$，即有$|\neq_U\mathrm{A}[S(v|d)]$或$|=_U\mathrm{B}[S(v|d)]$，又由$|=_U\forall\mathrm{vA}[S]$知：对任意$d\in D$，有$|=_U\mathrm{A}[S(v|d)]$，综上$|=_U\mathrm{B}[S(v|d)]$，即$|=_U\forall\mathrm{vB}[S]$。