第七章　参数估计

引子：在**总体分布类型已知或未知条件件**下，怎样**利用样本来估计总体中分布参数**或**一些重要的数值特征**，称之为**参数估计**。

两类：**点估计和区间估计**。

§7.1 点估计

估计量：设 θ 为总体X的未知参数，怎样用样本X_1，……X_n构造一个统计量

$$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$$

来估计 θ，称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的估计量。

估计值：对于具体的样本值$x_1,\ldots x_n$,估计量的值 $\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$, 则称 $\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$ 为 θ 之估计值记为 $\hat{\theta}$.

为方便计，估计量与估计值均称为 θ 的估计。

若总体X有m个未知参数 θ_1，…，θ_m需估计，需构造m个统计量 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,\cdots,X_n)$ $,\cdots,\hat{\theta}_m=\hat{\theta}_m(X_1,\cdots,X_n)$ 对之进行估计。

点估计：寻求未知参数的估计。

主要考察矩估计与似然估计，且考察估计量之好环。

一、矩估计：点估计时，若可以把未知数θ用总体矩的函数表示为 $\theta = h(\mu_1, \cdots, \mu_m)$,

$$\mu_k = EX^k \qquad (k = 1,2,\cdots,\ \mathrm{m})$$

则可用样本矩 $a_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$

估计总体矩 $\mu_k (k = 1,2,\cdots,\ \mathrm{m})$

进而用样本矩的函数 $\hat{\theta} = h(a_1, a_2, \cdots, a_m)$

作为未知参数θ的估计。

例1. 求总体X均值$\mu = EX$和方差$DX = \sigma^2$未知参数矩估计， $X_1, \cdots, X_n$ 为未知总体X的一个样本。

解：

$$\begin{cases} \alpha_1 = \mu_1 = EX = \mu \\ \alpha_2 = EX^2 = \mu_2 = \sigma^2 + \mu^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = \mu_1 \\ \sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2 \end{cases}$$

$\therefore \mu$和σ^2矩估计为： $\overline{x}$， s^{*2}

$$\begin{cases} \hat{\mu} = a_1 = \bar{x} \\ \hat{\sigma}^2 = a_2 - a_1^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = s^{*2} \end{cases}$$

例2.总体 $X \sim B(1,p), \quad (0<p<1)$

求未知数p之矩估计。

解：$EX=\mu_1=p, \therefore p$之矩估计

$$\hat{p}=\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

为事件之频率。

例3. 设母体X具有Γ分布，其pdf 为

$$f(x,\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}, & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

其中 $\alpha,\beta>0$，求α,β 估计量

$$(\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx,\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha))$$

解： $\because \alpha_1=\mu_1=EX=\int_0^{+\infty}\dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\cdot x^{\alpha-1+1}e^{-\beta x}dx$

$$\overset{\beta x=t}{=}\int_0^{+\infty}\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{t^{\alpha}}{\beta^{\alpha}}e^{-t}\frac{dt}{\beta}$$

$$\begin{cases} \quad = \dfrac{1}{\beta\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha+1-1}e^{-t}dt = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta\Gamma(\alpha)} \\ \quad \mu_2 = EX^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1+2}e^{-\beta x}dx \\ = \dfrac{1}{\beta^2}\cdot\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha+2-1}\cdot e^{-t}dt = \dfrac{\Gamma(\alpha+2)}{\beta^2\Gamma(\alpha)} \end{cases}$$

$$= \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{\beta\Gamma(\alpha)} = \alpha / \beta \qquad ①$$

$$\overset{\beta x = t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{t^{\alpha+1}}{\beta^{\alpha+1}} e^{-t} \cdot \frac{dt}{\beta} \qquad ②$$

$$= \frac{(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)}{\beta^2\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} \qquad ③$$

② — ①^2

$$\mu_2 - \mu_1^2 = EX^2 - (EX)^2 = DX = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

①÷③

β代入①

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{\mu_1}{\mu_2 - \mu_1^2} \\ \alpha = \alpha_1 \beta = \dfrac{\mu_1^2}{\mu_2 - \mu_1^2} \end{cases}$$

于是α β之矩估计为：

$$\begin{cases} \hat{\alpha} = \overline{x}^2 / s^{*2} \\ \hat{\beta} = \overline{x} / s^{*2} \end{cases}$$

例4.设总体X服从参数为N，P的二项分布，

$x_1,\ldots x_2$ 为来自总体X的一个样本，求参数N，P的矩估计。

解：

$$\begin{cases} \mu_1 = EX = Np & ① \\ \mu_2 - \mu_1^2 = DX = Np\,(1\text{-}p) & ② \end{cases}$$

由①，②得：

$$\begin{cases} p = 1 - \dfrac{\mu_2 - \mu_1^2}{\mu_1} = \dfrac{\mu_1 - (\mu_2 - \mu_1^2)}{\mu_1} \\ N = \mu_1 / p = \mu_1^2 / [\mu_1 - (\mu_2 - \mu_1^2)] \end{cases}$$

于是N,P矩估计为：

$$\begin{cases} \hat{p} = (\overline{x} - s^{*2}) / \overline{x} \\ \hat{N} = \overline{x}^2 / (\overline{x} - s^{*2}) \end{cases}$$

二、极大似然估计（ML）

例1设有一批产品，其次品率为p($0<p<1$),从中随机抽取100个，其中10个次品，试估计p的数值。

解:由题意X~B(1,P)。设$x_1,\ldots,x_{100}$为来自总体X一个子样

$$P(N=x)=p^x(1-p)^{1-x},x=1,0$$

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_{100} = x_{100})$$

$$= \prod_{i=1}^{100} p(X_i = x_i) = p^{\sum_{i=1}^{100} x_i} (1-p)^{100-\sum_{i=1}^{100} x_i}$$

$$= p^{10}(1-p)^{90}$$

思想：自然选择使此概率达到最大的p值为真正次品率的估计值。记

$$L(P) = P^{10}(1-p)^{90}$$

利用微积分

$$\frac{\partial L(P)}{\partial P} = 10P^{9}(1-P)^{90} - 90P^{10}(1-P)^{89}$$

得 $\hat{p} = \frac{10}{100}$

原则：选择参数p值使抽得的子样值出现的可能性最大，用这个值作为未知参数

p 的估计值。此法为极大似然估计或最大似然估计。

$$L(x_1,\cdots;x_n;\theta_1,\theta_2,\cdots;\theta_m)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i)$$

LnL 均称为极大似然函数。

例2.设总体X~P(λ)，$x_1,\ldots$，x_n为其子样，求极大似然估计(λ)。

解：$$L(x_1,\cdots,x_n;\lambda)=\prod_{i=1}^{n}p(X_i=x_i)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i}{x_1!\cdots x_n!}e^{-n\lambda}$$

$$LnL=\ln\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{x_1!\cdots x_n!}e^{-n\lambda}$$

$$=(\sum_{i=1}^{n}x_i)\ln\lambda-n\lambda-\ln(x_1!\cdots x_n!)$$

令 $$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = 0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda} - n \qquad \therefore \lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

于是 λ 的ML为 $\hat{\lambda} = \bar{x}$

连续总体X的pdf为 $P(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$

其中$\theta_1,\cdots,\theta_m$为未知参数，若取得子样值 $(x_1,\cdots,x_n)$ ，考虑概率：

$$p\{x_1 - dx_1 < X_1 \le x_1, x_2 - dx_2 < X_2 \le x_2,$$
$$\cdots, x_n - dx_n < X_n \le x_n\}$$
$$= \prod_{i=1}^{n} P\{x_i - dx_i < X_i \le x_i\}$$
$$= \prod_{i=1}^{n} [f(x_i; \theta_1, \theta_2, \cdots \theta_m) dx_i]$$
$$= \left[\prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta_1, \theta_2, \cdots \theta_m)\right] dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

这里 $dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ **为较小且固定量**，易知

在 $L(x_1,\cdots,x_n;\theta_1,\cdots,\theta_m)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1,\cdots,\theta_m)$ 在 $(x_1,\cdots,x_n)$

处值愈大，样本 $(X_1,\cdots,X_n)$ 在样本点 $(x_1,\cdots,x_n)$

附近取值概率愈大，当 $L(x_1,\cdots,x_n;\theta_1,\cdots,\theta_m)$ 达

到极大值而得到 $\theta_1,\cdots,\theta_m$ 估计 $\hat{\theta}_1,\cdots,\hat{\theta}_m$ 为其极

大似然估计。

$L(x_1,\cdots,x_n;\theta_1,\cdots,\theta_m)$或 LnL 为似然函数，

方法：求偏导法或定义法。

例1.总体X~E(λ)，求 λ 的极大似然估计

解：似然函数

$$L_1\left(x_1,\cdots x_n;\lambda\right)=\prod_{i=1}^{n}\lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$$

$$\ln L = n\ln\lambda - \lambda\sum_{i=1}^{n}x_i$$

令 $$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda}=0=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i \qquad \therefore \lambda=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

于是 λ 之MLE为 $\hat{\lambda}=\frac{1}{\bar{x}}$

例2.设正态总体X~N(μ , σ ²)， μ , σ ²未知，求 μ , σ ²最大似然估计

$$L(x_1,\cdots,x_n;\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

$$\ln L=\ln(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$=-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

令 $$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial \mu} = 0 = -\dfrac{2(-1)}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = 0 = -\dfrac{n}{2}\cdot\dfrac{1}{\sigma^2} + \dfrac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu = \overline{x} \\ \sigma^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \end{cases}$$

μ, σ^2似然估计为:

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \bar{x} \\ \hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = s^{*2} \end{cases}$$

例 3.总体X~∪[0， θ]，求 θ 的似然估计

似然函数

$$L = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta^n}, & 0 \le X_{(i)} \le X_{(n)} \le \theta \\ , & 其它 \end{cases}， \quad \frac{1}{\theta^n} \le \frac{1}{X_{(n)}^n} \le \ldots \le \frac{1}{X_{(1)}^n}$$

于是当 $\theta^{n} = X_{(n)}^{n}$时，L达到极大值

故$\theta = X_{(n)}$

$\therefore \theta$的极大似然估计为

$$\hat{\theta} = X_{(n)}$$

例4 .已知总体X～U[θ $_1$, θ $_2$],$x_1,\ldots,x_n$是取自X的一个样本，求 θ $_1$, θ $_2$的矩估计和极大似然估计。

解：

(1)

$$\begin{cases} \mu_1 = EX = \dfrac{\theta_1+\theta_2}{2} & ① \\ \mu_2 = EX^2 = \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\theta_2-\theta_1}\cdot x^2 dx \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\theta_2-\theta_1}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{1}{3}(\theta_1^2+\theta_1\theta_2+\theta_2^2) \quad ②$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_1 + \theta_2 = 2\mu_1 & ③ \\ \theta_1(\theta_1 + \theta_2) + (2\mu_1 - \theta_1)^2 = 3\mu_2 & ④ \end{cases}$$

④化为： $2\mu_1\theta_1 + 4\mu_1^2 - 4\mu_1\theta_1 + \theta_1^2 = 3\mu_2$

$$\theta_1^2 - 2\mu_1\theta_1 + \mu_1^2 = 3(\mu_2 - \mu_1^2),$$

$$(\theta_1 - \mu_1)^2 = 3(\mu_2 - \mu_1^2)$$

$$\therefore \theta_1 = \mu_1 \pm \sqrt{3}\sqrt{\mu_2 - \mu_1^2} \qquad \therefore \theta_2 = \mu_1 \mp \sqrt{3}\sqrt{\mu_2 - \mu_1^2}$$

经检验：　θ_1 θ_2矩估计为

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = \bar{x} - \sqrt{3}S^* \\ \hat{\theta}_2 = \bar{x} + \sqrt{3}S^* \end{cases}$$

（2）

$$L = \begin{cases} \dfrac{1}{(\theta_2 - \theta_1)^n}, & \theta_1 \le x_1, x_2, \cdots, x_n \le \theta_2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$L = \begin{cases} \dfrac{1}{(\theta_2 - \theta_1)^n}, & \theta_1 \le x_{(1)} \le \cdots \le x_n \le \theta_2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

由定义知： $\dfrac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n} \le \dfrac{1}{\left(x_{(n)}-x_{(1)}\right)^n}$

$\therefore$ 当 $\dfrac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n} = \dfrac{1}{(x_{(n)}-x_{(1)})^n}$ 时，L 达到极大

$$\therefore \theta_2-\theta_1 = x_{(n)}-x_{(1)} \qquad \theta_2 - x_{(n)} + x_{(1)} - \theta_1 = 0$$

又

$$\theta_2 - x_{(n)} \ge 0, \qquad x_{(1)} - \theta_1 \ge 0$$

$$\therefore \theta_2 = X_{(n)}, \theta_1 = X_{(1)}$$

从而 θ_1，θ_2似然估计为

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = x_{(1)} \\ \hat{\theta}_2 = x_{(n)} \end{cases}$$

三、鉴定估计量的标准：

三条标准：无偏性，有效性和一致性

对同一求知参数用不同的估计方法得到的估计量可能不同。（此条适用于矩估计，极大似然估计法）例总体 $X \sim P(\lambda)$

利用 $\mu_1 = EX = \lambda = DX = \mu_2 - \mu_1^2$ 故用矩估计法可得两种不同估计量：

$\hat{\lambda}=\bar{x}$及$\hat{\lambda}=S^{*2}$怎样判断估计量之好坏？

其标准如何？

Def1(无偏性)：设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$

为 θ 的估计量。若 $E\hat{\theta}=\theta$，则称 $\hat{\theta}$

为 θ 的无偏估计量。无偏性表明：

（1）$\hat{\theta}$ 围绕被估计参数 θ 而摆动，以致

$E_\theta(\hat{\theta}-\theta)=0$ (用 $\hat{\theta}$ 估计 θ 时无系统误差）

(2)N很大时， $\frac{1}{N}\sum\hat{\theta}_i=\theta\left(\hat{\theta}\xrightarrow{p}\theta\right)$

（大数定律）

例1总体X， $\mu=EX$, $\sigma^2=DX$,

$\mu_k=EX^k(k=1,\cdots),X_1,\cdots,X_n$ 为 X 一个样本，

则S^2是σ^2无偏估计， S^{*2}是σ^2有偏估计，$\overline{X}$ 是μ之无偏估计。

解： $\because E\overline{x} = E\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Ex_i = \frac{1}{n}\times n\mu = \mu$

$$ES^2 = E\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n-1}E\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} Ex_i^2 - nE\overline{x}^2\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(Dx_i + (Ex_i)^2) - n(D\overline{x} + (E\overline{x})^2)\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}\left(\sigma^2 + \mu^2\right) - n(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2)]$$

$$= \frac{1}{n-1}[n\sigma^2 + n\mu^2 - \sigma^2 - n\mu^2]$$

$$= \frac{1}{n-1}[\left(n-1\right)\sigma^2]$$

$$= \sigma^2$$

$\therefore \bar{x}$ 为 $EX=\mu$ 无偏估计，S^2为 σ^2 无偏估计

而

$$Es^{*2}=\frac{1}{n}E\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2=\frac{1}{n}\times(n-1)\sigma^2$$

$$=(1-\frac{1}{n})\sigma^2\neq\sigma^2$$

$\therefore S^{*2}$为σ^2的有偏估计

Def2 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 与 $\hat{\theta}'=\hat{\theta}'(X_1,\cdots,X_n)$ 均是 θ 的无偏估计。若对任于样本容量n有

$$D_\theta(\hat{\theta})<D_\theta(\hat{\theta}')$$

则称 $\hat{\theta}$ 较 $\hat{\theta}'$ 有效。(选择**较集中估计量**)。

例2若取

$$\hat{\mu}=\overline{X},\hat{\mu}'=\sum_{i=1}^{n}C_iX_i,\sum_{i=1}^{n}C_i=1(n>1)$$

证明：$\hat{\mu}$ $\hat{\mu}'$ 均为θ之无偏估计且$\hat{\mu}$ 较$\hat{\mu}'$ 有效。

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{b}_i^2)$$

$$(\sum_{i=1}^{n} C_i)^2 \leq (1^2+\cdots+1^2)(\sum_{j=1}^{n} c_i^2) = (n\sum_{i=1}^{n} c_i^2)$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} C_i^2 \geq \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} c_i)^2$$

$$D\hat{\mu}' = D(\sum_{i=1}^{n} C_i X_i) = (\sum_{i=1}^{n} C_{\mathrm{i}}^2) DX_i = (\sum_{i=1}^{n} C_i^2) DX$$

$$\geq \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} C_i)^2 DX = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} C_i)^2 DX_i = \frac{1}{n} DX = D\hat{\mu}$$

$\therefore\ \hat{\mu}$ 较 $\hat{\mu}'$较有效

Def3.相合性：称估计量 $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_1, \cdots, X_n)$

是未知数 θ 的相合(一致)估计量：

若 $\hat{\theta} \xrightarrow{p} \theta$ 即对$\forall \varepsilon > 0$有：

$$\lim_{n \to \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon) = 0$$

注(1) α_k是$\mu_k (k = 1,2,\cdots)$相合估计

s^2, s^{*2} 是 σ^2 相合估计。

(2)若$h(t_1,\ldots,t_m)$为m元 cf，则$h(\alpha_1,\ldots \alpha_m)$是

$h(\mu_1, \ldots, \mu_m)$相合估计。

(3)在相当广泛条件下MLE是相合估计。

§7.2区间估计

引言：点估计是用一个数 $\hat{\theta}$ 来估计未知参数θ；我们在**评价近似等式** $\hat{\theta} \approx \theta$ **的质量**时，主要用**估计量的数字特征**来**表征估计的优劣(无偏性，有效性)**，仅在**样要样本容量充分大时**，对**上述近似等式的误差作了一般性说明(一致性相合)**。

点估计局限：**点估计对估计的精度和可靠性**并没有作明确回答。

例：**废品率，长度的精度范围，可靠程度**(置信区间、置信度)几个重要概念：

参数的区间估计：由于样本给出参数的估计范围，这一**随机区间包含未知参数θ具有固定(指定)的概率**$1-\alpha$.

置信区间、置信度、置信上(下)限定义：

对于未知参数θ，若找出两个统计量

$$\hat{\theta}_1(x_1,\cdots,x_n),\hat{\theta}_2(x_1,\cdots,x_n)$$

使对给定的$\alpha(0<\alpha<1)$有：

$$P(\hat{\theta}_1<\theta<\hat{\theta}_2)=1-\alpha \quad ①$$

则称 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$为$\theta$ 的置信区间，$1-\alpha$ 为置信信度，$(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$分别为 θ 的置信下限，

置信上限，

(1) $\alpha = 0.1, 0.05, 0.01; 1-\alpha = 0.9, 0.95 .0.99$

(2) θ **为完全确定数**。

(3)**正确含义：**$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$**为随机区间**。对 θ 作具体区间估计时，$(x_1, \cdots, x_n)$ 为样本值，此时 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 非随机区间。为方便计，它亦称为 θ 的置信区间。

§7.2.1单个正态总体X参数的区间估计

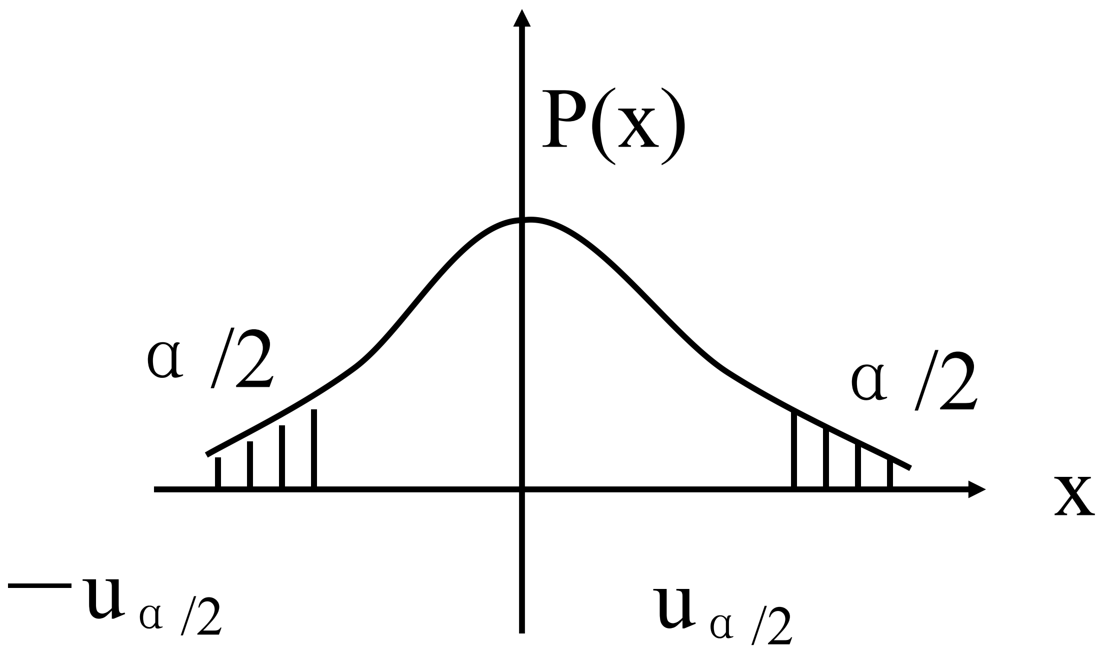
基本假设：设$x_1,\ldots,x_n$为取自正态总体

$N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，$\overline{X},S^2$ 分别表示样本均值与方差。考虑区间估计问题

1. σ^2 已知，求 μ 的置信区间

由于

$$u=\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\sim N(0,1)$$



对于给定的α，查附表得监 界值 $\mu_{\alpha/2}$ 使

$$P\{-u_{\alpha/2} < u < u_{\alpha/2}\} = P\{|u| < u_{\alpha/2}\}$$

$$= 1 - P\{|u| \geq u_{\alpha/2}\} = 1 - \alpha$$

将括号内不等式转化为

$$-u_{\alpha/2} < \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} < u_{\alpha/2}$$

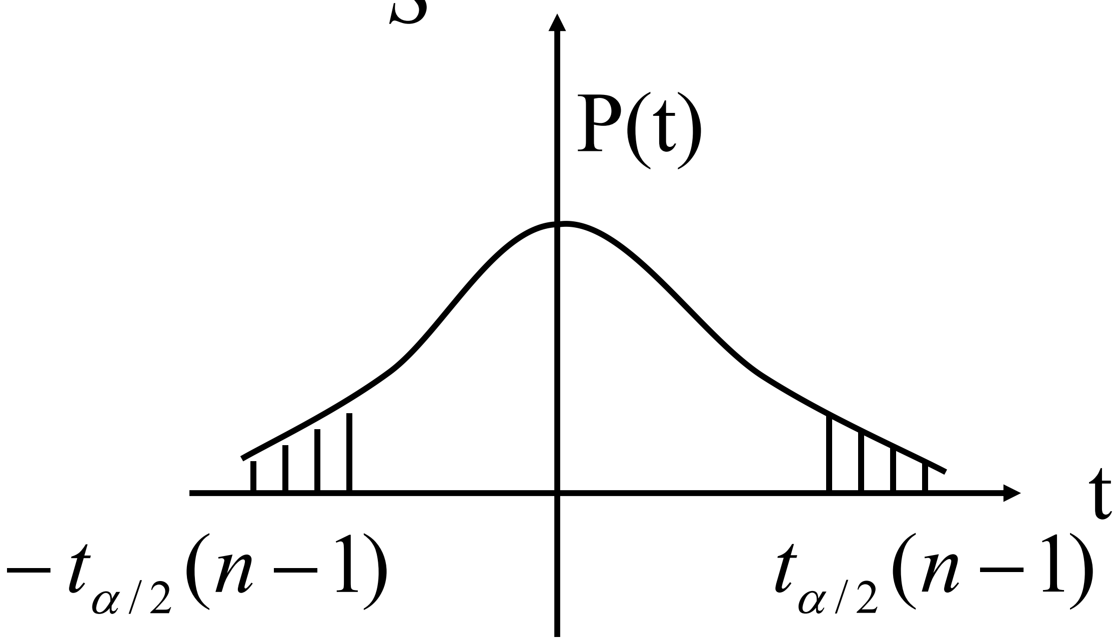
$$\Leftrightarrow \bar{x}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

故得 μ 的置信区间为:

$$(\bar{x}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\quad \bar{x}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

2. σ²未知，求 μ 的置信区间：

由于 $$t=\frac{\bar{x}-\mu}{S}\sqrt{n}\sim t(n-1)$$



对于给定的α ，查附表得临界值

$t_{\alpha/2}(n-1)$ 使

$$P\{-t_{\alpha/2}(n-1)<t<t_{\alpha/2}(n-1)\}$$

$$=P\{|t|<t_{\alpha/2}(n-1)\}$$

$$=1-P\{|t|\geq t_{\alpha/2}(n-1)\}=1-\alpha$$

将上式括号内不等式转化为

$$-t_{\alpha/2}(n-1)<t<t_{\alpha/2}(n-1)$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$$

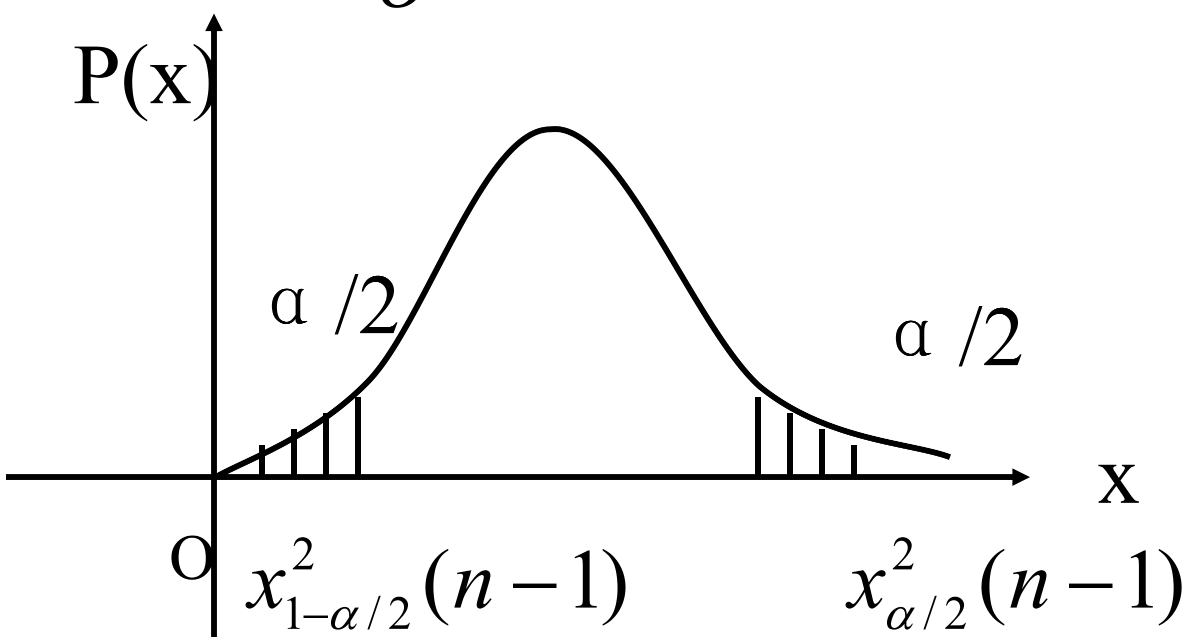
$$\frac{\bar{x} - \mu}{s}\sqrt{n}$$

故得 μ 的置信区间为：

$$(\bar{x} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}})$$

3.求σ²的的置信区间：

由于 $x^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\sim x^2(n-1)$



对于给定的 α ，查附表得临界值

$$x^2_{1-\alpha/2}(n-1), \quad x^2_{\alpha/2}(n-1) \quad \text{使}$$

$$p\{x^2_{1-\alpha/2}(n-1) \le x^2 \le x^2_{\alpha/2}(n-1)\}$$

$$=1-P\{x^2 \ge x^2_{\alpha/2}(n-1)\} - P\{x^2 \le x^2_{1-\alpha/2}(n-1)\}$$

$$=1-P\{x^2 \ge x^2_{\alpha/2}(n-1)\} - P\{x^2 \le x^2_{1-\alpha/2}(n-1)\}$$

$$=1-\alpha$$

将上式括号内不等式转化为：

$$x_{1-\alpha/2}^{2}(n-1) < \frac{(n-1)s^{2}}{\sigma^{2}} < x_{\alpha/2}^{2}(n-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-1)s^{2}}{x_{\alpha/2}^{2}(n-1)} < \sigma^{2} < \frac{(n-1)s^{2}}{x_{1-\alpha/2}^{2}(n-1)}$$

故σ 2的置信区间为：

$$\left(\frac{(n-1)s^{2}}{x_{\alpha/2}^{2}(n-1)},\quad \frac{(n-1)s^{2}}{x_{1-\alpha/2}^{2}(n-1)}\right)$$

而σ的置信区间为：

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)}{x^2_{\alpha/2}(n-1)}}\cdot s,\sqrt{\frac{(n-1)}{x^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\cdot s\right)$$

(1)**区间估计两要素**：置信度与置信区间；选取合适n, α ，通常对于固定α 通常采用增大样本容量n的办法来提高区间估计的质量。

(2)对于给定置信度1－α 和同一未知参数θ使用同一r·v T(x_1,…x_n; θ)，亦可构造不同的置信区间。

例如在3中，如果我们从附表3查 出临界值：

$\chi^2_{1-\alpha_1}(n-1)$与 $\chi^2_{\alpha_2}(n-1)$满足

$$P\{\chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha_1}(n-1)\} = \alpha_1$$

$$P\{\chi^2 > \chi^2_{\alpha_2}(n-1)\} = \alpha_2$$

那么，只要

$\alpha_1 \ge 0, \alpha_2 \ge 0, \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$成立.

$\left(\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha_2}(n-1)}, \dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha_1}(n-1)}\right)$就是$\sigma^2$的置信区间.

习题

1、由附表中查下列各值：

$$\chi^2_{0.05}(20), \chi^2_{0.95}(20), t_{0.01}(10),$$

$$F_{0.05}(12,15), F_{0.95}(15,12),$$

解：

$$\chi^2_{0.05}(20) = 31.410 \qquad \chi^2_{0.95}(20) = 10.815$$

$$t_{0.01}(10), = 2.7638 \qquad F_{0.05}(12,15) = 2.48$$

$$F_{0.95}(15,12) = \frac{1}{F_{0.05}(12,15)} = 0.403$$

2、证明若 $X \sim \chi^2(n)$, 则 $EX = n, DX = 2n$

证明：设

$X_i \sim N(0,1), i = 1,2,\cdots,n$ 且 $X_1, X_2, \cdots, X_n$

相互独立，令 $X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$, 而

$$EX_i^2 = E(X_i - EX_i)^2 = DX_i = 1$$ 及

$$DX_i^2 = EX_i^4 - \left(EX_i^2\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx - 1$$

$$= 3 - 1 = 2$$

$$因此EX=\sum_{i=1}^{n}EX_i^2=n,DX=\sum_{i=1}^{n}DX_i^2=2n$$

3、已知 $X\sim t(n)$,求证$X^2\sim F(1,n)$

证明：设Z~$N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$,则$\dfrac{Z}{\sqrt{Y/n}}\sim t(n)$,

而X与Y相互独立

从而X与$\dfrac{Z}{\sqrt{Y/n}}$同分布,进而

X^2与$\dfrac{Z^2}{Y/n}$同分布又$Z^2 \sim \chi^2(1)$,而

$$\frac{Z^2}{Y/n} = n\frac{Z^2}{Y} = \frac{n}{1} \times \frac{Z^2}{Y} \sim F(1,n)$$

故$X^2 \sim F(1,n)$

4、设总体$X \sim N\left(0, \sigma^2\right)$, $X_1, \cdots, X_6$为来自X的一个样本，设$Y=\left(X_1+X_2+X_3\right)^2$
$+\left(X_4+X_5+X_6\right)^2$.求常数$C$, $CY \sim \chi^2(2)$

- 证明：因为$X_1, X_2, \cdots X_6$ 是来自X的一个样本，所以（1）$X_1, X_2, \cdots, X_6$ 相互独立；（2）每个 $X_i \sim N\left(0, \sigma^2\right)$.从而

$$X_1+X_2+X_3 \sim N\left(0,3\sigma^2\right), X_4+X_5+X_6 \sim N\left(0,3\sigma^2\right)$$

对于常数C>0， $\sqrt{C}\left(X_1+X_2+X_3\right) \sim N\left(0,3\sigma^2 C\right)$

欲使$CY \sim \chi^2(2)$必须且只需$\sqrt{C}\left(X_1+X_2+X_3\right) \sim N\left(0,1\right)$,即

$$\frac{3\sigma^2}{\frac{1}{C}}=1, C=\frac{1}{3\sigma^2}$$

5、对某一距离进行5次测量，结果如下：

2781，2836，2807，2763，2858（m），

已知测量结果服从 $N(\mu,\sigma^2)$，求μ和σ^2

的矩估计值。

解：由于总体均值 $\mu = EX$与方差$\sigma^2 = DX$

的矩估计分别为 $\hat{\mu} = \overline{X}, \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$

$$\hat{\mu} = \overline{X} = \frac{1}{5}(2781 + 2836 + 2807 + 2763 + 2858)$$

$$= 2809$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

$$= \frac{1}{5}\sum(X_i^2 - 5\overline{X}^2)$$

$$= 12008$$

6．设总体密度为

$$f(x;\alpha)=\begin{cases}(\alpha+1)x^{\alpha} & 0<x<1, \\ 0, & 其它\end{cases} \quad \alpha>-1$$

试用样本 $x_1,\cdots x_n$,求参数的矩估计和极大似然估计。

解：因为

$$EX=\int_0^1 x(\alpha+1)x^{\alpha}dx,$$

$$=\frac{\alpha+1}{\alpha+2}x^{\alpha+2}\Big|_0^1=\frac{\alpha+1}{\alpha+2}$$

故$\alpha=\dfrac{1}{1-EX}-2$，所以α的矩估计为$\hat{\alpha}=\dfrac{1}{1-\overline{X}}-2$。似然函数为

$$L(\alpha)=\prod_{i=1}^{n}(\alpha+1)x_i^{\alpha}$$

$$=(\alpha+1)^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^\alpha$$

于是

$$\ln L(\alpha)=n\ln(\alpha+1)+\alpha\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

似然方程为 $\dfrac{d\ln L(\alpha)}{d\alpha}=\dfrac{n}{\alpha+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$

解得 $\alpha=-(1+\dfrac{n}{\sum_{i}^{n}\ln x_i})$

$$\hat{\alpha} = -(1 + \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i})$$

7.设总体X的概率密度为$f(x,\theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)}, x \geq \theta \\ 0, \quad x < \theta \end{cases}$

而来自总体X的样本值为$x_1, x_2, \cdots, x_n$,

试求出参数θ的极大似然估计。

解：似然函数为

$$L(\theta)=\begin{cases} e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}, & x_{(n)} \geq \ldots \geq x_{(1)} \geq \theta \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

对固定的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，此函数为 θ 的间断函数，故无法使用似然方程。但此题可用极大似然估计的定义去解决：为使 L 达到最大，θ 必须尽可能大，但又不能太大。这界线就

$\hat{\theta}=\min(x_1, x_2, \cdots x_n)$处；当$\theta \le \hat{\theta}$，L 大于 0 且为 $e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i - n)}$；当$\theta > \hat{\theta}$时，L 为 0，故唯一使 L 到最大的 θ 值，即 θ 的极大似然估计量$\hat{\theta}=X_{(1)}$

8．从一批钉子中抽取 16 枚，测得其长度为（单位：cm）2.14,2.10,2.13,2.15,2.13,2.12,2.13,2.10,2.15,2.12,2.14,2.10,2.13,2.11,2.14,2.11.设钉子长分布为正态，试在下列情况下求总体期望 μ 的置信度为 0.90 的置信区间。

（1）已知σ =0.01cm;(2) σ 为未知。

解：（1）$\overline{X}=2,125$, σ =0.01,n=16, α =0.10,

从标准正态函数值表查出

$u_{\alpha/2}=u_{0.05}=1.64$,故置信限为

$$\overline{X}\pm u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2.125\pm 1.64\times\frac{0.01}{\sqrt{16}}$$

$=2.125\pm 0.041$置信区间为(2.1209,2.1291)

(2) $\overline{X}=2.125$,

$$S^{2}=\frac{1}{16}[(2.14-2.125)^{2}+\cdots$$

$$+(2.11-2.125)]^2=\frac{44\times10^{-4}}{16},$$

$$s=\frac{\sqrt{11}}{2}\times10^{-2},\text{又}n=16,t_{\frac{\alpha}{2}}(16-1)$$

$$=t_{0.05}(15)=1.7531\text{，故得置信限为}$$

$$\overline{X}\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}=2.125\pm1.7531$$

$$\times\frac{\frac{\sqrt{11}}{2}\times10^{-2}}{\sqrt{16}}\approx2.125\pm0.0075,$$

μ 的置信区间为(2.115，2.1325)

9．设 X_1，X_2，…，X_n 是来自 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的一个样本，$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2/\sigma^2$ 服从什么分布？

答：因为 X_1，X_2，…，X_n 是来自 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的一个样本，所以（1）X_1，X_2，…，X_n 相互独立；（2）每个 $X_i(i=1,2\cdots,n)\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，从而

$$Y_i=\frac{X_i-\mu}{\sigma}\sim N(0,1), i=1,2,\cdots,n$$

且$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$为相互独立的随机变量，因而χ^2分布的定义可知

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2/\sigma^2\sim\chi^2(n)$$

10．设$(X_1,\cdots,X_n)$是总体$N(\mu,\sigma^2)$的一个样本，求下列统计量的分布密度。

（1）$Y_1=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

（2）$Y_2=\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2$

解：（1）因$Y_1=\sum_{i=1}^{n}X_i^2=\sigma^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2$，而

$Z=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n)$,故

$$F_{Y_1}(y)=P(Y_1\le y)=P(\sigma^2 Z\le y)$$

$$=P\left(Z\le\frac{y}{\sigma^2}\right)=F_z\left(\frac{y}{\sigma^2}\right)$$

因此

$$f_{r_1}(y) = \frac{1}{\sigma^2} f_z\left(\frac{y}{\sigma^2}\right)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{y^{\frac{n}{2}-1}}{\sigma^n 2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{r}{2\sigma^2}}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$$

（2）$Y_2 = n\sigma^2\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{\sqrt{n}\sigma}\right)^2, Z = \frac{1}{n\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 \sim \chi^2(1)$

故

$$F_{Y_2}(y) = P(Y_2 \le y) = P\left(n\sigma^2 Z \le y\right)$$

$$P\left(Z \le \frac{y}{n\sigma^2} \right) = F_z\left(\frac{y}{n\sigma^2} \right)$$

从而

$$f_{Y_2}(y) = \frac{1}{n\sigma^2} f_z\left(\frac{y}{n\sigma^2} \right)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n y}\,\sigma}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$$

11．设$X_1,\cdots X_n,X_{n+1},\cdots,X_{n+m}$是分布$N\left(0,\sigma^2\right)$的容量为 $n+m$ 的样本，试求下列统计量的概率分布：

（1）$Y_1=\dfrac{\sqrt{m}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}{\sqrt{n}\sqrt{\sum\limits_{i=n+1}^{n+m}X_i^2}}$， （2）$Y_2 = \dfrac{m\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n\sum_{i=n+1}^{n+m} X_i^2}$

解：（1）因为$X_1,\cdots X_n, X_{n+1},\cdots, X_{n+m}$是分布$N(0,\sigma^2)$的样本，所以①$X_1,\cdots X_n, X_{n+1},\cdots, X_{n+m}$相互独立；②$X_i \sim N(0,\sigma^2)$，$i=1,2,\cdots,n+m$。从而$\dfrac{X_i}{\sigma} \sim N(0,1)$, $i=1,2,\cdots,n+m$，进而

$\sum_{i=1}^{n} \dfrac{X_i}{\sigma} \sim N(0,n)$，因此

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{\sigma}\sim N(0,1)$$，即

$$\frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(0,1)$$；再由 χ^2 分布的定义知：

$$\sum_{i=n+1}^{n+m}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(m)$$，即

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=n+1}^{n+m} X_i^2 \sim \chi^2(m)$$

$$Y_1 = \frac{\sqrt{m}\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=n+1}^{n+m} X_i^2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\sigma\sqrt{m}\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=n+1}^{n+m} X_i^2\right) \Big/ m}},$$

$$\therefore Y_1 \sim \mathrm{t(m)}$$

，

（2）因 $$Y_2=\frac{m\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n\sum_{i=n+1}^{n}X_i^2}=\frac{m}{n}\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2}{\sum_{i=n+1}^{n+m}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2}$$

故$Y_2\sim F(n,m)$。

12. 设$X_1,\cdots,X_{n_1}$和$Y_1,\cdots,Y_{n_2}$分别来自相互独立的总体$N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$和$N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$两个样本，已知$\sigma_1=\sigma_2$，$\alpha$和$\beta$是两个实数，求随机变量。

$$\frac{\alpha\left(\overline{X}-\mu_1\right)+\alpha\left(\overline{Y}-\mu_1\right)}{\sqrt{\dfrac{\left(n_1-1\right)S_1^2+\left(n_1-1\right)S_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\dfrac{\alpha^2}{n_1}+\dfrac{\beta^2}{n_2}\right)}}$$

的分布。

解：由题意知：

$$\overline{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{1}{n_1}\sigma_1^2\right), \overline{Y} \sim N\left(\mu_2, \frac{1}{n_2}\sigma_2^2\right)$$

$$\frac{(n_1 - 1)}{\sigma_1^2} S_1^2 \sim \chi^2(n_1 - 1)$$

$$\frac{(n_2 - 1)}{\sigma_2^2} S_2^2 \sim \chi^2(n_2 - 1)$$

故$\alpha\left(\bar{X}-\mu_1\right)\sim N\left(0,\dfrac{\alpha^2}{n_1}\sigma_1^2\right)$,

$\beta\left(\bar{X}-\mu_2\right)\sim N\left(0,\dfrac{\beta^2}{n_2}\sigma_2^2\right)$,

$$\frac{(n_1-1)}{\sigma_1^2}S_1^2+\frac{(n_2-1)}{\sigma_2^2}S_2^2\sim\chi^2(n_1+n_2-2)$$

于是

$$\alpha\left(\overline{X}-\mu_1\right)+\beta\left(\overline{Y}-\mu_2\right)\sim N\left(0,\frac{\alpha^2}{n_1}\sigma_1^2+\frac{\beta^2}{n_2}\sigma_2^2\right)$$

又$\sigma_1=\sigma_2$，从而

$$\frac{\alpha\left(\overline{X}-\mu_1\right)+\beta\left(\overline{Y}-\mu_2\right)}{\sqrt{\left(\frac{\alpha^2}{n_1}+\frac{\beta^2}{n_2}\right)\sigma_1^2}}\sim N(0,1)$$

因此

$$\frac{\alpha\left(\overline{X}-\mu_1\right)+\alpha\left(\overline{Y}-\mu_1\right)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_1-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\left(\frac{\alpha^2}{n_1}+\frac{\beta^2}{n_2}\right)}\sim t\left(n_1+n_2-2\right)$$

12.设总体 X 服从参数为 N 和 p 的二项分布，$x_1,\cdots,x_n$ 为取自 X 的样本，试求参数 N 和 p 的矩估计。

解： 因为 $X\sim B(N,p)$， 所以 $EX=Np$，$DX=Npq=Np(1-p)$,故 $p=1-DX/EX$, $N=EX/p$，从而 N 和 p 的矩估计分别为：

$\hat{N}=\overline{X}/\hat{p}$， $\hat{p}=1-S^2\Big/\sqrt{X}$。

13. 已知总体 X 在$[\theta_1,\theta_2]$上服从均匀分布，$x_1,\cdots,x_n$ 是取自 X 的一个样本，求θ_1,θ_2的矩估计为

$$\hat{\theta}_1=\overline{X}-\sqrt{3}S^{\cdot},\hat{\theta}_2=\overline{X}+\sqrt{3}S^{\cdot}$$

似然函数为

$$L(\theta_1,\theta_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n}, & \theta_1\le X_{(1)}\le\ldots\le X_{(n)}\le\theta_2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

此处似然函数作为θ_1,θ_2的函数不连续，因此不能从解似然方程得到的 θ 的极大似然估计，但从似然函数的表达式易知 L 在$\theta_1 = X_{(1)},\theta_2 = X_{(n)}$处取极大值，

$$\because 当L = \frac{1}{(\theta_2 - \theta_1)^n} = \frac{1}{(x_{(n)} - x_{(1)})^n}时$$

$$\theta_2-\theta_1=x_{(n)}-x_{(1)}\ \therefore\ \theta_2-x_{(n)}+x_{(1)}-\theta_1=0$$

$$\because\ \theta_2-x_{(n)}\ge 0 \qquad x_{(1)}-\theta_1\ge 0$$

$$\therefore\ \theta_2-x_{(n)}=0 \qquad x_{(1)}-\theta_1=0$$

即 $\theta_2=x_{(n)} \qquad \theta_1=x_{(1)}$

于是 θ_2，θ_1的MLE为：

$$\hat{\theta}_1=X_{(1)},\ \hat{\theta}_2=X_{(n)}$$

第七 章 参数估计

1、点估计（矩估计和极大似然估计）；2、估计量标准（无偏性、较有效性和相合性）；

3、区间估计（置信度、置信区间、置信上限、置信上限）、单个正态总体参数的区间估计。

总复习

1.基本内容：

Chapter1 ：概率论中的基本概念

（随机试验、随机事件 、样本空间，事件的假设、事件的相 互表示以及事件之间的关系；古典 概率的定义、几种类型的例子）

$Chapter2:$两个概念和四个公式
（条件概率的定义、事件独立性的概念，条件概率的乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式、二项概率公式）

$Chapter3:$随机变量的概念及其分布
(离散型随机变量、分布列、三个特殊的分布，连续型随机变量的定义及性质

三个特殊的连续性随机变量、随机变量函数的分布(两个定理））

Chapter4:多维随机变量的概念及其分布

（多维随机变量的定义、二维随机变量分布函数的定义、边缘分布函数的定义；二维离散性随机变量的分布列及性质、边缘分布列的概念；二维连续性随机变量的定义、概率密度函数的性质、边缘

概率密度函数的定义、二维均匀分布；

随机变量独立性的定义、离散性随机变量和连续性随机变量独立性的充要条件、

随机变量和函数的分布、卷积公式）

Chapter5:随机变量的数字特征

（数学期望的定义（离散型和连续型随机变量）、九个特殊随机变量的数学期望、随机变量函数的数学期望（两个定理）、数学期望的性质（四条）；方差的定义及性质（五条）、九个特殊随机变量的方差；协方差的定义及性质（五条）、相关系数的定义及性质（定理中的二条）、不相关的定义及三个等价条件（一个定理）；切比晓夫不等式。）

Chapter6:数理统计的基本概念

（总体、样本（简单随机样本）、统计量（样本均值、样本方差、样本的二阶中心矩、最大的顺序统计量和最小的顺序统计量）；三大分布的定义及上侧 α 分位数（χ^2-分布. t-分布.F-分布);三个抽样分布定理（样本均值分布、样本方差分布、样本的t-分布).)

Chapter7:参数估计

（估计量和估计值、点估计的概念；极大似然估计、矩估计的概念及方法；鉴定估计量的三条标准（无偏性、较有效性和相合性）；区间估计（置信度、置信区间、置信上限、置信上限）、单个正态总体参数的区间估计

Math Dept of HIT

Tian Boping

E_Mail :
bopingt361147@hit.edu.cn
Tel:0451-86412607(o)
Postal Code:150001