哈工大　2012 年　秋季学期

概率论与数理统计 试题

一、填空题（每小题 3 分，共 5 小题，满分 15 分）

1．设事件 A、B 相互独立，事件 B、C 互不相容，事件 A 与 C 不能同时发生，且 $P(A)=P(B)=0.5$，$P(C)=0.2$，则事件 A，B 和 C 中仅 C 发生或仅 C 不发生的概率为__________________.

2．设随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布，则 $Y=1-\mathrm{e}^{-2X}$ 的概率密度为

$f_Y(y)=$__________________.

3．设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x}, x>0\\ 0, \quad x\le 0\end{cases}$，利用契比雪夫不等式估计概率 $P(1<X<5)\ge$______.

4．已知铝的概率密度 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，测量了 9 次，得 $\bar{x}=2.705$，$s=0.029$，在置信度 0.95 下，μ 的置信区间为__________________.

5．设二维随机变量 (X,Y) 服从区域 $G=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$ 上的均匀分布，令 $Z=\min(X,Y)$，$W=\max(X,Y)$，则 $P(Z+W\ge 1)=$_________.

（$t_{0.025}(8)=2\cdot 3060,\ t_{0.05}(8)=1\cdot 8595,\ t_{0.05}(9)=1.8331,\ t_{0.025}(9)=2.2622$
$\Phi(1.96)=0.975$，$\Phi(1.645)=0.95$）

二、选择题（每小题 3 分，共 5 小题，满分 15 分）

（每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项的字母填在题后的括号内）

1．设 $0<P(A)<1,\ 0<P(B)<1,\ P(B|\bar{A})=P(B)$，则与上式不等价的是

（A）A 与 B 不相容.　　（B）$P(B|A)=P(B|\bar{A})$.

（C）$P(\bar{A}|\bar{B})=P(\bar{A})$.　　（D）$P(A|\bar{B})=P(A)$.　　【　　】

2．设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本，$\bar{X}$ 为样本均值，则

（A）$E\bar{X}=\frac{1}{\lambda}$，$D\bar{X}=\frac{1}{n\lambda^2}$.　　（B）$E\bar{X}=\lambda,\ D\bar{X}=\frac{\lambda}{n}$.

（C）$E\bar{X}=\frac{\lambda}{n},\ D\bar{X}=\frac{\lambda}{n^2}$.　　（D）$E\bar{X}=\lambda,\ D\bar{X}=\frac{1}{n\lambda}$.　　【　　】

3．设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，则 $P(|X-EX|\geq 2\sqrt{DX})$ 等于

（A）$\dfrac{9-8\sqrt{2}}{9}$．（B）$\dfrac{6+4\sqrt{2}}{9}$．（C）$\dfrac{6-8\sqrt{2}}{9}$．（D）$\dfrac{6-4\sqrt{2}}{9}$．【　　】

4．如下四个函数，能作为随机变量 X 概率密度函数的是

（A）$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$．　（B）$f(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \dfrac{5}{16}x+\dfrac{7}{16}, & -1\leq x<1\\ 0, & x\geq 1\end{cases}$．

（C）$f(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|},\ x\in\mathbf{R}.$．　（D）$f(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$．【　　】

5．设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，统计量 $Y=\dfrac{1}{n}(\dfrac{S}{\overline{X}-\mu})^2$

其中 $\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则【　　】

（A）$Y\sim x^2(n-1)$（B）$Y\sim t(n-1)$（C）$Y\sim F(n-1,1)$（D）$Y\sim F(1,n-1)$．

三、（8 分）假设某段时间内来到百货公司的顾客数服从参数为 λ 的 Poisson 分布，而在百货公司里每个顾客购买电视机的概率均为 p，且顾客之间是否购买电视机相互独立，试求 $A=$“该段时间内百货公司售出 k 台电视机”的概率（假设每顾客至多购买一台电视机）。

四、（8 分）设随机变量 $X\sim U[0,1]$，求（1）$Y=X^2-4X+1$ 的概率密度 $f_Y(y)$；（2）X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}．

五、（8 分）设随机变量 X 和 Y 的分布列分别为

X	0	1
P	1/3	2/3

Y	—1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

且 $P(X^2=Y^2)=1$，求（1）二维随机变量 (X,Y) 的概率分布；（2）$Z=XY$ 的概率分布；（3）X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}

．

六、（12 分）设随机变量 X 与 Y 相互独立,且分别服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 和 $N(\mu,2\sigma^2)$,其中 σ 为未知参数且 $\sigma>0$．记 $Z=X-Y$．（1）求 Z 的概率密度 $f(z;\sigma^2)$；（2）设

$Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ 为来自总体 Z 的简单随机样本，求 σ^2 的最大似然估计 $\hat{\sigma}^2$；（3）证明 $\hat{\sigma}^2$ 是 σ^2 的无偏估计量。

七、（4 分）在 x 轴上的一个质点可以在整个数轴的整数点上游动，记 S_n 为时刻 n 时质点的位置。若在时刻 $t=0$ 时，处于初始位置为原点，即 $S_0=0$，它移动的规则：每隔单位时间，它总是收到一个外力的随机作用，使位置发生变化，分别以概率 p 及概率 $q=1-p$ 向正的或负的方向移动一个单位（**直线上无限制的随机游动**）。求质点在时刻 n 时处于位置 k 的概率，即求 $P(S_n=k)$.

2012年概率期末答案

一、填空题：（15分）

1. 0.45 2. $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ 3. $\frac{1}{4}$. 4.（2.6,2.8）. 5. $\frac{1}{4}$

二、选择题：（15分）

1A 2B 3D 4C 5C

三、**解**：设 A_i 表示这段时间内到达百货公司的顾客数 $(i=0,1,2,\cdots)$

利用全概率公式：$A=A_0A+A_1A+\cdots+A_kA+\cdots$

$$P(A)=\sum_{i=0}^{\infty}P(A_i)P(A|A_i)=\sum_{i=k}^{\infty}P(A_i)P(A|A_i)\quad (P(A|A_i)=0,0\le i<k)\quad 4\text{分}$$

$$=\sum_{i=k}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\cdot C_i^k p^k(1-p)^{i-k}$$

$$=\sum_{i=k}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}\cdot e^{-\lambda}\cdot\frac{i!}{k!(i-k)!}p^k(1-p)^{i-k}=\frac{e^{-\lambda}\cdot(\lambda p)^k}{k!}\sum_{i=k}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^{i-k}}{(i-k)!}$$

$$\overset{i-k=m}{=}\frac{(\lambda p)^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}\sum_{m=o}^{\infty}\frac{(\lambda p(1-p))^m}{m!}=\frac{(\lambda p)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda(1-p)}=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}$$

$(k=0,1,2,\cdots)$ 4分

四、**解**：

（1）**分布函数方法**：含 Y 与 $d\cdot f\ F_Y(y)$

$\forall y\in R$，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2-4X+1\le y)$

$$=P\left((X-2)^2\le y+3\right)$$

又 $x\in[0.1]$ $\quad\therefore 1\le (x-2)^2\le 4$ $\quad$ 同样 $1\le y+3\le 4$

$\therefore -2\le y\le 1$ $\quad$ 于是当 $y<-2$ 时，$F_Y(y)=0$ $\quad$ 当 $y>1$ 时，$F_Y(y)=1$

当 $-2\le y\le 1$ 时，$F_Y(y)=P\left((X-2)^2\le y+3\right)$

$$=P\left(2-\sqrt{y+3}\le X\le 2+\sqrt{y+3}\right)$$

$$=P\left(2-\sqrt{y+3}\le X\le 1\right)+P\left(1\le X\le 2+\sqrt{y+3}\right)$$

$$=1-\left(2-\sqrt{y+3}\right)+0=\sqrt{y+3}-1$$

$$\therefore\quad F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<-2\\ \sqrt{y+3}-1, & -2\le y<1\\ 1, & y\ge 1\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y+3}}, & -2\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

或公式法： $y=x^2-4x+1\swarrow$ 严格 $\left(\because y'=2(x-2)<0, x\in(0.1)\right)$ $\quad -2\le y\le 1$

其反函数 $x=h(y)=2-\sqrt{3+y}$ $\quad(-2\le y\le 1)$ $\qquad x'=h'(y)=-\dfrac{1}{2\sqrt{3+y}}$ $\qquad$ 4 分

从而有：$f_Y(y)=f_X(h(y))|h'(y)|=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{3+y}}, & -2\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ 分

（2）$EY=EX^2-4EX+1=-\dfrac{2}{3}$，$DY=\dfrac{34}{45}$ $\qquad$ 2 分

（3）$\rho_{XY}=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=-\dfrac{1}{4}\Big/\sqrt{\dfrac{1}{12}}\times\sqrt{\dfrac{34}{45}}=-\dfrac{3}{4}\sqrt{\dfrac{30}{17}}=-1$ $\qquad$ 2 分

五、**解：**（Ⅰ）由题设有：$P(X^2\ne Y^2)=1-P(X^2=Y^2)=0$

而 $(X=0,Y=\pm1),(X=1,Y=0)\subset(X^2\ne Y^2)$

所以利用概率的非负性和保序性：$\mathrm{P}(\mathrm{X}=0,\mathrm{Y}=\pm1)=0=\mathrm{P}(\mathrm{X}=1,\mathrm{Y}=0)$

再利用联合分布和边缘分布之间的关系可得联合分布列

Y \ X	0	1	P_i
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
P_j	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

X \ Y	0	1	$P_{\bullet j}$
-1	0	1/3	1/3
0	1/3	0	1/3
1	0	1/3	1/3
$P_{i\bullet}$	1/3	2/3	1

4 分

（Π）.

Z=XY 的分布列为：

$$P(Z=0)=P(X=0,Y=\pm1)+P(X=1,Y=0)+P(X+0,Y=0)=\frac{1}{3}$$

$$P(Z=1)=P(X=1,Y=1)=\frac{1}{3}$$

$$P(Z=-1)=P(X=1,Y=-1)=\frac{1}{3}$$

2 分

（ IΠ)

$$COV(X,Y)=EXY-EXEY=\frac{1}{3}\times0+\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{3}\times(-1)-(\frac{1}{3}\times0+\frac{2}{3}\times1).(\frac{1}{3}\times(-1)+\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{3}\times0)=0$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{2}{3}-(\frac{2}{3})^2=\frac{2}{9},DY=EY^2-(EY)^2=\frac{1}{3}\times1^2+\frac{1}{3}\times(-1)^2+\frac{1}{3}\times0^2-0^2=\frac{2}{3}>0$$

所以 $\rho=0$

2 分

六、解：（I）由题设：$Z=X-Y$ 服从正态分布且 $Z\sim N(\mu-\mu,\sigma^2+2\sigma^2)=N(0,3\sigma^2)$

$\therefore Z$ 的概率密度为：$f(z,\sigma^2)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{3}\sigma}e^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}}$ 4 分

（II）似然函数 $L(z_1,\cdots,z_n;\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{3}\sigma}e^{-\frac{z_i^2}{6\sigma^2}}=(6\pi)^{-\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{z_i^2}{6\sigma^2}}$

取对数：$LnL=-\frac{n}{2}Ln6\pi-\frac{n}{2}Ln\sigma^2-\frac{z_i^2}{6\sigma^2}$

令 $\frac{\partial LnL}{\partial\sigma^2}=0=-\frac{n}{2}\times\frac{1}{\sigma^2}+\frac{z_i^2}{6\sigma^4}$，解得：$\sigma^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}z_i^2$

$\therefore$ σ^2 的极大似然估计为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}z_i^2$ 4 分

（III）由题设知：$z_1,z_2,\cdots,z_n$ 独立且与总体 Z 同分布

$$\therefore E\hat{\sigma}^2=E\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}z_i^2=\frac{1}{3n}\times\sum_{i=1}^{n}Ez_i^2=\frac{1}{3n}\times3\sigma^2\times n=\sigma^2$$

于是 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}z_i^2$ 为 σ^2 的无偏估计。 4 分

七、解： 为使质点在时刻 t=n 时位于 k 位置（k 也可以是负值）$\Leftrightarrow$ 在前 n 次游动中向右移动的次数比向左移动的次数多 k 次，若以 x 表示它在前 n 次游动中向右移动的次数，y 表示向左移动的次数，则有：

$$\begin{cases}x+y=n\\x-y=k\end{cases}$$ 2 分

即 $x=\frac{n+k}{2}$,因为 x 是整数，所以 k 与 n 必须具有相同的奇偶性。

事件 $\{S_n=k\}$ 发生相当于要求在前 n 次游动中有 $\frac{n+k}{2}$ 次向右，$\frac{n-k}{2}$ 次向左，利用二项分布即得

$$P\{S_n=k\}=C_n^{\frac{n+k}{2}}p^{\frac{n+k}{2}}q^{\frac{n-k}{2}}$$

当 k 与 n 奇偶性相反时，其概率为 0 2 分