第二章 连续时间系统的时域分析

本章主要研究内容：

- 微分方程的建立与求解
- 零输入、零状态、冲激、阶跃响应
- 卷积、算子
- 分配函数

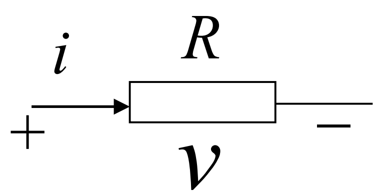
§2.1 微分方程的建立与求解

一、微分方程的建立

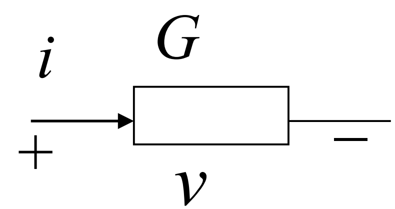
1．元件约束特性

①电路元件

i)电阻R：



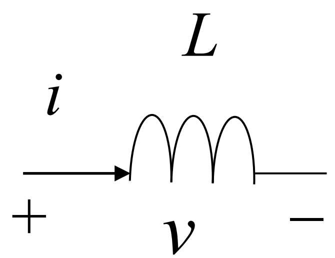
$$v = Ri$$



$$i = Gv$$

§ 2.1 微分方程的建立与求解

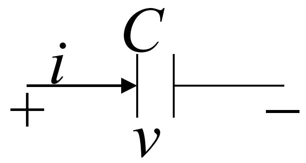
ii)电感L：



$$i = \frac{1}{L}\int v dt \qquad v = L di / dt$$

§ 2.1 微分方程的建立与求解

iii)电容C：



$$i = C\frac{dv}{dt} \qquad v = \frac{1}{C}\int i dt$$

§2.1 微分方程的建立与求解

2．网络拓扑约束

①电路系统

i)KVL： $\sum_{k=1}^{N} v_k = 0$

ii)KCL： $\sum_{k=1}^{N} i_k = 0$

②机械系统：达朗贝尔原理

i) $\sum_{i=1}^{M} F_i = 0$

ii) $\sum_{k=1}^{N} v_k = 0$

§2.1 微分方程的建立与求解

3．不同性质系统可用相同微分方程描述

4．电路类微分方程建立例子

§2.1 微分方程的建立与求解

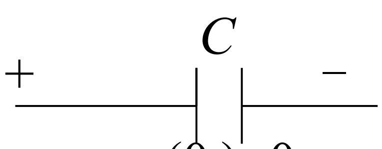
6. 线性时不变系统的微分方程特点

①一般形式：线性常系数微分方程

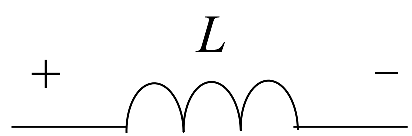
$$c_0\frac{d^n}{dt^n}r(t)+c_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}r(t)+\cdots+c_{n-1}\frac{d}{dt}r(t)+c_nr(t)$$

$$=E_0\frac{d^m}{dt^m}e(t)+E_1\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}e(t)+\cdots+E_{m-1}\frac{d}{dt}e(t)+E_me(t)$$

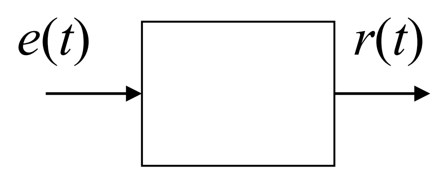
②若组成系统的元件线性、参数恒定且无初始储能，则系统为线性时不变系统



$v_c(0_-)=0$



$i_L(0_-)=0$



0_-:激励加入前的时刻

§2.1 微分方程的建立与求解

二、微分方程的经典时域求解法（齐次解+特解法）

1．齐次解（自由响应）

①齐次方程：

$$c_0\frac{d^n}{dt^n}r(t)+c_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}r(t)+\cdots+c_{n-1}\frac{d}{dt}r(t)+c_nr(t)=0$$

②齐次解$r_h(t)$形式：$Ae^{\alpha t}$函数的线性组合

令$r(t)=Ae^{\alpha t}$代入上式化简得特征方程

$$c_0\alpha^n+c_1\alpha^{n-1}+\cdots+c_{n-1}\alpha+c_n=0$$

有n个根$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$

§ 2.1 微分方程的建立与求解

③各种特征根情况下的齐次解形式

i)互不相同实根:$r_h(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + \cdots + A_n e^{\alpha_n t}$

ii) α_1为k重特征根，与α_1有关的齐次解部分：

$$(A_1 t^{k-1} + A_2 t^{k-2} + \cdots + A_k) e^{\alpha_n t}$$

iii) α_1与α_2为共轭复根 $p \pm qj$（一重），对应齐次解部分：

$$(A_1 \cos qt + A_2 \sin qt) e^{pt}$$

iv) α_1与α_2为共轭复根$p \pm qj$（k重），对应齐次解部分为：

$$[(A_1 t^{k-1} + A_2 t^{k-2} + \ldots + A_k) \cos qt + (B_1 t^{k-1} + B_2 t^{k-2} + \ldots + B_k) \sin qt] e^{pt}$$

§2.1 微分方程的建立与求解

[例3]：求下列微分方程的齐次解形式

① $$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+3\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=\frac{d}{dt}e(t)+3e(t)$$

解：

$$\alpha^2+3\alpha+2=0 \Rightarrow \alpha_1=-1,\ \alpha_2=-2$$

$$\Rightarrow r_h(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}$$

§2.1 微分方程的建立与求解

[例3]：求下列微分方程的齐次解形式

② $$\frac{d^3}{dt^3}r(t)+7\frac{d^2}{dt^2}r(t)+16\frac{d}{dt}r(t)+12r(t)=e(t)$$

解： $$\alpha^3+7\alpha^2+16\alpha+12=0 \Rightarrow \alpha_{1,2}=-2(\text{二重}),\quad \alpha_3=-3$$

$$\Rightarrow r_h(t)=(A_1t+A_2)e^{-2t}+A_3e^{-3t}$$

§ 2.1 微分方程的建立与求解

[例3]：求下列微分方程的齐次解形式

③ $$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+2\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=\frac{d}{dt}e(t)$$

解：

$$\alpha^2+2\alpha+2=0\Rightarrow\alpha_{1,2}=-1\pm j\text{(一重共轭)},$$

$$\Rightarrow r_h(t)=(A_1\cos t+A_2\sin t)e^{-t}$$

§2.1 微分方程的建立与求解

2．特解（强迫响应）：由激励形式和特征根情况共同决定

①将激励代入微分方程右端，化简得自由项（t>0时）

②根据自由项形式与特征根情况设特解 $r_p(t)$

，如下特解表所示 〈为什么要考虑特征根情况?〉

$$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+3\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=\frac{d}{dt}e(t)+e(t) \quad e(t)=e^{-2t}u(t)$$

注：$P_\lambda(t)$为λ次多项式；$P_s(t)$为s次多项式；

$l=\max\{\lambda, s\}$； $Q_\lambda(t)$为λ次多项式；

$Q_l(t)$，$G_l(t)$为l次多项式。

§2.1 微分方程的建立与求解

自由项形式	特征根情况	特解形式
E(常数)	0 不是	B(常数)
	0 是 k 重根	Bt^k
$P_\lambda(t)$(λ 次多项式)	0 不是	$Q_\lambda(t)$
	0 是 k 重	$t^k Q_\lambda(t)$
Ee^{at}	a 不是	Be^{at}
	a 是 k 重	$Bt^k e^{at}$
$e^{at}\ P_\lambda(t)$	a 不是	$e^{at}\ Q_\lambda(t)$
	a 是 k 重	$t^k e^{at}\ Q_\lambda(t)$

§2.1 微分方程的建立与求解

自由项形式	特征根情况	特解形式
$E\cos\omega t$ 或 $E\sin\omega t$	$\pm j\omega$ 不是	$B_1\cos\omega t + B_2\sin\omega t$
	$\pm j\omega$ 是 k 重	$t^k(B_1\cos\omega t + B_2\sin\omega t)$
$P_\lambda(t)\cos\omega t + P_s(t)\sin\omega t$	$\pm j\omega$ 不是	$Q_l(t)\cos\omega t + G_l(t)\sin\omega t$
	$\pm j\omega$ 是 k 重	$t^k[Q_l(t)\cos\omega t + G_l(t)\sin\omega t]$
$e^{at}[P_\lambda(t)\cos\omega t + P_s(t)\sin\omega t]$	$a\pm j\omega$ 不是	$e^{at}[Q_l(t)\cos\omega t + G_l(t)\sin\omega t]$
	$a\pm j\omega$ 是 k 重	$t^k e^{at}[Q_l(t)\cos\omega t + G_l(t)\sin\omega t]$

③确定特解

§2.1 微分方程的建立与求解

[例4]：求下列微分方程的特解

① $$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+3\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=\frac{d}{dt}e(t)+e(t)$$

特征根：$\alpha_1=-1,\alpha_2=-2$

i) $e(t)=t^2$

自由项= t^2+2t，0不是特征根，$r_p(t)$ =$B_0t^2+B_1t+B_2$

代入左端令对应系数相等可得：

$$B_0+3(2B_0t+B_1)+2(B_0t^2+B_1t+B_2)=t^2+2t$$

B_0=0.5, B_1=-0.5, B_2=0.5

§ 2.1 微分方程的建立与求解

3．完全解

①写出完全解：$r(t) = r_p(t) + r_h(t)$, 其中$r_h(t)$ 有n个待定系数

②待定系数由初始条件确定

i)求解区间$0_+ \le t \le +\infty$

ii)初始条件 $r^{(k)}(0_+) = \{r^{(0)}(0_+), r^{(1)}(0_+),\ldots, r^{(n-1)}(0_+)\}$

iii)设n个特征根 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$互不相同，则

$$r(t) = r_p(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\alpha_i t}$$

将初始条件代入方程组：

§2.2 零输入、零状态

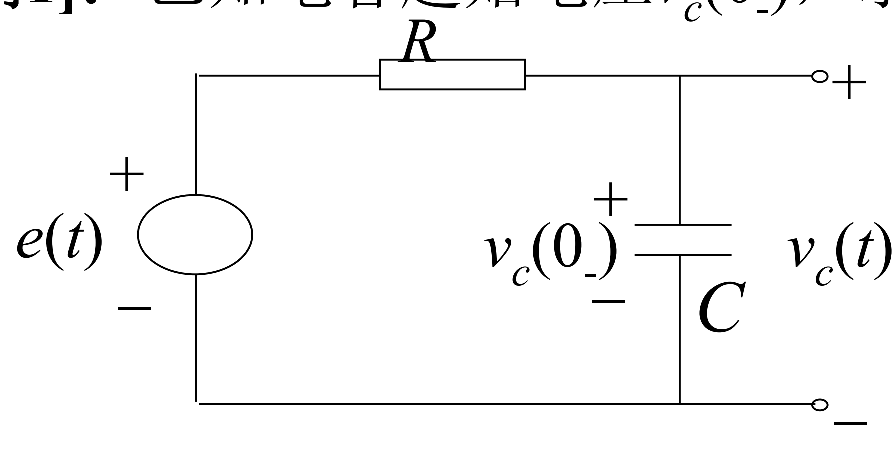
一、零输入、零状态响应

1．概念的引出

①上节课：完全响应=自由响应+强迫响应，
其中自由响应待定系数由冲激函数匹配法求出

②本节讲另一种求法：完全响应=零输入响应+零状态响应

[例1]：已知电容起始电压$v_c(0_-)$，求$v_c(t)$ $(t>0)$



§ 2.2 零输入、零状态

解：

$$\frac{d}{dt}v_c(t)+\frac{1}{RC}v_c(t)=\frac{1}{RC}e(t)\Rightarrow e^{\frac{t}{RC}}\frac{d}{dt}v_c(t)+\frac{1}{RC}e^{\frac{t}{RC}}v_c(t)=\frac{1}{RC}e^{\frac{t}{RC}}e(t)$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dt}\left[e^{\frac{t}{RC}}v_c(t)\right]=\frac{1}{RC}e^{\frac{t}{RC}}e(t)\Rightarrow\int_{0-}^{t}\frac{d}{d\tau}\left[e^{\frac{\tau}{RC}}v_c(\tau)\right]d\tau=\int_{0-}^{t}\frac{1}{RC}e^{\frac{\tau}{RC}}e(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow e^{\frac{t}{RC}}v_c(t)-v_c(0_-)=\frac{1}{RC}\int_{0-}^{t}e^{\frac{\tau}{RC}}e(\tau)d\tau\Rightarrow$$

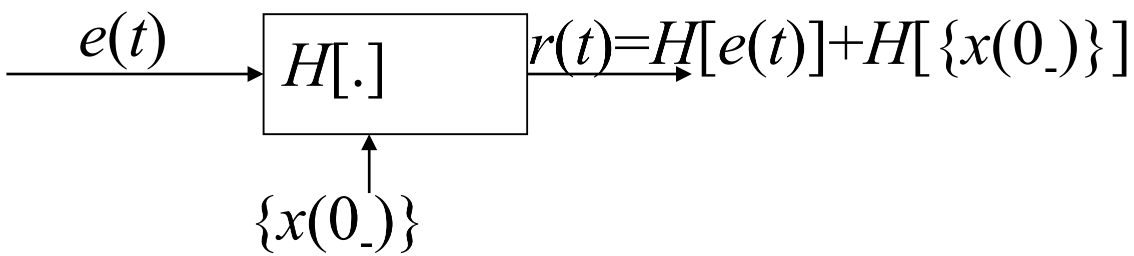
$$v_c(t)=e^{\frac{-t}{RC}}v_c(0_-)\quad+\quad\frac{1}{RC}\int_{0-}^{t}e^{\frac{-1}{RC}(t-\tau)}e(\tau)d\tau$$

零输入　　　　　零状态

只与起始状态有关　只与输入有关，卷积形式

§2.2 零输入、零状态、冲激、阶跃响应

③



§ 2.2 零输入、零状态、冲激、阶跃响应

2．零输入响应的定义与待定系数确定

①定义：没有外加激励信号作用，完全由起始状态所产生的响应，即 $r_{zi}(t)=H[\{x(0_-)\}]$

②满足方程：$c_0\dfrac{d^n}{dt^n}r_{zi}(t)+\ldots+c_{n-1}\dfrac{d}{dt}r_{zi}(t)+c_n r_{zi}(t)=0$

故 $r_{zi}(t)$ 是一种齐次解形式，即 $r_{zi}(t)=\sum_{k=1}^{n}A_{zik}e^{\alpha_k t}$

其中，$\alpha_1,\alpha_2\ldots\ldots\alpha_n$ 为互不相等的n个系统特征根。

③初始条件：$r_{zi}^{(k)}(0_+)=r_{zi}^{(k)}(0_-)=r^{(k)}(0_-)$

即齐次解 $r_{zi}(t)$的待定系数用$r^{(k)}(0_-)$ 确定即可！

§ 2.2 零输入、零状态、冲激、阶跃响应

3．零状态响应的定义与待定系数确定

①定义：起始状态为0，只由激励产生的响应$r_{zs}(t)=H[e(t)]$

②满足方程：

$$c_0\frac{d^n}{dt^n}r_{zs}(t)+\ldots\ldots+c_{n-1}\frac{d}{dt}r_{zs}(t)+c_n r_{zs}(t)=E_0\frac{d^m}{dt^m}e(t)+\ldots\ldots+E_m$$

故 $r_{zs}(t)$含特解$r_p(t)$，即 $r_{zs}(t)=\sum_{k=1}^{n}A_{zsk}e^{\alpha_k t}+r_p(t)$

③初始条件：

由于$r_{zs}^{(k)}(0_)=0$，

$r_{zs}^{(k)}(0_+)-r_{zs}^{(k)}(0\_)=r^{(k)}(0_+)-r^{(k)}(0\_)$=跳变值

故$r_{zs}^{(k)}(0_+)$ =跳变值，即系数A_{zsk}由跳变值确定。