東北大學
Northeastern University

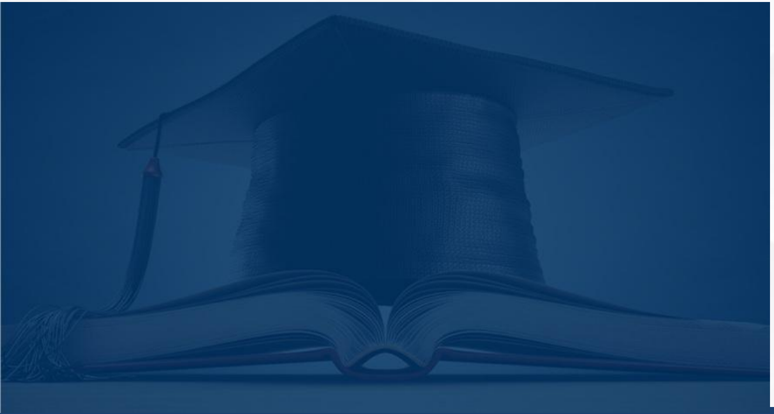
数值分析

理学院　　数学系

计算数学教研室

2017年12月13日

02 解线性方程组的直接方法



解线性方程组的直接方法

已有研究

Gauss消去法

直接三角分解方法

平方根方法

追赶法

向量和矩阵的范数

线性方程组固有性态与误差分析

顺序Gauss消去法

现实意义

在工程技术、自然科学和社会科学中，经常遇到的许多问题最终都可归结为解线性方程组

1. 用最小二乘法求实验数据的曲线拟合问题
2. 工程中的三次样条函数的插值问题
3. 经济运行中的投入产出问题
4. 大地测量、机械与建筑结构的设计计算问题

都可归结为求解线性方程组(或非线性方程组)的数学问题。因此线性方程组的求解对于实际问题是**极其重要**的

顺序Gauss消去法

本节讨论n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

的直接解法。 方程组(1)的矩阵形式为 $\mathbf{Ax}=\mathrm{b}$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

顺序Gauss消去法

若矩阵A非奇异，即$\det(A)\neq 0$，则方程组(1)有唯一解。

所谓直接解法是指，若不考虑计算过程中的舍入误差，经过有限次算术运算就能求出线性方程组的精确解的方法。但由于实际计算中舍入误差的存在，用直接解法一般也只能求出方程组的近似解。

Cramer法则是一种不实用的直接法，下面介绍几种实用的直接法。

Gauss消去法是一种规则化的加减消元法，其基本思想是通过逐次消元计算，把一般线性方程组的求解转化为等价的上三角形方程组的求解。

为了清楚起见，先看一个简单的例子.

顺序Gauss消去法

考虑线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2-2x_3=2 \\ x_1-3x_2-3x_3=-1 \\ 4x_1+2x_2+2x_3=3 \end{cases}$$

消去后两个方程中的x_1

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2-2x_3=2 \\ \quad\;\; -5x_2-2x_3=-2 \\ \quad\;\; -6x_2+6x_3=-1 \end{cases}$$

再消去最后一个方程的x_2

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2-2x_3=2 \\ \quad\;\; -5x_2-2x_3=-2 \\ \qquad\qquad \dfrac{42}{5}x_3=\dfrac{7}{5} \end{cases}$$

消元结束，经过回代得解：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{2} \\ x_2=\dfrac{1}{3} \\ x_3=\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

顺序Gauss消去法

上述求解的消元过程可用矩阵表示为:

$$(A,b)=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -3 & -1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3-2r_1}{\overset{r_2-\frac{1}{2}r_1}{\sim}}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & -2 & -2 \\ 0 & -6 & 6 & -1 \end{pmatrix} \overset{r_3-\frac{6}{5}r_2}{\sim}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{42}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

这是Gauss消去法的计算形式, 新的增广矩阵对应的线性方程组就是上三角形方程组, 可进行回代求解。

顺序Gauss消去法

现在介绍求解线性方程组(1)的顺序Gauss消去法:

记 $\mathbf{A}^{(1)}=\mathbf{A},\mathbf{b}^{(1)}=\mathbf{b},a_{ij}^{(1)}=a_{ij},b_i^{(1)}=b_i$

则,线性方程组(1)的增广矩阵为

$$(\mathbf{A}^{(1)},\mathbf{b}^{(1)})=\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

顺序Gauss消去法

第一步. 设$a_{11}^{(1)} \neq 0$, 依次用 $-l_{i1} = -\dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$, $(i = 2,3,\ldots,n)$

乘矩阵的第1行加到第i行, 得到矩阵:

$$(\mathbf{A}^{(2)},\mathbf{b}^{(2)}) = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \ldots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \ldots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

顺序Gauss消去法

其中

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - l_{i1} a_{1j}^{(1)}, \quad i, j = 2,3,\dots,n$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - l_{i1} b_1^{(1)}, \quad i = 2,3,\dots,n$$

第二步. 设 $a_{22}^{(2)} \neq 0$ ，依次用 $-l_{i2} = -\dfrac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}, \quad (i = 3,4,\dots,n)$

乘矩阵的第2行加到第i行, 得到矩阵:

$$(\mathbf{A}^{(3)}, \mathbf{b}^{(3)}) = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \dots & a_{nn}^{(3)} & b_n^{(3)} \end{pmatrix}$$

顺序Gauss消去法

其中

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - l_{i2}a_{2j}^{(2)}, \quad i,j = 3,4,\ldots,n$$

$$b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - l_{i2}b_2^{(2)}, \quad i = 3,4,\ldots,n$$

如此继续消元下去, 第n-1步结束后得到矩阵:

$$(\mathbf{A}^{(n)},\mathbf{b}^{(n)}) = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \ldots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

这就完成了消元程。对应的方程组变成:

顺序Gauss消去法

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ \qquad a_{22}^{(2)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)} \end{cases}$$

对此方程组进行回代，就可求出方程组的解。

$$\begin{cases} x_n = b_n^{(n)} \div a_{nn}^{(n)} \\ x_i = (b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)}x_j) \div a_{ii}^{(i)}, \quad i = n-1, n-2, \cdots, 1 \end{cases}$$

顺序Gauss消去法求解n元线性方程组的乘除运算量是：

顺序Gauss消去法

$$n^2-1+(n-1)^2-1+\ldots+2^2-1+1+2+\ldots+n$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(k^2-1)+\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-n+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{1}{3}(n^3+3n^2-n)$$

n=20时，顺序Gauss消去法只需3060次乘除法运算（$9.7*10^{20}$）

顺序Gauss消去法通常也简称为**Gauss消去法**.

顺序Gauss消去法中的 $a_{kk}^{(k)}(k=1,2,\ldots,n)$ 称为**主元素**.

主元素都不为零⇔矩阵A的各阶顺序主子式都不为零.

列主元Gauss消去法

例1 解线性方程组(用十进制四位浮点计算):

$$\begin{cases} 0.000100x_1 + 1.00x_2 = 1.00 \\ 1.00x_1 + 1.00x_2 = 2.00 \end{cases}$$

(用Cramer法则可得精确解$x_1^*=1.00010$ ，$x_2^*=0.99990$)

解 用顺序Gauss消去法，消元得

$$\begin{cases} 0.000100x_1 + 1.00x_2 = 1.00 \\ -10000x_2 = -10000 \end{cases}$$

回代得解：$x_2=1.00$ ，$x_1=0.00$

列主元Gauss消去法

若将方程组改写成:

$$\begin{cases} 1.00x_1 + 1.00x_2 = 2.00 \\ 0.000100x_1 + 1.00x_2 = 1.00 \end{cases}$$

用顺序Gauss消去法，消元得

$$\begin{cases} 1.00x_1 + 1.00x_2 = 2.00 \\ 1.00x_2 = 1.00 \end{cases}$$

回代得解: x_2=1. 00 , x_1=1. 00

为了提高计算的数值稳定性, 在消元过程中采用选择主元的方法. 常采用的是**列主元消去法**和**全主元消去法**.

列主元Gauss消去法

给定线性方程组$Ax=b$，记$A^{(1)}=A$, $b^{(1)}=b$, 列主元Gauss消去法的具体过程如下：

首先在增广矩阵$B^{(1)}=(A^{(1)}, b^{(1)})$的第一列元素中，取

$$\left|a_{k1}^{(1)}\right| = \max_{1\le i\le n}\left|a_{i1}^{(1)}\right| \text{ 为主元素，} r_k \leftrightarrow r_1.$$

再在矩阵$B^{(2)}=(A^{(2)}, b^{(2)})$的第二列元素中，取

$$\left|a_{k2}^{(2)}\right| = \max_{2\le i\le n}\left|a_{i2}^{(2)}\right| \text{ 为主元素，} r_k \leftrightarrow r_2.$$

按此方法继续进行下去，经过$n-1$步选主元和消元运算，得到增广矩阵$\mathbf{B}^{(n)}=(\mathbf{A}^{(n)},\mathbf{b}^{(n)})$. 则方程组$\mathbf{A}^{(n)}\mathbf{x}=\mathbf{b}^{(n)}$是与原方程组等价的上三角形方程组，可进行回代求解.

易证，只要$|A|\neq 0$，列主元Gauss消去法就可顺利进行.

列主元Gauss消去法

例2. 采用十进制四位浮点计算, 分别用顺序Gauss消去法和列主元Gauss消去法求解线性方程组:

$$\begin{cases} 0.012x_1 + 0.01x_2 + 0.167x_3 = 0.6781 \\ x_1 + 0.8334x_2 + 5.91x_3 = 12.1 \\ 3200x_1 + 1200x_2 + 4.2x_3 = 981 \end{cases}$$

方程组具有四位有效数字的精确解为

$x_1^*=17.46$, $x_2^*=-45.76$, $x_3^*=5.546$

列主元Gauss消去法

解 1. 用顺序Gauss消去法求解, 消元过程为

$$\begin{pmatrix} 0.0120 & 0.0100 & 0.167 & 0.6781 \\ 1.000 & 0.8334 & 5.910 & 12.10 \\ 3200 & 1200 & 4.200 & 981.0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0.0120 & 0.0100 & 0.1670 & 0.6781 \\ 0 & 0.1000\times10^{-3} & -8.010 & -44.41 \\ 0 & -1467 & -4453\times10 & -1798\times10^{2} \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0.0120 & 0.0100 & 0.1670 & 0.6781 \\ 0 & 0.1000\times10^{-3} & -8.010 & -44.41 \\ 0 & 0 & -1175\times10^{5} & -6517\times10^{5} \end{pmatrix}$$

回代得： $x_3=5.546$， $x_2=100.0$， $x_1=-104.0$

列主元Gauss消去法

用列主元Gauss消去法求解，消元过程为

$$\begin{pmatrix} 0.0120 & 0.0100 & 0.1670 & 0.6781 \\ 1.000 & 0.8334 & 5.910 & 12.10 \\ 3200 & 1200 & 4.200 & 981.0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{} \underset{r_1\leftrightarrow r_3}{\overset{\text{选主元}}{\sim}} \begin{pmatrix} 3200 & 1200 & 4.200 & 981.0 \\ 1.000 & 0.8334 & 5.910 & 12.10 \\ 0.0120 & 0.0100 & 0.1670 & 0.6781 \end{pmatrix} \xrightarrow{} \sim \begin{pmatrix} 3200 & 1200 & 4.200 & 981.0 \\ 0 & 0.4584 & 5.909 & 11.79 \\ 0 & 0.55\times 10^{-2} & 0.1670 & 0.6744 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{} \sim \begin{pmatrix} 3200 & 1200 & 4.200 & 981.0 \\ 0 & 0.4584 & 5.909 & 11.79 \\ 0 & 0 & 0.0961 & 0.5329 \end{pmatrix} \xrightarrow{} \sim \begin{pmatrix} 3200 & 1200 & 4.200 & 981.0 \\ 0 & 0.4584 & 5.909 & 11.79 \\ 0 & 0 & 0.0961 & 0.5329 \end{pmatrix}$$

回代得：$x_3=5.545$，$x_2=-45.77$，$x_1=17.46$

列主元Gauss消去法

可见，列主元Gauss消去法是在每一步消元前，在主元所在的一列选取绝对值最大的元素作为主元素. 而全主元Gauss消去法是在每一步消元前，在所有元素中选取绝对值最大的元素作为主元素. 但由于运算量大增，实际应用中并不经常使用.

矩阵三角分解法

Gauss消去法的矩阵运算

对矩阵 $\mathbf{A}^{(1)}=\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}$

若 $a_{11}^{(1)}\neq 0$，令 $l_{i1}=a_{i1}^{(1)}\div a_{11}^{(1)}, i=2,3,\cdots,n,$ 记

$$\mathbf{L}_1=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -l_{21} & 1 & & & \\ -l_{31} & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -l_{n1} & & & & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵三角分解法

则有

$$\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{L}_1\mathbf{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

若 $a_{22}^{(2)} \neq 0$, 令 $l_{i2} = a_{i2}^{(2)} \div a_{22}^{(2)}, i = 3, 4, \dots, n$, 记

$$\mathbf{L}_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & -l_{32} & 1 & & \\ & \vdots & & \ddots & \\ & -l_{n2} & & & 1 \end{pmatrix}$$

则有

矩阵三角分解法

$$\mathbf{A}^{(3)} = \mathbf{L}_2\mathbf{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} \end{pmatrix}$$

如此进行下去, 第n-1步得到:

$$\mathbf{A}^{(n)} = \mathbf{L}_{n-1}\mathbf{A}^{(n-1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}$$

其中

矩阵三角分解法

$$\mathbf{L}_{n-1}=\begin{pmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&&\ddots&&\\&&&1&\\&&&-l_{n,n-1}&1\end{pmatrix}$$

也就是:

$$\mathbf{A}^{(n)}=\mathbf{L}_{n-1}\mathbf{A}^{(n-1)}=\mathbf{L}_{n-1}\mathbf{L}_{n-2}\mathbf{A}^{(n-2)}=\ldots=\mathbf{L}_{n-1}\mathbf{L}_{n-2}\ldots\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1\mathbf{A}^{(1)}$$

其中

$$\mathbf{L}_k=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&-l_{k+1k}&1&&\\&&\vdots&&\ddots&\\&&-l_{nk}&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\\\\leftarrow 第k行\\\\\\\\\end{array},k=1,2,\cdots,n-1$$

矩阵三角分解法

所以有:

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}^{(1)}=\mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2^{-1}\ldots\mathbf{L}_{n-1}^{-1}\mathbf{A}^{(n)}=\mathbf{LU}$$ A的LU三角分解

其中$\mathbf{L}=\mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2^{-1}\ldots\mathbf{L}_{n-1}^{-1}$，$\mathbf{U}=\mathbf{A}^{(n)}$.

而且有

$$\mathbf{L}_k^{-1}=\begin{pmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & l_{k+1k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & l_{nk} & & & 1\end{pmatrix},\mathbf{L}=\begin{pmatrix}1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

L为单位下三角矩阵;

U是上三角矩阵.

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix}a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)}\end{pmatrix}$$

直接三角分解法

定理2.1 设n阶方阵**A**的各阶顺序主子式不为零, 则存在唯一单位下三角矩阵**L**和上三角矩阵**U**使**A=LU** .

证明 只证唯一性，设有两种分解

$$A = LU = \overline{L}\,\overline{U}$$

则有 $\underbrace{\overline{L}^{-1} L}_{\text{单位下三角阵}} = \underbrace{\overline{U} U^{-1}}_{\text{上三角形矩阵}} = E$ 所以得 $L = \overline{L}, U = \overline{U}.$

于是 **Ax=b** $\Rightarrow$ **LUx=b** 令 **Ux=y** 得 $\begin{cases} \mathbf{Ly} = \mathbf{b} \\ \mathbf{Ux} = \mathbf{y} \end{cases}$

直接三角分解法

下面介绍矩阵三角分解的Doolittle分解方法，设

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

则得

$$u_{1j} = a_{1j} \quad j = 1,2,\cdots n$$

$$l_{i1} = a_{i1} \div u_{11} \quad i = 2,3,\cdots,n$$

对k=2, 3, …, n, 计算

$$u_{kj} = a_{kj} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km} u_{mj} \quad j = k, k+1, \cdots, n$$

$$a_{kj} = l_{k1}u_{1j} + l_{k2}u_{2j} + \dots + l_{kk-1}u_{k-1j} + u_{kj}$$

$$l_{ik} = (a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im} u_{mk}) \div u_{kk} \quad ,i = k+1, k+2, \cdots, n$$

$$a_{ik} = l_{i1}u_{1k} + l_{i2}u_{2k} + \dots + l_{ik}u_{kk}$$

直接三角分解法

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ l_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1k-1} & u_{1k} & \cdots & u_{1n} \\ l_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2k-1} & u_{2k} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{k-11} & l_{k-12} & \cdots & u_{k-1k-1} & u_{k-1k} & \cdots & u_{k-1n} \\ l_{k1} & l_{k2} & \cdots & l_{kk-1} & u_{kk} & \cdots & u_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nk-1} & l_{nk} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} u_{1j} = a_{1j} \quad j = 1,2,\ldots,n \\ l_{i1} = a_{i1} \div u_{11} \quad i = 2,3,\ldots,n \\ \text{对}k=2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \text{计算} \\ u_{kj} = a_{kj} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km} u_{mj} \quad j = k, k+1, \ldots, n \\ l_{ik} = (a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im} u_{mk}) \div u_{kk} \quad , i = k+1, k+2, \ldots, n \end{cases}$$

直接三角分解法

由

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

可得

$$\begin{cases} y_1 = b_1 \\ y_k = b_k - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki} y_i \quad , k = 2, 3, \ldots, n \\ x_n = y_n \div u_{nn} \\ x_i = (y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j) \div u_{ii} \quad , i = n-1, n-2, \ldots, 1 \end{cases}$$

这就是求解方程组Ax=b的Doolittle三角分解方法。

直接三角分解法

例3：利用三角分解方法解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=1 \\ 2x_1-x_2+3x_3=5 \\ 3x_1-2x_2+2x_3=1 \end{cases}$$

解 因为

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -5 & 9 \\ 3 & \frac{8}{5} & -\frac{17}{5} \end{pmatrix}$$

所以

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & \frac{8}{5} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ & -5 & 9 \\ & & -\frac{17}{5} \end{pmatrix}$$

直接三角分解法

先解
$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & \frac{8}{5} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}，得 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -\frac{34}{5} \end{pmatrix}$$

再解
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ & -5 & 9 \\ & & -\frac{17}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -\frac{34}{5} \end{pmatrix}，得 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

解线性方程组Ax=b的Doolittle三角分解法的计算量约为 (1/3)n^3, 与Gauss消去法基本相同. 其优点在于求一系列同系数的线性方程组Ax=b_k , (k=1, 2, ..., m)时, 可大大节省运算量.

例如, 求上例中矩阵A的逆矩阵. 可分别取常向量

$b_1=(1, 0, 0)^T$, $b_2=(0, 1, 0)^T$, $b_3=(0, 0, 1)^T$

直接三角分解法

由

$$\begin{pmatrix}1&&\\2&1&\\3&\frac{8}{5}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&-3\\&-5&9\\&&-\frac{17}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},\text{得}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{17}\\\frac{5}{17}\\-\frac{1}{17}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&&\\2&1&\\3&\frac{8}{5}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&-3\\&-5&9\\&&-\frac{17}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},\text{得}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{17}\\\frac{11}{17}\\\frac{8}{17}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&&\\2&1&\\3&\frac{8}{5}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&-3\\&-5&9\\&&-\frac{17}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},\text{得}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{17}\\-\frac{9}{17}\\-\frac{5}{17}\end{pmatrix}$$

所以

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{4}{17} & \frac{2}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{5}{17} & \frac{11}{17} & -\frac{9}{17} \\ -\frac{1}{17} & \frac{8}{17} & -\frac{5}{17} \end{pmatrix}=\frac{1}{17}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 5 & 11 & -9 \\ -1 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

直接三角分解法

所以为了提高数值稳定性, 可考虑列主元三角分解法, 设已完成**A=LU**的k-1步分解计算, 矩阵分解成

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1k} & \cdots & u_{1n} \\ l_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2k} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ l_{k-11} & l_{k-12} & \cdots & u_{k-1k} & \cdots & u_{k-1n} \\ l_{k1} & l_{k2} & \cdots & a_{kk} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

设 $a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} u_{jk} = \max_{k \le t \le n} \left(a_{tk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{tj} u_{jk} \right)$ 令 $r_k \leftrightarrow r_i$

相当于取 $u_{kk} = a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} u_{jk}$ 为第k步分解的主元素.但要注意方程组的常数项也要相应变换.

直接三角分解法

例如,用列主元三角分解解例3中方程组.则有

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & -2 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_3]{}\begin{pmatrix}3 & -2 & 2\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}3 & -2 & 2\\ \frac{2}{3} & -1 & 3\\ \frac{1}{3} & 2 & -3\end{pmatrix}$$

因为 $-1+\frac{4}{3}=\frac{1}{3}<2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$

$$\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{}\begin{pmatrix}3 & -2 & 2\\ \frac{1}{3} & 2 & -3\\ \frac{2}{3} & -1 & 3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}3 & -2 & 2\\ \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{11}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{8} & \frac{17}{8}\end{pmatrix}$$

直接三角分解法

解方程 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{3} & 1 & \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$,得 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{17}{4} \end{pmatrix}$

再解方程 $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ & \frac{8}{3} & -\frac{11}{3} \\ & & \frac{17}{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{17}{4} \end{pmatrix}$,得解 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

平方根法

设**A**为对称正定矩阵，则有唯一分解**A=LU**, 且u_{kk}>0.

$$\text{而}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & & & \\ & u_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix}}_{\uparrow\ \mathbf{D}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{u_{12}}{u_{11}} & \cdots & \frac{u_{1n}}{u_{11}} \\ & 1 & \cdots & \frac{u_{2n}}{u_{22}} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix}}_{\uparrow\ \mathbf{M}}$$

则有　**A=LDM** $=$**LDL**^{T}

又因为　**(LDM)**^{T}**=M**^{T}**DL**^{T}**=LDM**　所以 **M=L**^{T}

$$\text{令}\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{u_{11}} & & & \\ & \sqrt{u_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{u_{nn}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{u_{11}} & & & \\ & \sqrt{u_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{u_{nn}} \end{pmatrix} = \mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}$$

则有　$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{L}^{\mathbf{T}} = (\mathbf{L}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}})(\mathbf{L}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}})^{\mathbf{T}} = \mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathbf{T}}$ 其中, $\mathbf{G} = \mathbf{L}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}$

平方根法

分解**A=GG**^{T}称为对称正定矩阵的**Cholesky分解.**

Ax=b 转换为 **Gy=b** , **G**^{T}**x=y** ______平方根法.

若记$G=(g_{ij})$， 则有： 对k=1, 2, …, n

$$\begin{cases} g_{kk}=(a_{kk}-\sum_{m=1}^{k-1}g_{km}^2)^{\frac{1}{2}} \\ g_{ik}=(a_{ik}-\sum_{m=1}^{k-1}g_{im}g_{km})\div g_{kk} \qquad ,i=k+1,\cdots,n \end{cases}$$

实际计算时, 可采用紧凑格式

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{21} & g_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ g_{k1} & g_{k2} & \cdots & g_{kk} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nk} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

平方根法

解三角方程 **Gy=b** , $\mathbf{G^T x=y}$ 可得

$$\begin{cases} y_k = (b_k - \sum_{m=1}^{k-1} g_{km} y_m) \div g_{kk} & ,k=1,2,\cdots,n \\ x_k = (y_k - \sum_{m=k+1}^{n} g_{mk} x_m) \div g_{kk} & ,k=n,n-1,\cdots,1 \end{cases}$$

例4 解线性方程组

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4 \\ 2x_1 + 10x_2 - x_3 = 17 \\ 4x_1 - x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

解

$$\begin{pmatrix} 4 & & \\ 2 & 10 & \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & & \\ 1 & 3 & \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

平方根法

所以 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&&\\1&3&\\2&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&2\\&3&-1\\&&1\end{pmatrix}$

解方程 $\begin{pmatrix}2&&\\1&3&\\2&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\17\\0\end{pmatrix}$，得 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$

再解方程 $\begin{pmatrix}2&1&2\\&3&-1\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$，得 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$

平方根法是求对称正定系数线性方程组的三角分解法,对称正定矩阵的Cholesky分解的计算量和存贮量均约为一般矩阵的**LU**分解的一半. 且Cholesky分解具有数值稳定性.

追赶法

追赶法是求三对角线性方程组的三角分解法.即方程

$$\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ d_2 & a_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & d_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & d_n & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

三对角矩阵**A**的各阶顺序主子式都不为零的一个充分条件是:

$$|a_1|>|c_1|>0 \ ; \ |a_n|>|d_n|>0 \ ; \ |a_i|\geq|c_i|+|d_i| \ , \ c_i d_i \neq 0 \ , i=2,3,\ldots,n-1.$$

在此条件下, **A=LDM=TM** , 称之为矩阵**A**的**Crout分解.**

对三对角矩阵**A**进行Crout分解,有

追赶法

$$
\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & & & & \\ \gamma_2 & \alpha_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \gamma_{n-1} & \alpha_{n-1} & \\ & & & \gamma_n & \alpha_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \beta_1 & & & \\ & 1 & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \beta_{n-1} \\ & & & & 1\end{pmatrix}
$$

其中
$$
\begin{cases}\alpha_1=a_1,\beta_1=c_1\div\alpha_1,\gamma_i=d_i,i=2,3,\ldots,n \\ \alpha_i=a_i-d_i\beta_{i-1},i=2,3,\ldots,n \\ \beta_i=c_i\div\alpha_i,i=2,3,\ldots,n-1\end{cases}
$$

解三角方程 **Ty=b** , **Mx=y** 可得
$$
\begin{cases}y_1=b_1\div\alpha_1,y_i=(b_i-\gamma_i y_{i-1})\div\alpha_i,i=2,3,\ldots,n \\ x_n=y_n,x_i=y_i-\beta_i x_{i+1},i=n-1,n-2,\ldots,1\end{cases}
$$

追赶法

称之为解三对角方程组的追赶法.

例 5 解线性方程组 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & & \\ -1 & 3 & 2 & \\ & -1 & 3 & 2 \\ & & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix}$

解

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & & \\ -1 & 3 & 2 & \\ & -1 & 3 & 2 \\ & & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & \frac{2}{3} & & \\ -1 & \frac{11}{3} & \frac{6}{11} & \\ & -1 & \frac{39}{11} & \frac{22}{39} \\ & & -1 & \frac{139}{39} \end{pmatrix}$$

追赶法

所以 $$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & & & \\ -1 & \frac{11}{3} & & \\ & -1 & \frac{39}{11} & \\ & & -1 & \frac{139}{39}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3} & & \\ & 1 & \frac{6}{11} & \\ & & 1 & \frac{22}{39} \\ & & & 1\end{pmatrix}$$

解方程 $$\begin{pmatrix}3 & & & \\ -1 & \frac{11}{3} & & \\ & -1 & \frac{39}{11} & \\ & & -1 & \frac{139}{39}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\ 11\\ 15\\ 9\end{pmatrix},\text{得}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{3}\\ \frac{40}{11}\\ \frac{205}{39}\\ 4\end{pmatrix}$$

追赶法

再解方程 $\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & & \\ & 1 & \frac{6}{11} & \\ & & 1 & \frac{22}{39} \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{40}{11} \\ \frac{205}{39} \\ 4 \end{pmatrix}$,得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

当满足条件

$|a_1|>|c_1|>0$; $|a_n|>|d_n|>0$; $|a_i|\geq|c_i|+|d_i|$, $c_i d_i \neq 0$,$i=2,3,\ldots,n-1$.

时, 追赶法是数值稳定的, 追赶法具有计算程序简单, 存贮量少,计算量小的优点.

向量的范数

定义2.1　设 $\|\bullet\|$ 是向量空间 R^n 上的实值函数，且满足条件：

(1) 非负性：对任何向量 $x\in R^n$，$\|x\|\geq 0$，且 $\|x\|=0$ 当且仅当 $x=0$

(2) 齐次性：对任何向量 $x\in R^n$ 和实数 α，$\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$

(3) 三角不等式：对任何向量 $x,y\in R^n$ $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

则称 $\|\bullet\|$ 为空间 R^n 上的范数，$\|x\|$ 为向量 x 的范数.

向量的范数

记$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$, 常用的向量范数有:

向量的1-范数:$\|\mathbf{x}\|_1=|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|$

向量的2-范数:$\|\mathbf{x}\|_2=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$

向量的∞-范数:$\|\mathbf{x}\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$

例6 设向量$\mathbf{x}=(2,-4,3,1)^T$, 求向量范数$\|\mathbf{x}\|_p$,$p=1,2,\infty$.

解 由定义$\|\mathbf{x}\|_1=10$, $\|\mathbf{x}\|_2=\sqrt{30}$, $\|\mathbf{x}\|_\infty=4$.

虽然不同范数的值可能不同，但它们间存在等价关系.

向量的范数

定理2.2 (范数的等价性) 对于 R^n 上的任何两种范数 $\|\bullet\|_\alpha$ 和 $\|\bullet\|_\beta$,存在正常数m,M,使得 $m\,\|\mathbf{x}\|_\alpha \le \|\mathbf{x}\|_\beta \le M\,\|\mathbf{x}\|_\alpha$,$\forall\ \mathbf{x} \in R^n$

常用的三种向量范数满足如下等价关系

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_1 \le \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_\infty \quad ,\forall \mathbf{x} \in R^n$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_2 \le \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_\infty \quad ,\forall \mathbf{x} \in R^n$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 \le \|\mathbf{x}\|_1 \le \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_2 \quad ,\forall \mathbf{x} \in R^n$$

定义2.2 设向量序列 $\mathbf{x}^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})^T$，k=1,2,…,向量 $\mathbf{x}^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)^T$，如果

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^*\right\|=0$$

则称向量序列{$\mathbf{x}^{(k)}$}收敛于向量$\mathbf{x}^*$, 记作

$$\lim_{k\to\infty}\mathbf{x}^{(k)}=\mathbf{x}^*\text{，或}\mathbf{x}^{(k)}\to\mathbf{x}^*$$

易见，$\mathbf{x}^{(k)}\to\mathbf{x}^*\Leftrightarrow x_i^{(k)}\to x_i^*, i=1,2,\cdots,n$

矩阵的范数

定义2.3　设 $\|\bullet\|$ 是以n阶方阵为变量的实值函数,且满足条件

(1)非负性:　$\|\mathbf{A}\|\geq 0$,且$\|\mathbf{A}\|=0$当且仅当$\mathbf{A}=0$

(2)齐次性:　$\|\alpha\mathbf{A}\|=|\alpha|\,\|\mathbf{A}\|,\ \alpha\in R$

(3)三角不等式:$\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\|\leq\|\mathbf{A}\|+\|\mathbf{B}\|$

(4)三角不等式:$\|\mathbf{AB}\|\leq\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|$

则称$\|\mathbf{A}\|$为矩阵**A**的范数.

矩阵的范数

记$\mathbf{A}=(a_{ij})$，常用的矩阵范数有:

矩阵的1-范数: $\|\mathbf{A}\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$,也称矩阵的**列范数**.

矩阵的2-范数: $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\max\lambda(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}$,也称为**谱范数**.

矩阵的∞-范数: $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$,也称为**行范数**.

矩阵的F-范数: $\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$

例7 设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ 求矩阵**A**的范数$\|\mathbf{A}\|_p$,p=1,2, ∞,F.

解 $\|\mathbf{A}\|_1=4$, $\|\mathbf{A}\|_\infty=5$, $\|\mathbf{A}\|_F=\sqrt{15}$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 5\\ 5 & 10\end{pmatrix}$$

令 $\begin{vmatrix}5-\lambda & 5\\ 5 & 10-\lambda\end{vmatrix}=0$,得 $\lambda_1=\dfrac{15+5\sqrt{5}}{2}, \lambda_2=\dfrac{15-5\sqrt{5}}{2}$

所以 $\|\mathbf{A}\|_2=\sqrt{\dfrac{15+5\sqrt{5}}{2}}$

矩阵的范数

设‖•‖是一种向量范数, 则定义

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

称之为由向量范数派生的**矩阵算子范数.** 矩阵的算子范数满足

$$\|\mathbf{Ax}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|,\ \forall \mathbf{x} \in R^n$$

把满足上式的矩阵范数称为与**向量范数相容的矩阵范数.**

对于p=1,2,∞,矩阵范数$\|\mathbf{A}\|_p$是由向量范数$\|\mathbf{x}\|_p$派生的矩阵算子范数,所以$\|\mathbf{A}\|_p$是与$\|\mathbf{x}\|_p$相容的矩阵范数.但$\|\mathbf{A}\|_F$不是一种算子范数,却与$\|\mathbf{x}\|_2$是相容的.

矩阵的范数

设‖•‖是一种算子范数, 则

$$\|\mathbf{E}\| = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{E}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = 1 \quad ，但 \qquad \|\mathbf{E}\|_F = \sqrt{n}$$

设λ是矩阵**A**的特征值,**x**是对应的特征向量,则有

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

利用向量和矩阵范数的相容性, 则得

$$|\lambda|\|\mathbf{x}\| = \|\lambda\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|$$

于是 $\quad |\lambda| \leq \|\mathbf{A}\|$

矩阵的范数

设n阶矩阵**A**的n个特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, 则称

$$\rho(\mathbf{A}) = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i|$$

为矩阵**A**的**谱半径**. 对矩阵的任何一种相容范数都有

$$\rho(\mathbf{A}) \le \|\mathbf{A}\|$$

另外, $\forall \varepsilon > 0$, 存在一种相容范数, 使 $\|\mathbf{A}\| \le \rho(\mathbf{A}) + \varepsilon$

任何两种矩阵范数也具有等价性 $m\|\mathbf{A}\|_\alpha \le \|\mathbf{A}\|_\beta \le M\|\mathbf{A}\|_\alpha, \forall\, \mathbf{A} \in R^{n\times n}$

矩阵序列的收敛性也定义为

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}^{(k)} = \mathbf{A}^* \overset{\Delta}{=} \lim_{k\to\infty} \left\| \mathbf{A}^{(k)} - \mathbf{A}^* \right\| = 0 \iff a_{ij}^{(k)} \to a_{ij}^*, 1 \le i, j \le n$$

线性方程组固有性态与误差分析

考虑线性方程组
$$\begin{pmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

其精确解为 $x^*=(-9800b_1+9900b_2\ ,\ 9900b_1-10000b_2)^T$

若把线性方程组变为
$$\begin{pmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1+\varepsilon \\ b_2-\varepsilon \end{pmatrix}$$

解为$x=(-9800b_1+9900b_2-19700\varepsilon\ ,\ 9900b_1-10000b_2+19900\varepsilon)^T$

可见 $x-x^*=(-19700\varepsilon\ ,\ 19900\varepsilon)^T$

解的误差可能放大到常数项的误差的近2万倍。

设线性方程组

$$\mathbf{Ax=b}$$

系数矩阵是精确的，常数项有误差$\Delta\mathbf{b}$，此时记解为$\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}$，则

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x})=\mathbf{b}+\Delta\mathbf{b}$$

于是 $\mathbf{A}\Delta\mathbf{x}=\Delta\mathbf{b}$

所以 $\|\Delta\mathbf{x}\|=\|\mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{b}\|\le\|\mathbf{A}^{-1}\|\,\|\Delta\mathbf{b}\|$

又由于 $\|\mathbf{b}\|=\|\mathbf{Ax}\|\le\|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{x}\|$

因此 $\|\Delta\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{b}\|\le\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\Delta\mathbf{b}\|\|\mathbf{x}\|$

即

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}\le\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|\frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

再设**b**是精确的, **A**有误差$\Delta\mathbf{A}$, 此时记解为$\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}$,则

$$(\mathbf{A}+\Delta\mathbf{A})(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}) =\mathbf{b}$$

则有 $$\mathbf{A}\Delta\mathbf{x} +\Delta\mathbf{A}(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}) =\mathbf{0}$$

所以 $$\Delta\mathbf{x} =-\mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{A}(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x})$$

于是 $$\|\Delta\mathbf{x}\|\le \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\Delta\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}\|$$

也就是 $$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}\|}\le\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|\frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}$$

记 $\mathrm{Cond}(\mathbf{A})=\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|$, 称为方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$或矩阵**A**的条件数.

经常使用的条件数有

$$\mathrm{Cond}_p(\mathbf{A})=\|\mathbf{A}\|_p\|\mathbf{A}^{-1}\|_p \quad p=1，2，\infty。$$

当**A**为对称矩阵时，有 $\mathrm{Cond}_2(\mathbf{A})=|\lambda_1|/|\lambda_n|$

其中λ_1，λ_n分别是**A**的按绝对值最大和最小的特征值。

例如，对前面方程组的系数矩阵**A**有

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0.99\\ 0.99 & 0.98\end{pmatrix}, \mathbf{A}^{-1}=-\frac{1}{0.0001}\begin{pmatrix}0.98 & -0.99\\ -0.99 & 1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Cond}_1(\mathbf{A})=\mathrm{Cond}_\infty(\mathbf{A})=39601，\quad \mathrm{Cond}_2(\mathbf{A})\approx 39206$$

线性方程组固有性态与误差分析

由于计算条件数运算量较大, 实际计算中若遇到下述情况之一,方程组就有可能是病态的:

(1) 矩阵元素间数量级差很大 ,且无一定规律;

(2) 矩阵的行列式值相对来说很小 ;

(3) 列主元消去法求解过程中出现量级很小的主元素;

(4) 数值求解过程中 , 计算解**x**的剩余向量**r=b-Ax**已经很小, 但**x**仍不符合要求.

1. 线性方程组的预条件处理

对病态方程组**Ax=b**,考虑线性方程组 $\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}=\tilde{\mathbf{b}}$

其中 $\tilde{\mathbf{A}}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1},\tilde{\mathbf{x}}=\mathbf{C}\mathbf{x},\tilde{\mathbf{b}}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{b}$

称之为**预条件方程组**,显然与原方程组等价.可逆矩阵**C**称为**预条件矩阵**.矩阵**C**应满足条件

(1)条件数 $\mathrm{Cond}(\tilde{A})$ 比Cond(A)明显小.

(2)方程组**Cz=d**容易求解。

对于一般的矩阵**A**没有十分有效的方法去选择预条件矩阵. 当**A**是对称正定矩阵时,可取 $\mathbf{C}=\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}$.

2. 线性方程组解的迭代改善

设已求得方程组$\mathbf{Ax=b}$的近似解$\mathbf{x}^{(1)}$, 计算剩余向量

$$\mathbf{r}^{(1)}=\mathbf{b}-\mathbf{Ax}^{(1)}$$

再求解余量方程组$\mathbf{Ax=r}^{(1)}$, 得到解 $\tilde{\mathbf{x}}^{(1)}$, 则$\mathbf{x}^{(1)}$的迭代改善解为:

$$\mathbf{x}^{(2)}=\mathbf{x}^{(1)}+\tilde{\mathbf{x}}^{(1)}$$

课 堂 练 习

1. 对矩阵A= $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ 进行LU分解.

2. 设矩阵A= $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, 求$\rho(A)$和$\mathrm{Cond}(A)_\infty$.

解 1. 由于

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ -1 & 1/2 & 21/2 \end{pmatrix}$$

, 故 A= $\begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ -1 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ & 4 & -5 \\ & & 10.5 \end{pmatrix}$

2. 由于$|A-\lambda E|=\lambda^2-3\lambda-10=(\lambda+2)(\lambda-5)$

所以: $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=5$, 于是 $\rho(A)=5$.

$$A^{-1}= -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

, $\mathrm{Cond}(A)_\infty=\|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty=7\times 6/10=4.2$