概率论与数理统计试题（2014 秋）

（注：需用到的标准正态分布表，$t-$分布表见第一页末尾处。）

一、填空题（每题 3 分，共计 15 分）

1. 设事件A、B相互独立，事件B、C互不相容，事件A与C不能同时发生，且$P(A)=P(B)=0.5$，$P(C)=0.4$，则事件A，B和C中仅C发生或仅C不发生的概率为多少__________.

2．随机变量X的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<1\\ \frac{1}{4}, & 1<x<3\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，则$Y=1-3X$的密度函数

$f_Y(y)=$____________________.

3. 随机变量$X\sim P(\lambda), EX^2=20,$，则$P(X\geq 2)=$____________________.

4. 已知一批零件长度$X\sim N(\mu,\sigma^2),$ 若σ未知，从中随机地抽取 9 个零件，得样本均值$\bar{x}=30, s^2=16$，则μ的置信度为 0.95 的置信区间是__________________.

5. 设$X\sim U(0,1), Y$服从两点分布即$P(X=2)=\frac{1}{2}, P(X=3)=\frac{1}{2}$，且$X,Y$独立，$Z=X+Y,$ 则$Z^{\frac{1}{2}}$的数学期望为___________.

（$t_{0.025}(8)=2\cdot 3060,\ t_{0.05}(8)=1\cdot 8595,\ t_{0.05}(9)=1.8331,\ t_{0.025}(9)=2.2622$，$\Phi(1.96)=0.975$ $\Phi(1.645)=0.95$）

二、单项选择题（每题 3 分，共计 15 分）

1．设A,B为两个事件，$P(A)\neq P(B)>0$，且$B\subset A$，则【　　】一定成立.

（A）$P(B|A)=1$.　（B）$P(A|B)=1$.（C）$P(B|\bar{A})=1$.　（D）$P(A|\bar{B})=0$.

2．如下四个函数，它是随机变量的分布函数的为　　　　【　　】

（A）$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \sin x & 0\leq x<\frac{\pi}{2}\\ 1 & x\geq\frac{\pi}{2}\end{cases}$.　（B）$F(x)=\begin{cases}0 & x<-2\\ \frac{1}{2} & -2\leq x<0\\ 2 & x\geq 0\end{cases}$.

（C）$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \sin x & 0\leq x<\pi\\ 1 & x\geq\pi\end{cases}$.　（D）$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x+\frac{1}{3} & 0\leq x\leq\frac{1}{2}\\ 1 & x>\frac{1}{2}\end{cases}$.

3．对于两个独立同分布的随机变量X和Y，其方差DX存在，则下列叙述正确的是　　　　【　　】

（A）$D(XY)=DX\cdot DY$.　　　　（B）X与Y协方差不为 0.

（C） $EX^2-(EX)^2=EY^2-(EY)^2$.　　（D） $EX\neq EY$.

4．设随机变量 X 服从参数为 $B(8,\frac{1}{2})$ 的二项分布，$Y\sim N(2,4)$，且 $\rho_{XY}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，根据切比晓夫不等式有：$P(|X-2Y|\leq 4)\ \geq$　　【　　】

（A） $\frac{3}{8}$.　　（B） $\frac{5}{8}$.　　（C） $\frac{1}{4}$.　　（D） $\frac{2}{9}$.

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$EX=\mu,\ DX=\sigma^2$，$\bar{X}$ 是样本均值，S^2 是样本方差，S^{*2} 为样本的二阶中心矩，则　　【　　】

（A） $\overline{X}\sim N(\mu,\sigma^2)$.　　（B） $\frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$.

（C） $\frac{\overline{X}-\mu}{S^*}\sqrt{n}\sim t(n-1)$.　　（D） $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$.

三、（9 分）假如在一段时间内到达哈尔滨某家乐福超市人数服从参数为 μ 的泊松分布，而进入该超市的每个顾客购买某黑龙江特产的概率为 p，若各个顾客是否购买某黑龙江特产相互独立，求在一段时间内该超市恰好售出 k 份某黑龙江特产的概率（假如每个顾客至多购买一份某黑龙江特产）.

四、（9 分）已知 X 与 Y 独立的正态随机变量，且 $X \sim N(1,4)$，$Y \sim N(3,9)$，$Z = 2X + Y$

求（1）Z 的概率密度 $f_z(z)$; (2) 计算期望 $E|2X+Y-5|$ 和方差 $D(|2X+Y-5|)$

五、（9 分）设 随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x & ,0 < x < 4, \\ 0, & 其它 \end{cases}$

令随机变量 $\mathrm{Y} = \begin{cases} 3, X \le 1, \\ X, 1 < X < 3, \\ 1, X \ge 3 \end{cases}$（1）求 Y 的分布函数；(2) 求概率 $\mathrm{P(X \le Y)}$.

六、（13 分）.设总体X的分布函数为$F(x;\theta)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x^2}{\theta}}, x\ge 0\\ 0, x<0\end{cases}$,而$\theta$是大于零的未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体$X$的简单随机样本.(1)求$EX$和$E$（$X^2$）;（2）求$\theta$的矩估计$\hat{\theta}_1$和极大似然估计$\hat{\theta}_2$;（3）试讨论$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$的无偏性。

概率论与数理统计试题解答（2014）

一. 填空题:(每题 3 分,共 15 分)

1. 0.65. 2. $\begin{cases} \frac{1}{12}, -8 < y < -2 \\ \frac{1}{6}, -2 < y < 1 \\ 0, \quad 其它 \end{cases}$ 3. $1-5e^{-4}$.

4 $(\bar{x} - \frac{4}{\sqrt{9}} \times t_{0.05/2}, \bar{x} + \frac{4}{\sqrt{9}} \times t_{0.05/2}) = (30 - \frac{4}{3} \times 2.306, 30 + \frac{4}{3} \times 2.306)$. 5. $\frac{1}{3}(8 - 2\sqrt{2})$;

$= (27,33)$;

二. 选择题: (每题 3 分,共 15 分)

1.(B) 2. (A) 3. (C) 4.(B) 5.(D)

三.解： 设 A_i 表示这段时间内到达家乐福超市的顾客数$\left(i = 0,1,2,\cdots\right)$，A= “这段时间内该超市恰好售出 k 份某黑龙江特产”。

利用全概率公式：$A = A_0 A + A_1 A + \cdots + A_k A + \cdots$

$$P\left(A\right) = \sum_{i=0}^{\infty} P\left(A_i\right) P\left(A \middle| A_i\right) = \sum_{i=k}^{\infty} P\left(A_i\right) P\left(A \middle| A_i\right) \quad (P(A|A_i) = 0, 0 \le i < k)$$

$$= \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \cdot C_i^k p^k \left(1 - p\right)^{i-k}$$

$$= \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{i!}{k!\left(i-k\right)!} p^k \left(1-p\right)^{i-k} = \frac{e^{-\lambda} \cdot \left(\lambda p\right)^k}{k!} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\left(\lambda\left(1-p\right)\right)^{i-k}}{\left(i-k\right)!}$$

$$(k = 0,1,2,\cdots)$$

三. 解: (1) 由题设：$Z = 2X + Y$ 为两个独立的正态变量的线性函数，所以它也是一个正态的随机变数，其分布由其期望和方差确定。

而 $EZ = E(2X + Y) = 2EX + EY = 2 \times 1 + 3 = 5$,

$$DZ = D(2X + Y) = 4DX + DY = 4 \times 4 + 9 = 25$$

所以，$Z \sim N(5,25)$

(2) 令 $W = 2X + Y - 5$ ，则 $W \sim N(EZ - 5, D(Z - 5)) = N(0,25)$ ，从而

$$U = \frac{W}{5} \sim N(0,1),$$

于是 $E|2X+Y-5|=E|W|=E\left|\frac{W}{5}\right|\times 5=5E|U|=5\int_{-\infty}^{\infty}|u|\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du$

$$=5\times 2\int_0^{\infty}\frac{u}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=10\int_0^{\infty}d(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}})=10\times(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}\Big|_0^{\infty})=\frac{10}{\sqrt{2\pi}}=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$$

$$D(|2X+Y-5|)=D(|W|)=E|W|^2-(E|W|)^2=EW^2-(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}})^2=25-\frac{50}{\pi}=25(1-\frac{2}{\pi})$$

五．解：（1）、令随机变数 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$

由题设有： $P(1\le Y\le 3)=1$

从而易知：当 $y<1$ 时， $F_Y(y)=0$；当 $y\ge 3$ 时， $F_Y(y)=1$；

当 $1\le y<3$ 时

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(Y=1)+P(1<Y\le y)=P(X\ge 3)+P(1<X\le y)$$

所以，

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \frac{1}{16}y^2+\frac{3}{8}, & 1\le y<3\\ 1, & y\ge 3\end{cases}$$

(2). $P(X\le Y)=P(Y=X)+P(X<Y)=P(1<X<3)+P(X\le 1)$

$$=\int_1^3\frac{1}{8}xdx+\int_0^1\frac{1}{8}xdx=\int_0^3\frac{1}{8}xdx=\frac{1}{16}x^2\Big|_0^3=\frac{9}{16}$$

六 解：(1)因为随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x;\theta)=F'(x,\theta)=\begin{cases}\frac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\ge 0\end{cases}$

$$EX=\int_0^{\infty}x\frac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx=\int_0^{\infty}-xde^{-\frac{x^2}{\theta}}=-xe^{-\frac{x^2}{\theta}}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx$$（利用变换 $x=\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{2}}t$）

$$=\int_0^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{2}}dt=\sqrt{\pi\theta}\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}$$

$$EX^2=\int_0^{\infty}x^2\frac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx=\int_0^{\infty}-x^2de^{-\frac{x^2}{\theta}}=-x^2e^{-\frac{x^2}{\theta}}\Big|_0^{\infty}+2\int_0^{\infty}xe^{-\frac{x^2}{\theta}}dx=\theta\int_0^{\infty}d(-e^{-\frac{x^2}{\theta}})$$

$$=\theta\times(-e^{-\frac{x^2}{\theta}}\Big|_0^{\infty})=\theta$$

（2）矩估计：由（1）知 $EX=\frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}=\mu_1$， $(\frac{\sqrt{\pi\theta}}{2})^2=\mu_1^2,\theta=\frac{4}{\pi}\mu_1^2$，

所以θ 的矩估计为$\hat{\theta}_1 = \frac{4}{\pi}\overline{X}^2$.

5 分

极大似然估计：

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{\theta} e^{-\frac{x_i^2}{\theta}} = \frac{2^n}{\theta^n}(x_1 \cdots x_n) e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1} x_i^2}$$

取对数

$$LnL = nLn2 - nLn\theta + Lnx_1 \cdots x_n - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

令$\frac{\partial LnL}{\partial \theta} = 0 = -n \times \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \times \sum_{i=1}^{n} x_i^2$，解之得$\theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

θ的极大似然估计为$\hat{\theta}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$

5 分

（3）因为$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的简单随机样本，

所以，$E\hat{\theta}_1 = \frac{4}{\pi}E\overline{X}^2 = \frac{4}{\pi}(D\overline{X} + (E\overline{X})^2) = \frac{4}{\pi}(\frac{1}{n}DX + (EX)^2)$

$$= \frac{4}{\pi}(\frac{1}{n} \times (1 - \frac{\pi}{4})\theta + \frac{\pi\theta}{4}) = \theta + \frac{1}{n} \times (\frac{4}{\pi} - 1)\theta \neq \theta$$

因而$\hat{\theta}_1$ 为θ的有偏估计，但为θ渐进无偏估计

又$E\hat{\theta}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i^2 = \frac{1}{n} \times nEX^2 = \theta$，所以$\hat{\theta}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 为θ的无偏估计。