计院"离散数学"习题答案参考.

第四章 无穷集合及其基数 习题解答（仅供参考）

§4.1

1.解. 集合A为可数集⇔A的全部元素可排成无重复项的序列. 故, 当序列中含可数个不重复项时, A为可数集, 若序列从某一项之后均为重复项, 则A为有限集。总之A为至多可数集。

#

2.[证] 设I为直线上的任一区间, 在区间I中任取一个有理数r, I→r（一一对应）, 则由{r}构成有理数的一个子集, 是至多可数集。("至多"是因为有可能区间取到 −∞ 或 +∞). 又因为I与r一一对应, 所以互不相交的开区间I的全体构成至多可数集。 [证毕]

3.[证] 每个不连续点 x 对应一个开区间 $(f(x^-), f(x^+))$, 又 $f(x)$ 为单调函数 ⇒ $(f(x_i^-), f(x_i^+))$ 区间两两不相交. 由上题结论 ⇒ 单调函数的不连续点的集合至多是可数集. [证毕]

4.[证] 设B是A的一个有限子集, $a_n\in B$, 且为B中下标最大的元素, 则 $B\subseteq A_n=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ A_1 有 $2^{|A_1|}$ 个子集, A_2 有 $2^{|A_2|}$ 个子集, …; A_n 有 $2^{|A_n|}$ 个子集, … 因为可数个有限集之并是至多可数. 故 $\bigcup_{n=1}^{\infty} 2^{A_n}$ 至多可数, 又 $i\neq j$ 时, 有 $2^{A_i}\neq 2^{A_j}$, ∴ $\bigcup_{n=1}^{\infty} 2^{A_n}$ 不可能是有限集, ∴ $\bigcup_{n=1}^{\infty} 2^{A_n}$ 是可数集 [证毕]

5. a) √ b) × c) ×

6.[证] 设 Σ_i $(i=0, 1, 2, \cdots)$ 为由字母表 Σ 中 i 个字母构成的字的集合（其中 $\Sigma_0=\{\varepsilon\}$, 设 $|\Sigma|=n$）:
$\Sigma_1=\{a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}\}$, $\Sigma_2=\{a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n^2}\}$, …, $\Sigma_i=\{a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in^i}\}$, …
$\bigcup_{i=0}^{\infty}\Sigma_i$ 可排成如下序列:
$\varepsilon, a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n^2}, \cdots, a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in^i}, \cdots$
∴ $\Sigma^*=\bigcup_{i=0}^{\infty}\Sigma_i$ 是可数集 [证毕]

§4.2

1.解. 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 不是两两不相交的, 则令 $B_1=A_1$, $B_k=A_k\setminus(\bigcup_{i=1}^{k-1}A_i)$ $(k=2, 3, \cdots)$ 则 $B_i\cap B_j=\emptyset$, 其中 i, j, $i\neq j$, $i, j=1, 2, 3, \cdots$; 此时 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\bigcup_{i=1}^{n}B_i$, $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$
又 $B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots$ 符合定理4.2.2, 4.2.3, 故 $\bigcup_{i=1}^{n}B_i\sim[0,1]$, $\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\sim[0,1]$ 7176820029
即 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i\sim[0,1]$, $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\sim[0,1]$ 即: 定理4.2.2, 4.2.3去掉"两两不相交"条件结论仍成立. #

2.解. 考查正切函数. 设 $y=\tan t$, $t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, $y\in(-\infty,+\infty)$. 令 $x\in[0,1]$, 则

$t=-\frac{\pi}{2}+[\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})]x=-\frac{\pi}{2}+\pi x=\pi x-\frac{\pi}{2}$. 于是得到 $[0,1]$ 到实数集 R 上的一个一一对应

$y=\varphi(x)=\tan(\pi x-\frac{\pi}{2})$ #

3.解. $\forall x\in(0,1)$, $\varphi(x)=\begin{cases}0, & x=\frac{1}{2}\\ 1, & x=\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2^{n-2}}, & x=\frac{1}{2^n}\ (n>2)\\ x, & 其他\end{cases}$ $A=\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots\}$

$B=\{0,1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2^{n-2}},\cdots\}$

(1) 当 $x\neq\frac{1}{2^n}$ 时存在 $x\to\varphi(x)=x$ 的一一对应.

(2) A, B 为可数集, 故 A, B 间可建立一一对应.

综上, $\varphi(x)$ 即为从 $(0,1)$ 到 $[0,1]$ 的一个一一对应 #

4.[证] 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$, A_i 为 A 的子集 $A_i\in 2^A$. 假设 2^A 是可数集, 则

$A_1=\{a_{11},a_{12},a_{13},\cdots\}$, $A_2=\{a_{21},a_{22},\cdots\}$, $A_3=\{a_{31},a_{32},\cdots\}$, …, $A_n=\{a_{n1},a_{n2},\cdots\}$, …

其中 $\forall a_{ij}\in A$. 今构造 $B=\{b_1,b_2,b_3,\cdots\}$ 定义 $b_n=\begin{cases}a_{k+1}, & a_{nn}=a_k\\ a_k, & a_{nn}\neq a_k\end{cases}$ $(a_k,a_{k+1}\in A)$

显然 $B\subseteq A$, 但 $B\in 2^A$, 矛盾. 故 2^A 为不可数集. [证毕]

5.[证] 假设所有的 0, 1 的无穷序列是可数集, 记这样的序列的全体为 A, $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$

记 $A_1=\{a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n},\cdots\}$ 其中 $a_{ij}\in\{0,1\}$, $\forall i,j=1,2,\cdots,n,\cdots$ ∴ $A_k\in A$ $k=1,2,\cdots$

$A_2=\{a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n},\cdots\}$

⋮

$A_n=\{a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nn},\cdots\}$

⋮

今构造一个新序列 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots\}$ 定义 $b_n=\begin{cases}0, & a_{nn}=1\\ 1, & a_{nn}=0\end{cases}$

显然 $B\in A$, 但 $B\neq(\forall A_i)$ 这与 $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ 矛盾

故所有的 0, 1 的无穷序列是不可数集. [证毕].