经典控制理论部分体系结构

微分方程 > 传递函数

$$\mathrm{L}\{f(t)\} = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

微分方程 > 频率特性函数

$$\mathrm{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

第五章 频率特性法

引言

- 频率特性法：用**频率特性（函数）**作为**数学模型**来分析和设计系统的方法。

- ***优点：***①具有明确的物理意义；

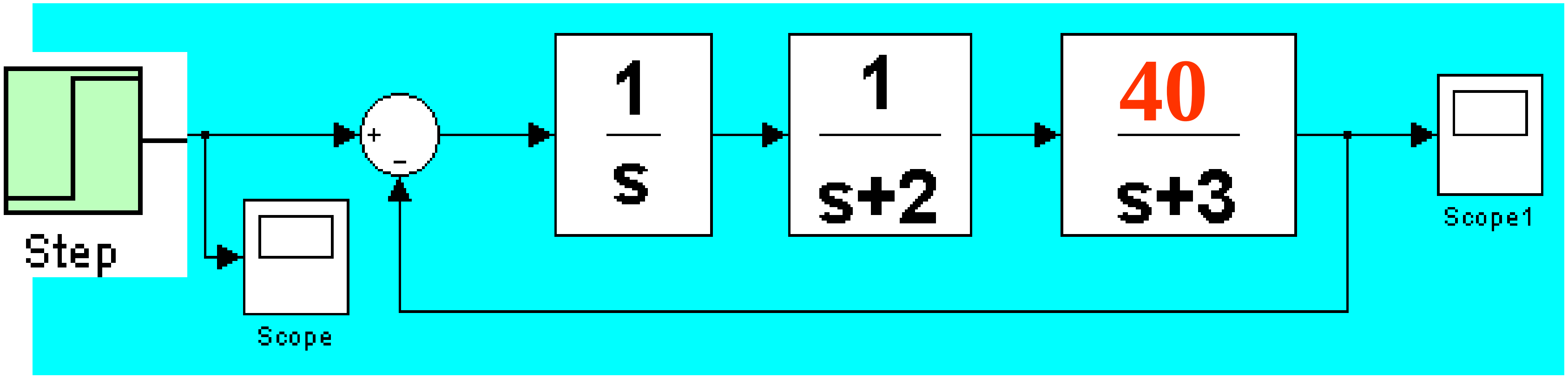
  ②计算量很小，采用近似作图法，简单、直观，易于在工程技术中使用；

  ③可以采用实验的方法求出系统或元件的频率特性。

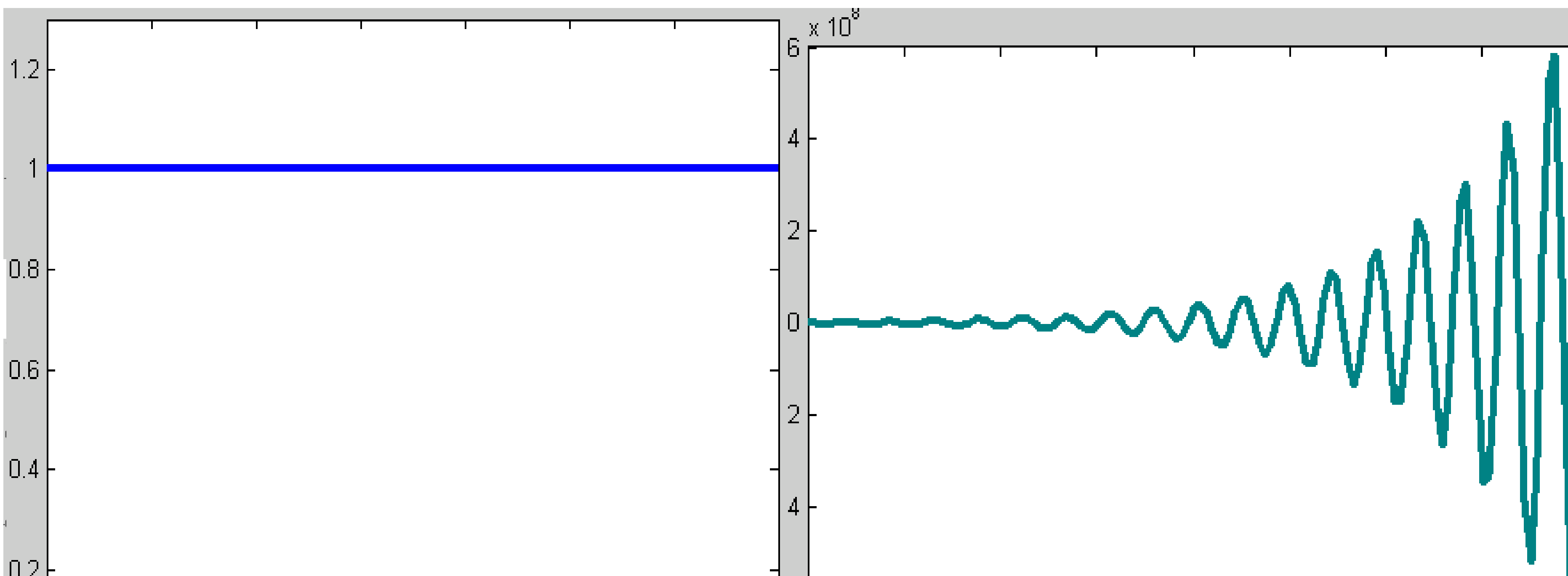
仿真实例:

不

设系统结构如图，由劳斯判据知系统稳定。



给系统输入一个幅值不变频率不断增大的正弦，曲线如下：



5.1 频率特性

- 设输入为正弦信号

$$r(t)=R\sin\omega t \qquad R(s)=\frac{R\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{R\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)}$$

$$C(s)=G(s)R(s)=G(s)\frac{R\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)} \qquad C(s)=C_s(s)+C_t(s)$$

$$\boxed{C_s(s)=\frac{A_1}{s+j\omega}+\frac{A_2}{s-j\omega}} \quad \Rightarrow \quad c_s(t)=A_1e^{-j\omega t}+A_2e^{j\omega t}$$

$$A_1=G(s)\frac{R\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)}(s+j\omega)\Big|_{s=-j\omega}=-\frac{R}{2j}G(-j\omega)$$

$$A_2=G(s)\frac{R\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)}(s-j\omega)\Big|_{s=j\omega}=\frac{R}{2j}G(j\omega)$$

$$\boxed{c_s(t)=R\left|G(j\omega)\right|\sin(\omega t+\theta)=C\sin(\omega t+\theta)}$$

$|G(j\omega)|$为复变量$G(j\omega)$的模,幅值。$\theta=\angle G(j\omega)$是输出信号对输入信号的相位移,等于$G(j\omega)$的相位。

- 频率特性：

  $$\text{幅频特性：}\quad C/R=|G(j\omega)|$$

  $$\text{相频特性：}\quad \theta=\angle G(j\omega)$$

$$G(j\omega)=|G(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}=|G(j\omega)|[\cos\theta+j\sin\theta]=U(\omega)+jV(\omega)$$

$U(\omega)$:实频特性　　　　　$V(\omega)$：虚频特性

$$\theta(\omega)=\angle G(j\omega)=\begin{cases}\arctan\dfrac{V(\omega)}{U(\omega)} & U(\omega)>0\\ \pi+\arctan\dfrac{V(\omega)}{U(\omega)} & U(\omega)<0\end{cases}\qquad -180^\circ<\theta(\omega)\le 180^\circ$$

- 负相角称为相位滞后，正相角称为相位超前。
- 正弦输入信号的频率很高时，输出信号的幅值一定很小。
- 实际系统中传递函数分子阶次低于分母阶次

5.2 典型环节的频率特性

- 频率特性$G(j\omega)$是复数，使用很不方便。常用图形表示$G(j\omega)$的幅值和相角与频率的关系。

5.2.1 极坐标图

- 极坐标图：在复数的直角坐标或极坐标平面上，

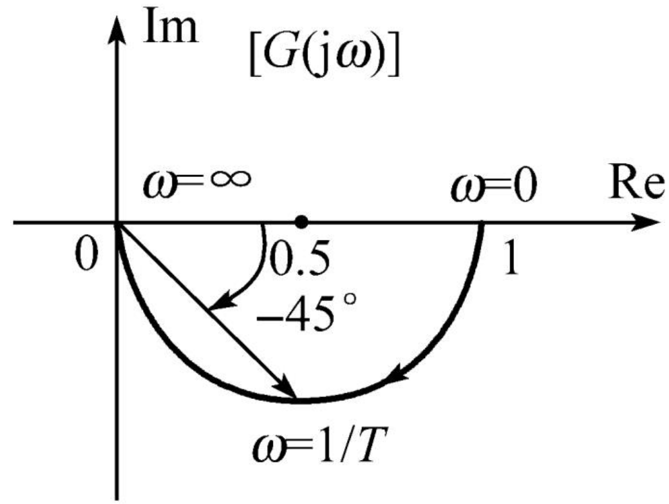
  ω由0→∞时， $G(j\omega)$ 的轨迹。又称Nyquist图，奈奎斯特图，幅相特性图。

1. 惯性环节 $G(s)=\dfrac{1}{Ts+1}$

$$\Rightarrow \quad G(j\omega)=\frac{1}{jT\omega+1} \qquad \angle G(j\omega)=-\arctan T\omega$$

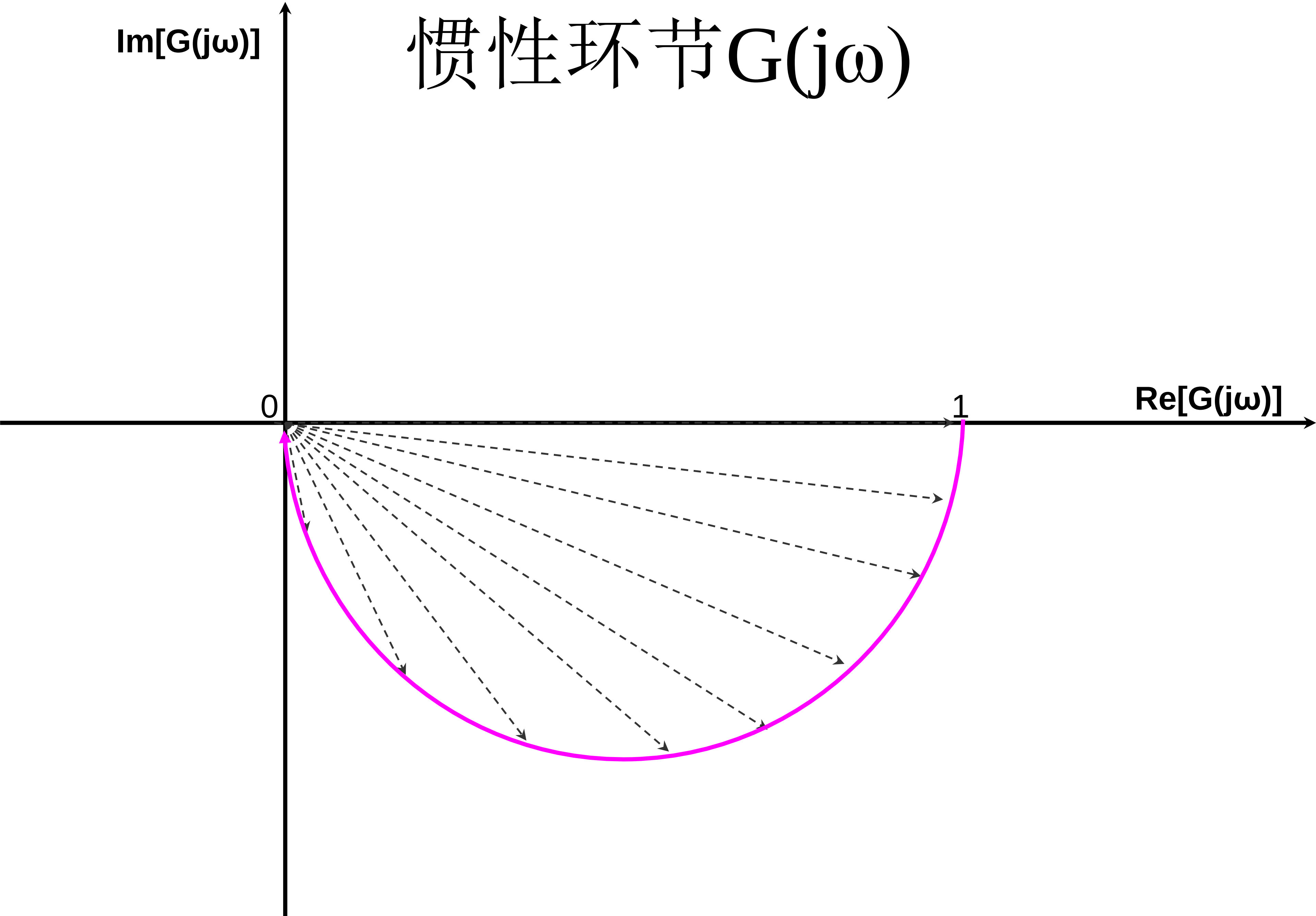
$$|G(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2+1}} \qquad U(\omega)=\frac{1}{T^2\omega^2+1} \qquad V(\omega)=-\frac{T\omega}{T^2\omega^2+1}$$

ω	$\angle G(j\omega)$	$\lvert G(j\omega)\rvert$	U	V
0	0°	1	1	0
$1/T$	-45°	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	$-1/2$
∞	-90°	0	0	0



$$\left(U-\frac{1}{2}\right)^2+V^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$ 极坐标图是半圆。

惯性环节G(jω)

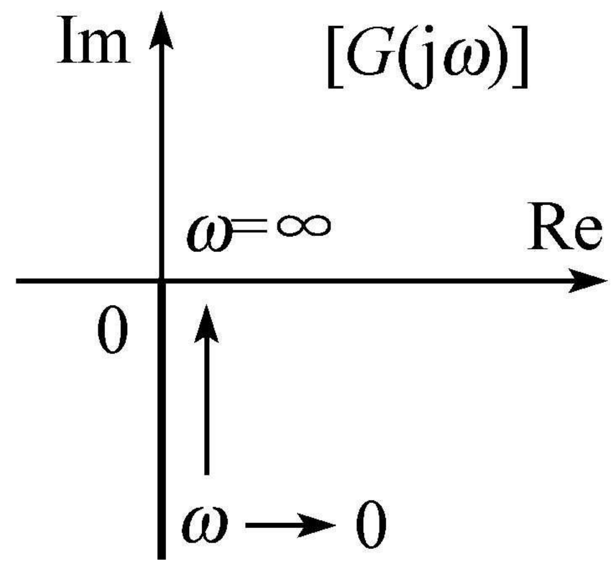


- 2.积分环节

$$G(s)=\frac{1}{s}$$

$$G(j\omega)=\frac{1}{j\omega}=-j\frac{1}{\omega}=\frac{1}{\omega}e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

ω	∠G（jω）	|G(jω)|	U(ω)	V(ω)
0	-90º	∞	0	-∞
1	-90º	1	0	-1
∞	-90º	0	0	0



- 积分环节频率特性的极坐标图是虚轴

- 3.纯微分环节和一阶微分环节
- 纯微分环节

$$G(s)=s$$

$$G(j\omega)=j\omega=\omega e^{j\frac{\pi}{2}}$$

ω	∠G（jω）	∣G(jω∣	U(ω)	V(ω)
0	90º	0	0	0
1	90º	1	0	1
∞	90º	∞	0	∞

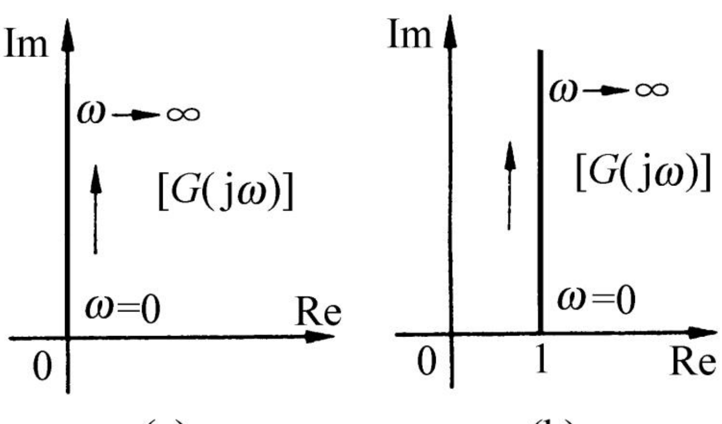
- 一阶微分环节

$$G(s)=\tau s+1$$

$$G(j\omega)=j\tau\omega+1$$

$$=\sqrt{\tau^2\omega^2+1}e^{j\arctan\tau\omega}$$

ω	∠G（jω）	∣G(jω∣	U(ω)	V(ω)
0	0º	1	1	0
$1/\tau$	45º	$\sqrt{2}$	1	1
∞	90º	∞	1	∞



(a) (b)

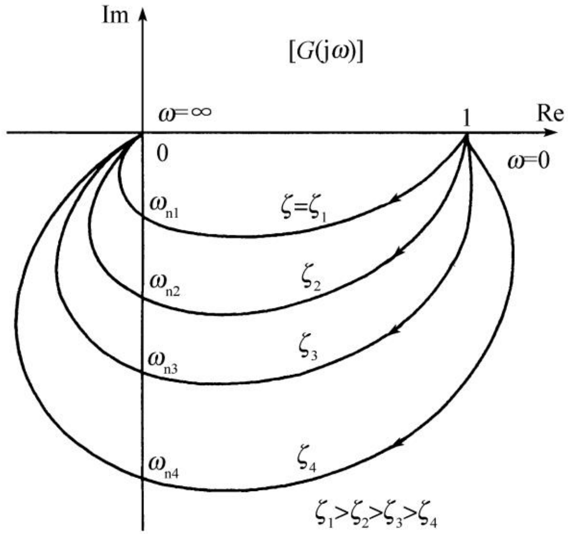
- 4.振荡环节 $G(s)=\dfrac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\quad(0\le\zeta<1)$ ；

$$G(j\omega)=\frac{1}{(1-T^2\omega^2)+j2\zeta T\omega}$$

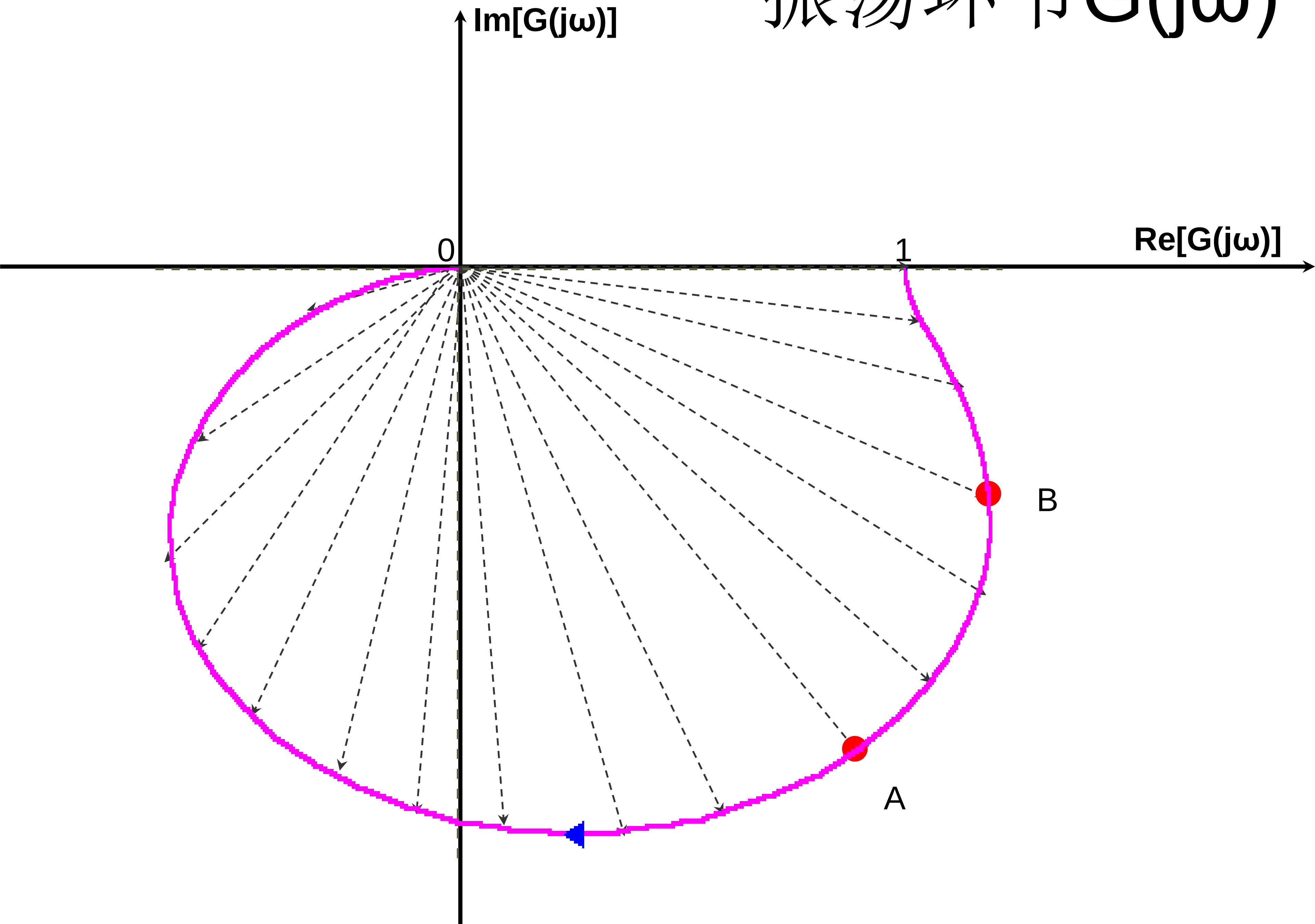
$$\angle G(j\omega)=\begin{cases}-\arctan\dfrac{2\zeta T\omega}{1-T^2\omega^2} & \omega\le\dfrac{1}{T}\\ -180^\circ-\arctan\dfrac{2\zeta T\omega}{1-T^2\omega^2} & \omega>\dfrac{1}{T}\end{cases}\qquad |G(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2+(2\zeta T\omega)^2}}$$

$$U(\omega)=\frac{1-T^2\omega^2}{(1-T^2\omega^2)^2+(2\zeta T\omega)^2}\ ;\qquad V(\omega)=\frac{-2\zeta T\omega}{(1-T^2\omega^2)^2+(2\zeta T\omega)^2}$$

ω	∠G（jω）	|G(jω |	U(ω)	V(ω)
0	0º	1	1	0
1/T	-90º	1/2ζ	0	-1/2ζ
∞	-180º	0	0	0



振荡环节G(jω)



- 5.延迟环节

$$G(s)=e^{-\tau s}$$

频率特性是：

$$G(j\omega)=e^{-j\tau\omega}$$

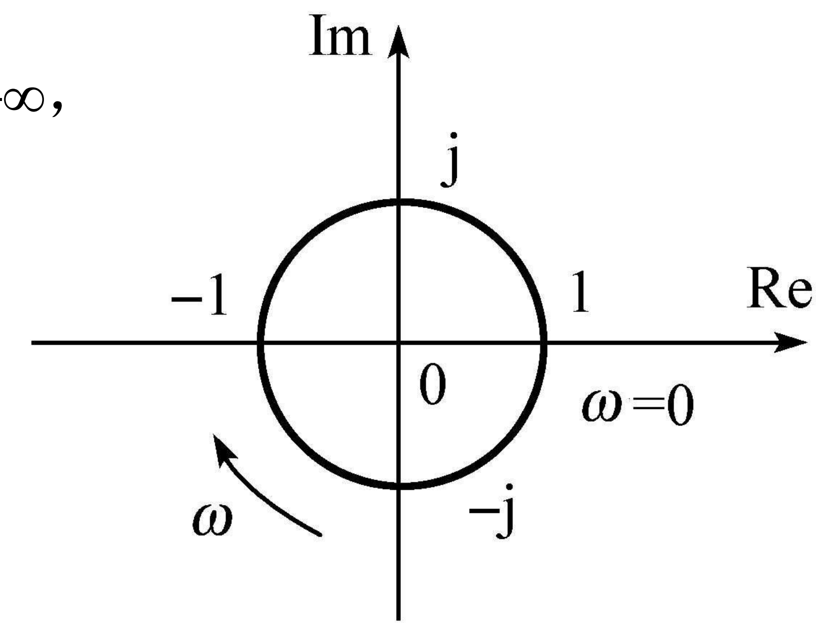
$$\angle G(j\omega)=\tau\omega\ \text{rad}=-57.3°\tau\omega$$

$$|G(j\omega)|=1$$

当ω由$0\to\infty$时，$\angle G(j\omega)$）由$0\to-\infty$，

而$|G(j\omega)|=1$。

极坐标图是单位圆



- 例5-2-1开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K}{s(Ts+1)}$$

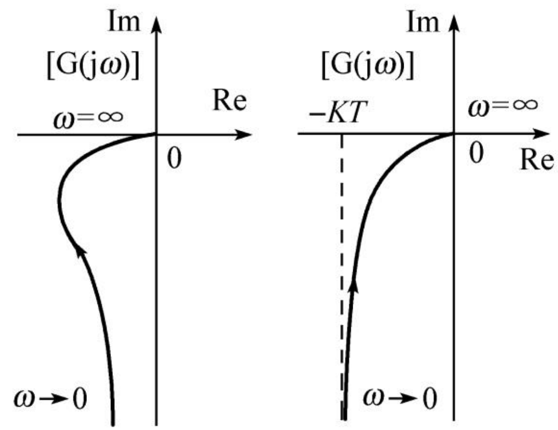
绘制开环频率特性极坐标图

- 解

$$G(j\omega)=\frac{K}{j\omega(jT\omega+1)}=\frac{-KT}{T^2\omega^2+1}-j\frac{K}{T^2\omega^2+1}$$

$$\angle G(j\omega)=-90^\circ-\arctan T\omega,\left|G(j\omega)\right|=\frac{K}{\omega\sqrt{T^2\omega^2+1}}$$

ω	∠G（jω）	|G(jω|	U(ω)	V(ω)
0	-90º	∞	-KT	-∞
∞	-180º	0	0	0



(a) (b)

$\angle G(j\omega)$与K无关，$\left|G(j\omega)\right|$与K成正比。

- 例 5-2-2 $G(s)=\dfrac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$,绘极坐标简图。

解 $\angle G(j\omega)=-\arctan T_1\omega-\arctan T_2\omega-\arctan T_3\omega$

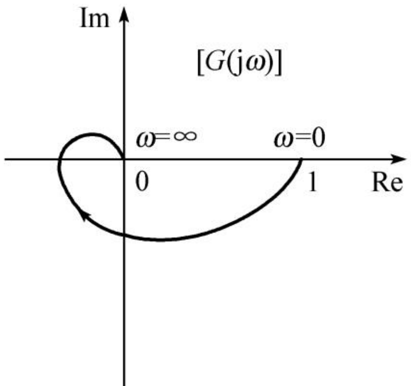
ω	$\angle G(j\omega)$	$\lvert G(j\omega)\rvert$
0	0	1
∞	-270°	0

- 例 5-2-3 $G(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$,绘极坐标简图。

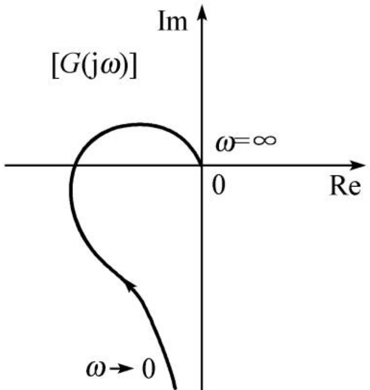
解 设 $G_1(s)=\dfrac{1}{s}$, $G_2(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$

$$G(s)=G_1(s)G_2(s)$$

ω	$\angle G_1$	$\angle G_2$	$\angle G$	$\lvert G\rvert$
0	-90°	0°	-90°	∞
∞	-90°	-180°	-270°	0



(a)



(b)

5.2.2 对数频率特性图

- 伯德(Bode)图。容易绘制，分析直观，应用最广。包括幅频特性图和相频特性图。横轴坐标实际是lgω，但标注的是角频率ω(rad/s)，对数分度，可展现很宽的频率范围。
- Bode图绘制在半对数坐标纸上。【为何？】
- ω→2ω的频带宽度称2倍频程，ω→10ω的频带宽度称10倍频程或10倍频，记dec。ω为0.1、1、10、100、1000的各点间横轴间的距离相等。Lg0=-∞,横轴上画不出ω=0的点。
- 幅频特性图纵坐标表示20lg│G(jω)│,单位dB（分贝），线性分度。0dB表示│G(jω)│=1，无│G(jω)│=0点。
- **传递函数可写成基本环节传递函数相乘的形式，幅频特性由相应的基本环节幅频特性的代数和锝到。**
- 相频特性图纵坐标∠│G(jω)│，单位是（º）或rad,线性分度。【是否也有上述“代数和”的性质？】

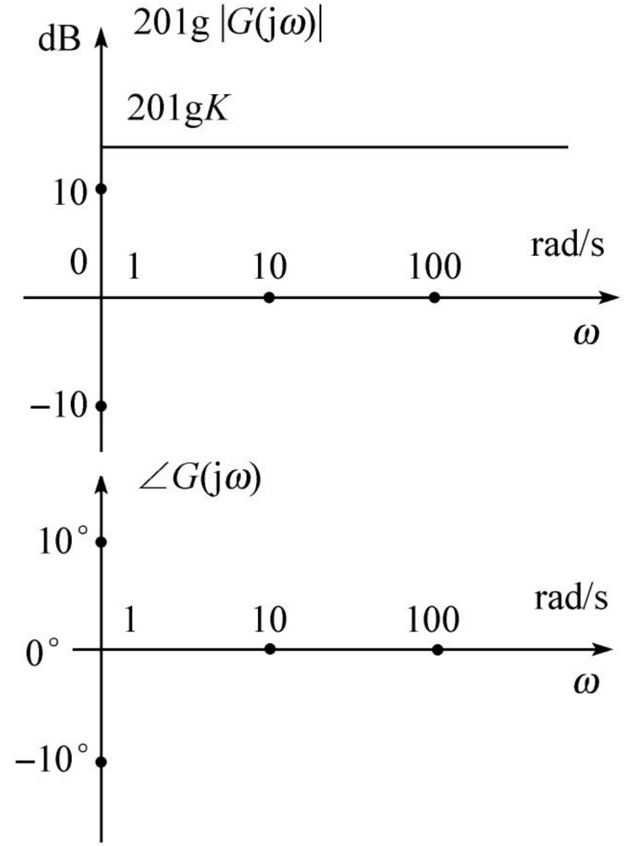
- 1.放大（比例）环节

$$G(s)=K, \quad G(j\omega)=K$$

$$20\lg|G(j\omega)| = 20\lg K$$

$$\angle G(j\omega)=0^{o}$$

- 对数幅频特性是平行于横轴的直线，相距20lg *K* dB。*K>1*,直线位于横轴上方；*K<1*,直线位于横轴下方。



- 对数相频特性是与横轴相重合的直线。
- *K*的数值变化时，幅频特性图中的直线20lg *K* 向上或向下平移，相频特性不变。

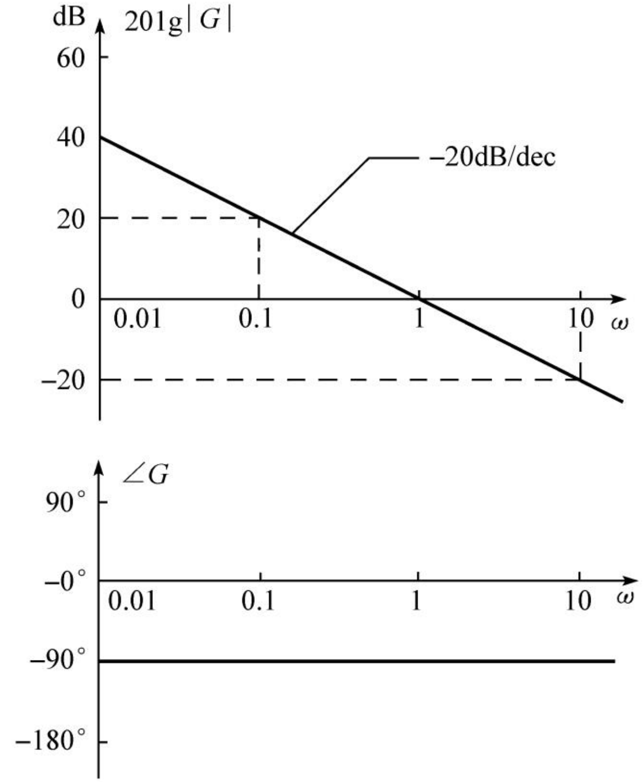
- 2.积分环节

$$G(s)=\frac{1}{s} \qquad G(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}= \quad -\mathrm{j}\frac{1}{\omega}=\frac{1}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$

幅频特性 $\quad 20\lg\left|G(\mathrm{j}\omega)\right|=20\lg\frac{1}{\omega}=-20\lg\omega$

$$y=20\lg\left|G(\mathrm{j}\omega)\right|,\ x=\lg\omega \Rightarrow y=-20x$$

幅频特性是直线，斜率是－20dB/dec。



频率增加到10倍，幅值增加：

$$20\lg\frac{1}{10\omega}-20\lg\frac{1}{\omega}=-20\lg10\omega+20\lg\omega=-20\mathrm{dB}$$

相频特性 $\quad \angle G(\mathrm{j}\omega)=-90^{\circ}$

$$G(s)=\frac{1}{s^n} \qquad 20\lg|G(\mathrm{j}\omega)|=20\lg\frac{1}{\omega^n}=-20n\lg\omega$$

斜率是 $-20n$ dB/dec 。

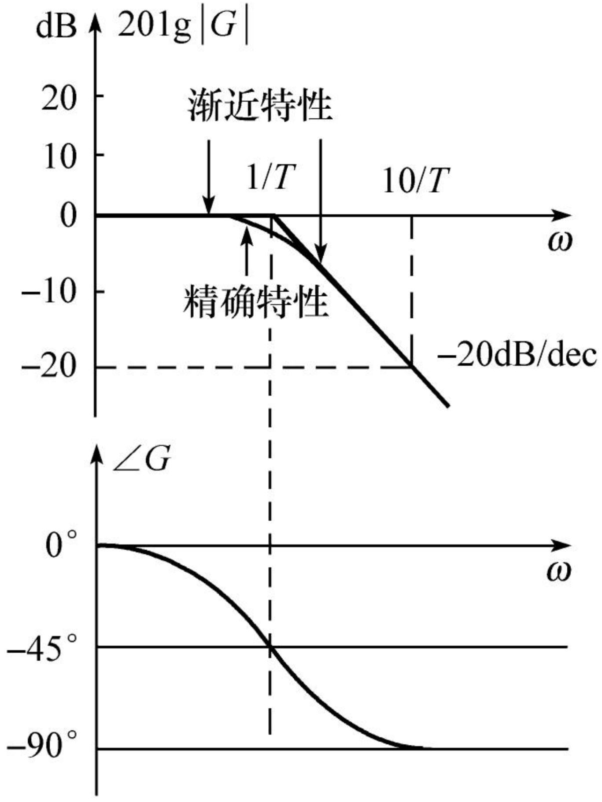
$\angle G(\mathrm{j}\omega)=-n\cdot 90^\circ$ 过 $-n\cdot 90^\circ$，平行于横轴的直线。

$$G(s)=\frac{K}{s^n} \qquad G(\mathrm{j}\omega)=\frac{K}{(\mathrm{j}\omega)^n}$$

$$20\lg|G(\mathrm{j}\omega)|=20\lg\frac{K}{\omega^n}=20\lg K-20n\lg\omega$$

斜率为$-20n$dB/dec的直线，在$\omega=\sqrt[n]{K}$处穿越0dB线。

- 3.惯性环节



$$G(s)=\frac{1}{Ts+1} \qquad G(j\omega)=\frac{1}{jT\omega+1}$$

$$|G(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}$$

$$20\lg|G(j\omega)|=20\lg\frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}=-20\lg\sqrt{T^2\omega^2+1}$$

幅频特性渐近线　　$\omega<<1/T$时，略去ωT $\Rightarrow$

$20\lg|G(j\omega)|\approx-20\lg 1=0\,\mathrm{dB}$

是一条与横轴重合的直线。

$\omega>>1/T$时，略去 1 $\Rightarrow$ 　$20\lg|G(j\omega)|\approx-20\lg T\omega=-20\lg T-20\lg\omega$

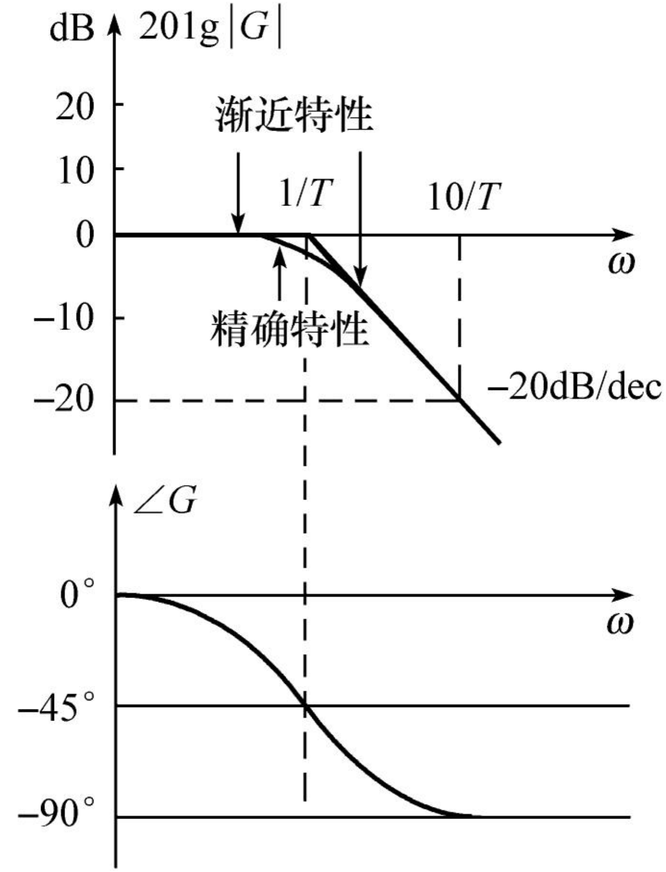
是斜率为$-20\,\mathrm{dB/dec}$的直线，在$\omega=1/T$ 处穿越 0dB线。

误差$=-20\lg\sqrt{T^2\omega^2+1}+20\lg T\omega$　　$\omega=1/T$时误差最大，为-3dB。

$$G(j\omega)=\frac{1}{jT\omega+1}$$

相频特性 $\angle G(j\omega)=-\arctan T\omega$

ω	0	$1/T$	∞
$\angle G(j\omega)$	0°	-45°	-90°



- 4.纯微分环节

$G(s)=s$

$G(j\omega)=j\omega=\omega e^{j\frac{\pi}{2}}$

幅频特性 $\quad 20\lg|G(j\omega)|=20\lg\omega$

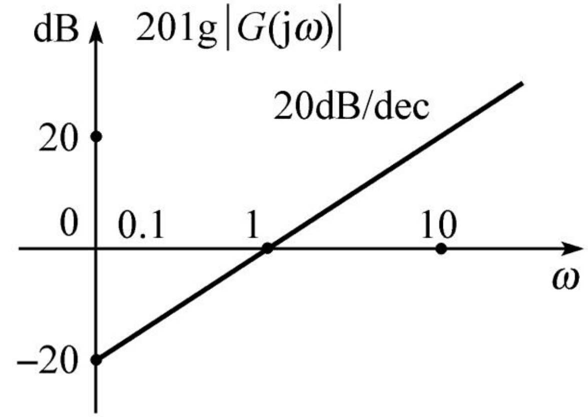
幅频特性是直线，斜率为20 dB/dec，

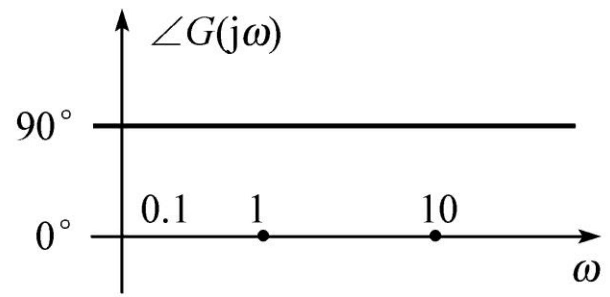
通过横轴上$\omega=1$的点。

$$20\lg 10\omega-20\lg\omega=20\lg 10+20\lg\omega-20\lg\omega$$
$$=20\,\mathrm{dB}$$

相频特性 $\quad \angle G(j\omega)=90°$

相频特性是通过纵轴上90°点且与横轴平行的直线。

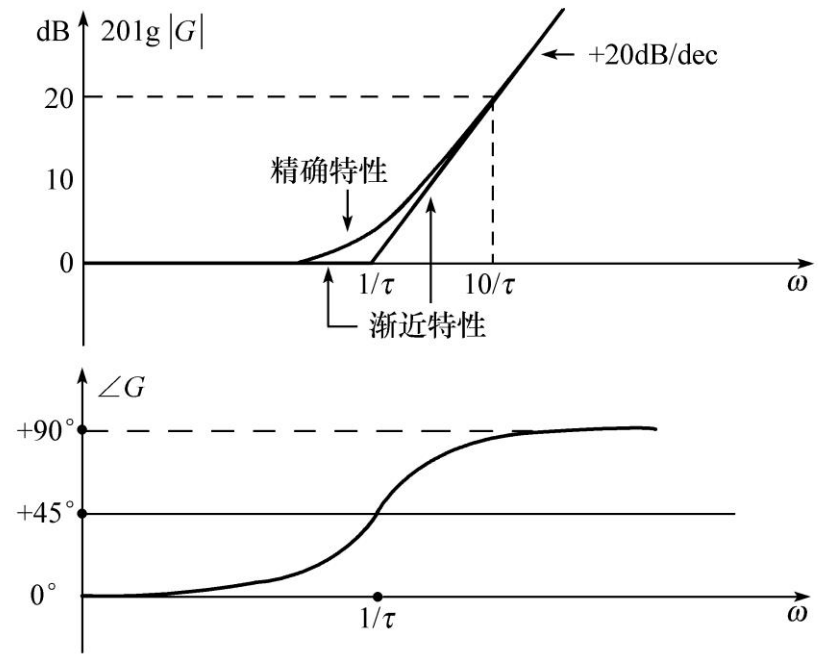




- 5.一阶微分环节

$G(s)=\tau s+1$

$G(j\omega)=j\tau\omega+1=\sqrt{\tau^2\omega^2+1}e^{j\arctan\tau\omega}$



对数幅频特性

$20\lg|G(j\omega)|=20\lg\sqrt{\tau^2\omega^2+1}$

幅频特性渐近线

$\omega<<1/\tau$ 时略去$\tau\omega$,得

$20\lg|G(j\omega)|=20\lg 1=0\,\text{dB}$

$\omega>>1/\tau$ 时略去 1$\Rightarrow$ $20\lg|G(j\omega)|=20\lg\sqrt{\tau^2\omega^2}=20\lg\tau\omega=20\lg\tau+20\lg\omega$

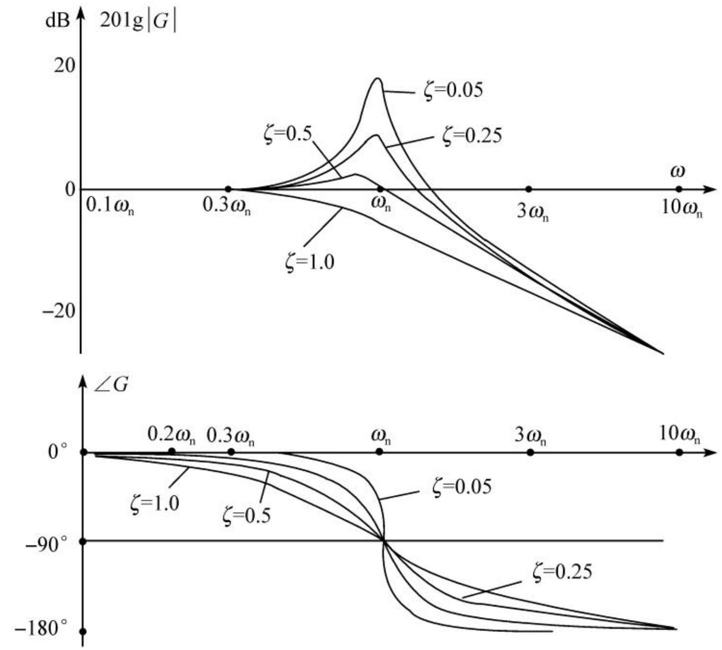
是直线，过横轴上$\omega=1/\tau$点， 斜率 是20dB/dec。

对数相频特性 $\angle G(j\omega)=\arctan\tau\omega$ 3个关键点是:

$\omega=1/\tau,\angle G(j\omega)=45°$； $\omega\to 0$， $\angle G(j\omega)\to 0°$； $\omega\to\infty,\angle G(j\omega)\to 90°$。

- 6.振荡环节

$$G(s)=\frac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\qquad(0\le\zeta<1)$$



$$G(j\omega)=\frac{1}{(1-T^2\omega^2)+j2\zeta T\omega}$$

$$|G(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2+(2\zeta T\omega)^2}}$$

对数幅频特性为

$$20\lg|G(j\omega)|=-20\lg\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2+(2\zeta T\omega)^2}$$

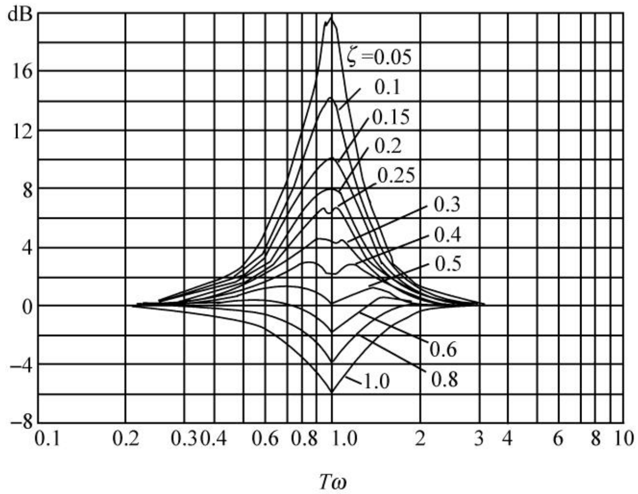
幅频特性渐近线　$\omega<<1/T$时,略去$T\omega$得

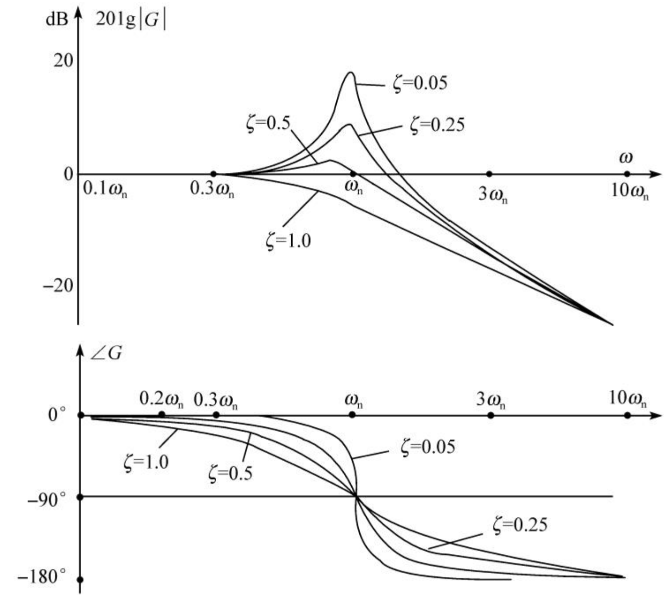
$$20\lg|G(j\omega)|=-20\lg 1=0\,\text{dB}，直线。$$

$\omega>>1/T$时,略去1和$2\zeta T\omega$得

$$20\lg|G(j\omega)|=-20\lg\ T^2\omega^2=-40\lg T\omega=-40\lg T-40\lg\omega$$

直线，斜率为$-40\,\text{dB/dec}$，过横轴上 $\omega=\omega_n=1/T$点。





误差与ω及ζ有关。

对数相频特性 $\angle G(j\omega)=\begin{cases} -\arctan\dfrac{2\zeta T\omega}{1-T^2\omega^2} & (\omega\le\dfrac{1}{T}) \\ -180^\circ-\arctan\dfrac{2\zeta T\omega}{1-T^2\omega^2} & (\omega>\dfrac{1}{T}) \end{cases}$

$\omega\to 0$时，$\angle G(\mathrm{j}\omega)\to 0^\circ$； $\omega=1/T=\omega_n$时，$\angle G(\mathrm{j}\omega)=-90^\circ$；

$\omega\to\infty$，$\angle G(\mathrm{j}\omega)\to -180^\circ$。

- 7.二阶微分环节

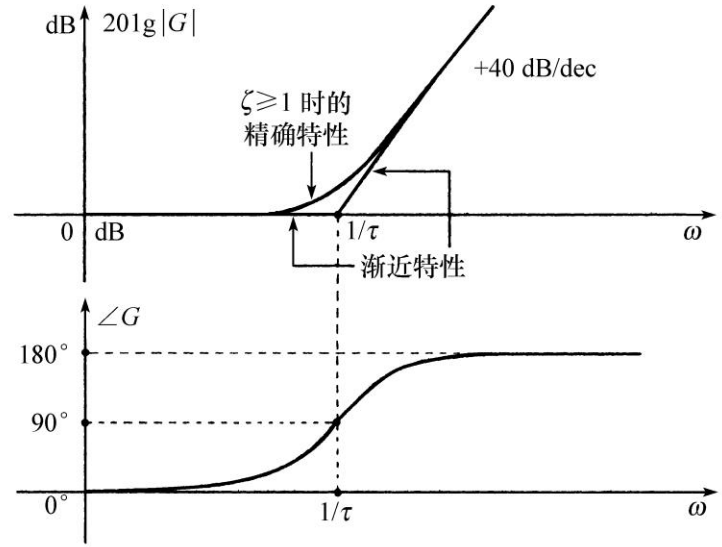
$$G(s)=\tau^2 s^2+2\zeta\tau s+1 \quad (\zeta<1)$$

$$G(j\omega)=1-\tau^2\omega^2+j2\zeta\tau\omega$$

对数幅频特性和相频特性为：

$$20\lg|G(j\omega)|=20\lg\sqrt{(1-\tau^2\omega^2)^2+(2\zeta\tau\omega)^2}$$

$$\angle G(j\omega)=\begin{cases}\arctan\dfrac{2\zeta\tau\omega}{1-\tau^2\omega^2} & \omega\le\dfrac{1}{\tau}\\ 180^\circ+\arctan\dfrac{2\zeta\tau\omega}{1-\tau^2\omega^2} & \omega>\dfrac{1}{\tau}\end{cases}$$



二阶微分环节渐近线方程是

$$20\lg|G(j\omega)|=0\text{dB} \quad (\omega<<1/\tau)$$

$$20\lg|G(j\omega)|=40\lg\tau\omega=40\lg\tau+40\lg\omega \quad (\omega>>1/\tau)$$

两条直线交于横轴上$\omega=1/\tau$处，$\omega=1/\tau$称为转折频率。

- 8.延迟环节

$$G(s)=\mathrm{e}^{-\tau s}$$

$$G(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\tau\omega}$$

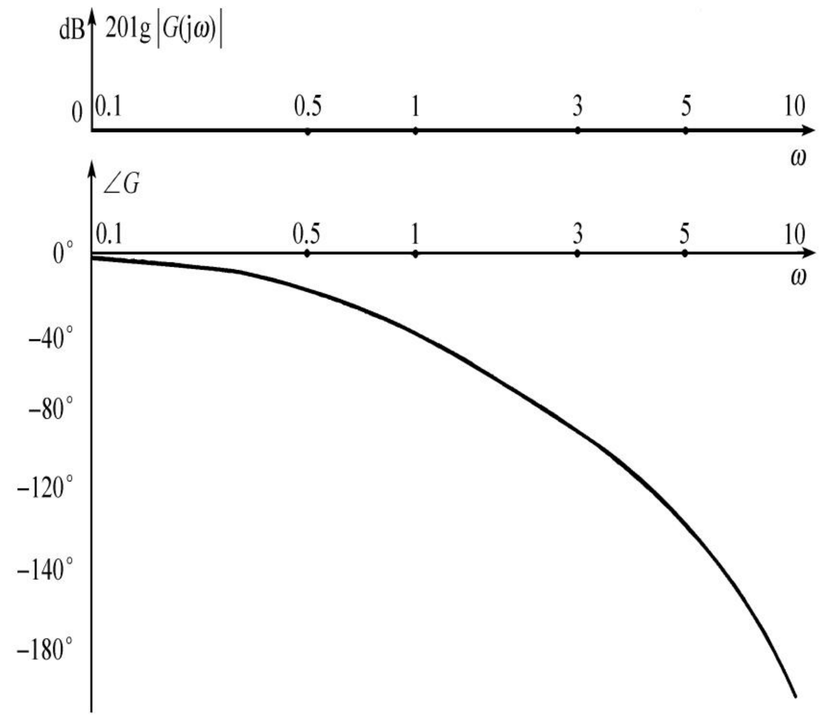
$$|G(\mathrm{j}\omega)|=1$$

对数幅频特性为

$$20\lg|G(\mathrm{j}\omega)|=20\lg 1=0\,\mathrm{dB}$$

相频特性为

$$\angle G(\mathrm{j}\omega)=-\tau\omega\,\mathrm{rad}=-57.3°\tau\omega$$



- 9.开环频率特性的绘制

$$G(s)=G_1(s)G_2(s)\cdots G_n(s)$$

$$G(j\omega)=G_1(j\omega)G_2(j\omega)\cdots G_n(j\omega)$$

开环对数幅频特性和相频特性分别为

$$20\lg|G(j\omega)|=20\lg|G_1(j\omega)|+20\lg|G_2(j\omega)|+\cdots+20\lg|G_n(j\omega)|$$

$$\angle G(j\omega)=\angle G_1(j\omega)+\angle G_2(j\omega)+\cdots+\angle G_n(j\omega)$$

- 直线相加仍是直线，和的斜率为各斜率之和。
- 步骤：1）写成基本环节相乘的形式。
  - 2）从低频到高频，计算转折频率与斜率。
  - 3）绘最低频段，$20\lg|G|=20\lg\frac{K}{\omega^n}=20\lg K-20n\lg\omega$ 。
  - 4）从低频到高频绘折线渐近线，在转折频率处加上基本环节的斜率。
  - 5）必要时在转折频率处修正曲线。

- 例5-2-4 开环传递函数为

$$G(s)=\frac{7.5\left(\frac{s}{3}+1\right)}{s\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\frac{s^2}{2}+\frac{s}{2}+1\right)}$$

绘制系统的开环对数频率特性曲线。

解 放大和积分、振荡、惯性、一阶微分环节。

1) 放大和积分环节， $-20\mathrm{dB/dec}$;

振荡环节，$\omega_1=\sqrt{2}\mathrm{rad/s}, -40\mathrm{dB/dec}$;

惯性环节，$\omega_2=2\mathrm{rad/s}$, $-20\mathrm{dB/dec}$;

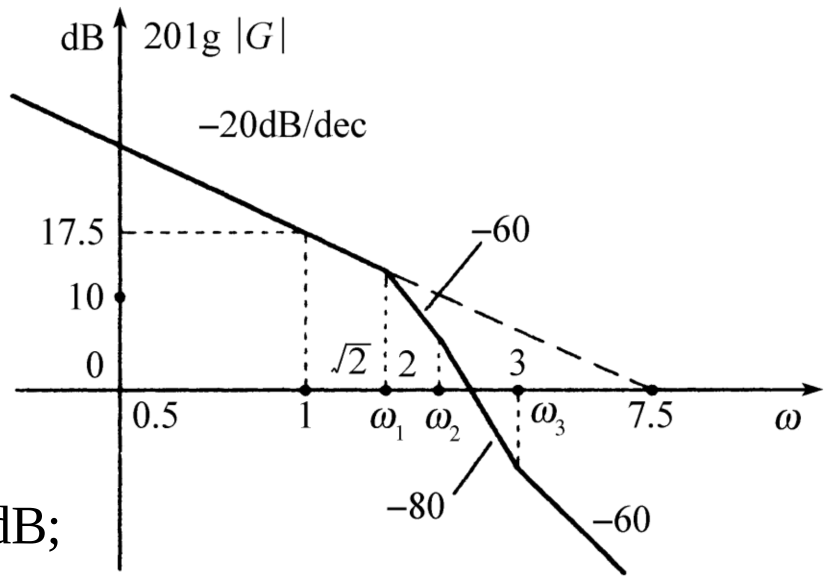
一阶微分环节，$\omega_3=3\mathrm{rad/s}$, $20\mathrm{dB/dec}$

2) 当$\omega<\sqrt{2}$时，$G(s)=\dfrac{7.5}{s}$,

直线斜率 $-20\mathrm{dB/dec}$。

当$\omega=1$时，直线纵坐标为$20\lg 7.5=17.5\mathrm{dB}$;

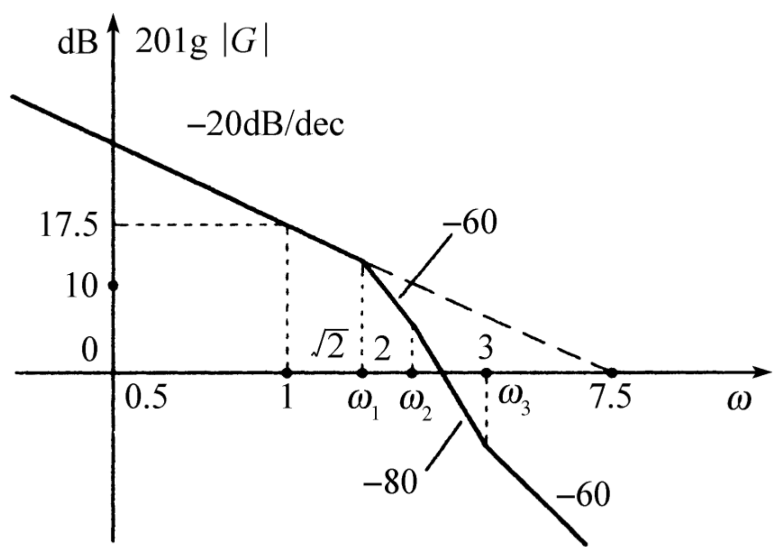
$\omega=7.5$时直线穿过0dB线。



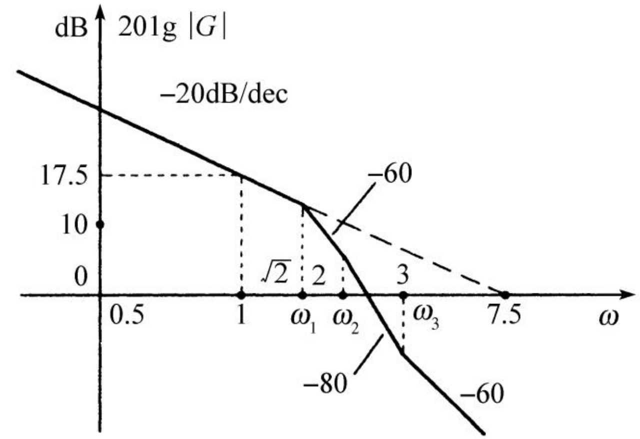
3） $\omega_1=\sqrt{2}$处，直线斜率为 $-20\text{dB/dec}-40\text{dB/dec}=-60\text{dB/dec}$

$\omega_2=2$处,斜率:$-60-20=-80\text{dB/dec}$。

$\omega_3=3$处，斜率:$-80+20=-60\text{dB}/\text{dec}$。

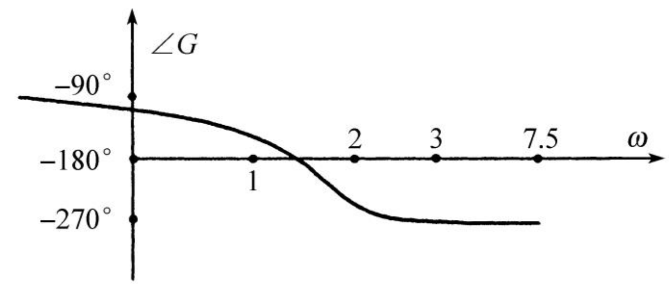


$$G(s)=\frac{7.5\left(\frac{s}{3}+1\right)}{s\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\frac{s^2}{2}+\frac{s}{2}+1\right)}$$



4)相频特性。

$$\angle G(\mathrm{j}\omega)=\arctan\frac{\omega}{3}-90^\circ-\arctan\frac{\omega}{2}+\angle G_1(\mathrm{j}\omega);$$



$$\angle G_1(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}-\arctan\dfrac{\omega}{2-\omega^2} & \omega\le\sqrt{2}\\ -180^\circ-\arctan\dfrac{\omega}{2-\omega^2} & \omega>\sqrt{2}\end{cases}$$

$\angle G_1(\mathrm{j}\omega)$典型值：$\omega\to 0$，$\angle G_1(\mathrm{j}\omega)\to 0^\circ$； $\omega=\sqrt{2}$，$\angle G_1(\mathrm{j}\omega)=-90^\circ$；

$\omega\to\infty$，$\angle G_1(\mathrm{j}\omega)=-180^\circ$。

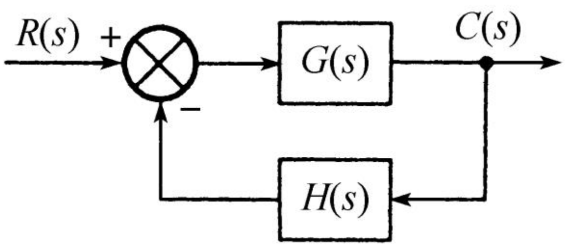
$\omega\to 0\Rightarrow\angle G\to-90^\circ$；$\omega\to\infty\Rightarrow\angle G\to-270^\circ$。

5.2.3 最小相位系统

- 最小相位系统：所有传递函数的极点和零点的实部全部小于或等于零。（闭环系统，看开环传递函数的极点和零点）
- 非最小相位系统：传递函数中具有正实部的极点或零点，或有延迟环节。
- 幅频特性相同的环节之间存在不同的相频特性，最小相位环节的相位移最小，最容易控制。
- 设系统（或环节）传递函数分母的阶次是n，分子的阶次是m,串联积分环节的个数是v（包含在n之内）。最小相位系统，当$\omega \to \infty$时幅频特性斜率为-20（n-m）dB/dec,相位等于$-(n-m)90^{o}$；当$\omega \to 0$时相位等于$-v90^{o}$。
- 最小相位系统，对数幅频特性和相频特性不是相互独立的，存在严格的确定关系。

5.3 Nyquist稳定判据
5.3.1 完整的频率特性极坐标图

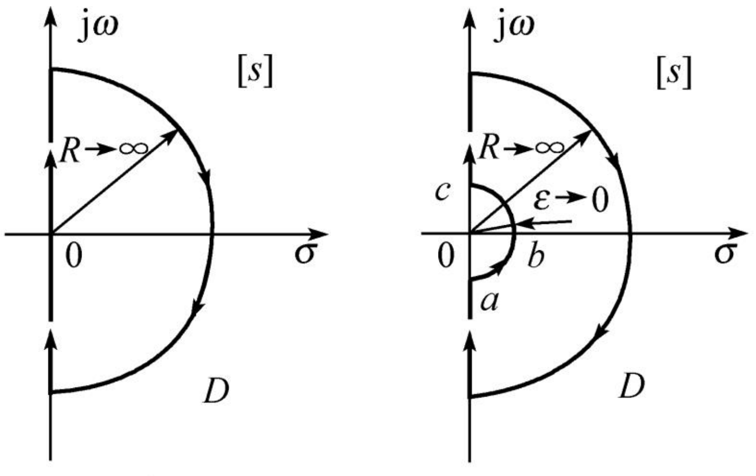
- 判据特点：利用开环频率特性判定闭环系统的稳定性。
- 系统开环传递函数为



$$G(s)H(s)=\frac{KN(s)}{s^{v}D(s)} \qquad N(0)=D(0)=1, K>0$$

- $s^{v}D(s)=0$ 的根称开环极点。
- 开环稳定：开环极点实部不是正数。

- Nyquist围线：封闭曲线。
  v=0，右半平面。
  $v\neq0$，绕过原点的右半平面。
- 完整的频率特性极坐标图：s沿Nyquist围线顺时针转一周，G(s)H(s)平面对应的封闭曲线。



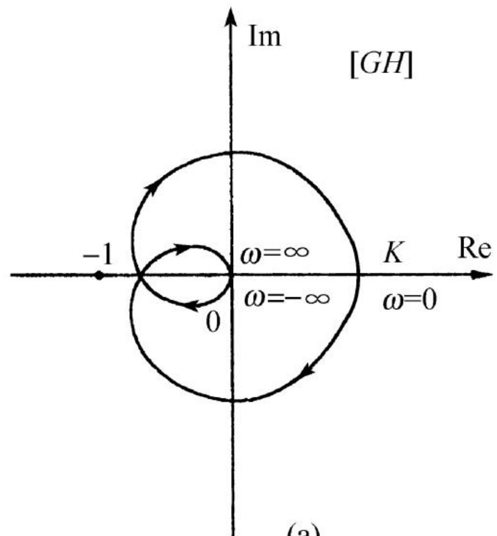
(a) (b)

- 频率特性新定义：G(jω)H(jω),ω可正可负。
- G(jω)H(jω)和G(-jω)H(-jω)是共轭复数。 G(jω)H(jω)图形关于实轴对称。
- 实际物理系统， G(s)H(s)分母次数高于分子。故有：

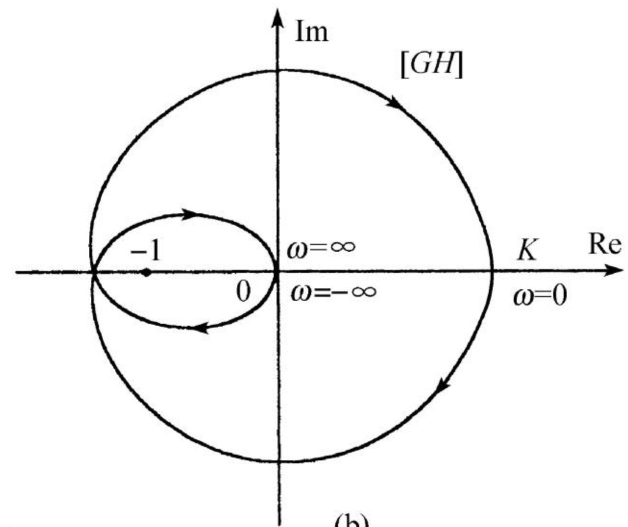
$$s\to\infty \ \Rightarrow\ G(s)H(s)\to 0$$

- 开环极坐标图。
- $v=0$

  G(0)H(0)=K



(a)



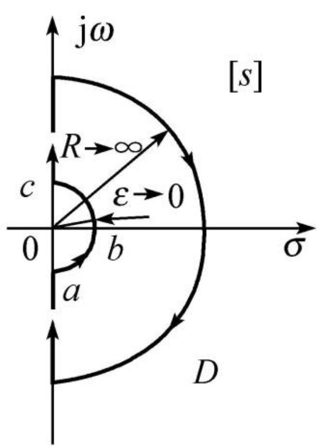
(b)

- $v\neq 0$

$s \to 0$ 设 $s=\varepsilon \mathrm{e}^{j\theta}$,

$\varepsilon > 0,\ \varepsilon \to 0,$

$-\pi/2 < \theta < \pi/2$。 $N(s)=D(s)=1 \Rightarrow G(s)H(s)=\dfrac{K}{s^{v}}=\dfrac{K}{\varepsilon^{v}\mathrm{e}^{jv\theta}}=\dfrac{K}{\varepsilon^{v}}\mathrm{e}^{-jv\theta}$

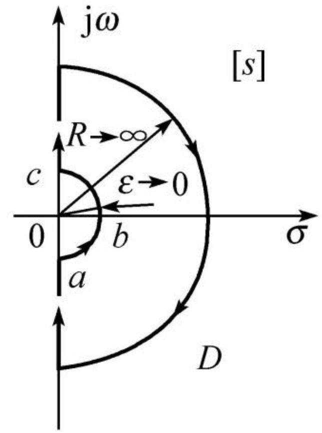


(b)

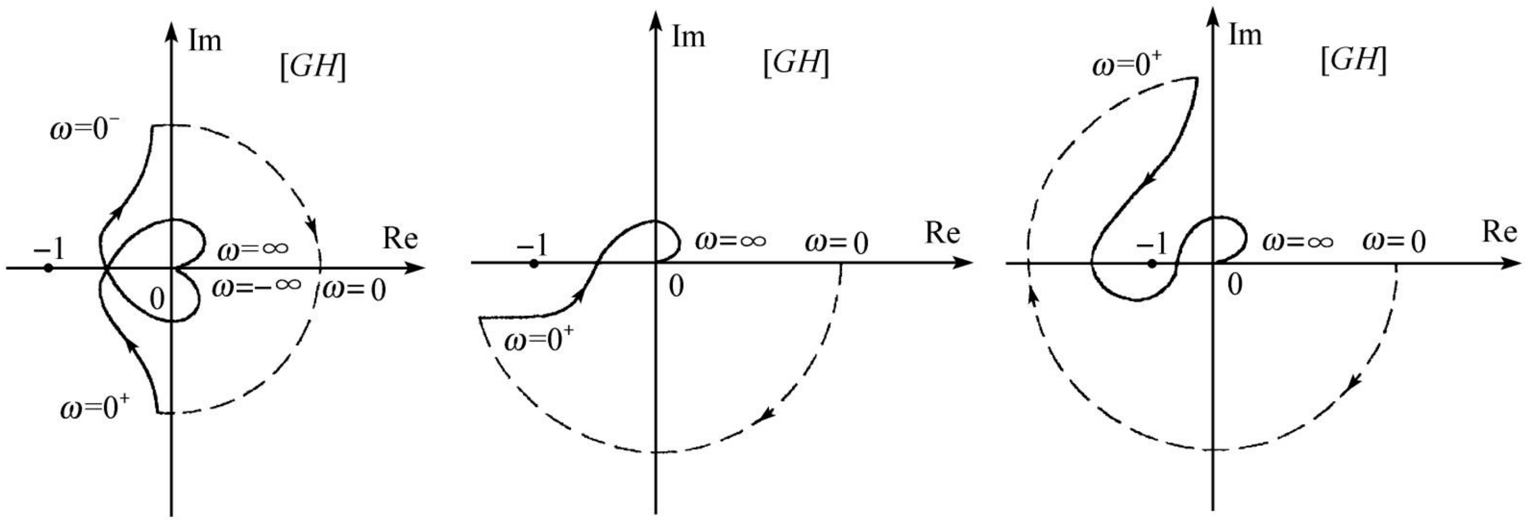
s	θ	$\lvert G(s)H(s)\rvert$	$\angle G(s)H(s)=-v\theta$
$j0^{-}$	$-\pi/2$	∞	$v\pi/2$
ε	0	∞	0
$j0^{+}$	$\pi/2$	∞	$-v\pi/2$

- 开环极坐标图，$v\neq 0$

s	θ	$\lvert G(s)H(s)\rvert$	$\angle G(s)H(s)=-v\theta$
$j0^-$	$-\pi/2$	∞	$v\pi/2$
ε	0	∞	0
$j0^+$	$\pi/2$	∞	$-v\pi/2$



(b)



(a) (b) (c)

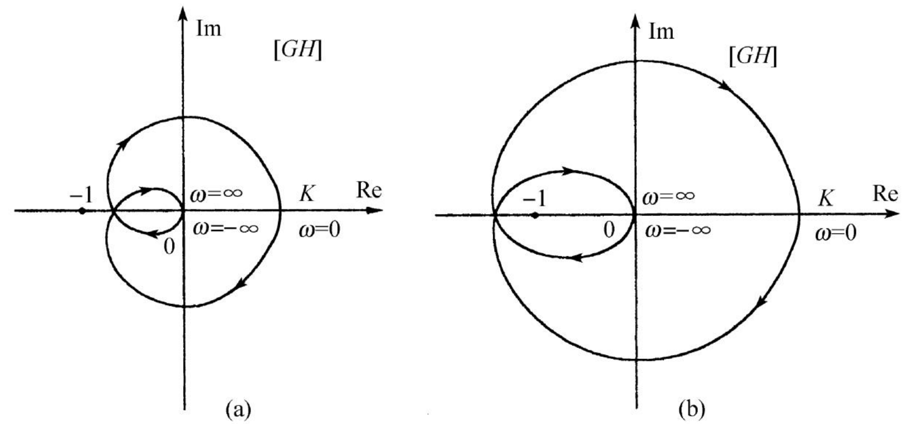
$\omega:0\rightarrow 0^+ \Rightarrow\ G(s)H(s)$:正实轴无穷远处顺时针转 $v\pi/2\,\mathrm{rad}$ 或 $v90^\circ$。

5.3.2 Nyquist 稳定判据

- 预备知识

  辐（幅）角定理（ Cauchy's argument principle ）。
- Nyquist 稳定判据 闭环系统的开环传递函数G(s)H(s)有p个正实部极点，闭环系统稳定的充要条件是：当s按顺时针方向沿Nyquist围线变化1周时（或, $\omega:-\infty \to 0^- \to 0 \to 0^+ \to \infty$ ），G(s)H(s)曲线（开环极坐标图）应按逆时针方向包围(-1,j0)点p周。
- Nyquist 稳定判据“推论”： 1）开环极坐标图顺时针方向包围(-1,j0）点，闭环不稳。 2）开环稳定，闭环的稳定的充要条件是，开环极坐标图不包围(-1,j0)点。

- 例 设开环稳定。
  图a不包围，闭环稳定。
  图 b顺时针方向包围(-1,j0)点2周，闭环不稳。

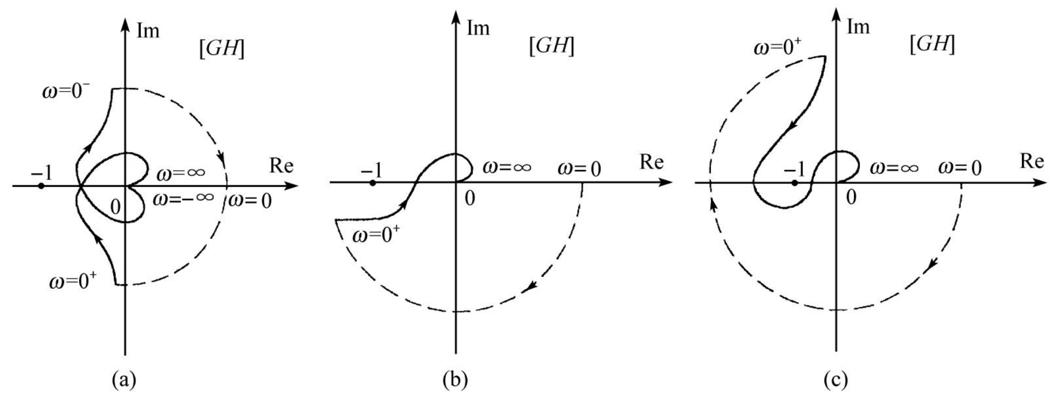


$$\omega:-\infty \to 0^{-} \to 0 \to 0^{+} \to \infty$$

$$\omega:0 \to 0^{+} \to \infty$$

- 包围次数是前者一半。
- 闭环系统的稳定的充要条件是：

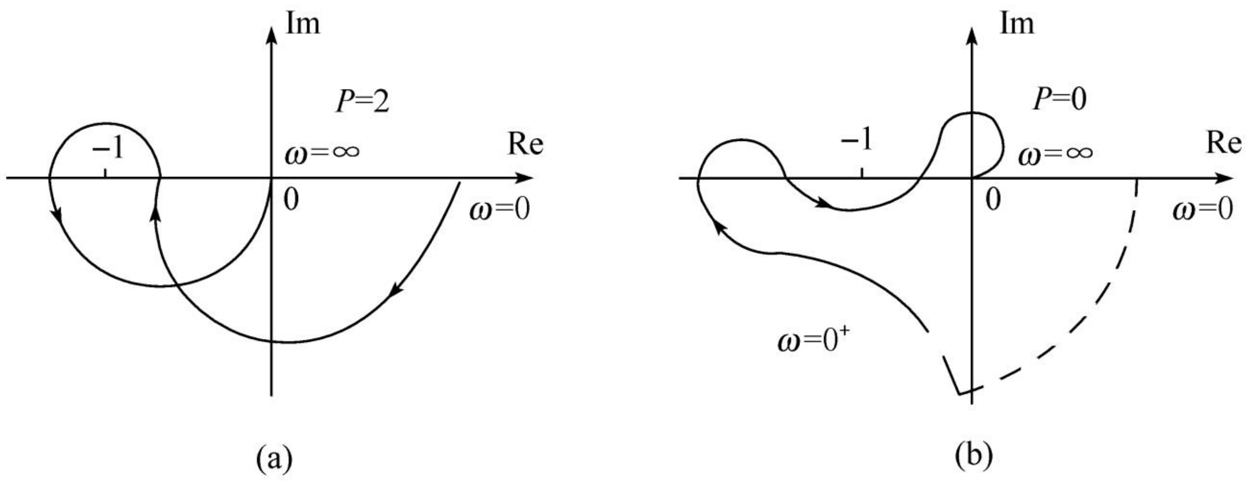
$$\omega:0 \to 0^{+} \to \infty$$



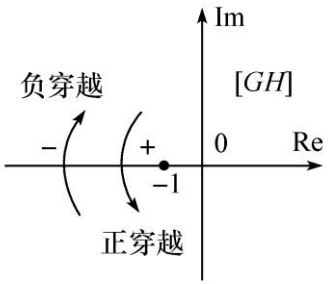
开环极坐标图逆时针方向包围(-1,j0)点p/2周。

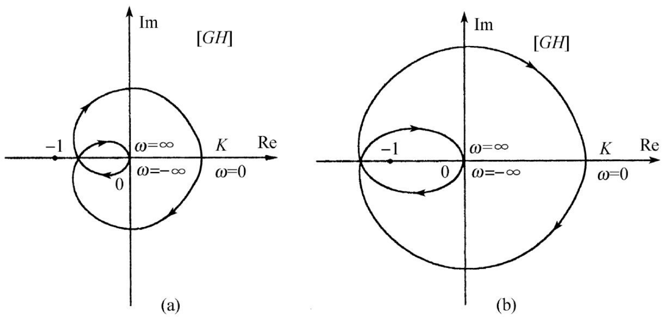
- 包围周数：从（-1,j0）引出的向量绕该点转动的总圈数。
- 例　图a,b,c不包围，若开环稳定，则闭环稳定。

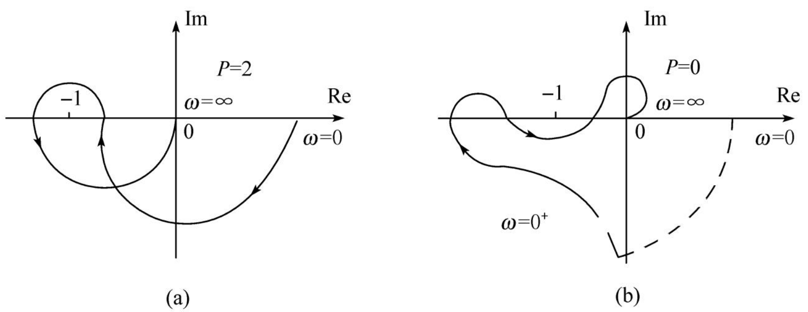
- 例5-3-1　由开环极坐标图判定闭环系统的稳定性。
- 解　图a逆时针方向包围(-1,j0)点1周，图b不包围，故闭环系统稳定。



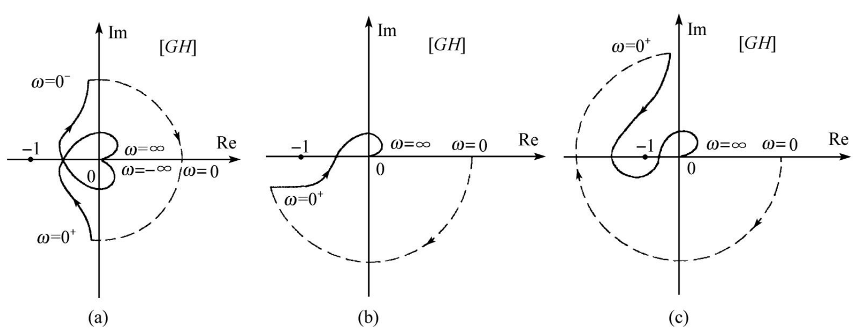
- “穿越”与简捷的稳定判据
- 正穿越：逆时针方向（从上向下）穿过负实轴，
  相角增加。
- 负穿越：顺时针方向（从下向上）穿过负实轴，
  相角减小。





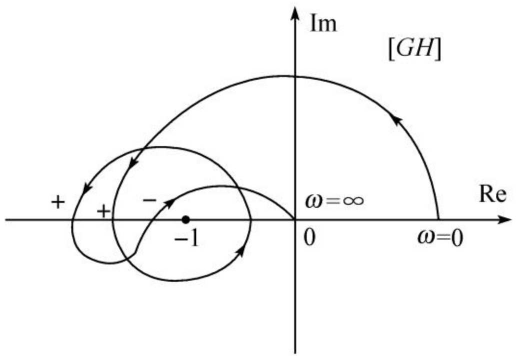


- 开环极坐标图逆时针方向包围(-1,j0)点的周数等于在（-1，j0）左方正、负穿越次数之差。



- 稳定判据　闭环系统稳定的充要条件是：

  当ω由0→∞，开环极坐标图在（-1，j0)左方正、负穿越负实轴次数之差为p/2。



例 5-3-2 系统有两个正实部开环极点，判定闭环稳定性。

解　p=2，当ω由0→∞，开环极坐标图在点（-1，j0)左方正、负穿越负实轴次数之差为2-1=1=p/2，闭环稳定。

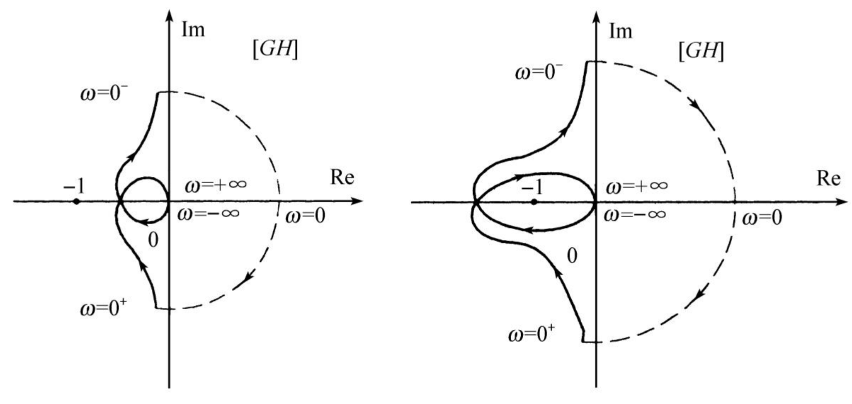
- 例5-3-3 判定闭环稳定性。

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(T_1s+1)(T_2S+1)}$$

解 p=0

图a无穿越，稳定。

图b 1次负穿越，不稳定。



(a) K 值较小 (b) K 值较大

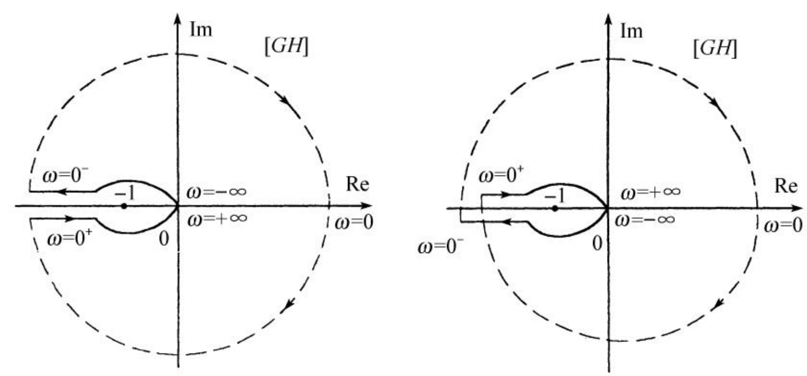
- 例5-3-4 判定闭环稳定性。

$$G(s)H(s)=\frac{K(\tau s+1)}{s^2(Ts+1)}$$

解 p=0

图a无穿越，稳定。

图b 1次负穿越，不稳定。



$T<\tau$ (a) $T>\tau$ (b)

5.3.3 用开环伯德图判定闭环稳定性（考纲以外）

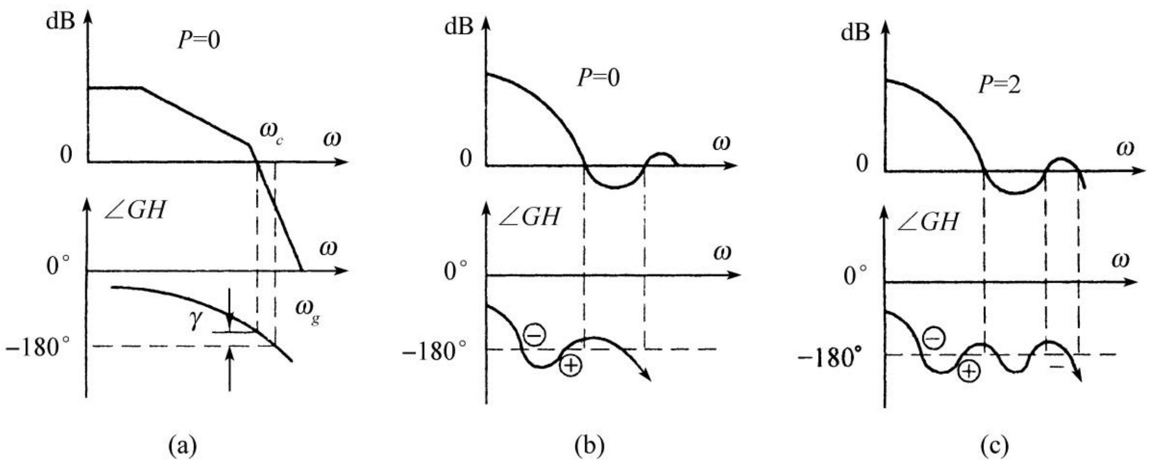
- 负实轴 —— 对数相频特性 -180°线。
- 单位圆以外区域 ——对数幅频特性0 dB以上区域。
- (-1,j0)左方穿越负实轴——Bode图，对数幅频特性

  0 dB线以上区域，相频特性曲线穿越 -180°线。
- 稳定判据　闭环系统稳定的充要条件是：

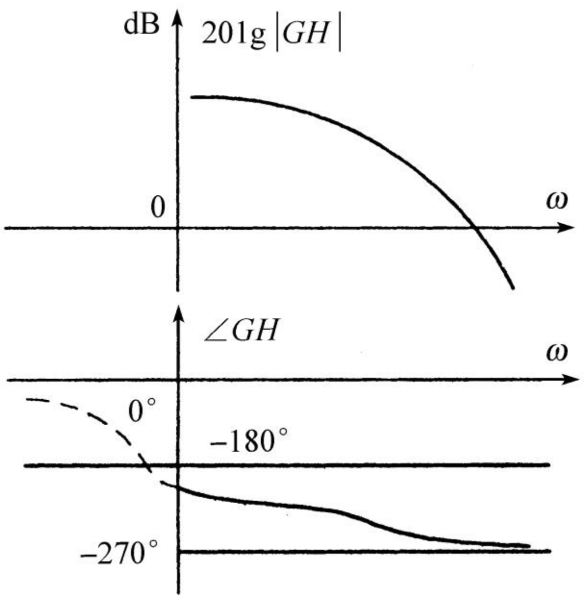
  在开环幅频特性大于0 dB的所有频段内，相频特性曲线对 -180°线正、负穿越次数之差为p/2。
- 注意 开环系统有积分环节时，相频特性应增补ω由 $0 \to 0^+$ 部分。$\omega \to 0$，在正实轴上。

5.3.3 用开环伯德图判定闭环稳定性（考纲以外）

- *例 5-3-5*
  判定闭环稳定性。



- 解　a,没穿越-180°线，稳定
  b，正、负穿越次数之差=1-1=0，稳定
  c，正、负穿越次数之差=1-2=-1，不稳定
- *例 5-3-6　对最小相位系统，判定闭环稳定性。*

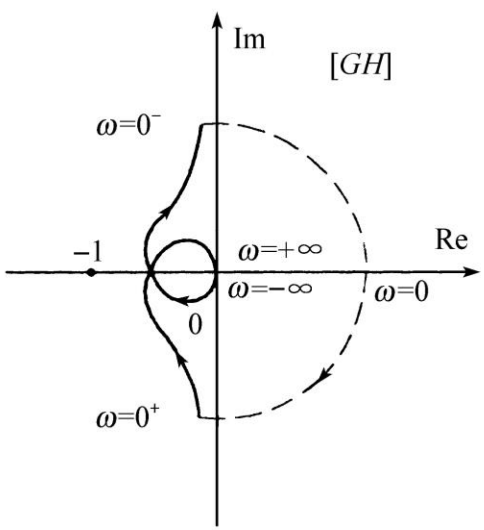


解　ω→0，∠GH→0°

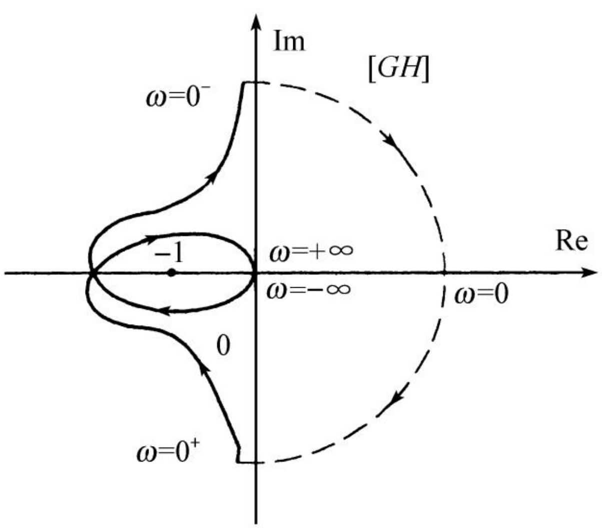
1 次负穿越，不稳定。

5.4 控制系统的相对稳定性

- 参数变化，系统可能由稳定变为不稳定。
- 要求系统具有足够的稳定裕度。动态性能与稳定裕度也有关。
- 稳定裕度——相对稳定性。
- 开环极坐标图离（-1,j0）越远，稳定裕度越大。



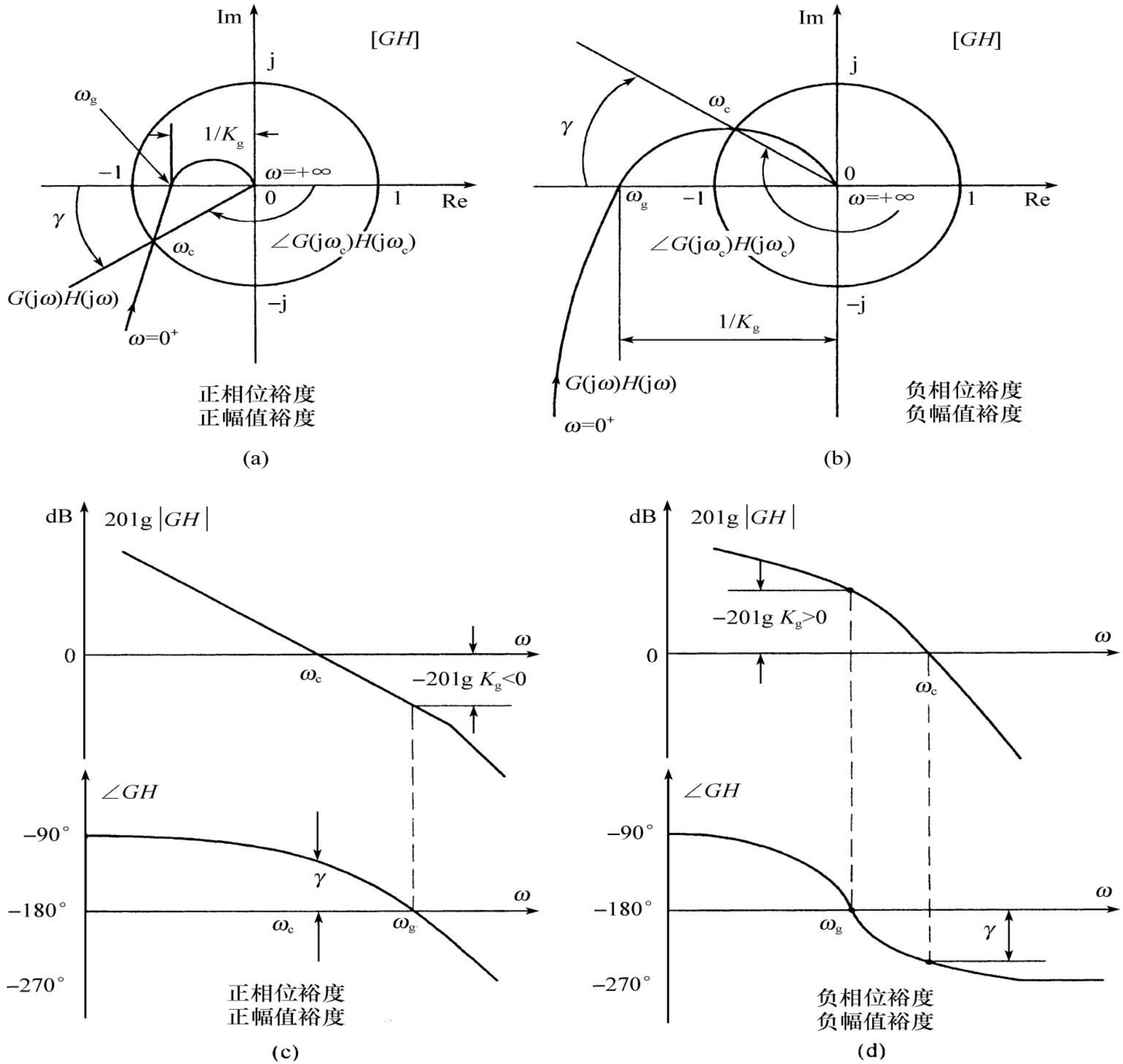
(a) K 值较小



(b) K 值较大

5.4.1 相位裕度

- 幅值穿越（剪切）频率ω_c：开环幅值为1的频率。
- 开环极坐标图与单位圆的交点，开环Bode图与0dB线的交点。
- 相位裕度γ： $\gamma = \angle G(j\omega_c)H(j\omega_c) - (-180^\circ) = \angle G(j\omega_c)H(j\omega_c) + 180^\circ$
- 表示开环极坐标图与单位圆的交点与（-1,j0）的远近程度。
- 开环稳定的系统，相位裕度为正时闭环稳定，相位裕度为负时闭环不稳定。
- 通常要求$\gamma > 40^{\circ}$。


Im
[GH]
j
ω_g
$1/K_g$
−1
$\omega=+\infty$
0
1
Re
γ
ω_c
$\angle G(j\omega_c)H(j\omega_c)$
$G(j\omega)H(j\omega)$
−j
$\omega=0^+$
正相位裕度
正幅值裕度
(a)
Im
[GH]
j
ω_c
γ
0
ω_g
−1
$\omega=+\infty$
1
Re
$\angle G(j\omega_c)H(j\omega_c)$
−j
$1/K_g$
$G(j\omega)H(j\omega)$
$\omega=0^+$
负相位裕度
负幅值裕度
(b)
dB
201g |GH|
ω
0
ω_c
$-201\mathrm{g}\ K_g<0$
∠GH
−90°
γ
ω
−180°
ω_c
ω_g
−270°
正相位裕度
正幅值裕度
(c)
dB
201g |GH|
$-201\mathrm{g}\ K_g>0$
ω
0
ω_c
∠GH
−90°
ω
−180°
ω_g
γ
−270°
负相位裕度
负幅值裕度
(d)

5.4.2 幅值裕度

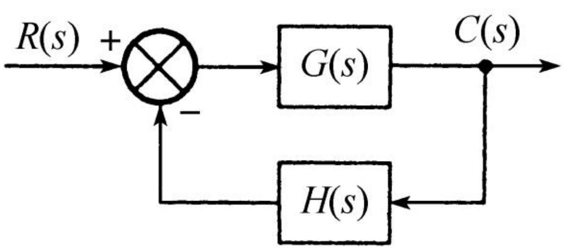
- 相位穿越频率 ω_g：开环频率特性相位为-180° 的频率。
- 幅值裕度　极坐标图　$K_g = \dfrac{1}{\left|G(j\omega_g)H(j\omega_g)\right|}$
- Bode 图　$20\lg K_g = -20\lg\left|G(j\omega)H(j\omega)\right| \ \ \mathrm{dB}$

$20\lg K_g > 0, K_g > 1, \left|G(j\omega)H(j\omega)\right| < 1,$ 幅值裕度为正。

- 幅值裕度表示开环极坐标图与负实轴的交点与点（-1,j0）的远近程度。
- 开环稳定的系统，相位裕度为正时闭环稳定，相位裕度为负时闭环不稳定。
- 通常要求　$K_g = 2-3.16$，$20\lg K_g = 6-10\ \mathrm{dB}$

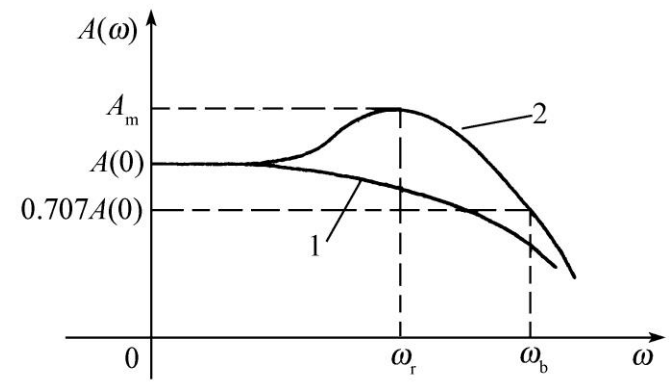
5.5 闭环频率特性图
5.5.1 闭环频率特性图

- 闭环频率特性



$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}\Rightarrow\frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)H(j\omega)}$$

$$\Phi(j\omega)=\begin{cases}\dfrac{1}{H(j\omega)} & |G(j\omega)H(j\omega)|>>1\\ G(j\omega) & |G(j\omega)H(j\omega)|<<1\end{cases}$$



- 闭环幅频特性A(ω),闭环相频特性θ（ω）。
- 谐振： A(ω)>A(0)；谐振频率 ω_r ，
- 截止频率（带宽）ω_b 。谐振峰值

$$M_r=\frac{A_m}{A(0)}$$

5.5.2 等M圆（考纲以外）

- 开环极坐标平面上，闭环频率特性幅值为常值的点的轨迹。
- 开环频率特性 G(jω)=U+jV
- 单位负反馈系统的闭环频率特性 $\Phi(j\omega)=\dfrac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)}=\dfrac{U+jV}{1+U+jV}$
- 闭环频率特性幅值M为

$$M^2=\frac{U^2+V^2}{(1+U)^2+V^2}$$

$M=1\Rightarrow$ 直线 $\quad 2U+1=0$

$M\neq1\Rightarrow$ 圆 $\quad (U+\dfrac{M^2}{M^2-1})^2+V^2=\dfrac{M^2}{(M^2-1)^2}$

圆心：$(-\dfrac{M^2}{M^2-1},j0)$， 半径：$\left|\dfrac{M}{M^2-1}\right|$