离散时间系统

- 离散时间信号与系统
- Z变换
- 常系数差分方程的求解
- 单位样值响应、卷积、反卷积

§ 2.1 离散时间信号与系统

一、引言

1. 离散时间系统的研究历史

①17世纪经典数值分析技术---奠定了数学基础

②20世纪40和50年代抽样数据控制系统研究得到了重大发展

③60年代以后计算机发展、FFT算法、超大数模集成电路

④20世纪末期数字信号处理技术继续发展、应用日益广泛

§ 2.1 离散时间信号与系统

2. 离散时间系统与连续时间系统的对比

	离散	连续
数学模型	差分方程	微分方程
时域求解方法	卷积和	卷积
变换域	Z变换、傅氏、离散正交系统函数	傅氏、拉氏、系统函数
	精度高、可靠性好、 重量体积小、便于大规模集成	无此优点
	一维、二维系统	注重一维
	利用可编程元件技术、 存储器设备灵活通用	无此优点
	工作频率不能太高	工作频率可以很高

§2.1 离散时间信号与系统

3．物联网-----连续、离散“混合系统”

①充分数字化的通信系统

②可看成一台带有天线的超级计算机

③通用化、模块化、兼容性、灵活性好

④显示了数字化技术的特征，也证明了连续系统的必要性

§2.1 离散时间信号与系统

二、离散时间信号-----序列

1. 离散时间信号的定义及其表示方法

①定义：只在某些离散瞬时给出函数值，时间上不连续的序列，离散时间间隔是均匀的

②$x(nT)$：T为时间间隔，nT称为时间宗量,一般记为$x(n)\{x(n)\}$

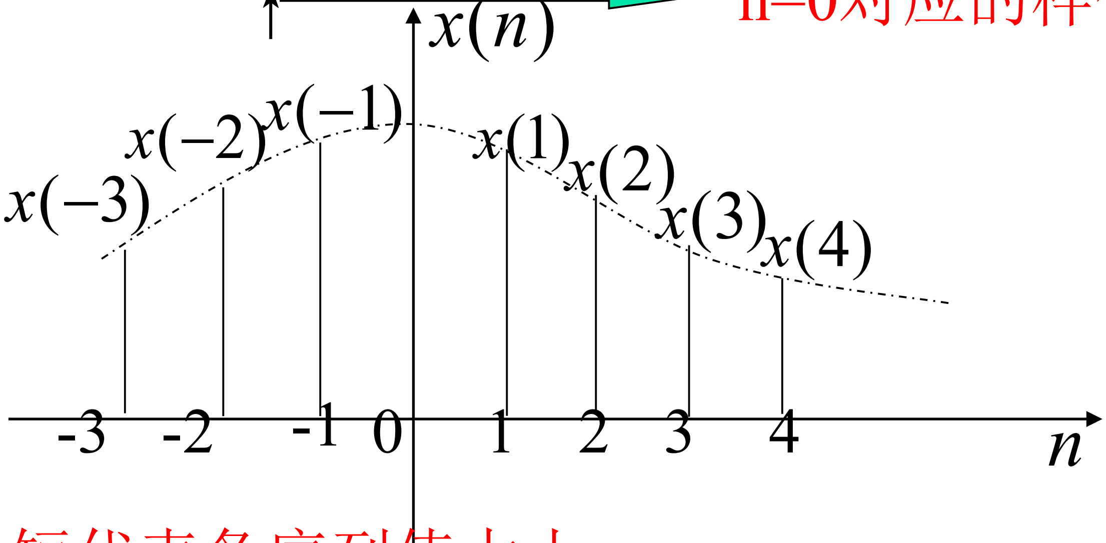
③闭式表达式；逐个列出；波形(图解)表示

§ 2.1 离散时间信号与系统

例1. ① $x(n) = 2n + 3$

② $x(n) = \{3,5,7,9,\underset{\uparrow}{21},63,41\}$ n=0对应的样值

③



*线段长短代表各序列值大小

*横轴只在n=整数时才有意义

§ 2.1 离散时间信号与系统

2．离散时间信号的运算

①相加 $z(n)=x(n)+y(n)$ $\quad \{1,3,\underset{\uparrow}{5},7\}+\{\underset{\uparrow}{2},4,6,8\}=\{1,3,\underset{\uparrow}{7},11,6,8\}$

②相乘 $z(n)=x(n)y(n)$ $\quad \{1,3,\underset{\uparrow}{5},7\}\times\{\underset{\uparrow}{2},4,6,8\}=\{\underset{\uparrow}{10},28\}$

③延时 $x(n)\xrightarrow{\text{右移}m}x(n-m)$

$x(n)\xrightarrow{\text{左移}m}x(n+m)$ $\quad (m>0)$

④反褶 $x(n)\rightarrow x(-n)$

$$\left.\begin{aligned}&⑤\text{压缩}\ x(n)\rightarrow x(an) &&a\text{为正整数}\\ &⑥\text{扩展}\ x(n)\rightarrow x(n/a) &&a\text{为正整数}\end{aligned}\right\}\text{去除某些点或补足零}$$

§ 2.1 离散时间信号与系统

例2 $x(n)=\{\underset{\uparrow}{0},1,2,3,4,5,6\}$ 求$x(2n)$与$x(n/2)$

解：$x(2n)=\{\underset{\uparrow}{0},2,4,6\}$ 去除某些点

$x(n/2)=\{\underset{\uparrow}{0},0,1,0,2,0,3,0,4,0,5,0,6\}$ 补上零值

§ 2.1 离散时间信号与系统

⑦差分 （对应微分运算）

$$\Delta x(n)=x(n+1)-x(n)$$ 前向差分

$$\nabla x(n)=x(n)-x(n-1)$$ 后向差分

⑧累加运算 （对应积分运算）

$$z(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)$$ 条件收敛

⑨序列能量

$$E=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x(n)|^2$$

§ 2.1 离散时间信号与系统

例3：①已知 $x(n)=\{2,5,\underset{\uparrow}{7},11,8,6,3\}$ 求$\Delta x(n),\nabla x(n),\sum\limits_{k=-\infty}^{n}x(k),E$

②已知 $x(n)=(1/2)^{n}$ 求 $\Delta x(n),\nabla x(n),\sum\limits_{k=-\infty}^{n}x(k),E$

解：①$\Delta x(n)=x(n+1)-x(n)=\{2,3,2,\underset{\uparrow}{4},-3,-2,-3,-3\}$

$$\nabla x(n)=x(n)-x(n-1)=\{2,3,\underset{\uparrow}{2},4,-3,-2,-3,-3\}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)=\{2,7,\underset{\uparrow}{14},25,33,39,42,\cdots,42,\cdots\}$$

$$E=4+25+49+121+64+36+9=308$$

② $\Delta x(n)=(1/2)^{n+1}-(1/2)^{n}=-(1/2)^{n+1}$

$$\nabla x(n)=(1/2)^{n}-(1/2)^{n-1}=-(1/2)^{n}$$

$\sum\limits_{k=-\infty}^{n}x(k)$,E无穷大

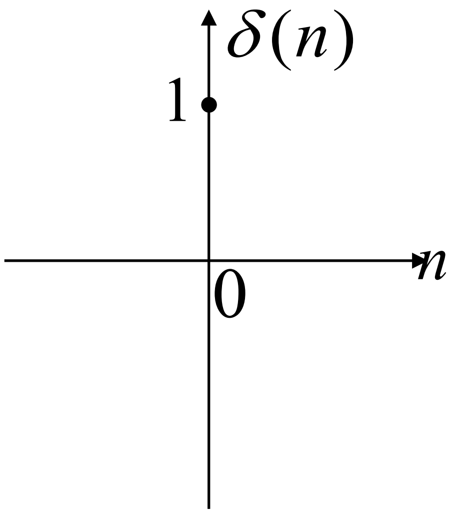
§ 2.1 离散时间信号与系统

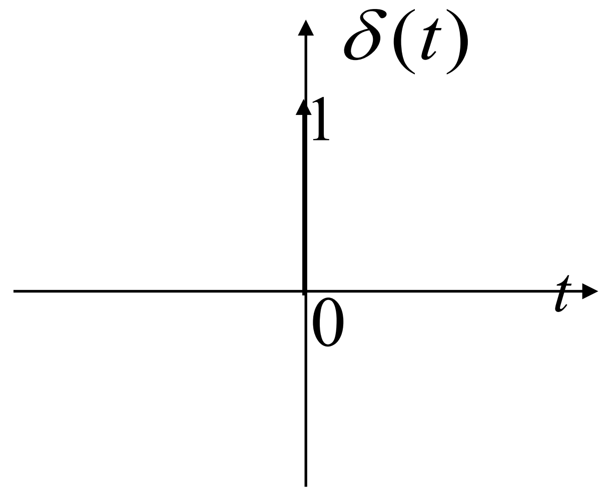
3．典型序列

①单位样值信号

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases} \xrightarrow{\text{比较}} \delta(t)\ \begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1\\ \delta(t)=0,t\neq 0\end{cases}$$

t=0时 $\delta(t)=\infty$

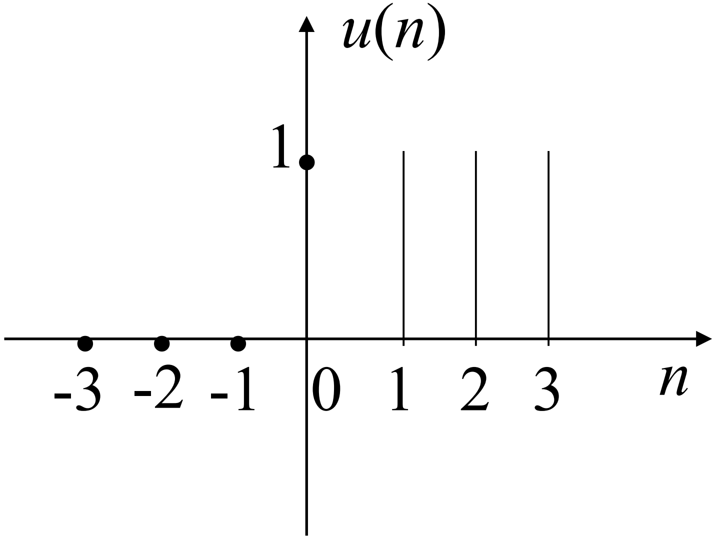


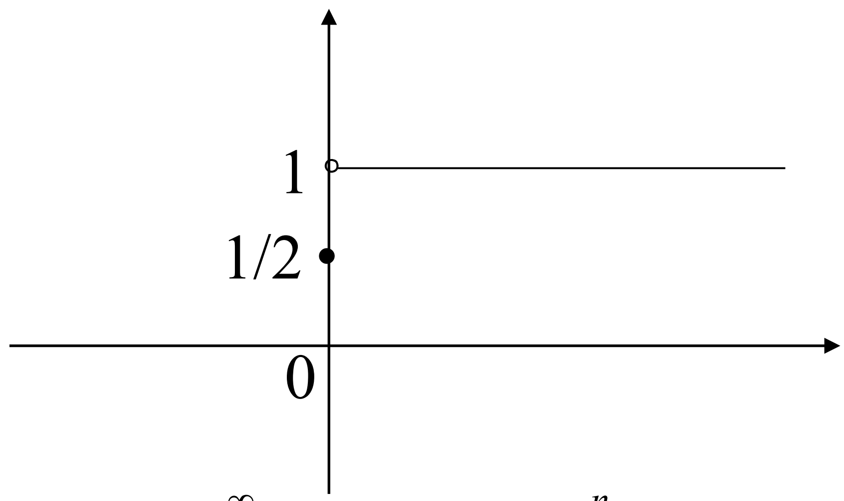


§ 2.1 离散时间信号与系统

②单位阶跃信号

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}\quad \xrightarrow{\text{比较}} \quad u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 1/2\ \text{或不定义} & t=0\\ 0 & t<0\end{cases}$$





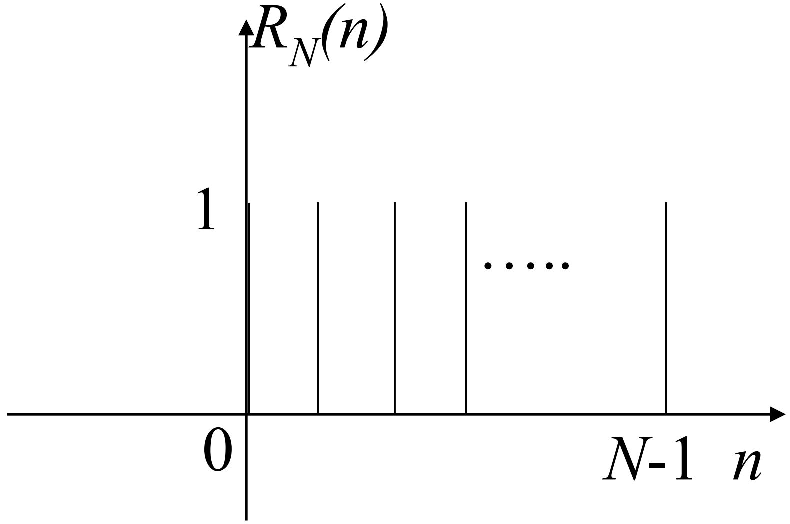
$$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$$

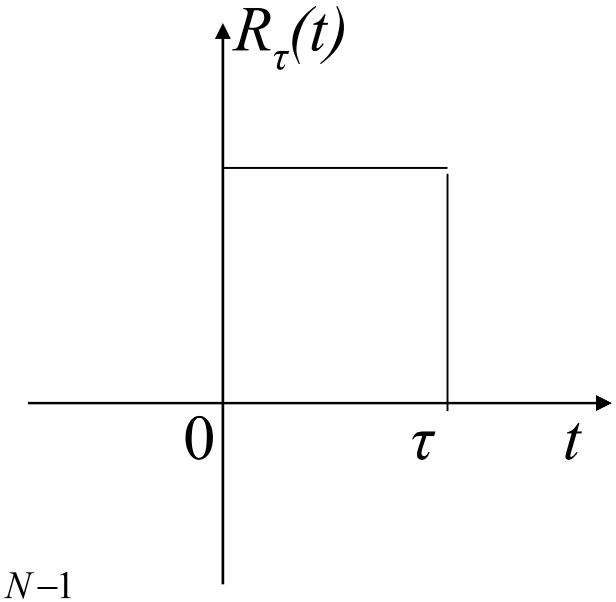
$$u(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k)$$

§ 2.1 离散时间信号与系统

③矩形序列

$$R_N(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le N\text{-}1\\ 0 & n<0, n\ge N\end{cases} \xrightarrow{\text{比较}} R_\tau(t)$$



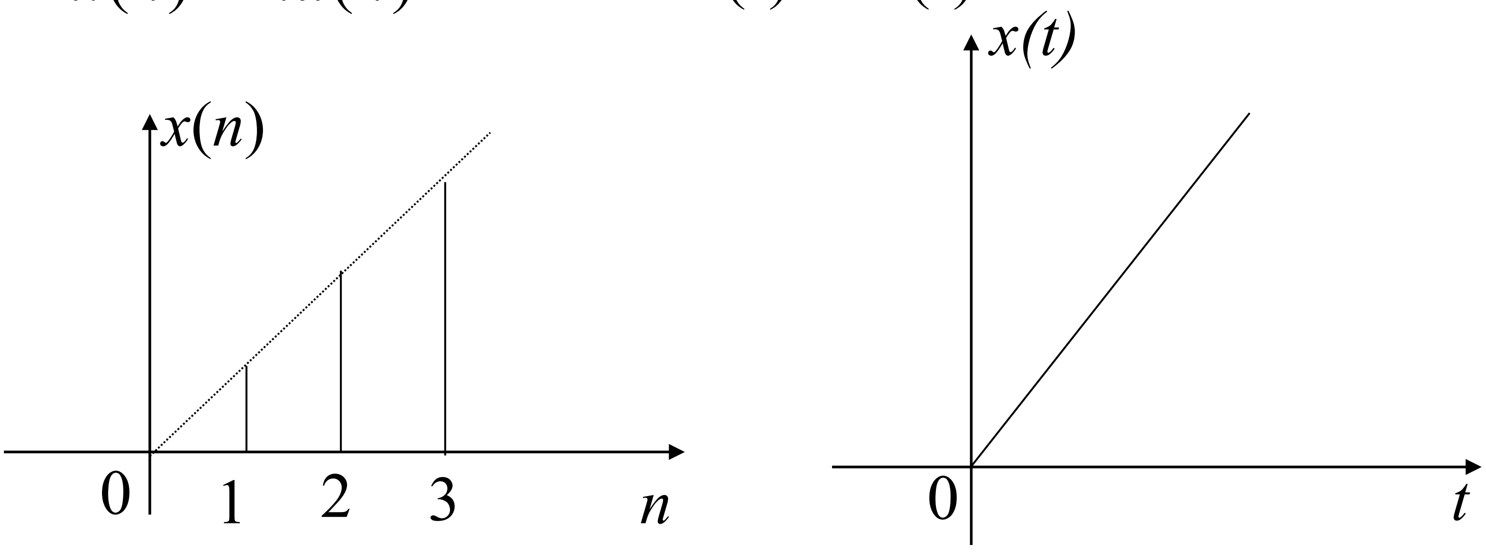


$$R_N(n)=u(n)-u(n-N)=\sum_{k=0}^{N-1}\delta(n-k)$$

§ 2.1 离散时间信号与系统

④斜变序列

$$x(n)=nu(n)\xrightarrow{\text{比较}}x(t)=tu(t)$$



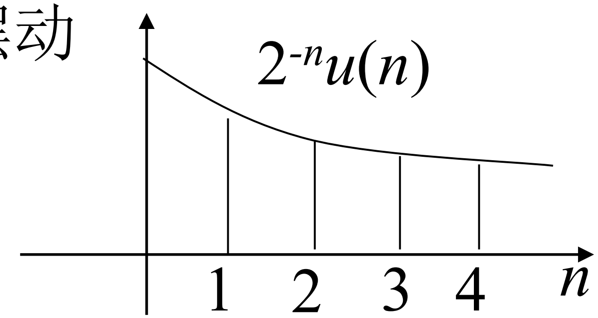
$$x(n)=n^2u(n),n^3u(n),\ \ \ldots\ldots\ \ n^ku(n)$$

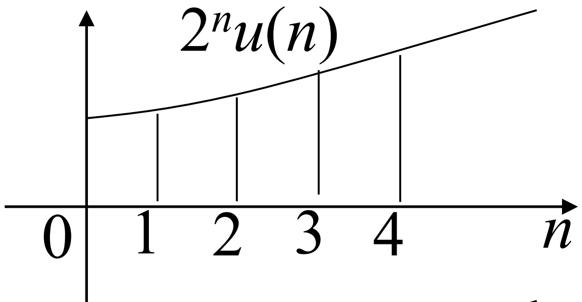
§ 2.1 离散时间信号与系统

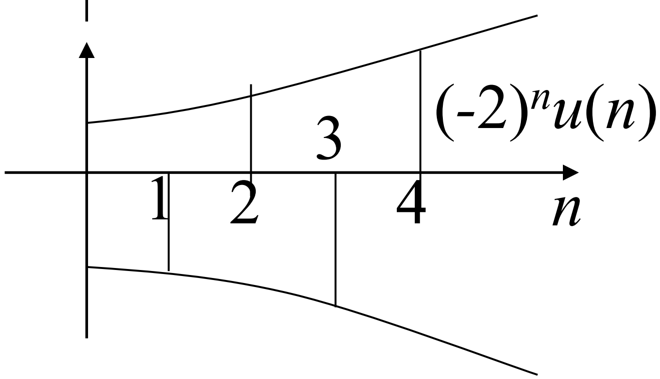
⑤指数序列 $x(n)=a^{n}u(n)$

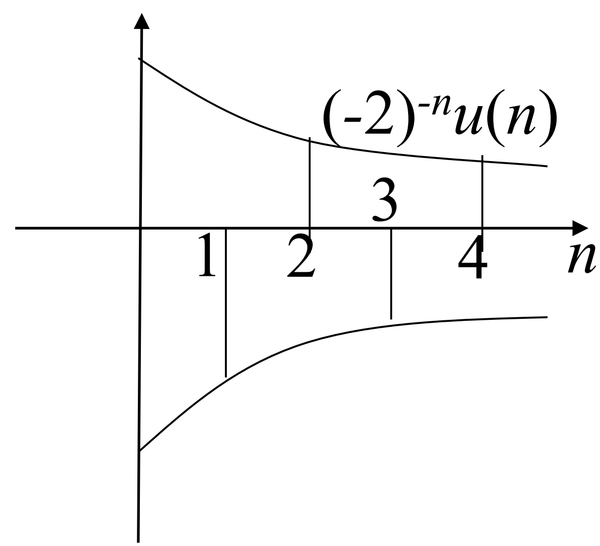
$|a|>1$序列发散， $|a|<1$序列收敛，

$a>0$序列取正， $a<0$序列正负摆动





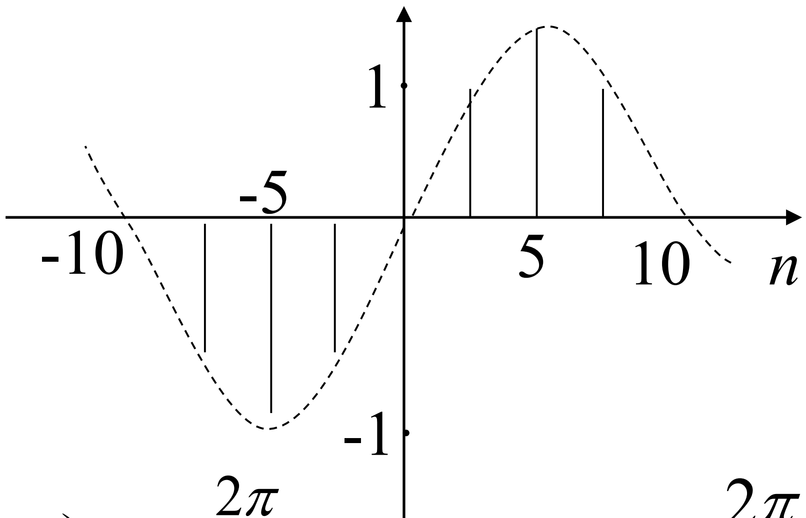




$x(n)=a^{-n}u(n)$

§ 2.1 离散时间信号与系统

⑥正弦信号 $x(n)=\sin n\omega_0$　余弦信号 $x(n)=\cos n\omega_0$



周期：1）若 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为正整数，$T=\frac{2\pi}{\omega_0}$　$\omega_0=0.1\pi$　T=20

2）若 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为有理数，$T=k\bullet\frac{2\pi}{\omega_0}$，$k$为使$\frac{2\pi}{\omega_0}$为正整数的最小正整数

§ 2.1 离散时间信号与系统

例：$\sin(n\bullet\frac{4\pi}{3})$ $T=k\bullet\frac{2\pi}{4\pi/3}=\frac{3}{2}\bullet k$， k取2故T=3

3) 若$\frac{2\pi}{\omega_0}$为无理数，信号是非周期信号

例：$\sin 3n$ $T=\frac{2\pi}{3}$为无理数，所以是非周期信号

*正弦信号$\xrightarrow{\text{抽样}}$正弦序列

$$f(t)=\sin\Omega_0 t \qquad x(n)=f(nT)=\sin(n\Omega_0 T)$$

$$\omega_0=\Omega_0 T=\frac{\Omega_0}{f_s} \qquad 则\ x(n)=\sin(\omega_0 n)$$

ω_0为离散频率，Ω_0为连续域的正弦频率，f_s为抽样频率

§ 2.1 离散时间信号与系统

⑦复指数序列

$$x(n)=e^{j\omega_0 n}=\cos(\omega_0 n)+j\sin(\omega_0 n)$$

极坐标表示

$$x(n)=|x(n)|e^{j\arg[x(n)]}=x_r+jx_i(n)$$

$$|x(n)|=1$$

$$\arg[x(n)]=\omega_0 n$$

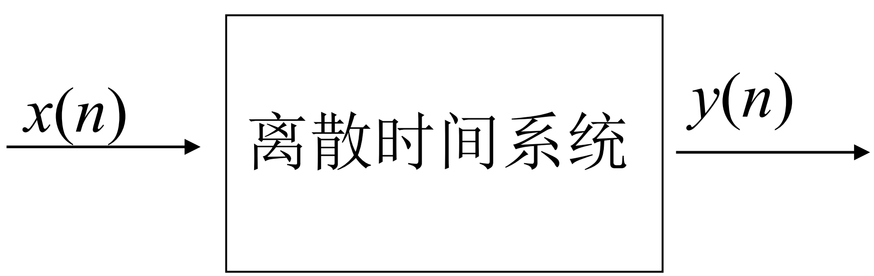
§ 2.1 离散时间信号与系统

4．离散时间信号的分解

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\bullet\delta(n-m)$$

三、离散时间系统

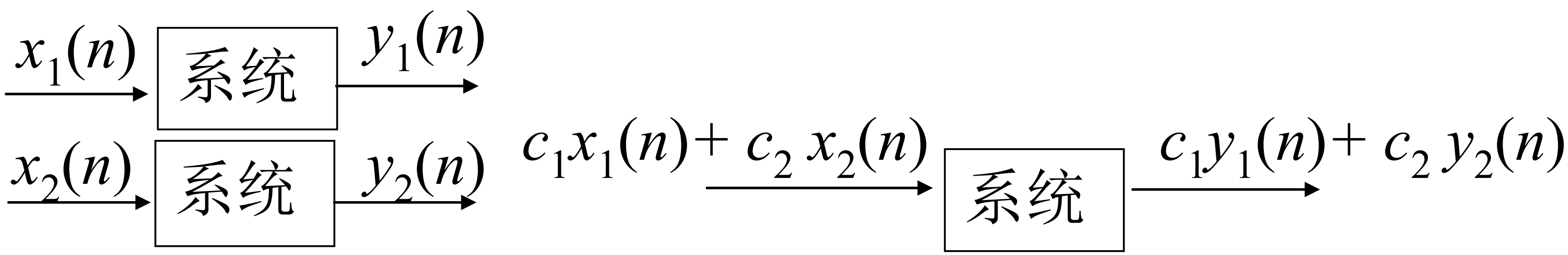
1．定义



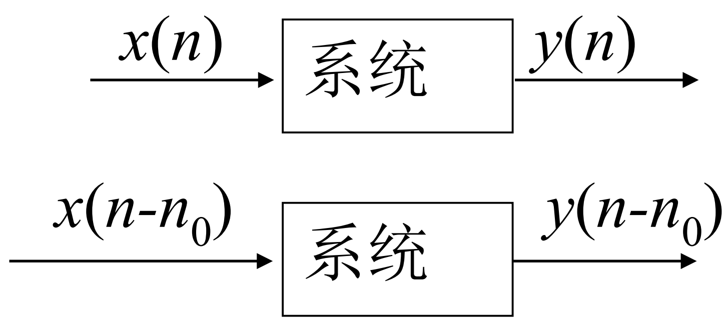
§ 2.1 离散时间信号与系统

2．线性时不变离散时间系统

①线性：叠加性、均匀性



② 时不变



§ 2.1 离散时间信号与系统

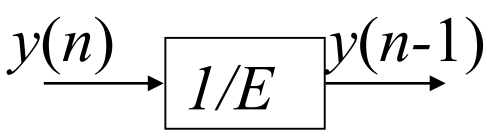
3. 离散时间系统的表示方法

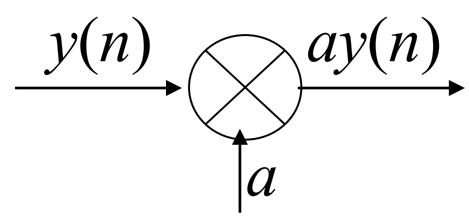
① 连续：微积分方程 $f(t), \dfrac{df(t)}{dt}, \dfrac{d^2 f(t)}{dt^2}, \cdots\cdots$，线性组合

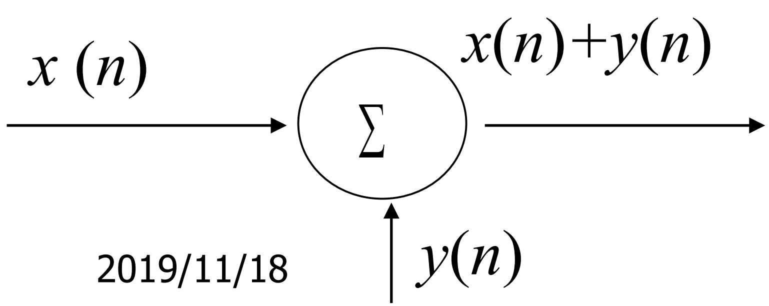
离散：差分方程 $x(n), x(n+1), x(n+2)\cdots\cdots x(n-1), x(n-2)\cdots$ 线性组合

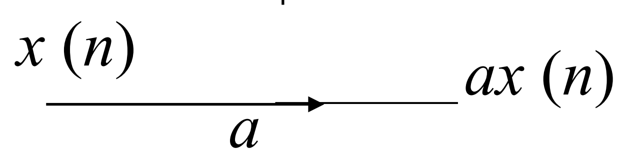
② 连续：微分（积分）、乘系数、相加三种基本运算

离散：延时（移位）、乘系数、相加三种基本运算



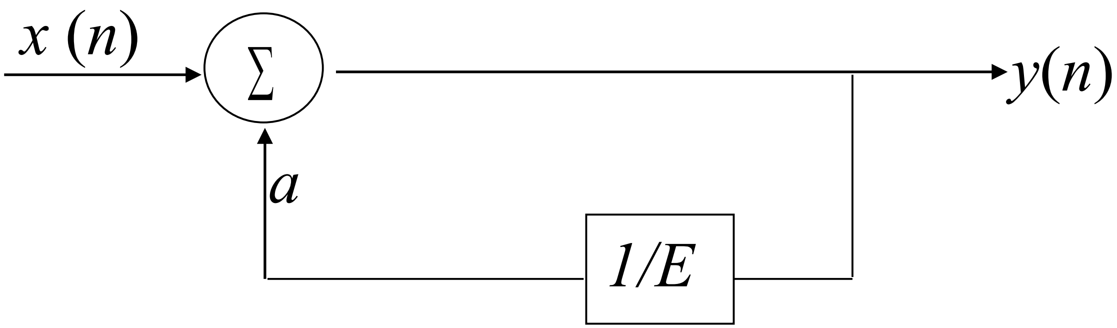


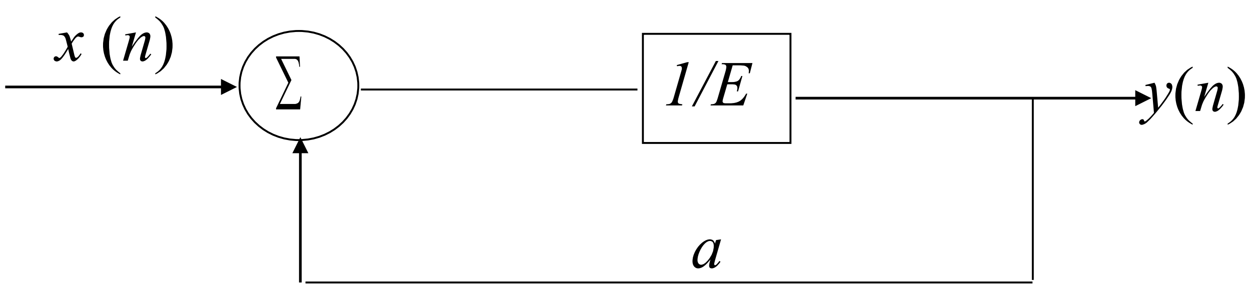




§ 2.1 离散时间信号与系统

例4：





§ 2.1 离散时间信号与系统

③N阶线性常系数差分方程一般形式

$$a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + a_N y(n-N) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_M x(n-M)$$

阶数等于未知序列变量序号的最高与最低值之差

后向差分形式（数值滤波器描述中常用）

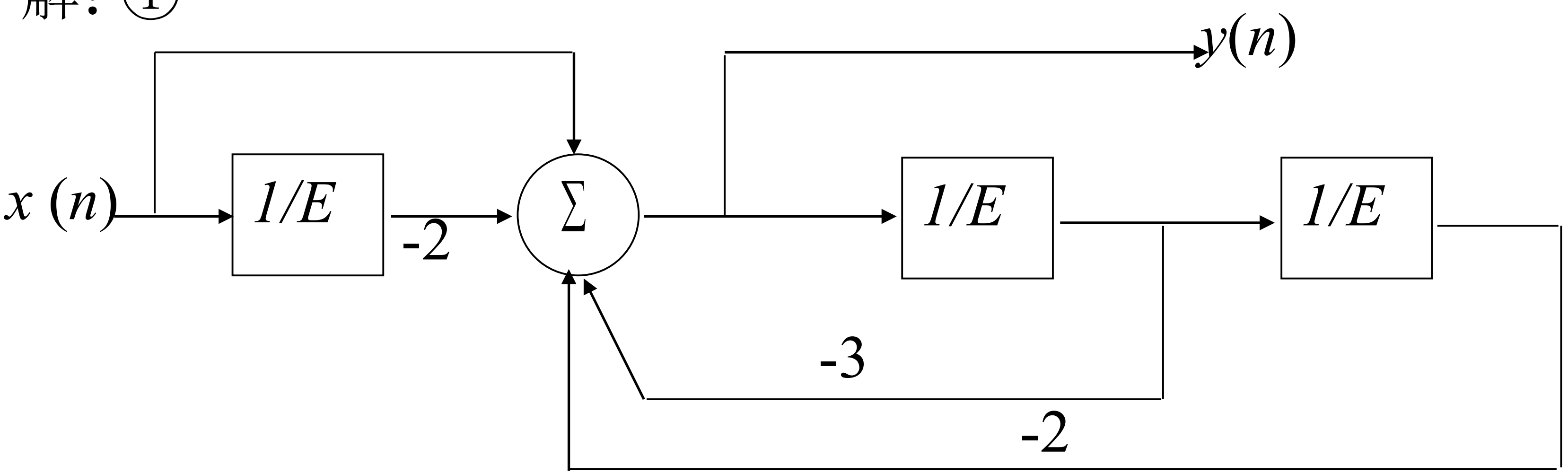
前向差分形式（在状态变量分析法中常用）

§ 2.1 离散时间信号与系统

例5：①

$$y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)-2x(n-1)$$

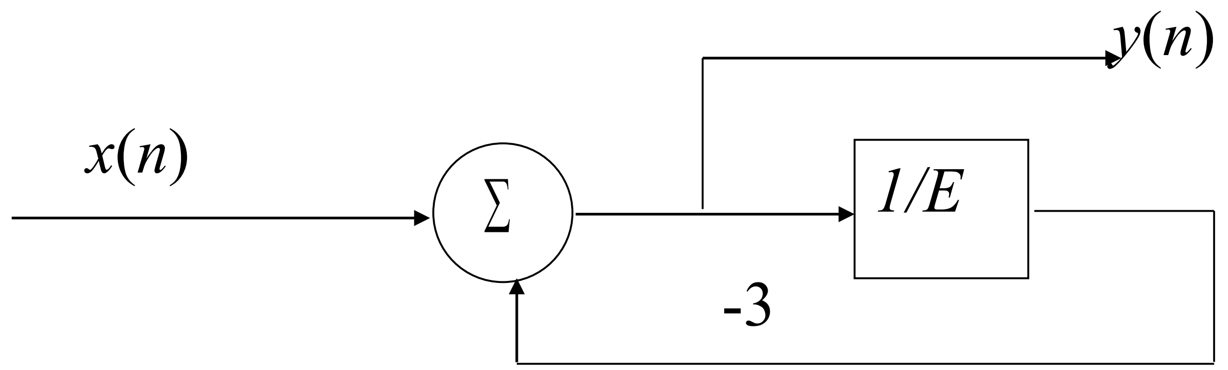
解：①



§ 2.1 离散时间信号与系统

例5：② $y(n)+3y(n-1)=x(n)$

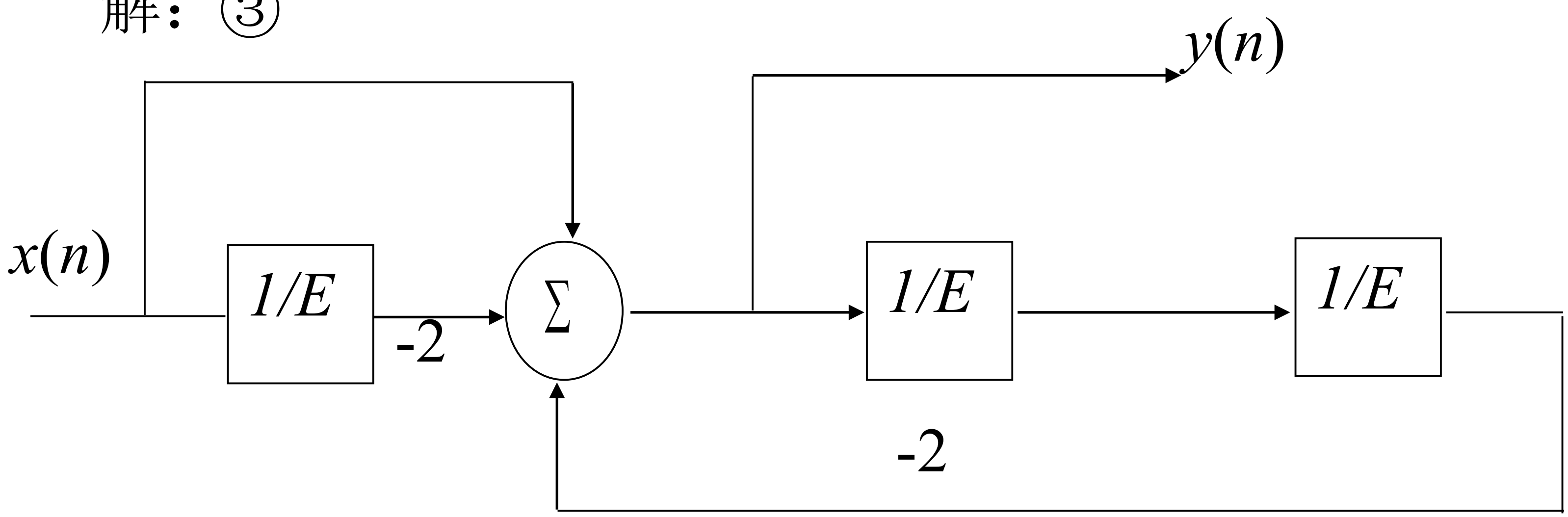
解： ②



§ 2.1 离散时间信号与系统

例5：③ $y(n)+2y(n-2)=x(n)-2x(n-1)$

解：③



§ 2.1 离散时间信号与系统

4. 微分方程⟶差分方程

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + Bx(t) \longrightarrow y(n+1) = ay(n) + bx(n)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{y[(n+1)T] - y(nT)}{T}$$

T应足够小

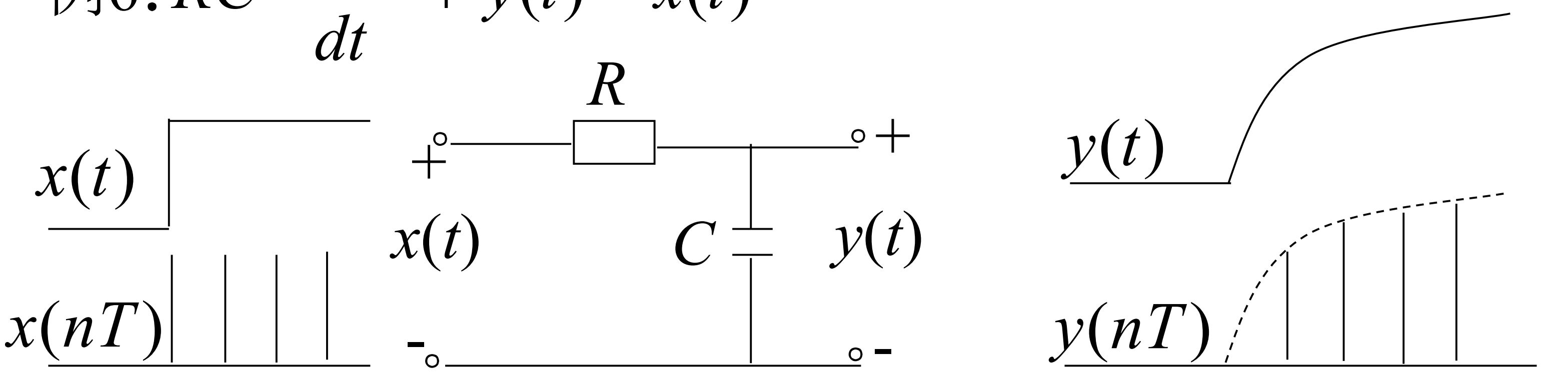
$$\Longrightarrow \frac{y[(n+1)T] - y(nT)}{T} \approx Ay(nT) + Bx(nT)$$

$$\Longrightarrow y[(n+1)T] \approx (1 + AT)y(nT) + BTx(nT)$$

$$y(n+1) \approx (\underbrace{1 + AT}_{a})y(n) + \underbrace{BT}_{b}x(n)$$

§ 2.1 离散时间信号与系统

例6: $RC\dfrac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$



$$\frac{RC}{T}[y(n+1)-y(n)]+y(n)\approx x(n)$$

$$\Longrightarrow y(n+1)\approx(1-\frac{T}{RC})y(n)+\frac{T}{RC}x(n)$$

信号与系统

Signals and Systems

哈尔滨工业大学

1 引言

- 我们被不同形式的信号所包围
- 从众多信号中提取或增强有用的信息是信号处理的最简单形式
- 信号处理是用来提取、增强、存储和传输有用信息的一种运算
- 信号处理通常取决于应用

信号处理应用广泛

- 获取信息
  - 通讯、广播电视、互联网
- 军事应用
  - 雷达，声纳，导航
- 医学应用
  - X-Ray，CT，MRI

第一章 绪论

本章主要研究内容：

- 信号与系统研究内容
- 信号描述与信号运算
- 信号分解

§1.1 信号与系统研究内容

一、信号

1. 概念

①消息、 信号、 信息、 函数

Message Signal Information Function

具体内容、表现形式、消息有效成分、 信号表达式（单值函数）

信号:消息的运载工具和表现形式

通过物理过程表示的信息

②消息传递方式的历史:

光信号 声信号 电信号 现代:**GPS**、网络

- 消息(Message)

  来自外界的各种报道，反映知识状态的变化

- 信号（Signal）

  信号是信息的物理体现，“包含”一个事件信息，并通过时间和空间传播的物理量。

- 信息(Information)

  消息中有用的内容

  消息使知识状态改变，说明消息中包含信息

- 信号的定义与描述

信号是信息的表现形式与传送载体，信息是信号的具体内容。

信号携带某一物理系统有关状态或行为特征,是在人与人、人与机器、机器与机器之间交换信息。

- 信号通过特定的媒体从一个物理地址传播另一个物理地址
- 信号可定义为传达某种物理现象特性的信息的一个函数。描述方法：
  - 信号在数学上表示为一个或多个独立变量的函数（一般为时间t）
  - 信号可以表示为图形表示的波形

信号：

信号是消息的表现形式，通常体现为随若干变量而变化的某种物理量。在数学上，可以描述为一个或多个独立变量的函数。例如，在电子信息系统中，常用的电压、电流、电荷或磁通等电信号可以理解为是时间t或其他变量的函数；又如在图像处理系统中，描述平面黑白图像像素灰度变化情况的图像信号，可以表示为平面坐标位置**(x, y)**的函数，等等

信号的特征：

- 时间特性
  - 信号表现出一定波形的时间特性，如出现时间的先后、持续时间的长短、重复周期的大小及随时间变化的快慢等。
- 频率特性
  - 任意信号在一定条件下总可以分解为许多不同频率的正弦分量，即具有一定的频率成分。信号的频谱分析就是研究信号的频率特性。

§1.1 信号与系统研究内容

2．分类

①信号函数表达式确定性

确定信号：能表示成时间确定函数，用在控制系统中；

随机信号：不能表示成时间确定函数，只能知道其概率分布，用在通信系统中；

②周期性

周期：$f(t)=f(t\pm nT)$，T为周期；

非周期： $T\to\infty$

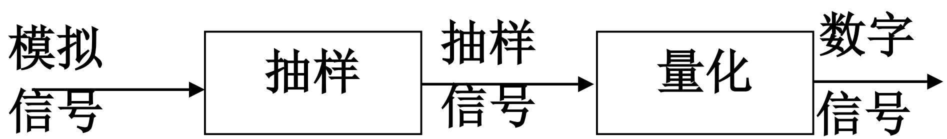
伪随机：**T**很大的周期信号；

混沌(**Chaos**)信号

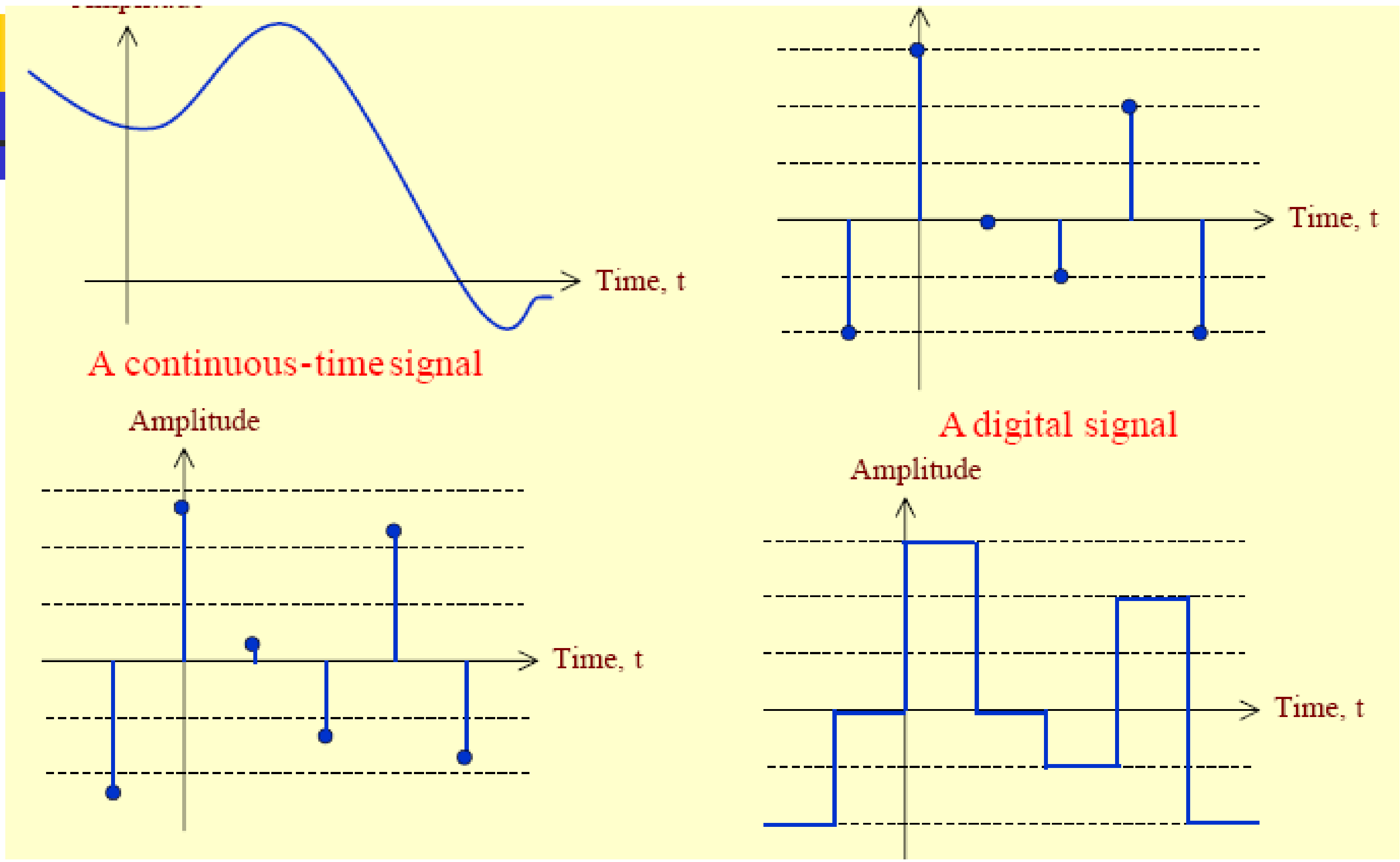
§1.1 信号与系统研究内容

③时间函数取值连续性

- 连续时间
  - 模拟：连续幅度
  - 离散幅度
- 离散时间
  - 抽样：连续幅度
  - 数字：离散幅度

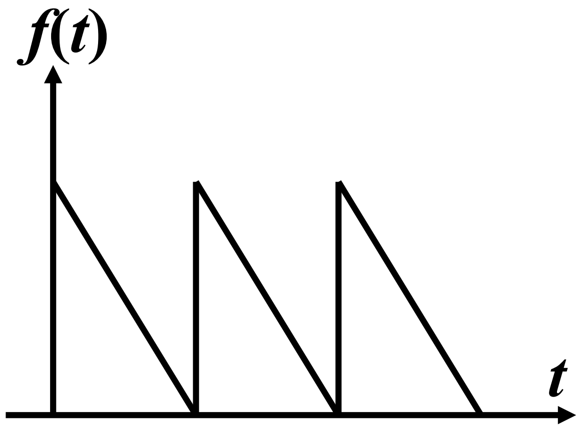


A/D转换

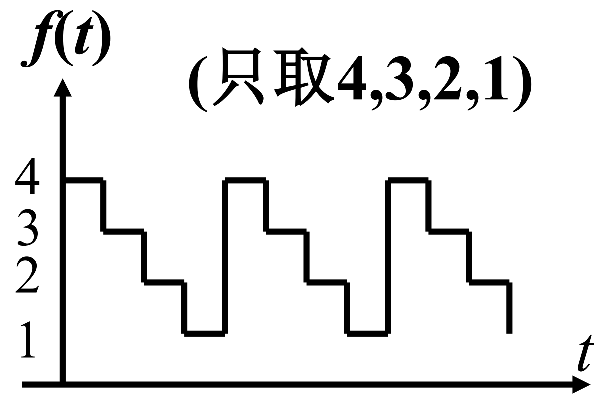

Time, t
A continuous-time signal
Time, t
A digital signal
Amplitude
Time, t
Amplitude
Time, t

§1.1 信号与系统研究内容

[例1]：判断信号类型（习题1-1 ）



（a）



（b）

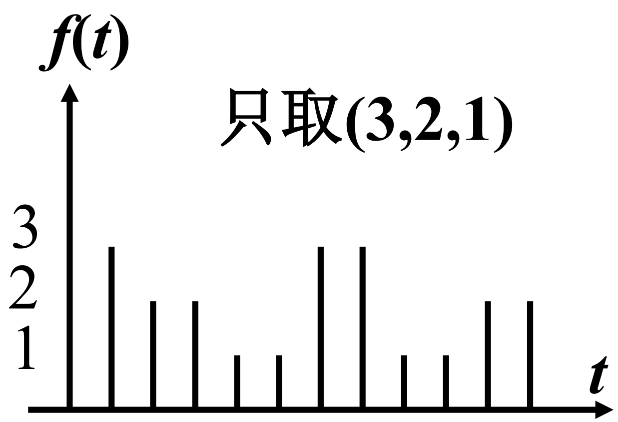
连续时间信号

模拟信号

连续时间离散幅度信号

§1.1 信号与系统研究内容

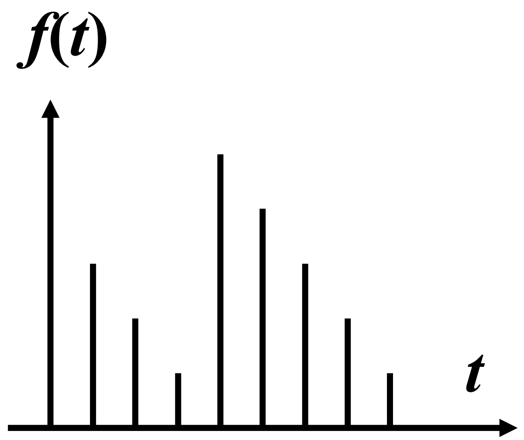
[例1]：判断信号类型（习题1-1 ）



（c）

离散时间信号

数字信号



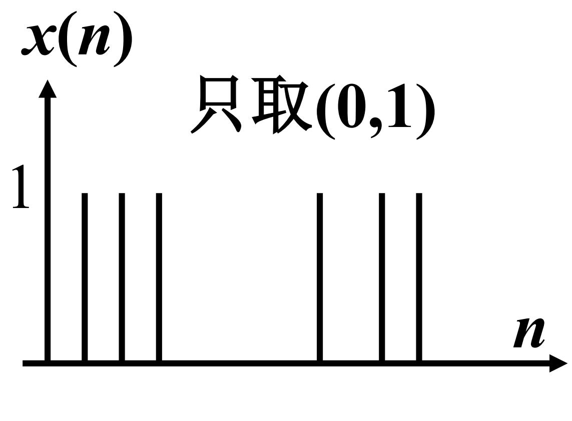
（d）

离散时间信号

抽样信号

§1.1 信号与系统研究内容

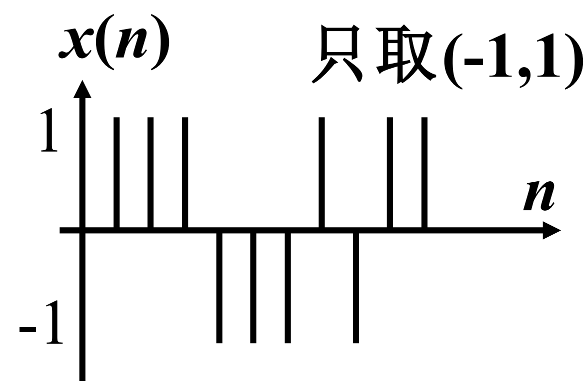
[例1]：判断信号类型（习题1-1 ）



（e）

离散时间信号

数字信号



（f）

离散时间信号

数字信号

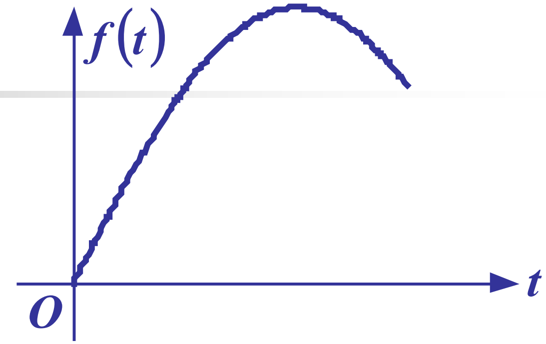
- 模拟信号：时间和幅值均为连续的信号。

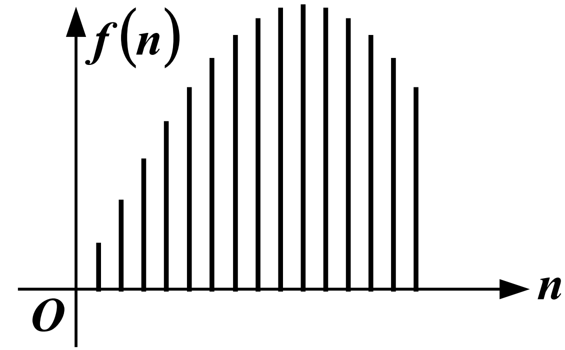
抽样 ↓

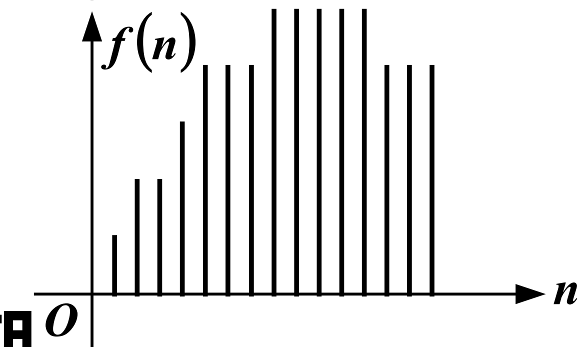
- 抽样信号：时间离散的，幅值连续的信号。

量化 ↓

- 数字信号：时间和幅值均为离散的信号。







讨论确定性信号。

先连续，后离散；先周期，后非周期。

§1.1 信号与系统研究内容

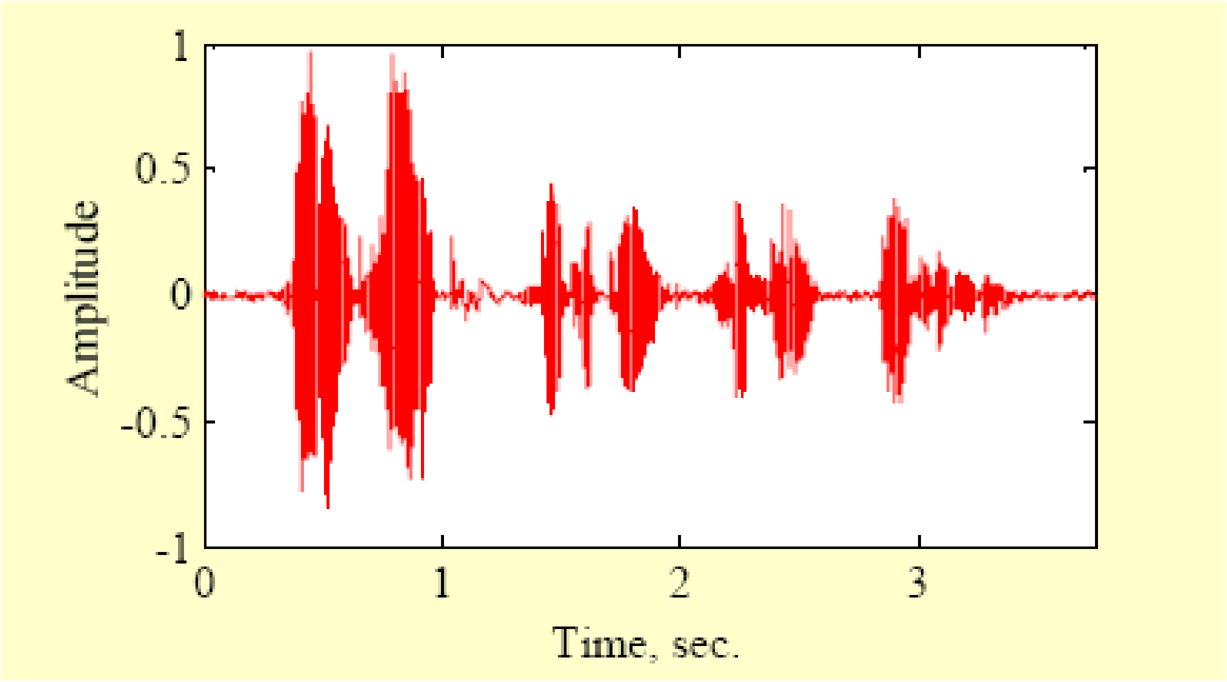
④自变量个数

- 一维：语音 $f(t)$
- 多维
  - 二维：图像 $f(x, y)$
  - 三维：视频 $f(x, y, t)$
  - 四维：电磁波 $f(x, y, z, t)$

一维信号：

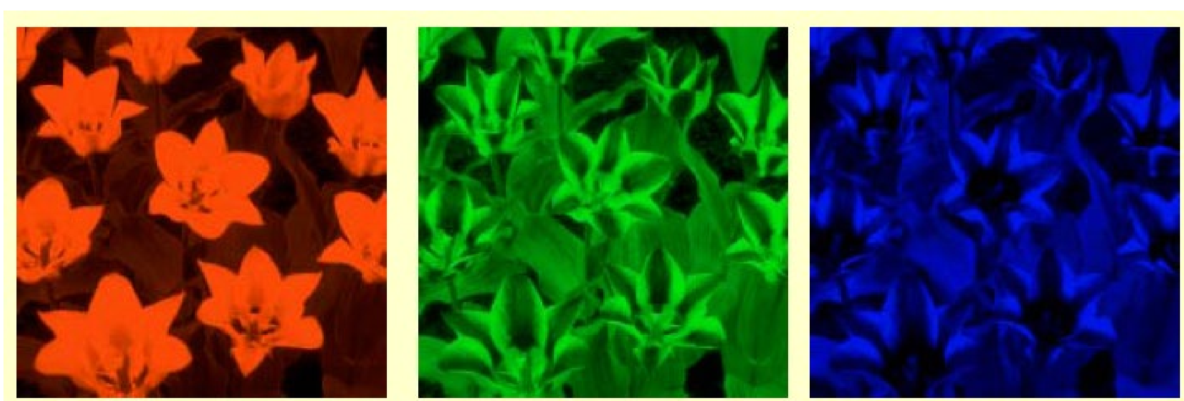
只由一个自变量描述的信号，如语音信号。

。



平面图像

- 信号表示为两个空间变量的亮度函数，二维信号 $f(x,y)$



视频信号

- 是一个图像序列，两个空间坐标和一个时间的函数，三维信号

$$I(x, y, t)$$

§1.1 信号与系统研究内容

⑤能量和功率特性

能量：

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2dt<+\infty\text{(连续)};$$

$$E=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x(n)|^2<+\infty\text{(离散)}$$

功率：

$$0<\overline{P}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(t)|^2dt<+\infty;$$

$$0<\overline{P}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{+N}|x(n)|^2<+\infty$$

非能量非功率： $E\to+\infty$；$\overline{P}\to+\infty$

§1.1 信号与系统研究内容

3．信号分析：信号描述、运算、分解、频谱分析、相关分析、信号检测

4．信号变换（源自信号的正交分解）：傅氏变换、拉氏变换、**Z**变换、**DTFT**、**DFT**

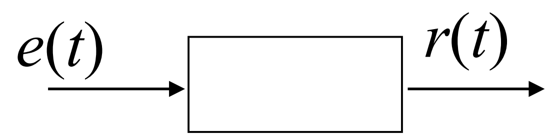
5．信号处理（信号变换是其中一部分，服务于信号传输）：变换、滤波、压缩、增强、分割

§1.1 信号与系统研究内容

二、系统

1．概念

①系统：若干相互作用和相互依赖的事物所组成的具有特定功能的整体



②系统、电路（网络）

i)系统强调功能与特性，关心全局；

ii)电路强调结构与参数，关心局部

③广义系统分类

物理、非物理；自然、人工

§1.1 信号与系统研究内容

2. 信号与系统关系

相辅相成

①离开信号，系统无存在必要

②信号必须通过系统得以传输和处理

3. 分类

①
- 连续时间系统 $e(t) \rightarrow \boxed{\quad} \rightarrow r(t)$ 微分方程
- 离散时间系统 $x(n) \rightarrow \boxed{\quad} \rightarrow y(n)$ 差分方程
- 混合系统 $e(t) \rightarrow \boxed{\quad} \rightarrow y(n)$ $x(n) \rightarrow \boxed{\quad} \rightarrow r(t)$

§1.1 信号与系统研究内容

②

即时系统：输出决定于同时刻输入

R　　代数方程

动态系统：输出与历史输入有关

L,C　　微分、差分方程

③

集总参数：只含集总参数元件

R,L,C　　微分方程

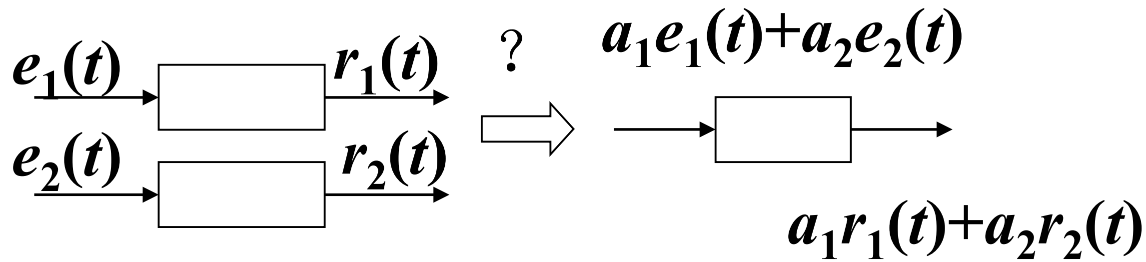
分布参数：含有分布参数元件

传输线、波导　偏微分方程

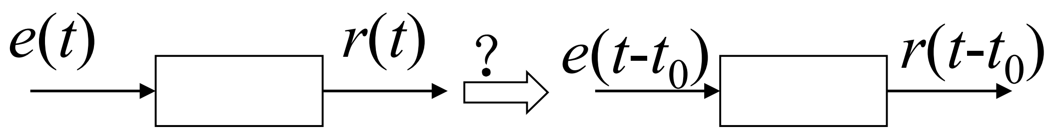
§1.1 信号与系统研究内容

④ 线性系统：叠加性、均匀性

非线性系统



⑤ 时变：参数随时间变化



时不变：参数不随时间变化

§ 1.1 信号与系统研究内容

⑥ 因果：输出变化出现在输入变化之后

$t = t_0$时刻输出只与 $t = t_0$及$t < t_0$

时刻输入有关，如 $r(t) = e(t-1)$

非因果 $r(t) = e(t+1)$

⑦ 稳定：有界输入 $\Longrightarrow$ 有界输出

$|e(t)| \le M \Rightarrow |r(t)| \le K \quad -\infty < t < +\infty$

不稳定

§1.1 信号与系统研究内容

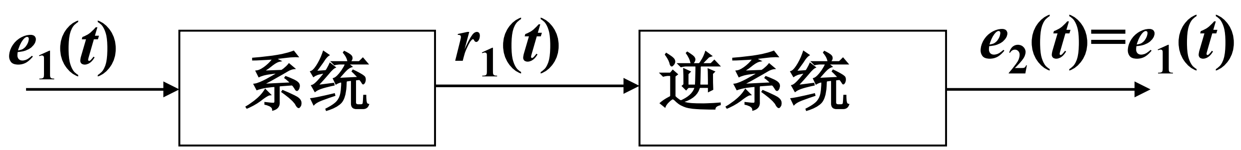
⑧

可逆：不同激励 $\Longrightarrow$ 不同响应

如 $r(t) = 5e(t)$

不可逆：不同激励 $\Longrightarrow$ 相同响应

如 $r(t) = e^{2}(t)$



§1.1 信号与系统研究内容

4．线性时不变系统（Linear Time Invariant，LTI）----LTI系统

① 满足叠加性：

$$e_1(t) \to r_1(t) \qquad e_2(t) \to r_2(t) \Rightarrow$$

$$e_1(t) + e_2(t) \to r_1(t) + r_2(t)$$

线性

② 满足均匀性：

$$e(t) \to r(t) \Rightarrow ae(t) \to ar(t)$$

③ 满足时不变特性：

$$e(t) \to r(t) \Rightarrow e(t - t_0) \to r(t - t_0)$$

§1.1 信号与系统研究内容

⑤ 满足微（积）分特性：

$$e(t) \to r(t) \Rightarrow \frac{de(t)}{dt} \to \frac{dr(t)}{dt}$$

$$e(t) \to r(t) \Rightarrow \int_{-\infty}^{t} e(\tau)d\tau \to \int_{-\infty}^{t} r(\tau)d\tau$$

⑥ 因果特性：

若 $t < t_0$ 不存在激励，且 t_0 起始状态为**0**，则线性常系数微分方程描述的系统满足因果性，即：线性时不变系统未必就满足因果性

§1.1 信号与系统研究内容

[例2]：判断下列系统特性（因果、线性、时不变、稳定）

① $r(t)=e(t-2)$

i) 线性:

$$e_1(t)\to r_1(t)=e_1(t-2) \qquad e_2(t)\to r_2(t)=e_2(t-2)$$

$$\Rightarrow ae_1(t)+be_2(t)\to ae_1(t-2)+be_2(t-2)=ar_1(t)+br_2(t)$$

ii) 时不变:

$$e(t)\to r(t)=e(t-2)\Rightarrow e_1(t)=e(t-t_0)\to$$

$$r_1(t)=e(t-t_0-2)=r(t-t_0)$$

§1.1 信号与系统研究内容

① $r(t)=e(t-2)$

iii) 因果：

t_0-2 时刻输入决定 t_0 时刻输出

iv) 稳定：

$$\left|e(t)\right|\le M \Rightarrow \left|e(t-2)\right|\le M$$

② $r(t)=e(-t)$

i) 线性：

$$e_1(t)\to r_1(t)=e_1(-t) \qquad e_2(t)\to r_2(t)=e_2(-t)$$

$$\Rightarrow ae_1(t)+be_2(t)\to ae_1(-t)+be_2(-t)=ar_1(t)+br_2(t)$$

§ 1.1 信号与系统研究内容

② $r(t) = e(-t)$

ii) 时变：

$$e(t) \to r(t) = e(-t) \Rightarrow e_1(t) = e(t - t_0) \to$$

$$r_1(t) = e(-t - t_0) \neq r(t - t_0)$$

iii) 非因果：

$t = -2$时刻输出由2时刻输入决定

iv) 稳定：

$$|e(t)| \leq M \Rightarrow |e(-t)| \leq M$$

§1.1 信号与系统研究内容

③$r(t)=e(t)\cos(t)$

i)线性:

$$e_1(t) \to r_1(t) = e_1(t)\cos(t) \qquad e_2(t) \to r_2(t) = e_2(t)\cos(t)$$

$$\Rightarrow ae_1(t)+be_2(t) \to \left[ae_1(t)+be_2(t)\right]\cos(t) = ar_1(t)+br_2(t)$$

ii)时变:

$$e(t) \to r(t) = e(t)\cos(t)$$

$$\Rightarrow e_1(t) = e(t-t_0) \to r_1(t) = e_1(t)\cos(t) = e(t-t_0)\cos(t)$$

$$\neq e(t-t_0)\cos(t-t_0) = r(t-t_0)$$

§1.1 信号与系统研究内容

③$r(t)=e(t)\cos(t)$

iii)因果:

$t=t_0$时刻的响应只决定于$t=t_0$时刻的激励

iv)稳定:

$$|e(t)|\le M \Rightarrow |e(t)\cos(t)|\le M$$

§1.1 信号与系统研究内容

④$r(t)=a^{e(t)}$

i)非线性:

$$e_1(t)+e_2(t)\rightarrow a^{e_1(t)+e_2(t)}=r_1(t)\cdot r_2(t)\neq r_1(t)+r_2(t)$$

ii)时不变:

$$e_1(t)=e(t-t_0)\rightarrow r_1(t)=a^{e(t-t_0)}=r(t-t_0)$$

iii)因果:

$t=t_0$时刻的响应只决定于$t=t_0$时刻的激励

iv)稳定: $\left|e(t)\right|\leq M\Rightarrow\left|a^{e(t)}\right|\leq K$

§1.1 信号与系统研究内容

5．系统分析：已知$e(t)$和系统求响应$r(t)$

$e(t)$ √ → 系统 √ → $r(t)$?

①步骤

i)建立数学模型：用框图或数学表达式描述

ii)求解数学模型：已知数学模型或输入激励

②方法

i)描述方法：输入—输出描述法、状态变量描述法

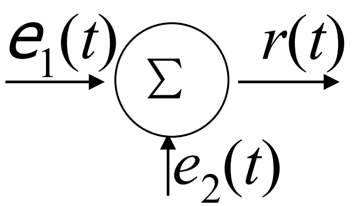
ii)求解方法：时域（经典、卷积、数值）和变换域（频域、复频域、Z域、FFT）

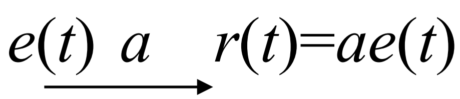
iii) 非线性方法（人工神经网、遗传算法、模糊理论）

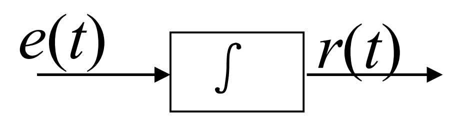
§1.1 信号与系统研究内容

③框图中三种基本单元

i)相加
ii)倍乘
iii)积分







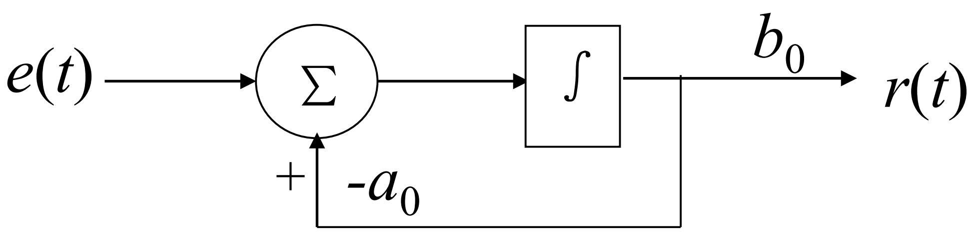
$$r(t)=e_1(t)+e_2(t)$$

$$r(t)=\int_{-\infty}^{t}e(\tau)d\tau$$

§1.1 信号与系统研究内容

[例3]：根据图写微分方程或根据微分方程画框图

①

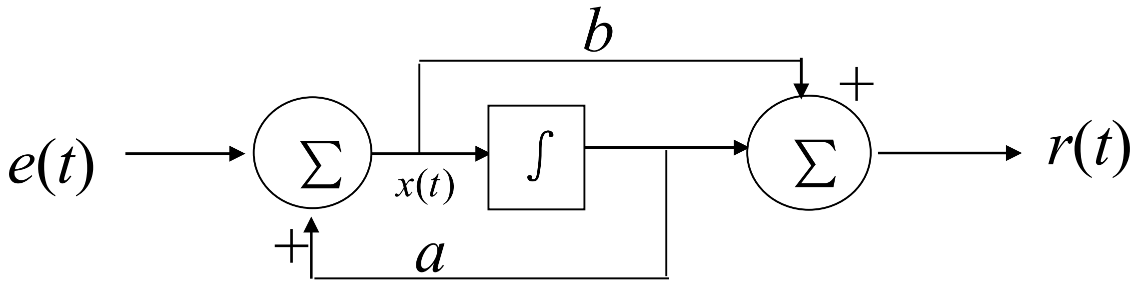


$$e(t)-\frac{a_0}{b_0}r(t)=\frac{1}{b_0}\frac{dr(t)}{dt}$$

$$\frac{dr(t)}{dt}+a_0 r(t)=b_0 e(t)$$

§ 1.1 信号与系统研究内容

②



$$\begin{cases} bx(t)+\int x(t)dt = r(t) \cdots\cdots (1) \\ a\int x(t)dt + e(t) = x(t) \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

$$(1)\times a-(2) \Rightarrow abx(t)-e(t)=ar(t)-x(t) \Rightarrow x(t)=\frac{ar(t)+e(t)}{ab+1}$$

$$b\cdot\frac{ar(t)+e(t)}{ab+1}+\frac{a\int r(t)dt+\int e(t)dt}{ab+1}=r(t)$$

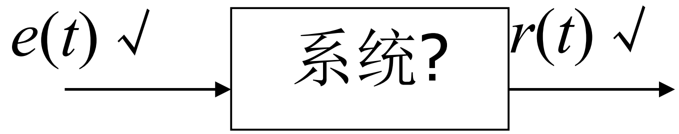
$$abr(t)+be(t)+a\int r(t)dt+\int e(t)dt=abr(t)+r(t) \Rightarrow \frac{dr(t)}{dt}-ar(t)=b\frac{de(t)}{dt}+e(t)$$

§1.1 信号与系统研究内容

6．系统综合

①已知激励和响应，求系统

②关系：分析是综合的基础



7．系统工程学：

利用系统理论设计和优化系统工程

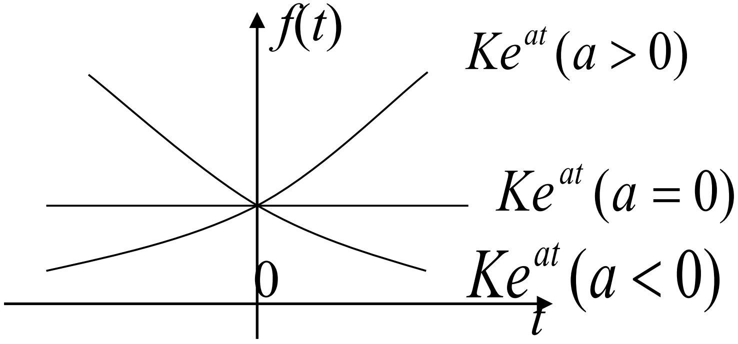
§1.2 信号描述与信号运算

一、典型连续时间信号

1. 指数信号

①表达式：

$$f(t) = Ke^{at}$$



②参数a的含义

i)a>0幅度增长

ii)a=0直流

iii)a<0幅度衰减

iv)定义 $\tau = \dfrac{1}{|a|}$时间常数，$\tau\uparrow \Rightarrow$衰减或增长速度越慢

③特性：微积分后仍为指数信号

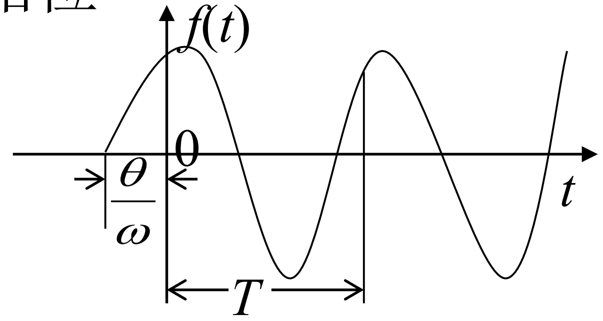
§1.2 信号描述与信号运算

2．正弦信号

①表达式：

$$f(t) = K\sin(\omega t + \theta)$$

②参数：K振幅， ω角频率，θ初相位



③特性

i)周期信号,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

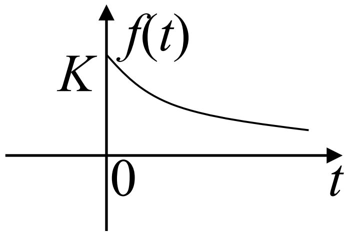
ii)微积分后仍为正弦信号

§1.2 信号描述与信号运算

3．单边指数衰减信号

①表达式

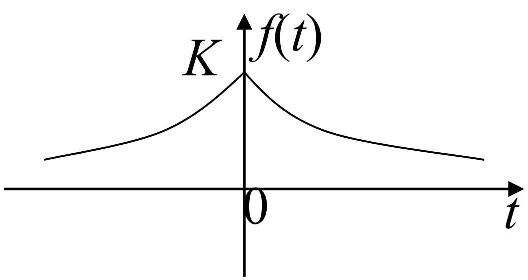
$$f(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ Ke^{-\frac{t}{\tau}} & (t\geq 0)\end{cases}\quad (\tau>0)$$



②实际例子：电容放电曲线

4．双边指数脉冲信号

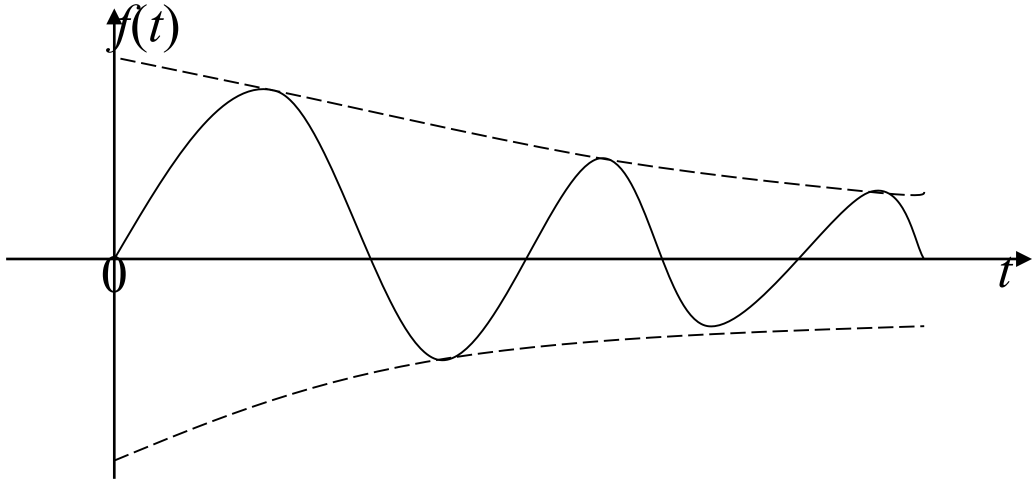
$$f(t)=Ke^{-\frac{|t|}{\tau}}\quad(\tau>0)$$



§ 1.2 信号描述与信号运算

5．衰减正弦信号（单边）

$$f(t)=\begin{cases}0(t<0)\\ Ke^{-at}\sin\omega t(t\geq 0)\end{cases}$$



§ 1.2 信号描述与信号运算

6．复指数信号

①表达式： $f(t)=Ke^{(\sigma+j\omega)t}=Ke^{\sigma t}(\cos\omega t+j\sin\omega t)$

②参数

i) σ为指数因子实部，$\sigma>0$ 增幅振荡,$\sigma<0$衰减振荡,$\sigma=0$等幅振荡

ii) ω为振动角频率， $\omega=0$变为指数信号

iii) $\sigma=0$ 且$\omega=0$，变为直流信号

③可用来表示正余弦信号

i) $\sin\omega t=\frac{1}{2j}(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t})$

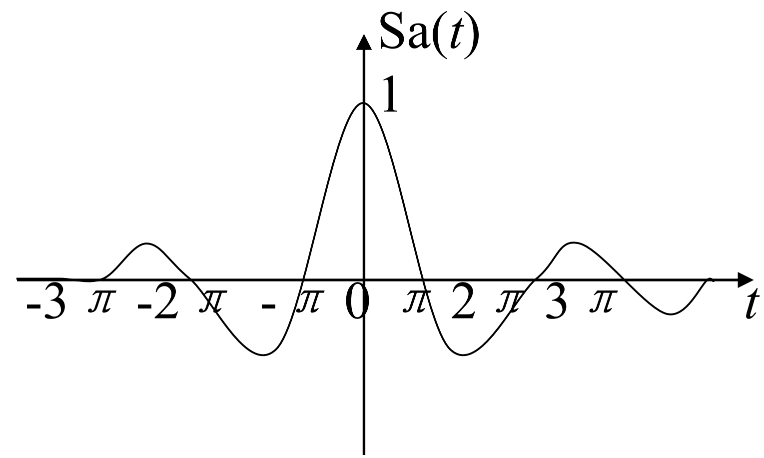
ii) $\cos\omega t=\frac{1}{2}(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t})$

④实际中不存在，但它具有概括性，简化分析

§1.2 信号描述与信号运算

7．Sa(*t*)信号（抽样信号）

①定义： $\mathrm{Sa}(t)=\dfrac{\sin t}{t}$



②特性

i) $t=\pm\pi,\pm2\pi,\ldots,\pm n\pi$， Sa($t$)=0

ii)偶函数

iii)两边衰减

iv)能量集中在$(-\pi,\pi)$

v) $\int_0^{+\infty}Sa(t)dt=\dfrac{\pi}{2}$ $\qquad\int_{-\infty}^{+\infty}Sa(t)dt=\pi$

③其他定义

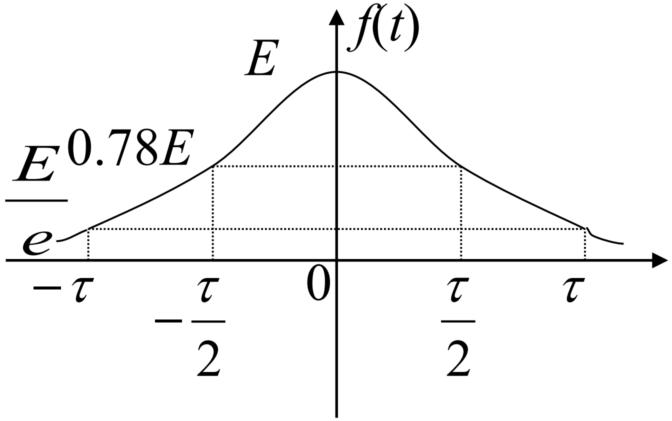
i) $\mathrm{sinc}(t)=\dfrac{\sin\pi t}{\pi t}$ $\qquad$ ii) $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{sinc}(t)dt=1$

§1.2 信号描述与信号运算

8．钟形信号（高斯函数）

①定义：

$$f(t)=Ee^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$$



②特性

i) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} dt=\sqrt{\pi}\cdot\tau$

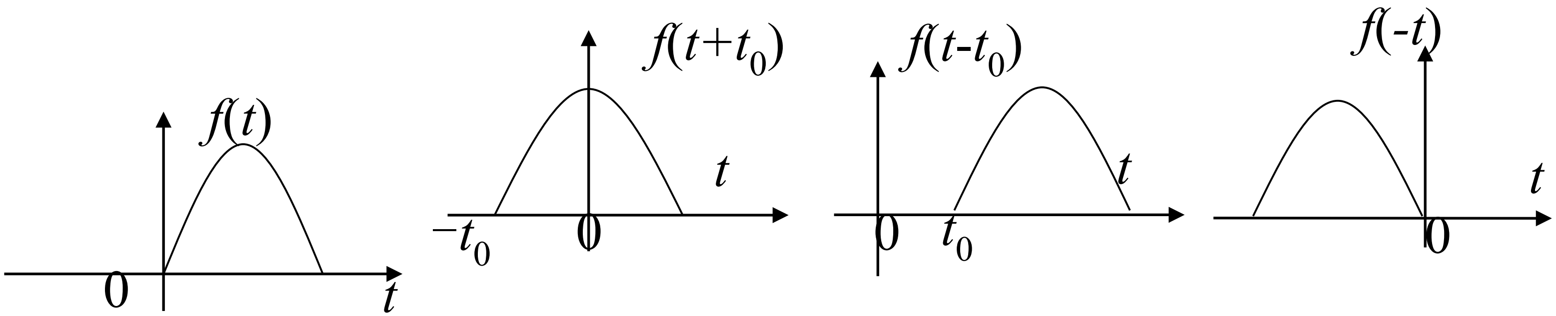
ii) $f(\frac{\tau}{2})=E\cdot e^{-\frac{1}{4}}=0.78E$

③主要用于随机信号分析中

§1.2 信号描述与信号运算

二、信号运算

1．移位：左移$f(t)\rightarrow f(t+t_0)$,右移$f(t)\rightarrow f(t-t_0)$ $(t_0>0)$



2．反褶：$f(t)\rightarrow f(-t)$

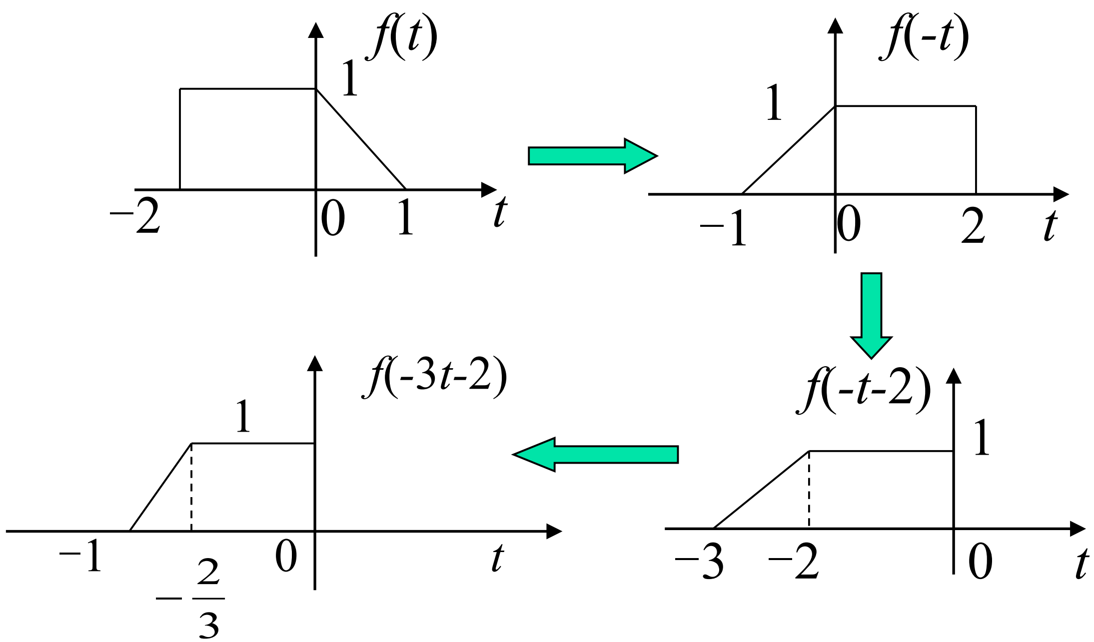
3．尺度：$f(t)\rightarrow f(at)$ $(a>0)$ $\begin{cases} a>1 & \text{时间轴上压缩} \\ a<1 & \text{时间轴上扩展} \end{cases}$

§ 1.2 信号描述与信号运算

[例1]:

①已知$f(t)$如下图，画出$f(-3t-2)$

解：$f(t)\rightarrow f(-t)\rightarrow f[-(t+2)]\rightarrow f(-3t-2)$



§ 1.2 信号描述与信号运算

②已知$f(t)$定义域为[−1,4]，求$f(-2t+5)$的定义域

解：

i)方法一：$f(t)\to f(-t)$ [-4,1]；$f(-t)\to f(-t+5)$ [1,6]；

$$f(-t+5)\to f(-2t+5) \quad [\frac{1}{2},3]$$

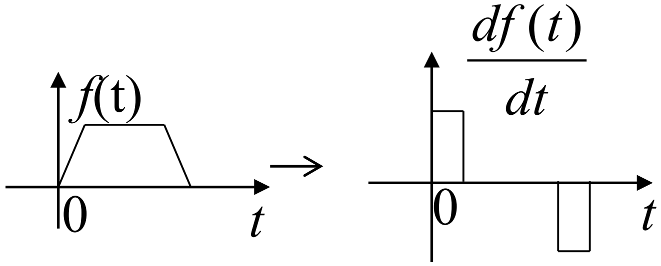
ii)方法二：$-1\le -2t+5\le 4\Rightarrow \quad -6\le -2t\le -1\Rightarrow$

$$\frac{1}{2}\le t\le 3$$

§1.2 信号描述与信号运算

4.微分

①$f(t) \rightarrow \dfrac{df(t)}{dt}$



②作用：突出信号变化部分

5．积分

①$f(t) \rightarrow \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$

②作用：使信号突变部分平滑

6．信号相加

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

§1.2 信号描述与信号运算

7．信号相乘

①　$f(t)=f_1(t)\cdot f_2(t)$

②常用在调制解调中

8．卷积

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

9．相关

$$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)f_2(t-\tau)d\tau$$

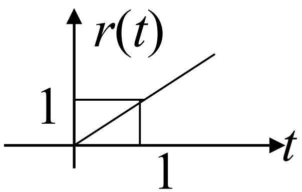
§1.2 信号描述与信号运算

三、奇异信号

1．定义：含有不连续点（跳变点）或其倒数与积分有不连续点

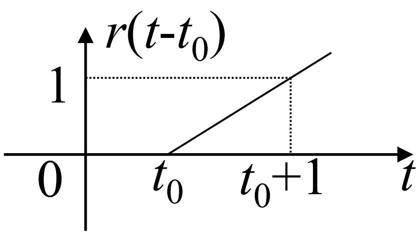
2．单位斜变：

$$r(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & t\geq 0\end{cases}$$



3．延迟单位斜变：

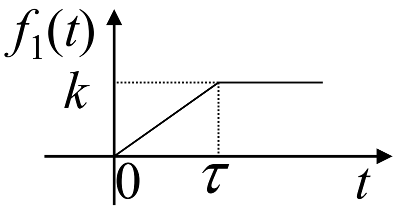
$$r(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ t-t_0 & t\geq t_0\end{cases}$$



§ 1.2 信号描述与信号运算

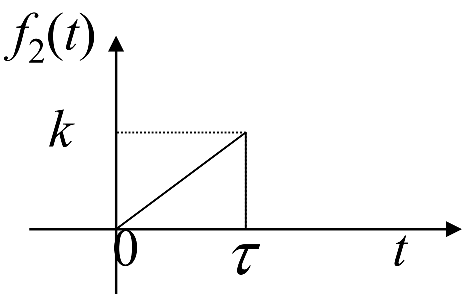
4．截平斜变：

$$f_1(t)=\begin{cases}\dfrac{k}{\tau}r(t) & t\le\tau\\ k & t>\tau\end{cases}$$



5．三角脉冲：

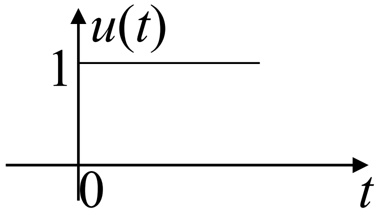
$$f_2(t)=\begin{cases}\dfrac{k}{\tau}r(t) & t\le\tau\\ 0 & t>\tau\end{cases}$$



§1.2 信号描述与信号运算

6．单位阶跃

①定义： $u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$

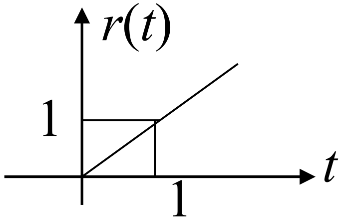


②t=0处：无定义或可定义为 $u(0)=\dfrac{1}{2}$

③关系：

$$u(t)=\frac{dr(t)}{dt}$$

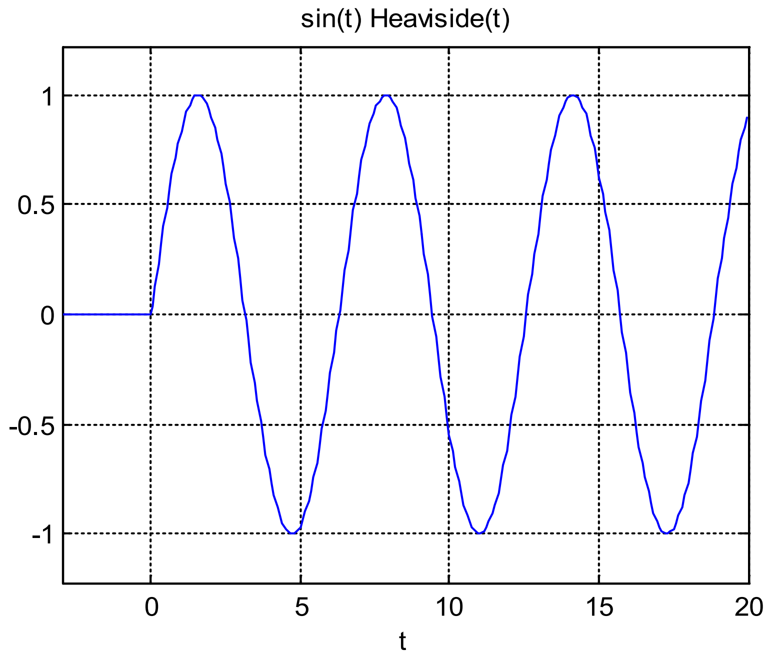
$\Uparrow$

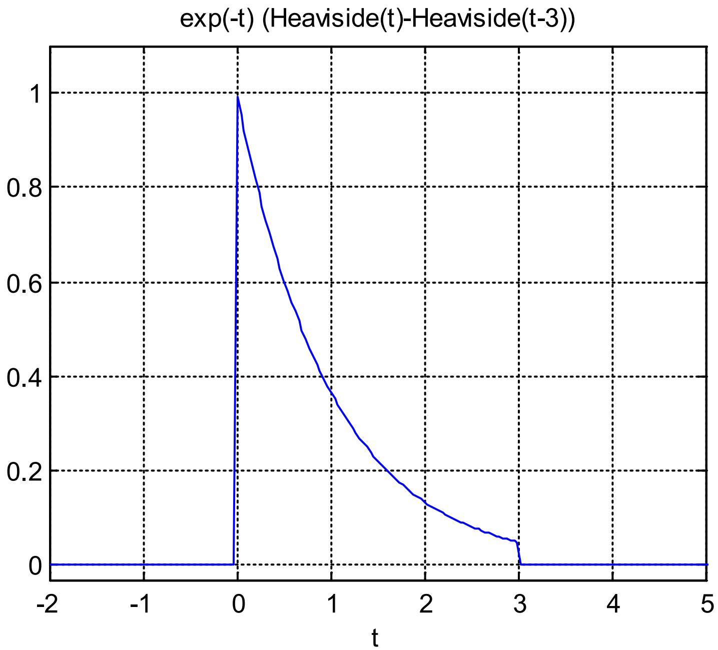


④物理背景：t=0时刻加入激励

⑤作用：表示信号单边特性和窗特性

§1.2 信号描述与信号运算





i)例

$$f_1(t) = \sin t u(t)$$

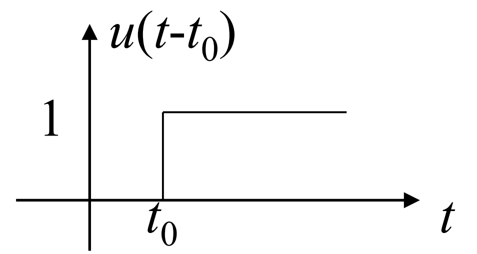
ii)例

$$f_2(t) = e^{-t}[u(t) - u(t - t_0)]$$

§1.2 信号描述与信号运算

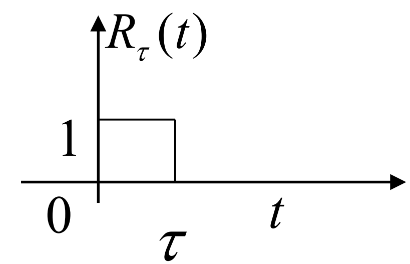
7．延迟单位阶跃

$$u(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ 1 & t>t_0\end{cases}$$

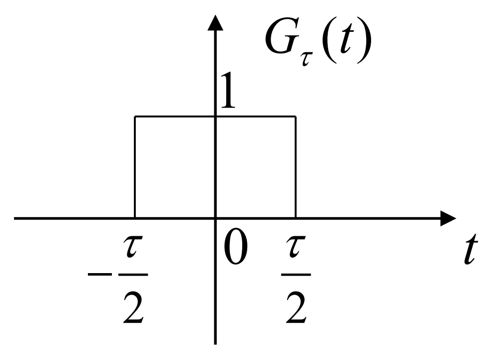


8．矩形脉冲

① $R_\tau(t)=u(t)-u(t-\tau)$



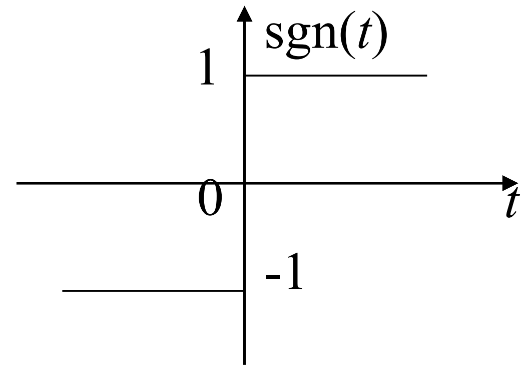
② $G_\tau=u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})$



§1.2 信号描述与信号运算

9．符号函数

$$\operatorname{sgn}(t)=2u(t)-1=\begin{cases}-1 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$



10．单位冲激

①物理背景：时间极短幅度极大现象的理想化

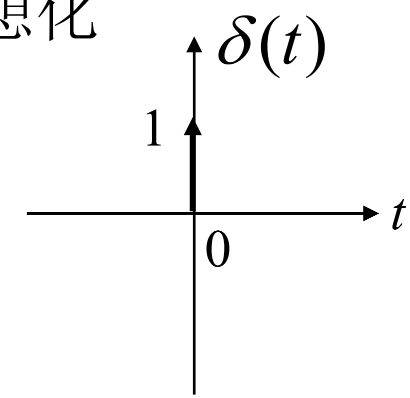
②极限定义方法：

i)矩形脉冲：

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\left[u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})\right]$$

ii)三角脉冲：

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}(1-\frac{|t|}{\tau})[u(t+\tau-u(t-\tau)]$$



§ 1.2 信号描述与信号运算

iii)双边指数脉冲：

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\tau}e^{-\frac{|t|}{\tau}}$$

iv)钟型脉冲：

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}e^{-\pi(\frac{t}{\tau})^2}$$

v)抽样脉冲：

$$\delta(t)=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{\pi}Sa(kt)$$

③狄拉克定义：

$$\begin{cases}\delta(t)=0 & t\neq 0\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1\end{cases}$$

§1.2 信号描述与信号运算

④基本性质：

i) $\delta(t)f(t)=f(0)\delta(t)$

ii)抽样特性：$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)dt=f(0)$

iii)偶函数： $\delta(t)=\delta(-t)$

证明: $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(-t)f(t)dt=\int_{+\infty}^{-\infty}\delta(\tau)f(-\tau)d(-\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau)f\left(0\right)d\tau=f\left(0\right)$

iv)延时抽样：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-t_0\right)f\left(t\right)dt=f\left(t_0\right)$$

v)关系：

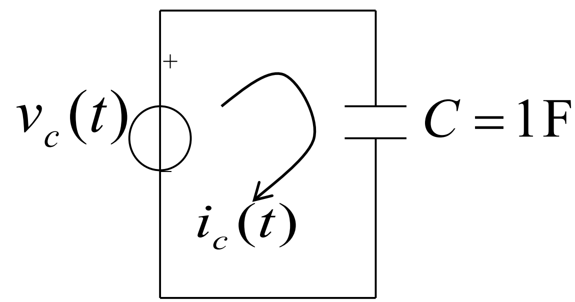
$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=u(t)$$

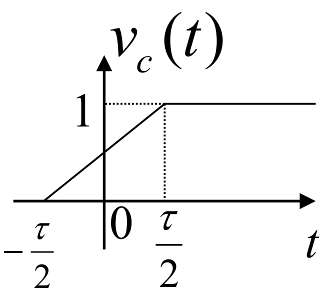
$$\frac{d}{dt}u(t)=\delta(t)$$

§1.2 信号描述与信号运算

⑤理解：

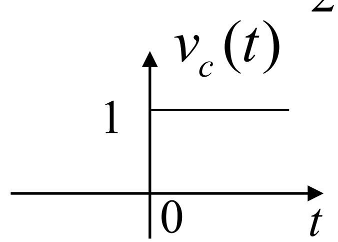
$$v_c(t)=\begin{cases}0 & t<-\dfrac{\tau}{2}\\ \dfrac{1}{\tau}(t+\dfrac{\tau}{2}) & -\dfrac{\tau}{2}<t<\dfrac{\tau}{2}\\ 1 & t>\dfrac{\tau}{2}\end{cases}$$

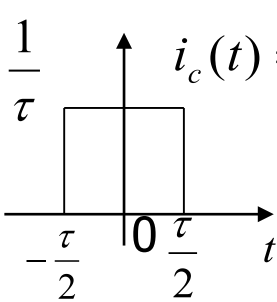




$\tau\rightarrow 0$

$\rightarrow$

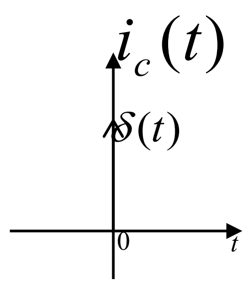




$$i_c(t)=\frac{dv_c(t)}{dt}$$

$\tau\rightarrow 0$

$\rightarrow$



i)阶跃电压作用在电容上将产生冲激电流

ii)阶跃电流作用在电感上将产生冲激电压

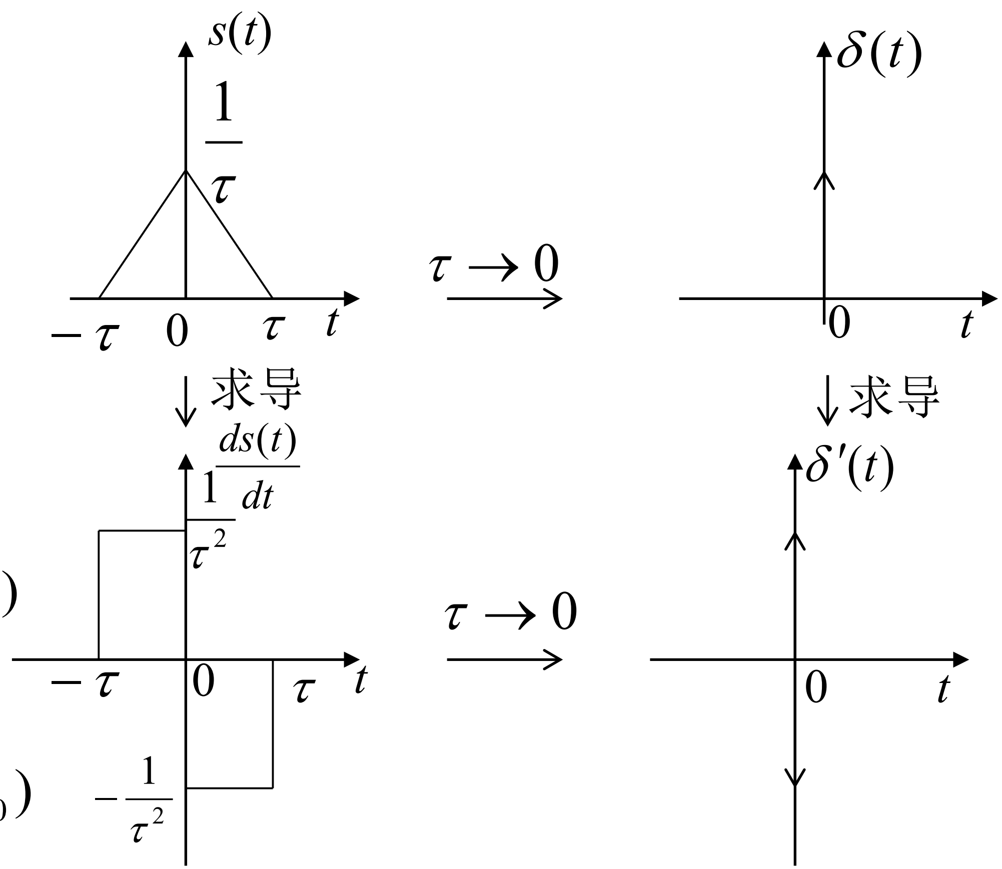
§ 1.2 信号描述与信号运算

11．冲激偶

①定义:

$$\delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$$

②形成过程:



③性质

i) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) = 0$

ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) f(t) dt = -f'(0)$

iii)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t - t_0) f(t) dt = -f'(t_0)$$

§ 1.2 信号描述与信号运算

[例2]：绘图

(三点一限法)

① $f(t)=(3e^{-t}-6e^{-2t})u(t)$

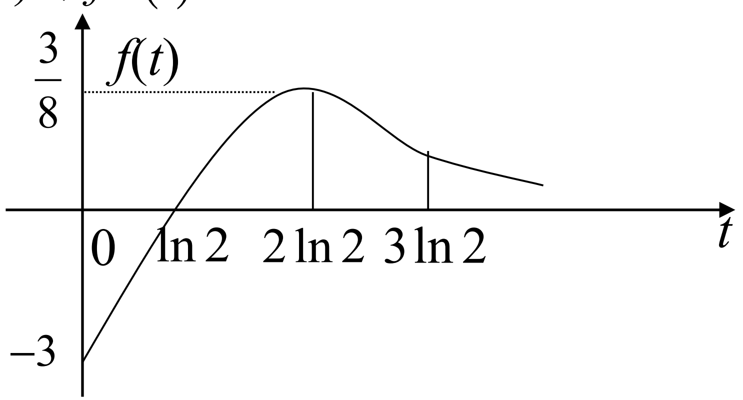
解：i) $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t)=-3$；$\lim\limits_{t\to +\infty} f(t)=0$

ii) 令 $f(t)=0 \Rightarrow 3e^{-t}-6e^{-2t} \Rightarrow e^{t}=2 \Rightarrow t=\ln 2$

iii) 令 $f'(t)=0 \Rightarrow -3e^{-t}+12e^{-2t}=0 \Rightarrow e^{t}=4 \Rightarrow t=2\ln 2$

$$f(2\ln 2)=\frac{3}{8}$$

iv) 令 $f''(t)=0 \Rightarrow 3e^{-t}-24e^{-2t}=0 \Rightarrow e^{t}=8 \Rightarrow t=3\ln 2$



§ 1.2 信号描述与信号运算

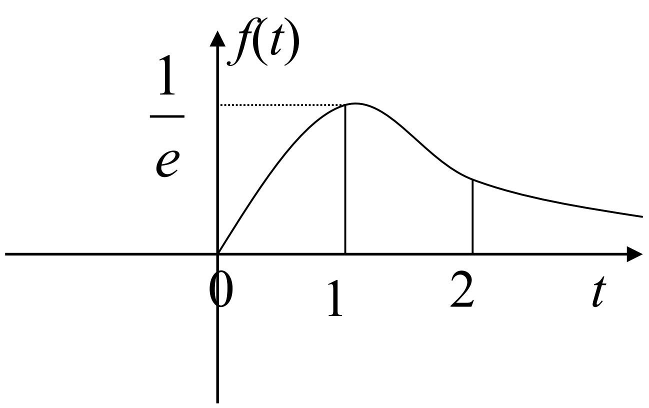
[例2]：绘图

② $f(t)=te^{-t}u(t)$

解：i) $\lim_{t\to 0^+} f(t)=0 \qquad \lim_{t\to\infty} f(t)=0$

ii)令 $f'(t)=0 \Rightarrow e^{-t}-te^{-t}=0 \Rightarrow t=1$

iii)令$f''(t)=0 \Rightarrow -e^{-t}-e^{-t}+te^{-t}=0 \Rightarrow t=2$

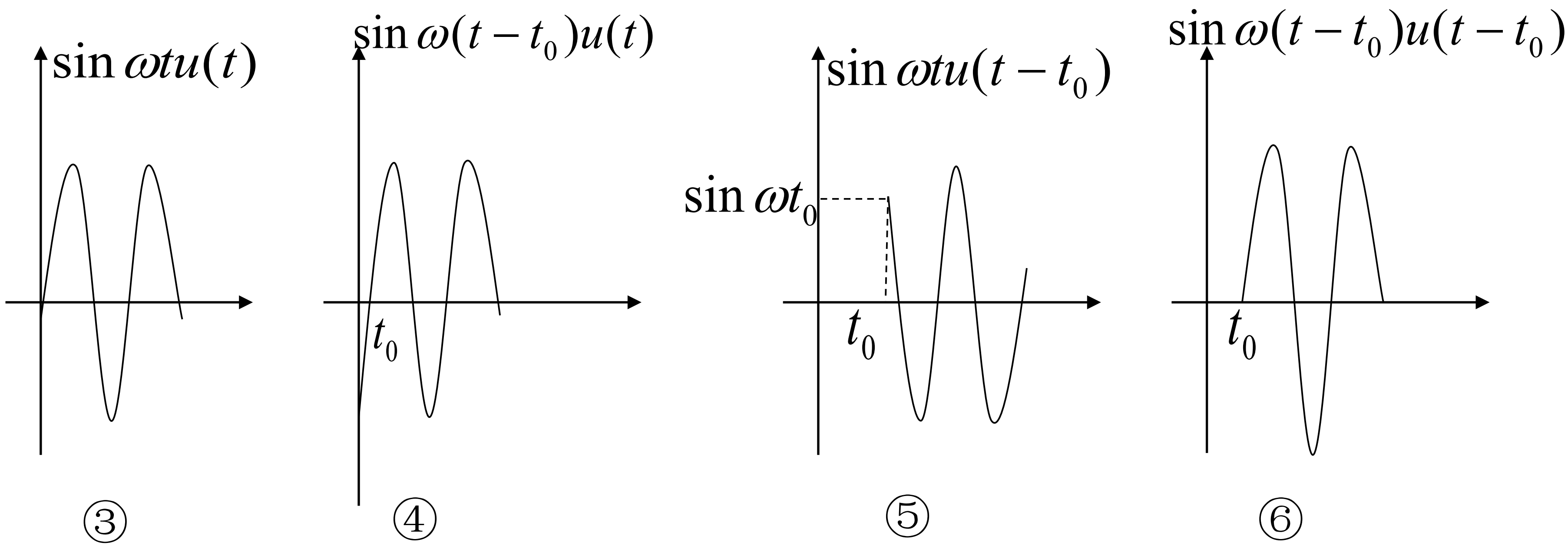


§1.2 信号描述与信号运算

[例2]：绘图

③ $\sin\omega t u(t)$　　④ $\sin\omega(t-t_0)u(t)$

⑤ $\sin\omega t u(t-t_0)$　　⑥ $\sin\omega(t-t_0)u(t-t_0)$



§ 1.2 信号描述与信号运算

[例3]： 求下列函数值

① $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{-t}+t\right)\delta\left(t-1\right)dt$　　② $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t}\left(\delta\left(t\right)+\delta'(t)\right)dt$

③ $\int_{-1}^{3}e^{-t^2+\sqrt{5}t+3}\delta\left(t+2\right)dt$

解：

① $\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{-t}+t)\delta\left(t-1\right)dt=e^{-1}+1$

② $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t}\left[\delta\left(t\right)+\delta'\left(t\right)\right]dt=1+1=2$

③ 0

§1.3 信号分解

一、直流分量与交流分量

1．直流分量

①也称信号平均值

②定义： $f_D = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$

2．交流分量

①定义： $f_A(t) = f(t) - f_D$

②特性： $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_A(t)dt = f_D - f_D = 0$

3．平均功率=直流功率+交流功率

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f_D + f_A(t)]^2 dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f_D{}^2 + 2f_D f_A(t) + f_A{}^2(t)]dt = f_D{}^2 + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_A{}^2(t)dt$$

注：若为周期信号不必加$T\to\infty$

§1.3 信号分解

二、偶分量与奇分量

1．偶分量

①定义：$f_e(t)=\dfrac{f(t)+f(-t)}{2}$

②特性：偶函数，即 $f_e(t)=f_e(-t)$

2．奇分量

①定义： $f_o(t)=\dfrac{f(t)-f(-t)}{2}$

②特性：

i)奇函数，即 $f_o(t)=-f_o(-t)$ ii)平均值为0，即 $\dfrac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_o(t)dt=0$

3．平均功率=偶分量功率+奇分量功率

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f^2(t)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[f_e^{\ 2}(t)+f_o^{\ 2}(t)+2f_e(t)f_o(t)]dt$$

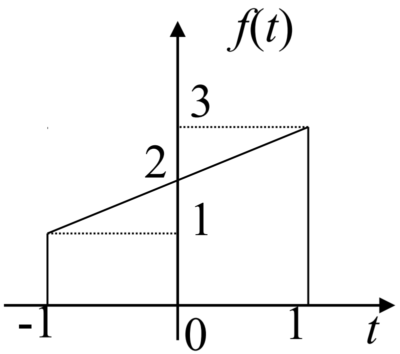
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_e^{\ 2}(t)dt+\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_o^{\ 2}(t)dt=P_e+P_o$$

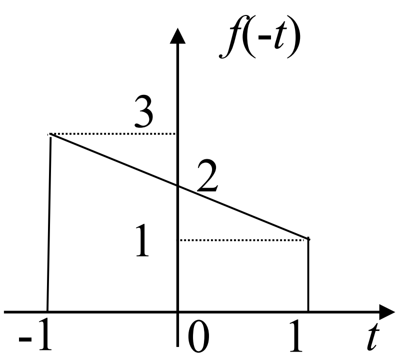
注：若为周期信号不必加$T\to\infty$

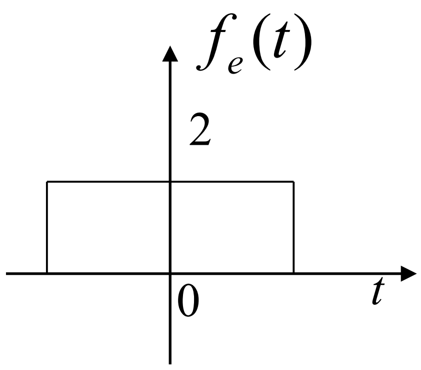
§1.3 信号分解

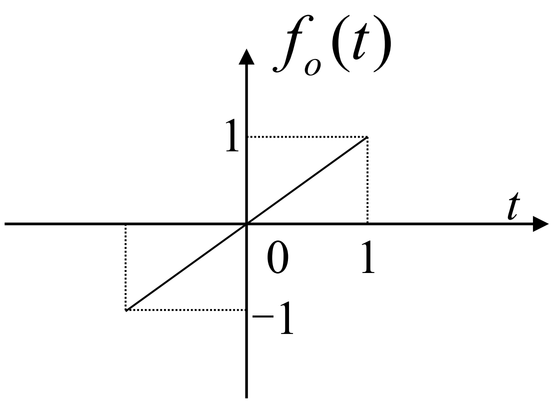
[例1]： 求下面信号的奇分量和偶分量

解：









§1.3 信号分解

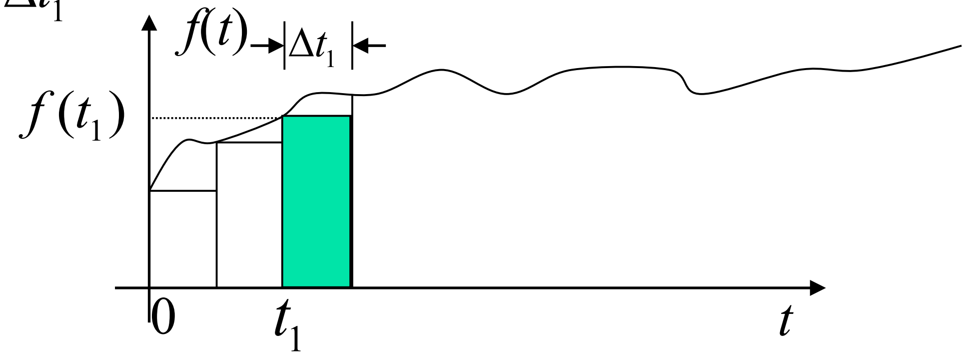
三、脉冲分量

1．信号分解为冲激信号叠加

①先将信号近似为矩形窄脉冲分量 $f(t_1)[u(t-t_1)-u(t-t_1-\Delta t_1)]$ 的叠加，即

$$f(t)\approx\sum_{t_1=-\infty}^{+\infty}f(t_1)[u(t-t_1)-u(t-t_1-\Delta t_1)]$$

$$=\sum_{t_1=-\infty}^{+\infty}f(t_1)\frac{u(t-t_1)-u(t-t_1-\Delta t_1)}{\Delta t_1}\Delta t_1$$



§ 1.3 信号分解

②取极限

i) $$f(t)=\lim_{\Delta t_1\to 0}\sum_{t_1=-\infty}^{+\infty} f(t_1)\frac{u(t-t_1)-u(t-t_1-\Delta t_1)}{\Delta t_1}\Delta t_1$$

$$=\lim_{\Delta t_1\to 0}\sum_{t_1=-\infty}^{+\infty} f(t_1)\delta(t-t_1)\Delta t_1$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1)\delta(t-t_1)dt_1 \Rightarrow f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

ii)<*根据上式以及冲激函数为偶函数*>可得抽样特性：

$$f(t_0)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt$$

§1.3 信号分解

2．将信号分解为阶跃信号之和(设$f(t)=0$ $(t<0)$)

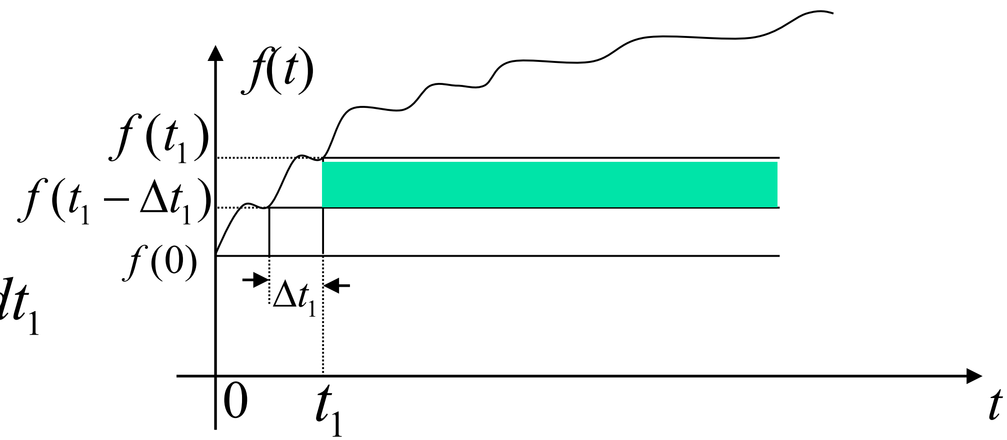
①先将信号近似为阶跃信号分量$[f(t_1)-f(t_1-\Delta t_1)]u(t-t_1)$的叠加，即

$$f(t)\approx f(0)u(t)+\sum_{t_1=\Delta t_1}^{\infty}[f(t_1)-f(t_1-\Delta t_1)]u(t-t_1)$$

$$=f(0)u(t)+\sum_{t_1=\Delta t_1}^{\infty}\frac{[f(t_1)-f(t_1-\Delta t_1)]}{\Delta t_1}\cdot\Delta t_1 u(t-t_1)$$

②取极限

$$f(t)=f(0)u(t)+\int_0^{\infty}\frac{df(t_1)}{dt_1}u(t-t_1)dt_1$$



§1.3 信号分解

四、实部分量与虚部分量

1. $f(t)=f_r(t)+jf_i(t)$

2. $f^*(t)=f_r(t)-jf_i(t)$

3. $|f(t)|^2=f(t)f^*(t)=f_r^{\,2}(t)+f_i^{\,2}(t)$

4. 实际不存在，但可借助其来研究实信号或简化运算

§1.3 信号分解

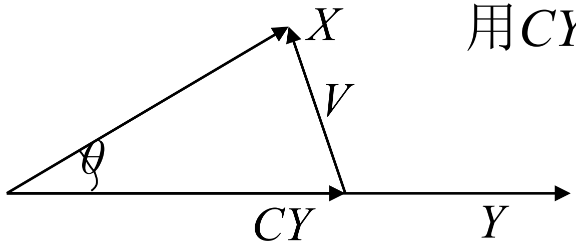
五、正交函数分量

1. 二维空间正交矢量

①矢量内积定义：$\langle X,Y\rangle=\sum_{i=1}^{2}X_iY_i$ 其中 $X=(X_1,X_2)$，$Y=(Y_1,Y_2)$

②矢量长度定义：$\|X\|_2=\sqrt{X_1^{\ 2}+X_2^{\ 2}}=\sqrt{\langle X,X\rangle}$

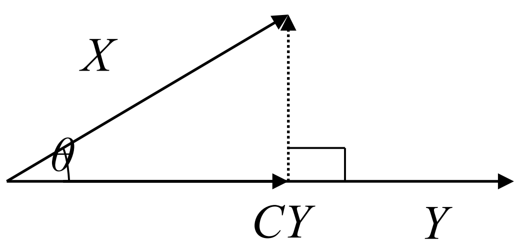
③用一个二维矢量Y近似另一个矢量X



用CY近似X，误差 $V=X-CY$

最小误差是垂直情况，此时

$$C=\frac{\|X\|_2\cos\theta}{\|Y\|_2}=\frac{\|X\|_2\|Y\|_2\cos\theta}{\|Y\|_2^{\ 2}}=\frac{\langle X,Y\rangle}{\langle Y,Y\rangle}$$



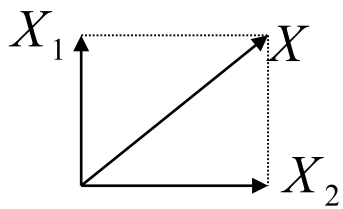
若 $\theta=90^0$，C=0，此时$X\perp Y$正交，即$\langle X,Y\rangle=0$

§1.3 信号分解

④任何二维矢量均可分解为两个正交矢量

$$X = X_1 + X_2$$

$$X_1 \perp X_2$$



⑤由二维空间可推广到n维空间

i) n维空间两个矢量的内积

$$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n); Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \quad < X, Y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

ii) n维空间两个矢量的长度 $\|X\|_2 = \sqrt{< X, X >} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

iii) n维空间一个矢量Y表示另一个矢量X误差最小时

$$C = \frac{< X, Y >}{< Y, Y >} \quad 当\ C = 0, X \perp Y$$

§1.3 信号分解

2. 正交函数

①用$c_{12}f_2(t)$近似$f_1(t)$($t_1 < t < t_2$)何时误差$f_1(t) - c_{12}f_2(t)$最小

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}[f_1(t) - c_{12}f_2(t)]^2 dt$$

令：$\frac{d\overline{\varepsilon^2}}{dc_{12}} = 0$ 则：$\frac{2}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2(t)dt - \frac{2c_{12}}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} f_2{}^2(t)dt = 0$

即：

$$c_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2{}^2(t)dt}$$

§1.3 信号分解

②定义函数内积

$$< f_1(t), f_2(t) >= \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt$$

则：

$$c_{12} = \frac{< f_1(t), f_2(t) >}{< f_2(t), f_2(t) >}$$

当 $c_{12} = 0$时，$f_1(t)$与$f_2(t)$正交

§1.3 信号分解

[例2]： 用$f_2(t)=\sin t(\ t\in(0,2\pi))$逼近 $f_1(t)=\begin{cases}1 & 0<t<\pi\\ -1 & \pi<t<2\pi\end{cases}$

求 c_{12}

解: 使$f_1(t)-c_{12}f_2(t)$最小， 可得

$$c_{12}=\frac{<f_1(t),f_2(t)>}{<f_2(t),f_2(t)>}=\frac{\int_0^{\pi}\sin t dt-\int_{\pi}^{2\pi}\sin t dt}{\int_0^{2\pi}\sin^2 t dt}=\frac{-\cos t\Big|_0^{\pi}+\cos t\Big|_{\pi}^{2\pi}}{\frac{1}{2}(2\pi-0)}=\frac{4}{\pi}$$

即：

$$f_1(t)\approx\frac{4}{\pi}\sin t$$

§1.3 信号分解

[例3]： 用sin$t$在区间(0,2π)内来逼近cos$t$，求 c_{12}

解：

$$c_{12}=\frac{<\sin t,\cos t>}{<\sin t,\sin t>}=\frac{\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2t dt}{\pi}=0$$

即：

$$\sin t\perp\cos t$$

§1.3 信号分解

3．正交函数集

①定义：$\{g_1(t), g_2(t)\cdots g_n(t)\}(t_1,t_2)$满足 $<g_i(t), g_j(t)>=0\ (i\neq j)$，$<g_i(t), g_i(t)>=k_i$

即：$\begin{cases} \int_{t_1}^{t_2} g_i(t)g_j(t)dt = 0 & i \neq j \\ \int_{t_1}^{t_2} g_i^{\,2}(t)dt = k_i \end{cases}$

② $f(t)$用正交函数集的线性组合近似，何时误差最小？

$$f(t) \approx c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) + \cdots + c_n g_n(t) = \sum_{r=1}^{n} c_r g_r(t)$$

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}[f(t) - \sum_{r=1}^{n} c_r g_r(t)]^2 dt$$

$$\frac{\partial \overline{\varepsilon^2}}{\partial c_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial c_i}\left\{\int_{t_1}^{t_2}[f(t) - \sum_{r=1}^{n} c_r g_r(t)]^2 dt\right\} = 0 \Rightarrow c_i = \frac{<f(t), g_i(t)>}{<g_i(t), g_i(t)>}$$

将这些 c_i代入$\overline{\varepsilon^2}$表达式 计算出

$$\overline{\varepsilon^2}_{\min} = \frac{1}{t_2 - t_1}[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt - \sum_{r=1}^{n} c_r^{\,2} k_r]$$

§1.3 信号分解

③归一化正交函数集

对于$k_i=1$的归一化正交函数集 即 $\int_{t_1}^{t_2} g_i^{\,2}(t)dt=1$

$$\overline{\varepsilon^2}_{\min}=\frac{1}{t_2-t_1}\left[\int_{t_1}^{2} f^2(t)dt-\sum_{r=1}^{n}c_r^{\,2}\right]$$

④复变函数正交特性

i) $$c_{12}=\frac{< f_1(t), f_2(t) >}{< f_2(t), f_2(t) >}=\frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2{}^*(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2}\left|f_2(t)\right|^2 dt}$$

ii) 正交条件 $\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2{}^*(t)=0$

iii)正交函数集定义 $\{g_1(t),\cdots,g_r(t)\}\begin{cases}\int_{t_1}^{t_2} g_i(t)g_j{}^*(t)=0 & i\neq j\\ \int_{t_1}^{t_2}\left|g_i(t)\right|^2=k_i\end{cases}$

§1.3 信号分解

4．完备正交函数集

①定义方法一：若 $\{g_1(t), g_2(t), \cdots g_n(t)\}$在（t1，t2）内近似表示

$$f(t) \approx \sum_{r=1}^{n} c_r g_r(t)$$

若令$n\to\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{\varepsilon^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}[f(t) - \sum_{r=1}^{n} c_r g_r(t)]^2 dt = 0$

则称此函数集为完备正交函数集

此时$f(t) = c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) + \cdots + c_r g_r(t) + \cdots$

②定义方法二：$g_1(t), g_2(t), \cdots g_n(t)$之外不存在函数$x(t)(0 < \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt < \infty)$

满足等式 $\int_{t_1}^{t_2} x(t) g_i(t) dt = 0$，$i$为1…$n$的任意正整数，

则称此函数集为完备正交函数集

§1.3 信号分解

③帕塞瓦尔方程：由$\overline{\varepsilon^2}=0 \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt=\sum_{r=1}^{\infty} c_r{}^2 k_r$

对 $k_i=1$的归一化正交函数集：

$$\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt=\sum_{r=1}^{\infty} c_r{}^2$$

④广义傅立叶级数展开：

$$f(t)=c_1 g_1(t)+c_2 g_2(t)+\cdots+c_r g_r(t)+\cdots$$

常用完备正交函数集：

i)三角函数集：

$$\{\sin\omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \cdots, 1, \cos\omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \cdots\}\ (t_0, t_0+\frac{2\pi}{\omega_0})$$

ii)复指数函数集：

$$\{1, e^{j\omega_0 t}, e^{-j\omega_0 t}, e^{j2\omega_0 t}, e^{-j2\omega_0 t}, \cdots\}$$

iii)沃尔什函数集

§1.3 信号分解

[例4]：$1,x,x^2,x^3$是否是区间(0,1)的正交函数集？区间(-1,1)呢？

解：由于$\int_0^1 1\cdot x dx=\frac{1}{2}\neq 0$，故$1,x,x^2,x^3$不是区间(0,1)的正交函数集

$\int_{-1}^{1} 1\cdot x dx=0$，$\int_{-1}^{1} 1\cdot x^2 dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}\neq 0$也不是(-1,1)上的正交函数集

§1.3 信号分解

[例5]： 证明cos$t$,cos2t,……cosnt为区间$(0,2\pi)$中的正交函数集，又问是否为区间$(0,\frac{\pi}{2})$中的正交函数集？

证明： 对于任意正整数$i \neq j$ 可以证明

$$\int_0^{2\pi} \cos it \cos jt dt = \frac{\sin(i+j)t}{2(i+j)} + \frac{\sin(i-j)t}{2(i-j)} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

故得证。对于函数cos$t$和函数cos2t可证

$$\int_0^{\pi/2} \cos t \cos 2t dt = \left(\frac{\sin 3t}{6} + \frac{\sin t}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3} \neq 0$$

故不是区间$(0,\frac{\pi}{2})$中的正交函数集。

§1.3 信号分解

[例6]: 已知: $f(t)=\begin{cases}1 & 0<t<\pi \\ -1 & \pi<t<2\pi\end{cases}$

$$f(t)\approx c_1\sin t+c_2\sin 2t+c_3\sin 3t+c_4\sin 4t\,(0<t<2\pi)$$

求: c_1, c_2, c_3, c_4 及 $\overline{\varepsilon^2}$

解:

$$c_1=\frac{\langle f(t),\sin t\rangle}{\langle \sin t,\sin t\rangle}=\frac{\int_0^{2\pi}f(t)\sin t\,dt}{\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt}=\frac{\int_0^{\pi}\sin t\,dt-\int_{\pi}^{2\pi}\sin t\,dt}{\pi}$$

$$=\frac{-\cos t\,\big|_0^{\pi}+\cos t\,\big|_{\pi}^{2\pi}}{\pi}=\frac{4}{\pi}$$

§1.3 信号分解

$$c_2=\frac{\langle f(t),\sin 2t\rangle}{\langle \sin 2t,\sin 2t\rangle}=\frac{\int_0^{\pi}\sin 2tdt-\int_{\pi}^{2\pi}\sin 2tdt}{\int_0^{2\pi}\sin^2 2tdt}=\frac{0}{\pi}$$

$$c_3=\frac{4}{3\pi}$$

$$c_4=0$$

$$\overline{\varepsilon^2}=\frac{1}{2\pi}[\int_0^{2\pi}f^2(t)dt-c_1^2k_1-c_3^2k_3]=1-\frac{1}{2\pi}(\frac{4}{\pi})^2\cdot\pi-\frac{1}{2\pi}(\frac{4}{3\pi})^2\cdot\pi$$

$$=1-\frac{80}{9\pi^2}$$

§ 1.3 信号分解

[例7]： 试证明sin$t$,sin2t…,sinnt,…不是区间$(0,2\pi)$上的完备正交函数集。

证明： （用反证法）存在函数1，满足$0<\int_0^{2\pi} 1^2 dt = 2\pi < +\infty$

和$\int_0^{2\pi} 1 \cdot \sin t dt = 0$，即至少函数1与sin$t$正交，

故sin$t$,sin2t,…sinnt,…不够完备。

§1.3 信号分解

[例8]：用二次方程在区间(-1,1)上近似表示函数e^t

求使方均误差最小的a,b,c。

解：注意：由于$1,t,t^2$不是(-1,1)上的正交函数集，故不能用公式：

$$a=\frac{\langle e^t,t^2\rangle}{\langle t^2,t^2\rangle},\ b=\frac{\langle e^t,t\rangle}{\langle t,t\rangle},\ c=\frac{\langle e^t,1\rangle}{\langle 1,1\rangle}$$

来做题；只能用定义按下述方法去做：

$$\overline{\varepsilon^2}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}[e^t-at^2-bt-c]^2dt$$

§1.3 信号分解

令：

$$\frac{\partial \overline{\varepsilon^2}}{\partial a}=0 \Rightarrow \int_{-1}^{1}[-2e^t\cdot t^2+2(at^2+bt+c)t^2]dt=0$$

$$\frac{\partial \overline{\varepsilon^2}}{\partial b}=0 \Rightarrow \int_{-1}^{1}[-2e^t\cdot t+2(at^2+bt+c)t\ ]dt=0$$

$$\frac{\partial \overline{\varepsilon^2}}{\partial c}=0 \Rightarrow \int_{-1}^{1}[-2e^t+2(at^2+bt+c)]dt=0$$

§ 1.3 信号分解

可得如下方程组：

$$
\begin{cases}
\dfrac{4}{5}a+\dfrac{4}{3}e=\displaystyle\int_{-1}^{1}2e^{t}\cdot t^{2}dt\\
\dfrac{4}{3}b=\displaystyle\int_{-1}^{1}2e^{t}\cdot tdt\\
\dfrac{4}{3}a+4c=\displaystyle\int_{-1}^{1}2e^{t}dt
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
\dfrac{4}{5}a+\dfrac{4}{3}e=2e-10e^{-1}\\
\dfrac{4}{3}b=4e^{-1}\\
\dfrac{4}{3}a+4c=2e-2e^{-1}
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
a=\dfrac{15}{4}(e-\dfrac{7}{e})\\
b=3e^{-1}\\
c=-3e+\dfrac{33}{e}
\end{cases}
$$

第二章 连续时间系统的时域分析

本章主要研究内容：

- 微分方程的建立与求解
- 零输入、零状态、冲激、阶跃响应
- 卷积、算子
- 分配函数

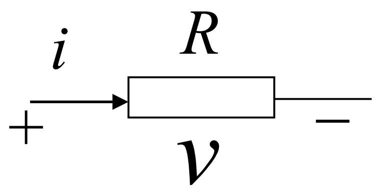
§2.1 微分方程的建立与求解

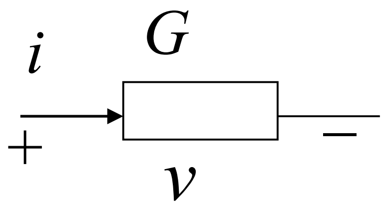
一、微分方程的建立

1．元件约束特性

①电路元件

i)电阻R：

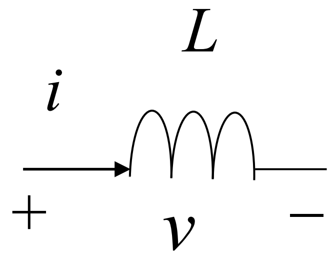




$$v = Ri \qquad\qquad i = Gv$$

§ 2.1 微分方程的建立与求解

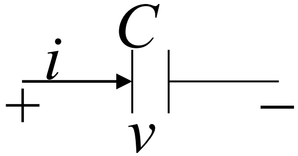
ii)电感L：



$$i=\frac{1}{L}\int vdt \qquad v=Ldi/dt$$

§ 2.1 微分方程的建立与求解

iii)电容C：



$$i = C\frac{dv}{dt} \qquad v = \frac{1}{C}\int i\,dt$$

§2.1 微分方程的建立与求解

2．网络拓扑约束

①电路系统

i)KVL：$\sum_{k=1}^{N} v_k = 0$

ii)KCL：$\sum_{k=1}^{N} i_k = 0$

②机械系统：达朗贝尔原理

i) $\sum_{i=1}^{M} F_i = 0$

ii) $\sum_{k=1}^{N} v_k = 0$

§2.1 微分方程的建立与求解

3. 不同性质系统可用相同微分方程描述

4. 电路类微分方程建立例子

§2.1 微分方程的建立与求解

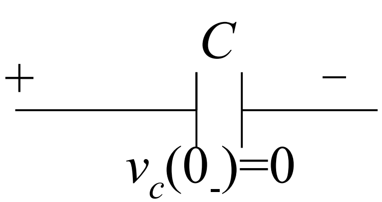
6．线性时不变系统的微分方程特点

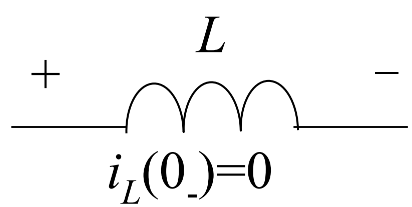
①一般形式：线性常系数微分方程

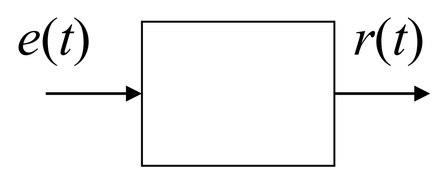
$$c_0\frac{d^n}{dt^n}r(t)+c_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}r(t)+\cdots+c_{n-1}\frac{d}{dt}r(t)+c_n r(t)$$

$$=E_0\frac{d^m}{dt^m}e(t)+E_1\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}e(t)+\cdots+E_{m-1}\frac{d}{dt}e(t)+E_m e(t)$$

②若组成系统的元件线性、参数恒定且无初始储能，则系统为线性时不变系统







0_-:激励加入前的时刻

§2.1 微分方程的建立与求解

二、微分方程的经典时域求解法（齐次解+特解法）

1．齐次解（自由响应）

①齐次方程：

$$c_0 \frac{d^n}{dt^n} r(t) + c_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} r(t) + \cdots + c_{n-1} \frac{d}{dt} r(t) + c_n r(t) = 0$$

②齐次解$r_h(t)$形式：$Ae^{\alpha t}$函数的线性组合

令$r(t) = Ae^{\alpha t}$代入上式化简得特征方程

$$c_0 \alpha^n + c_1 \alpha^{n-1} + \cdots + c_{n-1} \alpha + c_n = 0$$

有n个根$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$

§ 2.1 微分方程的建立与求解

③各种特征根情况下的齐次解形式

i)互不相同实根：$r_h(t)=A_1e^{\alpha_1 t}+A_2e^{\alpha_2 t}+\cdots+A_ne^{\alpha_n t}$

ii) α_1为k重特征根，与α_1有关的齐次解部分：

$$(A_1t^{k-1}+A_2t^{k-2}+\cdots+A_k)e^{\alpha_n t}$$

iii) α_1与α_2为共轭复根 $p\pm qj$（一重），对应齐次解部分：

$$(A_1\cos qt+A_2\sin qt)e^{pt}$$

iv) α_1与α_2为共轭复根$p\pm qj$（k重），对应齐次解部分为：

$$[(A_1t^{k-1}+A_2t^{k-2}+\dots+A_k)\cos qt+(B_1t^{k-1}+B_2t^{k-2}+\dots+B_k)\sin qt]e^{pt}$$

§ 2.1 微分方程的建立与求解

[例3]：求下列微分方程的齐次解形式

① $$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+3\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=\frac{d}{dt}e(t)+3e(t)$$

解：

$$\alpha^2+3\alpha+2=0 \Rightarrow \alpha_1=-1,\ \alpha_2=-2$$

$$\Rightarrow r_h(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}$$

§ 2.1 微分方程的建立与求解

[例3]： 求下列微分方程的齐次解形式

② $$\frac{d^3}{dt^3}r(t)+7\frac{d^2}{dt^2}r(t)+16\frac{d}{dt}r(t)+12r(t)=e(t)$$

解： $$\alpha^3+7\alpha^2+16\alpha+12=0 \Rightarrow \alpha_{1,2}=-2(\text{二重}),\quad \alpha_3=-3$$

$$\Rightarrow r_h(t)=(A_1t+A_2)e^{-2t}+A_3e^{-3t}$$

§ 2.1 微分方程的建立与求解

[例3]：求下列微分方程的齐次解形式

③ $$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+2\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=\frac{d}{dt}e(t)$$

解：

$$\alpha^2+2\alpha+2=0 \Rightarrow \alpha_{1,2}=-1\pm j \text{（一重共轭），}$$

$$\Rightarrow r_h(t)=(A_1\cos t+A_2\sin t)e^{-t}$$

§ 2.1 微分方程的建立与求解

2． 特解（强迫响应）： 由激励形式和特征根情况共同决定

①将激励代入微分方程右端，化简得自由项（t>0时）

②根据自由项形式与特征根情况设特解 $r_p(t)$

，如下特解表所示　　〈为什么要考虑特征根情况?〉

$$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+3\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=\frac{d}{dt}e(t)+e(t) \quad e(t)=e^{-2t}u(t)$$

注：$P_\lambda(t)$为λ次多项式；$P_s(t)$为s次多项式；

$l=\max\{\lambda,s\}$；　$Q_\lambda(t)$为λ次多项式；

$Q_l(t)$，　$G_l(t)$ 为l次多项式。

§2.1 微分方程的建立与求解

自由项形式	特征根情况	特解形式
E(常数)	0 不是	B(常数)
	0 是 k 重根	Bt^k
$P_\lambda(t)$ (λ 次多项式)	0 不是	$Q_\lambda(t)$
	0 是 k 重	$t^k Q_\lambda(t)$
$E e^{at}$	a 不是	$B e^{at}$
	a 是 k 重	$B t^k e^{at}$
$e^{at} P_\lambda(t)$	a 不是	$e^{at} Q_\lambda(t)$
	a 是 k 重	$t^k e^{at} Q_\lambda(t)$

§2.1 微分方程的建立与求解

自由项形式	特征根情况	特解形式
$E\cos\omega t$ 或 $E\sin\omega t$	$\pm j\omega$ 不是	$B_1\cos\omega t + B_2\sin\omega t$
	$\pm j\omega$ 是 k 重	$t^k(B_1\cos\omega t + B_2\sin\omega t)$
$P_\lambda(t)\cos\omega t + P_s(t)\sin\omega t$	$\pm j\omega$ 不是	$Q_l(t)\cos\omega t + G_l(t)\sin\omega t$
	$\pm j\omega$ 是 k 重	$t^k[Q_l(t)\cos\omega t + G_l(t)\sin\omega t]$
$e^{at}[P_\lambda(t)\cos\omega t + P_s(t)\sin\omega t]$	$a \pm j\omega$ 不是	$e^{at}[Q_l(t)\cos\omega t + G_l(t)\sin\omega t]$
	$a \pm j\omega$ 是 k 重	$t^k e^{at}[Q_l(t)\cos\omega t + G_l(t)\sin\omega t]$

③确定特解

§2.1 微分方程的建立与求解

[例4]：求下列微分方程的特解

① $$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+3\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=\frac{d}{dt}e(t)+e(t)$$

特征根：$\alpha_1=-1, \alpha_2=-2$

i) $e(t)=t^2$

自由项= t^2+2t，0不是特征根，$r_p(t)=B_0t^2+B_1t+B_2$

代入左端令对应系数相等可得：

$$B_0+3(2B_0t+B_1)+2(B_0t^2+B_1t+B_2)=t^2+2t$$

$B_0=0.5$, $B_1=-0.5$, $B_2=0.5$

§2.1 微分方程的建立与求解

3．完全解

①写出完全解：$r(t)=r_p(t)+r_h(t)$, 其中$r_h(t)$ 有n个待定系数

②待定系数由初始条件确定

i)求解区间$0_+\le t\le +\infty$

ii)初始条件 $r^{(k)}(0_+)=\{r^{(0)}(0_+),r^{(1)}(0_+),\ldots,r^{(n-1)}(0_+)\}$

iii)设n个特征根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$互不相同，则

$$r(t)=r_p(t)+\sum_{i=1}^{n}A_i e^{\alpha_i t}$$

将初始条件代入方程组：

§2.2 零输入、零状态

一、零输入、零状态响应

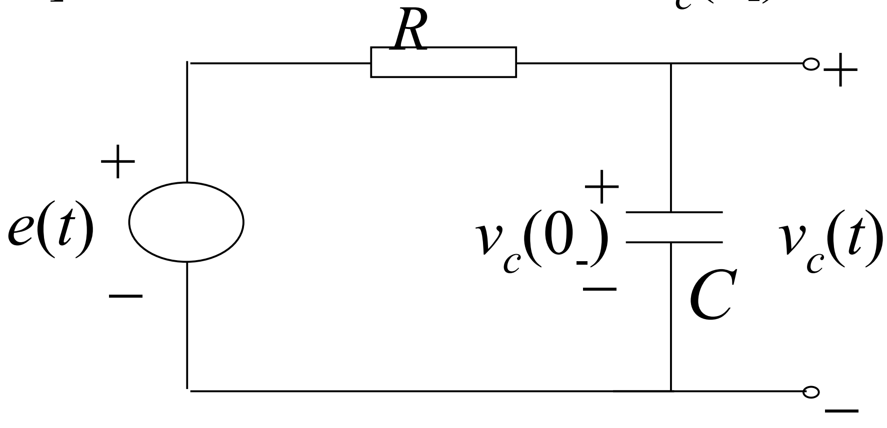
1．概念的引出

①上节课：完全响应=自由响应+强迫响应，

其中自由响应待定系数由冲激函数匹配法求出

②本节讲另一种求法：完全响应=零输入响应+零状态响应

[例1]：已知电容起始电压$v_c(0_-)$，求$v_c(t)$ $(t>0)$



§ 2.2 零输入、零状态

解：

$$\frac{d}{dt}v_c(t)+\frac{1}{RC}v_c(t)=\frac{1}{RC}e(t)\Rightarrow e^{\frac{t}{RC}}\frac{d}{dt}v_c(t)+\frac{1}{RC}e^{\frac{t}{RC}}v_c(t)=\frac{1}{RC}e^{\frac{t}{RC}}e(t)$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dt}\left[e^{\frac{t}{RC}}v_c(t)\right]=\frac{1}{RC}e^{\frac{t}{RC}}e(t)\Rightarrow\int_{0-}^{t}\frac{d}{d\tau}\left[e^{\frac{\tau}{RC}}v_c(\tau)\right]d\tau=\int_{0-}^{t}\frac{1}{RC}e^{\frac{\tau}{RC}}e(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow e^{\frac{t}{RC}}v_c(t)-v_c(0_-)=\frac{1}{RC}\int_{0-}^{t}e^{\frac{\tau}{RC}}e(\tau)d\tau\Rightarrow$$

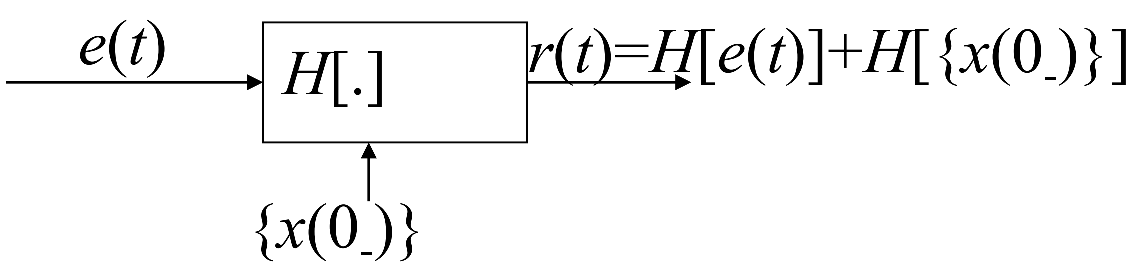
$$v_c(t)=e^{\frac{-t}{RC}}v_c(0_-)\quad+\quad\frac{1}{RC}\int_{0-}^{t}e^{\frac{-1}{RC}(t-\tau)}e(\tau)d\tau$$

零输入　　　　零状态

只与起始状态有关　只与输入有关，卷积形式

§ 2.2 零输入、零状态、冲激、阶跃响应

③



§2.2 零输入、零状态、冲激、阶跃响应

2. 零输入响应的定义与待定系数确定

①定义：没有外加激励信号作用，完全由起始状态所产生的响应，即 $r_{zi}(t)=H[\{x(0_-)\}]$

②满足方程：$c_0\dfrac{d^n}{dt^n}r_{zi}(t)+\ldots+c_{n-1}\dfrac{d}{dt}r_{zi}(t)+c_n r_{zi}(t)=0$

故 $r_{zi}(t)$ 是一种齐次解形式，即 $r_{zi}(t)=\sum_{k=1}^{n}A_{zik}e^{\alpha_k t}$

其中，$\alpha_1,\alpha_2\ldots\ldots\alpha_n$ 为互不相等的n个系统特征根。

③初始条件：$r_{zi}^{(k)}(0_+)=r_{zi}^{(k)}(0_-)=r^{(k)}(0_-)$

即齐次解 $r_{zi}(t)$的待定系数用$r^{(k)}(0_-)$ 确定即可！

§ 2.2 零输入、零状态、冲激、阶跃响应

3．零状态响应的定义与待定系数确定

①定义：起始状态为0，只由激励产生的响应$r_{zs}(t)=H[e(t)]$

②满足方程：

$$c_0\frac{d^n}{dt^n}r_{zs}(t)+\ldots\ldots+c_{n-1}\frac{d}{dt}r_{zs}(t)+c_n r_{zs}(t)=E_0\frac{d^m}{dt^m}c(t)+\ldots\ldots+E_m$$

故 $r_{zs}(t)$含特解$r_p(t)$，即 $r_{zs}(t)=\sum_{k=1}^{n}A_{zsk}e^{\alpha_k t}+r_p(t)$

③初始条件：

由于$r_{zs}^{(k)}(0_-)=0$，

$r_{zs}^{(k)}(0_+)-r_{zs}^{(k)}(0_-)=r^{(k)}(0_+)-r^{(k)}(0_-)$=跳变值

故$r_{zs}^{(k)}(0_+)$ =跳变值，即系数A_{zsk}由跳变值确定。

§2.3 卷积、算子

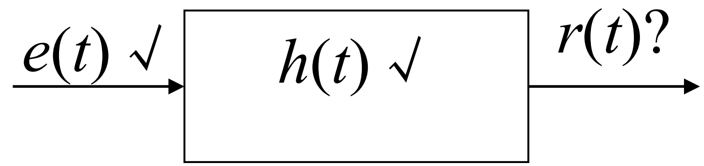
一、卷积及其性质

1. 定义与物理意义

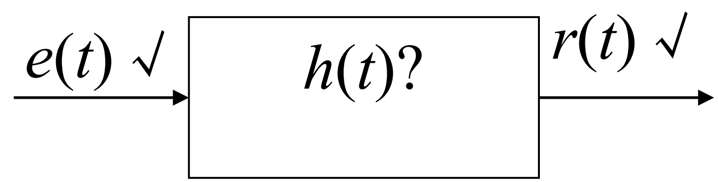
①历史：19世纪，欧拉，泊松，杜阿美尔

②卷积与反卷积互逆

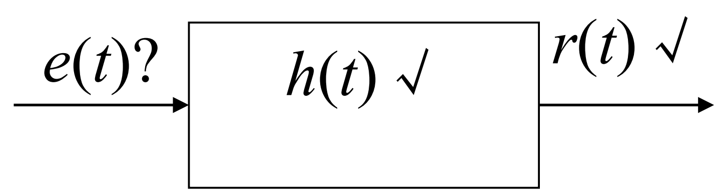
i)卷积



ii)反卷积1：系统辨识



iii)反卷积2：信号检测



§2.3 卷积、算子

③定义：

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

④物理意义：将信号分解成冲激信号之和，借助系统的冲激响应$h(t)$，求出系统对任意激励信号的零状态响应，即：

$$e(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow r(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

§2.3 卷积、算子

2. 卷积性质

①代数性质

i)交换律：$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$

证明：

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

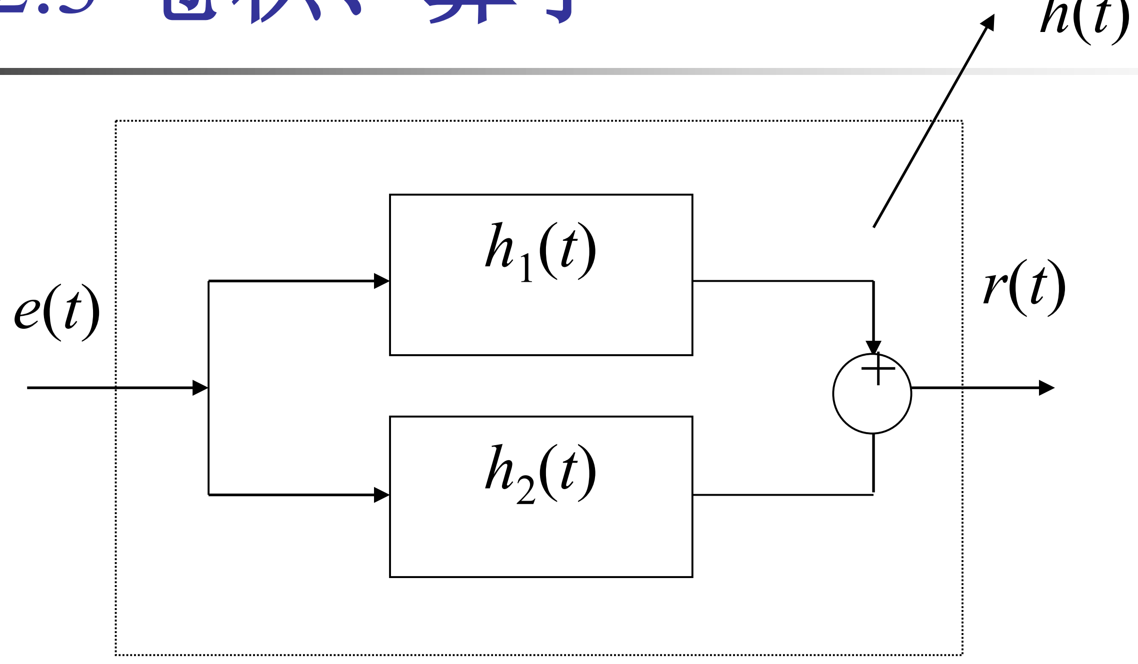
$$\underline{\underline{\tau=t-\lambda}}\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(\lambda)f_1(t-\lambda)d\lambda=f_2(t)*f_1(t)$$

ii)分配律：$f_1(t)*\left[f_2(t)+f_3(t)\right]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$

定律成立条件：$f_1(t)*f_2(t)$　$f_1(t)*f_3(t)$ 均存在

物理含义：并联系统的冲激响应，等于各子系统冲激响应之和。

§ 2.3 卷积、算子



$$r(t)=e(t)*[h_1(t)+h_2(t)]$$

$$\Rightarrow h(t)=h_1(t)+h_2(t)$$

§2.3 卷积、算子

iii)结合律：$\left[f_1(t)*f_2(t)\right]*f_3(t)=f_1(t)*\left[f_2(t)*f_3(t)\right]$

定律成立条件：$f_1(t)*f_2(t)$ $f_2(t)*f_3(t)$ 均存在

物理含义：串联系统的冲激响应=子系统冲激响应卷积

证明：

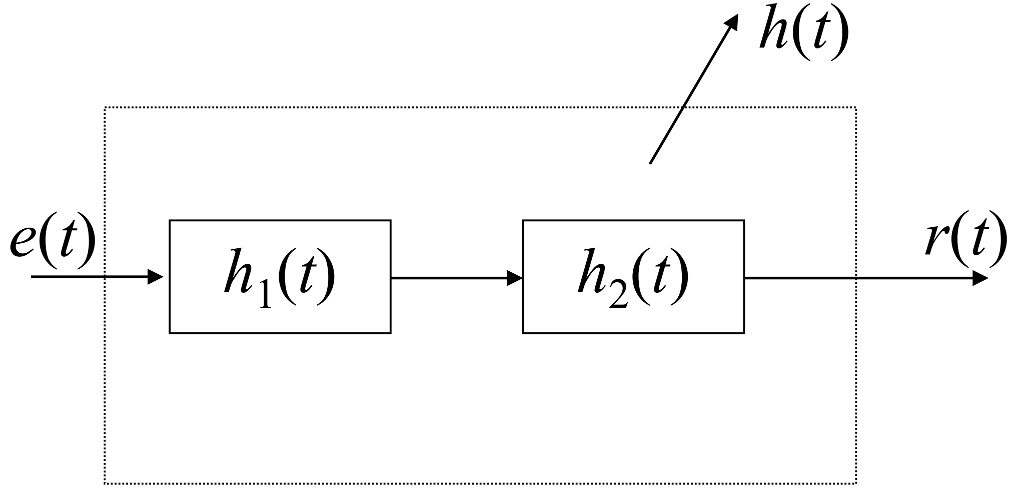
$$\left[f_1(t)*f_2(t)\right]*f_3(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\lambda)f_2(\tau-\lambda)d\lambda\right]f_3(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\lambda)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(\tau-\lambda)f_3(t-\tau)d\tau\right]d\lambda$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\lambda)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(\tau)f_3(t-\tau-\lambda)d\tau\right]d\lambda$$

$$=f_1(t)*\left[f_2(t)*f_3(t)\right]$$

§ 2.3 卷积、算子



$$r(t) = e(t) * [h_1(t) * h_2(t)]$$

$$\Rightarrow h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

§ 2.3 卷积、算子

[例1]：证明：

$$\left[e^{-t}\mu(t)*e^{-t}\right]*\left[\delta(t)-\frac{1}{e}\delta(t-1)\right]\neq e^{-t}\mu(t)*\left[e^{-t}*\left[\delta(t)-\frac{1}{e}\delta(t-1)\right]\right]$$

证明：因为：

$$\left[e^{-t}u(t)*e^{-t}\right]*\left[\delta(t)-\frac{1}{e}\delta(t-1)\right]=\text{不存在}$$

而 $e^{-t}u(t)*\left[e^{-t}*\left[\delta(t)-\frac{1}{e}\delta(t-1)\right]\right]$

$$=e^{-t}u(t)*\left[e^{-t}-\frac{1}{e}e^{1-t}\right]=0$$

§ 2.3 卷积、算子

②微分积分性质

i)微分性质： $\frac{d}{dt}[f_1(t)*f_2(t)]=f_1(t)*\frac{df_2(t)}{dt}=\frac{df_1(t)}{dt}*f_2(t)$

证明： $\frac{d}{dt}[f_1(t)*f_2(t)]=\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)\frac{df_2(t-\tau)}{dt}d\tau=f_1(t)*\frac{df_2(t)}{dt}=\frac{df_1(t)}{dt}*f_2(t)$$

ii)积分性质：

$$\int_{-\infty}^{t}[f_1(\lambda)*f_2(\lambda)]d\lambda=f_1(t)*\int_{-\infty}^{t}f_2(\lambda)d\lambda=f_2(t)*\int_{-\infty}^{t}f_1(\lambda)d\lambda$$

证明： $\int_{-\infty}^{t}[f_1(\lambda)*f_2(\lambda)]d\lambda=\int_{-\infty}^{t}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(\lambda-\tau)d\tau\right]d\lambda$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)\left[\int_{-\infty}^{t}f_2(\lambda-\tau)d\lambda\right]d\tau=f_1(t)*\int_{-\infty}^{t}f_2(\lambda)d\lambda$$

§ 2.3 卷积、算子

iii)推广：设 $s(t)=\left[f_1(t)*f_2(t)\right]$，则

$$s^{(i)}(t)=f_1^{(j)}(t)*f_2^{(i-j)}(t)$$

例：$\dfrac{df_1(t)}{dt}*\int_{-\infty}^{t}f_2(\lambda)d\lambda=f_1(\lambda)*f_2(\lambda)$

§ 2.3 卷积、算子

③ $\delta(t)$ ， u(t)的卷积性质

i) $f(t)*\delta(t)=f(t)$

ii) $f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$

iii) $f(t)*\delta'(t)=f'(t)$

iv) $f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\lambda)d\lambda$

v) $f(t)*\delta^{(k)}(t)=f^{(k)}(t)$

vi) $f(t)*\delta^{(k)}(t-t_0)=f^{(k)}(t-t_0)$

§2.3 卷积、算子

3．卷积求法

①图解法，设 $e(t)*h(t)$

i)变量替换：$t \rightarrow \tau$

ii)信号反褶：$h(\tau) \rightarrow h(-\tau)$

iii)信号移位：$h(-\tau) \rightarrow h(t-\tau)$

iv)信号相乘：$e(\tau)h(t-\tau)$

v)求积分：$\int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)h(t-\tau)$

②直接法

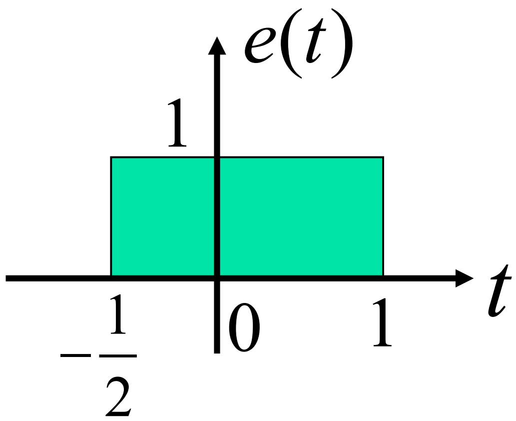
③利用卷积性质

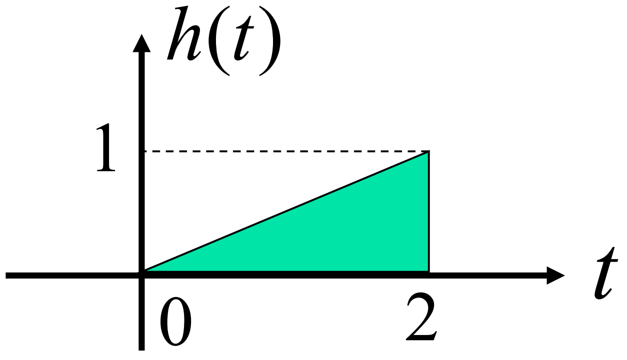
④数值法（积分复杂时采用此法）

§ 2.3 卷积、算子

[例2]: $e(t)=u\left(t+\frac{1}{2}\right)-u(t-1)$　　　$h(t)=\frac{1}{2}t\left[u(t)-u(t-2)\right]$

求：$r_{zs}(t)$

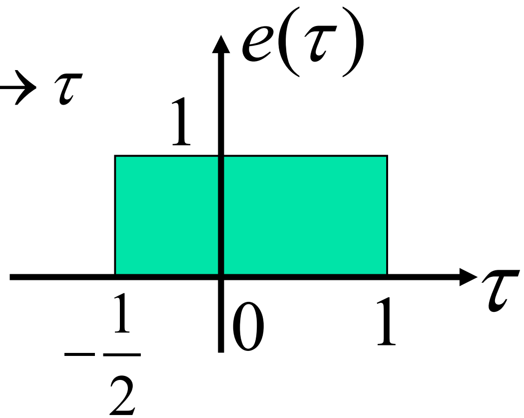


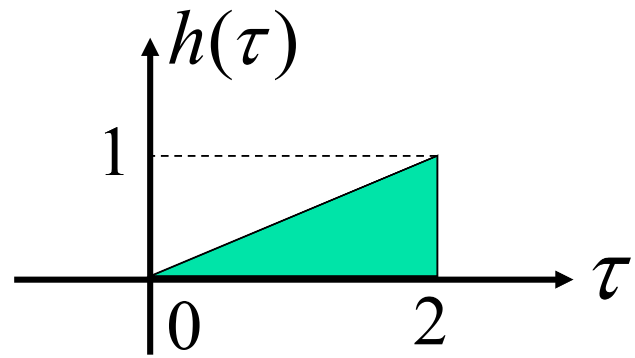


§ 2.3 卷积、算子

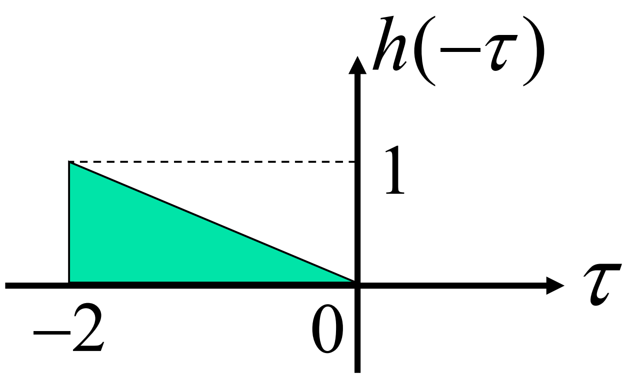
解：①方法一：图解法

i) $t \to \tau$

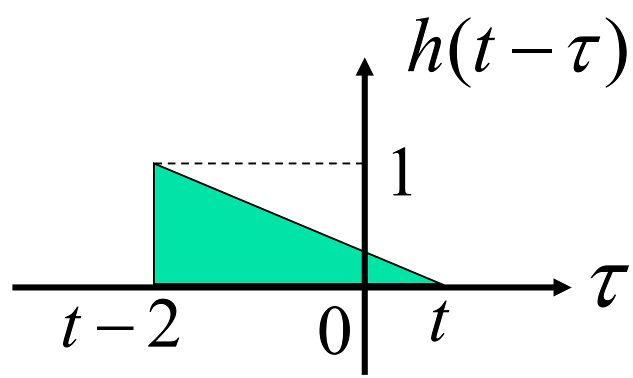




ii) $h(\tau) \to h(-\tau)$

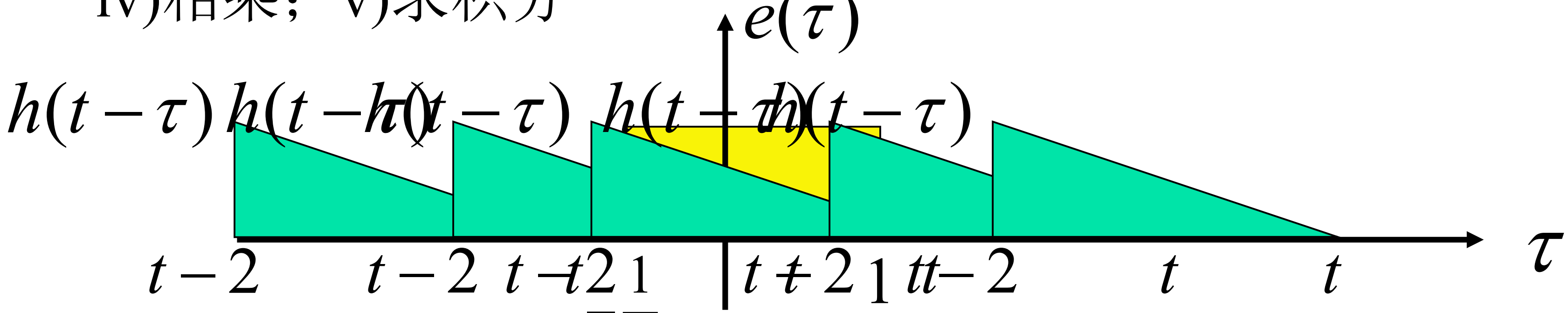


iii) $h(-\tau) \to h(t-\tau)$



§2.3 卷积、算子

iv)相乘；v)求积分



当 $t \le -1/2$ 时

$$r_{zs}(t) = 0$$

当 $-1/2 < t \le 1$ 时

$$r_{zs}(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{t} \frac{1}{2}(t-\tau)\,d\tau = \frac{t^2}{4} + \frac{t}{4} + \frac{1}{16}$$

当 $1 < t \le 3/2$ 时

$$r_{zs}(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{2}(t-\tau)\,d\tau = \frac{3t}{4} - \frac{3}{16}$$

当 $3/2 < t \le 3$ 时

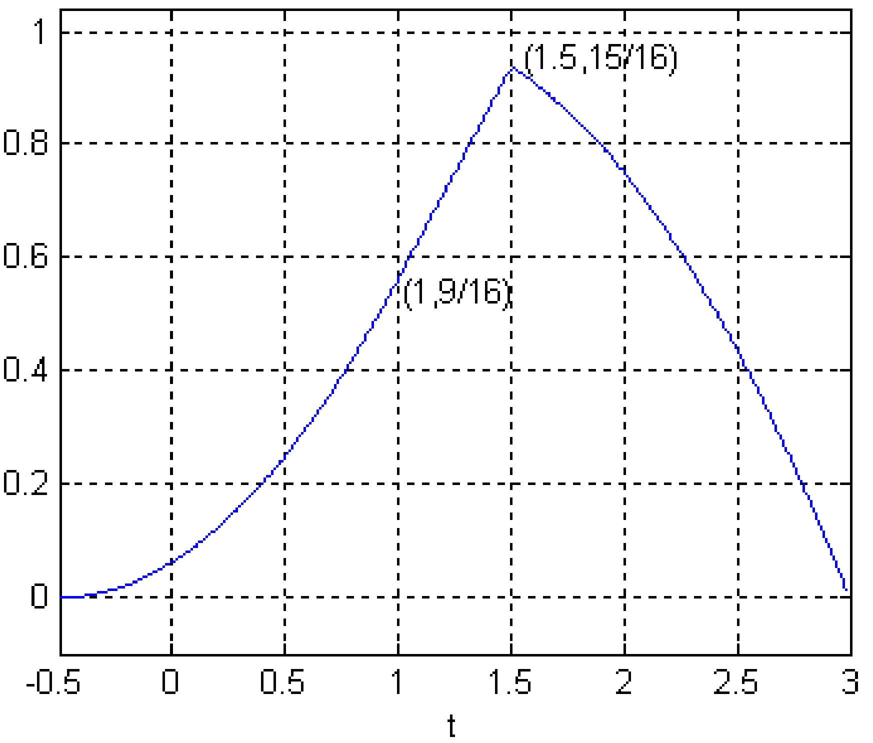
$$r_{zs}(t) = \int_{t-2}^{1} \frac{1}{2}(t-\tau)\,d\tau = -\frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} + \frac{3}{4}$$

当 $t > 3$ 时

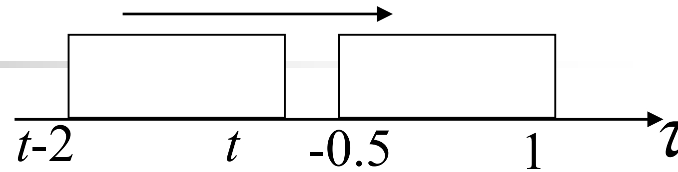
$$r_{zs}(t) = 0$$

§ 2.3 卷积、算子

$$r_{zs}(t)=\begin{cases}0 & -\infty<t\le-\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{t^2}{4}+\dfrac{t}{4}+\dfrac{1}{16} & -\dfrac{1}{2}<t\le 1\\ \dfrac{3t}{4}-\dfrac{3}{16} & 1<t\le\dfrac{3}{2}\\ -\dfrac{t^2}{4}+\dfrac{t}{2}+\dfrac{3}{4} & \dfrac{3}{2}<t\le 3\\ 0 & t>3\end{cases}$$



§ 2.3 卷积、算子



解： ②方法二：直接法

$$r_{zs}(t)=e(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}h(t-\tau)d\tau=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{2}(t-\tau)\left[u(t-\tau)-u(t-\tau-2)\right]d\tau$$

$$=\begin{cases}0 & -\infty<t\le-\frac{1}{2}\\ \int_{-\frac{1}{2}}^{t}\frac{1}{2}(t-\tau)d\tau=\frac{t^2}{4}+\frac{t}{4}+\frac{1}{16} & -\frac{1}{2}<t\le 1\\ \int_{-\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{2}(t-\tau)d\tau=\frac{3t}{4}-\frac{3}{16} & 1<t\le\frac{3}{2}\\ \int_{t-2}^{1}\frac{1}{2}(t-\tau)d\tau=-\frac{t^2}{4}+\frac{t}{2}+\frac{3}{4} & \frac{3}{2}<t\le 3\\ 0 & t>3\end{cases}$$

§ 2.3 卷积、算子

$$e(t)=u\left(t+\frac{1}{2}\right)-u(t-1)$$

$$h(t)=\frac{1}{2}t\left[u(t)-u(t-2)\right]$$

解：③方法三：利用卷积性质求卷积

$$e(t)*h(t)=e'(t)*\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau$$

$$=\left[\delta\left(t+\frac{1}{2}\right)-\delta(t-1)\right]*\left[\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{2}\tau\left[u(\tau)-u(\tau-2)\right]d\tau\right]$$

$$=\left[\delta\left(t+\frac{1}{2}\right)-\delta(t-1)\right]*\left[\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{2}\tau u(\tau)d\tau-\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{2}\tau u(\tau-2)d\tau\right]$$

$$=\left[\delta\left(t+\frac{1}{2}\right)-\delta(t-1)\right]*\left\{\left[\int_{0}^{t}\frac{1}{2}\tau d\tau\right]u(t)-\left[\left(\int_{2}^{t}\frac{1}{2}\tau d\tau\right)u(t-2)\right]\right\}$$

$$=\left[\delta\left(t+\frac{1}{2}\right)-\delta(t-1)\right]*\left[\frac{1}{4}t^2u(t)-\frac{1}{4}\left(t^2-4\right)u(t-2)\right]$$

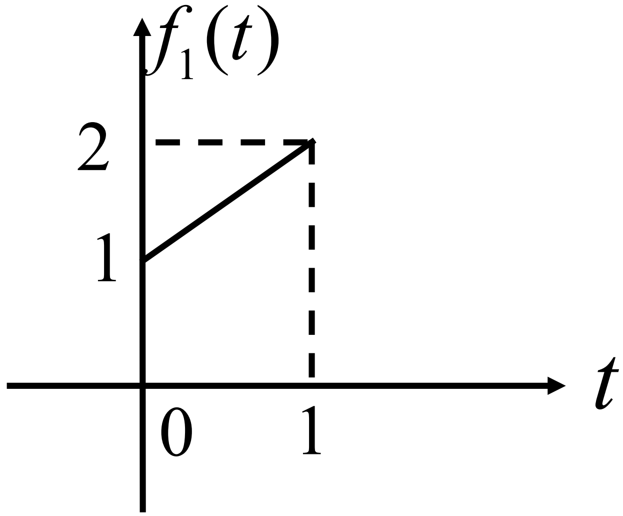
$$=\frac{1}{4}\left(t+\frac{1}{2}\right)^2u\left(t+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}\left[\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-4\right]u\left(t-\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{4}(t+1)^2u(t-1)$$

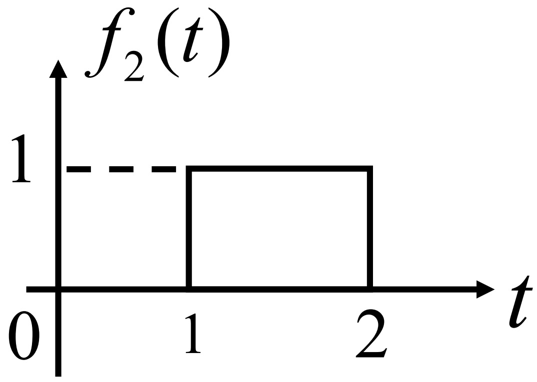
$$+\frac{1}{4}\left[(t-1)^2-4\right]u(t-3)$$

§ 2.3 卷积、算子

[例3]: $f_1(t)=(1+t)\left[u(t)-u(t-1)\right], f_2(t)=u(t-1)-u(t-2)$

求:$f_1(t)*f_2(t)$





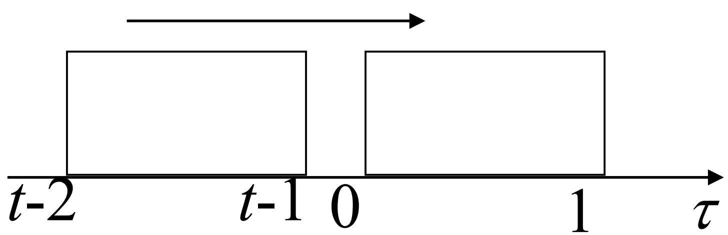
§ 2.3 卷积、算子

解： 用直接法

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_0^1(1+\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int_0^1(1+\tau)[u(t-\tau-1)-u(t-\tau-2)]d\tau$$

$$=\begin{cases}0 & -\infty<t\le 1\\ \int_0^{t-1}(1+\tau)d\tau & 1<t\le 2\\ \int_{t-2}^{1}(1+\tau)d\tau & 2<t\le 3\\ 0 & t>3\end{cases}=\begin{cases}0 & -\infty<t\le 1\\ \frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2} & 1<t\le 2\\ -\frac{1}{2}t^2+t+\frac{3}{2} & 2<t\le 3\\ 0 & t>3\end{cases}$$

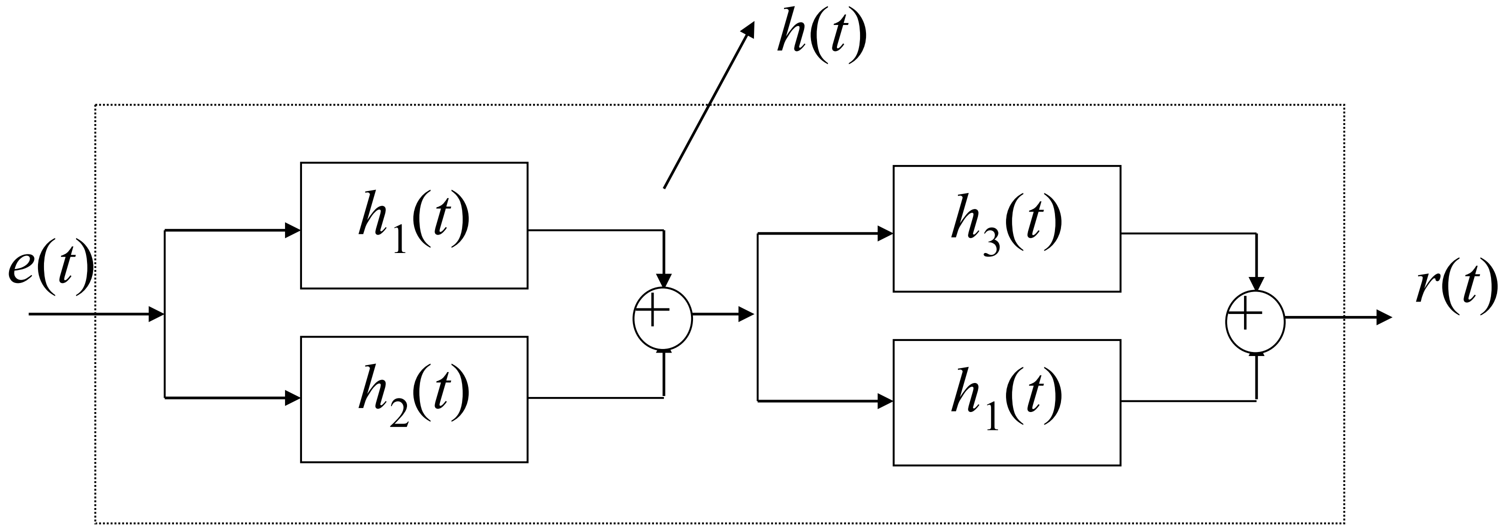


§2.3 卷积、算子

[例4]：已知：

$$h_1(t)=u(t-1) \qquad h_2(t)=\delta(t)-\delta(t-1) \qquad h_3(t)=\delta(t)$$

求：$h(t)$



§ 2.3 卷积、算子

解：

$$h(t)=[h_1(t)+h_2(t)]*[h_1(t)+h_3(t)]$$

$$=h_1(t)*h_1(t)+h_1(t)*h_3(t)+h_2(t)*h_1(t)+h_2(t)*h_3(t)$$

$$=(t-2)u(t-2)+u(t-1)+u(t-1)-u(t-2)+\delta(t)-\delta(t-1)$$

§ 2.4线性常系数差分方程的求解

一．常系数线性差分方程

1．常系数线性差分方程的一般形式

$$a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + \ldots + a_{N-1} y(n-N+1) + a_N y(n-N)$$

$$= b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \cdots + b_{M-1} x(n-M+1) + b_M x(n-M)$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

2．求解方法

①迭代法（缺点：通常不能给出完整解析解；

优点：概念清楚比较简便）

②时域经典法（齐次解+特解）主要适用于$n=-\infty \sim +\infty$都有$x(n)$加入

③零输入、零状态（适用于$n \geq 0$加入）

④变换域法 （Z变换）

§2.4线性常系数差分方程的求解

3．迭代法

例1：$y(n)-ay(n-1)=x(n)$　已知：$y(-1)=0,\ x(n)=\delta(n)$

解：$y(0)=ay(-1)+x(0)=1$　　$y(-1)=0$

$y(1)=ay(0)+x(1)=a$　　$y(-2)=0$

$\cdots\cdots$　　$\cdots\cdots$

$y(n)=a^n$　　$y(-\infty)=0$

故 $y(n)=a^n u(n)$

§2.4线性常系数差分方程的求解

例2: $y(n)-y(n-1)-y(n-2)=0$ 已知: $y(0)=0, y(1)=1$

解:

$$y(n)=y(n-1)+y(n-2)$$

$$\Longrightarrow y(2)=y(1)+y(0)=1$$

$$y(3)=y(2)+y(1)=2$$

$$\cdots\cdots$$

$$\{0,1,1,2,3,5,8,13,\cdots\cdots\}$$

无法给出闭式解集

§2.4线性常系数差分方程的求解

二．时域经典法----齐次解+特解

1．齐次解----自由响应

①齐次方程：$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k)=0$

②特征根

$$y(n)-ay(n-1)=0 \Rightarrow a=\frac{y(n)}{y(n-1)} \Rightarrow y(n)=ca^n$$

一般情况下：令$y=c\alpha^n$代入$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k)=0$

$\sum_{k=0}^{N} a_k c\alpha^{n-k}=0$ 消去c，除以 α^{n-N}

可得 $a_0\alpha^N + a\alpha^{N-1} + \cdots\cdots + a_{N-1}\alpha + a_N = 0$ 特征方程

有N个根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_N$ 特征根

§ 2.4线性常系数差分方程的求解

③齐次解一般形式

i)特征根互不相同的实根

齐次解 $y_h(n)=c_1\alpha^n{}_1+c_2\alpha^n{}_2+\cdots\cdots+c_N\alpha^n{}_N$

连续： $r_h(t)=c_1e^{\alpha_1 t}+c_2e^{\alpha_2 t}+\cdots\cdots+c_Ne^{\alpha_N t}$

ii) α_1 与 α_2 互为共轭 $\alpha_1=A\bullet e^{jB},\alpha_2=A\bullet e^{-jB}$

α_1与α_2 对应的齐次解部分 $=A^n(C_1\cos Bn+C_2\sin Bn)$

（连续：$\alpha_1=A+Bj,\alpha_2=A-Bj$ ）

α_1与α_2对应的齐次解部分 $=e^{At}(C_1\cos Bt+C_2\sin Bt)$

iii) α_1为k重

α_1对应齐次解部分 $=\alpha_1{}^n(C_1+C_2n+C_3n^2+\cdots\cdots+C_kn^{k-1})$

（连续：α_1为k重，齐次解 $=e^{\alpha_1 t}(C_1+C_2t+C_3t^2+\cdots\cdots+C_kt^{k-1})$

§2.4线性常系数差分方程的求解

例3求 $y(n)-y(n-1)-y(n-2)=0$ ，$y(1)=1, y(2)=1$

解： $\alpha^2-\alpha-1=0$ 得$\alpha_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \alpha_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

所以 $y(n)=C_1(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n+C_2(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

$$\begin{cases} 1=C_1\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+C_2\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1=C_1(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^2+C_2(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^2 \end{cases}$$ 推出： $$\begin{cases} C_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ C_2=\dfrac{-1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$y(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

§2.4线性常系数差分方程的求解

例4：求 $y(n)+6y(n-1)+12y(n-2)+8y(n-3)=0$ 的齐次解形式

解：$\alpha^3+6\alpha^2+12\alpha+8=0$

得 $(\alpha+2)^3=0$ $\qquad \alpha=-2$(三重)

得: $y_h(n)=(C_1n^2+C_2n+C_3)\bullet(-2)^n$

§ 2.4线性常系数差分方程的求解

例5：$y(n)-2y(n-1)+2y(n-2)-2y(n-3)+y(n-4)=0$

边界条件为：$y(1)=1, y(2)=0, y(3)=1, y(5)=1$

解：$\alpha^4-2\alpha^3+2\alpha^2-2\alpha+1=0$ 即：$(\alpha-1)^2(\alpha^2+1)=0$

得：$\alpha_1=\alpha_2=1, \alpha_3=j=e^{j\frac{\pi}{2}}, \alpha_4=-j=e^{-j\frac{\pi}{2}}$

所以 $y(n)=(C_1 n+C_2)\bullet 1^n+1^n\bullet(P\cos\frac{n\pi}{2}+Q\sin\frac{n\pi}{2})$

$$\left.\begin{aligned}1&=C_1+C_2+Q\\0&=2C_1+C_2-P\\1&=3C_1+C_2-Q\\1&=5C_1+C_2+Q\end{aligned}\right\}\quad \text{得：}\quad\left\{\begin{aligned}C_1&=0\\C_2&=1\\P&=1\\Q&=0\end{aligned}\right.$$

故 $y(n)=1+\cos\frac{n\pi}{2}$

§2.4线性常系数差分方程的求解

2．特解------强迫响应

将$x(n)$代入右端化简得自由项，由自由项形式和特征根情况决定特解

自由项形式	特征根情况	特解形式 $D(n)$
常数	1不是特征根	A
	1是k重根	An^k
n的p次多项式	1不是特征根	n的p次多项式
	1是k重根	n^k(n的p次多项式)
α^n	α不是特征根	$C\alpha^n$
	α是k重根	$Cn^k\alpha^n$

§2.4线性常系数差分方程的求解

自由项形式	特征根情况	特解形式 $D(n)$
α^n(n的p次多项式)	α 不是特征根	α^n(n的p次多项式)
	α 是k重根	$n^k\alpha^n$(n的p次多项式)
$\alpha^n A_1 \sin bn$ 或 $\alpha^n A_2 \cos bn$	$\alpha e^{\pm jb}$ 不是特征根	$\alpha^n[C_1 \cos bn + C_2 \sin bn]$
	$\alpha e^{\pm jb}$ 是k重根	$\alpha^n n^k[C_1 \cos bn + C_2 \sin bn]$

§2.4线性常系数差分方程的求解

例6：①自由项$=n$，1不是特征根

$$D(n)=A_1n+A_2$$

②自由项$=\cos\frac{n\pi}{2}$，j为特征根

$$D(n)=n[A_1\cos\frac{n\pi}{2}+A_2\sin\frac{n\pi}{2}]$$

③自由项$=(n^2+2n+3)\bullet 2^n$，2为2重根

$$D(n)=n^2(A_1n^2+A_2n+A_3)2^n$$

§2.4线性常系数差分方程的求解

3．完全解

$$y(n)=y_h(n)+D(n)=C_1\alpha_1{}^n+C_2\alpha_2{}^n+\cdots\cdots+C_N\alpha_N{}^n+D(n)$$

边界条件：$y(0), y(1),\cdots\cdots, y(N-1)$

$$y(0)=C_1+C_2+\cdots\cdots+C_N+D(0)$$

$$y(1)=C_1\alpha_1+C_2\alpha_2+\cdots\cdots+C_N\alpha_N+D(1)$$

$$\vdots$$

$$y(N-1)=C_1\alpha_1{}^{N-1}+C_2\alpha_2{}^{N-1}+\cdots\cdots+C_N\alpha_N^{N-1}+D(N-1)$$

$$\begin{pmatrix} y(0)-D(0) \\ y(1)-D(1) \\ \vdots \\ y(N-1)-D(N-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^{N-1} & \alpha_2^{N-1} & \cdots & \alpha_N^{N-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_N \end{pmatrix}$$

得：$\boldsymbol{Y}(k)-\boldsymbol{D}(k)=\boldsymbol{VC}$ $\qquad$ $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{V}^{-1}[\boldsymbol{Y}(k)-\boldsymbol{D}(k)]$

§ 2.4线性常系数差分方程的求解

①例子

例7：第一类型（方程右端无$x(n)$项，即齐次方程）

$$y(n)-3y(n-1)+2y(n-2)=0,\ y(0)=1, y(2)=2$$

解特点：无特解项 $y(n)$的n取值从$-\infty\sim\infty$

$$\alpha^2-3\alpha+2=0 \quad 得\alpha_1=1, \alpha_2=2$$

即：$y(n)=C_1+C_2\bullet 2^n$

$$\begin{cases}1=C_1+C_2\\2=C_1+2C_2\end{cases} \quad 得：\begin{cases}C_1=0\\C_2=1\end{cases}$$

即 $y(n)=2^n$

§2.4线性常系数差分方程的求解

例8：第二类型（方程右端只有$x(n)$项，$x(n)$定义在$-\infty \backsim +\infty$上）

$$y(n)-3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)$$

$$y(0)=1, y(1)=2, x(n)=n$$

解特点：$y(n)$含义从$-\infty \backsim +\infty$

设特解为 $D(n)=(An+B)\bullet n$， 把$D(n)$代入方程左边

$$(An+B)\bullet n-3[A(n-1)+B]\bullet(n-1)+2[A(n-2)+B]\bullet(n-2)=n$$

得：$A=-\frac{1}{2}, B=-\frac{5}{2}$

完全解形式 $y(n)=C_1\bullet 1^n+C_2\bullet 2^n+D(n)$

$$\begin{cases} 1=C_1+C_2 \\ 2=C_1+2C_2-\frac{1}{2}-\frac{5}{2} \end{cases} \quad 得 \quad \begin{cases} C_1=-3 \\ C_2=4 \end{cases}$$

所以 $y(n)=-3\bullet 1^n+4\bullet 2^n+(-\frac{1}{2}n-\frac{5}{2})n$

§ 2.4线性常系数差分方程的求解

例9：第三类型（方程右端只有$x(n)$项, $x(n)$在$n=0$处加入）

$$y(n)-3y(n-1)+2y(n-2)=x(n),\ y(0)=1, y(1)=2, x(n)=2^n u(n)$$

解特点：$y(n): n=0\sim\infty$ | $n=-\infty\sim-1$

$y_h(n): n=0\sim\infty$ | $y_h'(n)=-\infty\sim-1$

$D(n): n=0\sim\infty$ | $D'(n)=0\quad -\infty\sim-1$

用 $y(0)\cdots\cdots y(N-1)$ | $y(-1)\cdots\cdots y(-N)$

$$y(n)=\underbrace{[y_h(n)+D(n)]u(n)}_{n\geq 0\text{时}}+\underbrace{y_h'(n)u(-n-1)}_{n\leq -1\text{时}}$$

§ 2.4线性常系数差分方程的求解

解:当$n\geq 0$时 $y(n)=C_1\bullet 1^n+C_2\bullet 2^n+D(n)$其中$D(n)=A_1\bullet n\bullet 2^n$

把$D(n)$代入方程左端得:$2\bullet A_1\bullet 2^n=2^n$ 解得:$A_1=0.5$

故:

$$y(n)=C_1\bullet 1^n+C_2\bullet 2^n+\frac{1}{2}n\bullet 2^n$$

$$\begin{cases}1=C_1+C_2\\ 2=C_1+2C_2+2\end{cases} \quad 得 \quad \begin{cases}C_1=2\\ C_2=-1\end{cases}$$

当$n\leq -1$时 $y(n)=C_1\bullet 1^n+C_2\bullet 2^n$, $y(-1)=\frac{1}{2}, y(-2)=\frac{1}{4}$,

$$\begin{cases}\frac{1}{2}=C_1+C_2\bullet 2^{-1}\\ \frac{1}{4}=C_1+2^{-2}\bullet C_2\end{cases} \quad 得 \quad \begin{cases}C_1=0\\ C_2=1\end{cases} \quad 故 \quad y(n)=2^n$$

所以 $y(n)=2^n u(-n-1)+[2-2^n+\frac{1}{2}\bullet n.\bullet 2^n]u(n)$

§ 2.4线性常系数差分方程的求解

例10:第四类型(方程右端含有$x(n)$,$x(n-k)$系统, $x(n)$在 $-\infty \sim \infty$)

$$y(n)-3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)-x(n-1), x(n)=3^n, y(0)=1, y(1)=2$$

解: 同第二类型

$$\text{自由项}=3^n-3^{n-1}=\frac{2}{3}\bullet 3^n, \quad D(n)=C_3\bullet 3^n$$

$$(C_3-C_3+\frac{2}{9}C_3)\bullet 3^n=\frac{2}{3}\bullet 3^n \qquad \text{得}C_3=3$$

$$y(n)=C_1\bullet 1^n+C_2\bullet 2^n+D(n)=C_1\bullet 1^n+C_2\bullet 2^n+3^{n+1}$$

$$\begin{cases}1=C_1+C_2+3\\2=C_1+2C_2+27\end{cases} \quad \text{得} \quad \begin{cases}C_1=21\\C_2=-23\end{cases}$$

所以 $y(n)=21-23\bullet 2^n+3^{n+1}$

§2.4线性常系数差分方程的求解

例11: 第五类型(方程右端含有$x(n)$, $x(n-k)$系统, $x(n)$在$n=0$处加入)

$$y(n)-3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)-x(n-5)$$

$$x(n)=3^n u(n), y(0)=1, y(1)=2$$

解: ①当n≤-1时 $y(n)=C_1 \bullet 1^n + C_2 \bullet 2^n$ 用$y(-1), y(-2)$

②当0≤n≤4 $x(n)=3^n$ 用 $y(0), y(1)$

$$y(n)=C_1 \bullet 1^n + C_2 \bullet 2^n + D(n) \qquad D(n)=C_3 \bullet 3^n$$

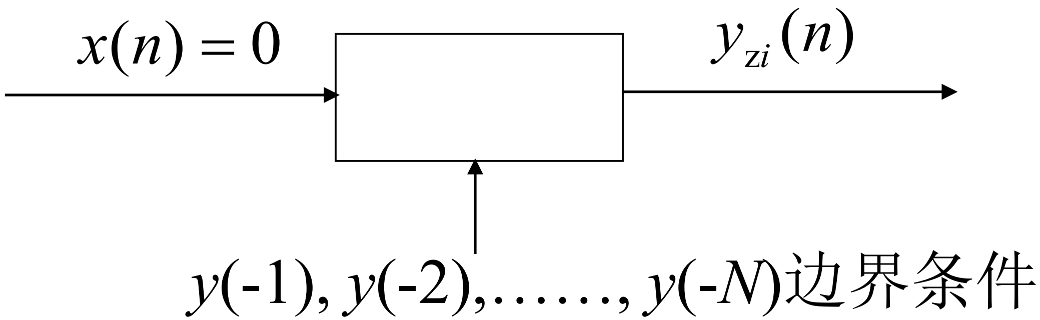
③当n≥5时 , $x(n)=3^n-\dfrac{3^n}{3^5}$ 用$y(5), y(6)$

$$y(n)=C_1 \bullet 1^n + C_2 \bullet 2^n + D(n) \qquad D(n)=C_3 \bullet 3^n$$

§ 2.4线性常系数差分方程的求解

三. 零输入响应、零状态响应(适用于求解 $x(n)$, $n=0$ 时刻加入)

1.零输入响应

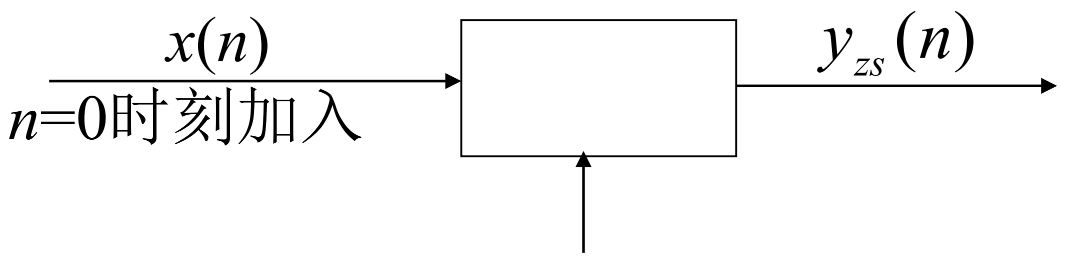


$$y_{Zi}(n)=C_{Zi1}\bullet\alpha_1^{\,n}+C_{Zi2}\bullet\alpha_2^{\,n}+\cdots\cdots+C_{ZiN}\bullet\alpha_N^{\,n}$$

作用范围 $n=-\infty\sim\ +\infty$

§ 2.4线性常系数差分方程的求解

2.零状态响应



$$y(-1)=y(-2)=\ldots\ldots=y(-N)=0$$

$$y_{zs}(n)=C_{zs1}\bullet\alpha_1^{\ n}+C_{zs2}\bullet\alpha_2^{\ n}+\cdots\cdots+C_{zsN}\bullet\alpha_N^{\ n}+D(n)$$

作用范围 $n=0\ \sim +\infty$

§2.4线性常系数差分方程的求解

3.例子:

例12 第一类型(不含$x(n)$项,只含零输入响应=齐次解)

例13 第二类型(只含$x(n)$项, $x(n)$在n=0时刻加入)

$$y(n)-0.9y(n-1)=0.05u(n),\ y(-1)=1$$

解: 零输入 $y_{zi}(n)=C_{zi}\cdot 0.9^n$

由$y(-1)=1$得$C_{zi}=0.9$,所以$y_{zi}(n)=0.9^{n+1}$

零状态 $y_{zs}(n)=C_{zs}\cdot 0.9^n+D(n)$

$D(n)=A$,由$A-0.9A=0.05$ 得$A=0.5$

故$y_{zs}(n)=C_{zs}\cdot 0.9^n+0.5$

由$y(-1)=0$ 推出 $C_{zs}\cdot\dfrac{1}{0.9}=-0.5,C_{zs}=-0.45$

所以 $y(n)=0.9^{n+1}+(-0.45\bullet 0.9^n+0.5)u(n)$

§ 2.4线性常系数差分方程的求解

例14: 第五类型(方程右端含有$x(n)$,$x(n-k)$系统, $x(n)$在$n=0$处加入)

$$y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=x(n)-3x(n-2), x(n)=u(n), y(-1)=\frac{5}{6}, y(-2)=\frac{13}{36}$$

解: 零输入 $y_{zi}(n)=C_1\bullet 2^n+C_2\bullet 3^n$

$$\begin{cases}\dfrac{5}{6}=C_1\bullet\dfrac{1}{2}+C_2\bullet\dfrac{1}{3_{n}}\\[2ex]\dfrac{13}{36}=C_1\bullet\dfrac{1}{4}+C_2\bullet\dfrac{1}{9}\end{cases}$$

解得 $C_1=1, C_2=1$

§2.4线性常系数差分方程的求解

单独对右边 $x(n)$项求零状态 $y_{zs1}(n)$	然后单独对右边 $-3x(n-2)$ 项求零状态 $-3y_{zs1}(n-2)$

$$y_{zs1}(n) = C_1 \bullet 2^n + C_2 \bullet 3^n + D(n) \qquad D(n) = \frac{1}{2}$$

$$y_{zs1}(n) = C_1 \bullet 2^n + C_2 \bullet 3^n + \frac{1}{2}$$ 由已知条件可得:

$$\begin{cases} 0 = C_1 \bullet \dfrac{1}{2} + C_2 \bullet \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} \\ 0 = C_1 \bullet \dfrac{1}{4} + C_2 \bullet \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 = -4 \\ C_2 = -\dfrac{9}{2} \end{cases}$$

可求出$y_{zs1}(n)$

最后得: $y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs1}(n)u(n) - 3y_{zs1}(n-2)u(n-2)$

§ 2.4线性常系数差分方程的求解

总结:

1.第一类型(齐次方程)
初始条件任意给定

$\begin{cases} \text{齐次解+特解项(只含齐次解)} \\ \text{零输入零状态(只含零输入响应)} \end{cases}$

2.第二类型(右端只含$x(n)$一项, $n=-\infty\sim+\infty$)

第四类型(右端含有$x(n)$, $x(n-k)$项, $n=-\infty\sim+\infty$)

只能用齐次解+特解项法求解, 初始条件任意给定

§2.4线性常系数差分方程的求解

3.第三类型(右端只含$x(n)$一项, $n=0$时刻加入)

齐次解+特解项(需分n<0和n≥0两种情况

$$y(n)=y_{h1}(n)u(-n-1)\text{, 在n<0}$$

$$y(n)=[y_{h2}(n)+D(n)]u(n)\text{,在n≥0)}$$

零输入+零状态(推荐使用)

4.第五类型(右端含有$x(n)$, $x(n-k)$系统, $x(n)$在$n=0$处加入)

齐次解+特解项(需分n<0, $A_1\le n<A_2$, $A_2\le n<A_3$各种情况)

零输入+零状态(推荐使用)

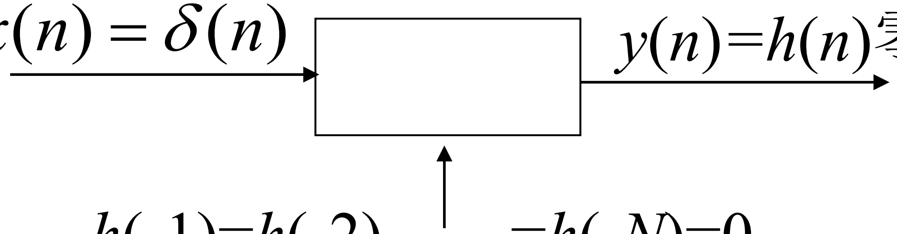
$$y(n)=y_{zi}(n)+\sum_{r=0}^{M}b_r y_{zs_1}(n-r)u(n-r)$$

§ 2.5单位样值响应,卷积和反卷积

一.单位样值响应

1.定义

$x(n)=\delta(n)$ $\quad$ $y(n)=h(n)$零状态响应



$h(-1)=h(-2)\ldots\ldots=h(-N)=0$

$y(-1)=y(-2)\ldots\ldots=y(-N)=0$

形式:齐次解形式, $n<0$时$h(n)=0$(因果系统)

§ 2.5单位样值响应,卷积和反卷积

2.迭代法

例1: $y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)=x(n)$ 求$h(n)$

解:

$$h(0)-\frac{1}{2}h(-1)=\delta(0)$$ 得$h(0)=1$

$$h(1)=\frac{1}{2}h(0)+\delta(1)=\frac{1}{2}$$

$$h(n)=(\frac{1}{2})^n \quad (n>0)$$

$h(-1)=0$

$h(-2)=0$

$\vdots$

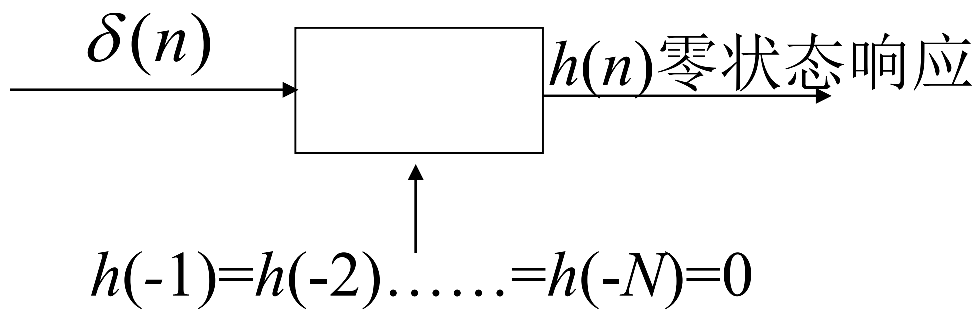
$h(-\infty)=0$

故 $$h(n)=(\frac{1}{2})^n u(n)$$

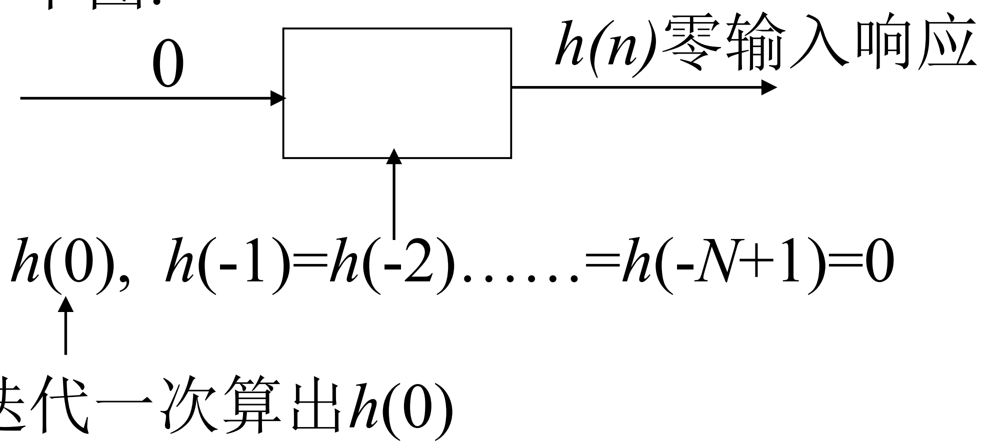
§ 2.5单位样值响应,卷积和反卷积

3.零状态响应转零输入响应法

1.定义



等价于下图:



§ 2.5单位样值响应,卷积和反卷积

例2: 第二类型 [$x(n)=\delta(n)$,右端只有项$x(n)$]

$$y(n)-3y(n-1)+3y(n-2)-y(n-3)=x(n)$$

求$h(n)$

解: (1)特征根: $\alpha^3-3\alpha^2+3\alpha-2=0$,即 $(\alpha-1)^3=0$ 所以 $\alpha=1$ (三重)

(2)齐次解形式$h(n)=C_1n^2+C_2n+C_3$

(3)初始条件 $h(-1)=h(-2)=h(-3)=0$

得出$h(0)=1, h(-1)=h(-2)=0$

所以 $\begin{cases} C_3=1 \\ C_1-C_2+C_3=0 \\ 4C_1-2C_2+C_3=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} C_3=1 \\ C_1=\dfrac{1}{2} \\ C_2=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

(4) $h(n)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}(n^2+3n+2), n\geq 0 \\ 0 \qquad n<0 \end{cases}$

§ 2.5单位样值响应,卷积和反卷积

例3: 第五类型($x(n)=\delta(n)$,方程右端含有$x(n)$,$x(n-k)$等多项)

求解方法:先求右端只含$x(n)$ 一项的单位样值响应，再利用线性时不变特性写出完整的单位样值响应.

即: $a_0 y(n)+a_1 y(n-1)+\cdots\cdots+a_{N-1} y(n-N+1)+a_N y(n-N)$
$=b_0 x(n)+b_1 x(n-1)+\cdots\cdots+b_{M-1} x(n-M+1)+b_M x(n-M)$

先求 $a_0 y(n)+a_1 y(n-1)+\cdots\cdots+a_{N-1} y(n-N+1)+a_N y(n-N)=x(n)$ 的 $h_1(n)$ 则

$$h(n)=b_0 h_1(n)+b_1 h_1(n-1)+\cdots\cdots+b_{M-1} h_1(n-M+1)+b_M h_1(n-M)$$

$$y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=x(n)-3x(n-2)$$

§ 2.5单位样值响应,卷积和反卷积

解: (1)齐次解形式 $C_1 \bullet 2^n + C_2 \bullet 3^n$

(2)若右端作用的只为$x(n)$ 则$h_1(n)$由$h_1(0)=1, h_1(-1)=0$求出

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 0 = \dfrac{1}{3}C_1 + \dfrac{1}{2}C_2 \end{cases} \quad 得 \begin{cases} C_1 = 3 \\ C_2 = -2 \end{cases}$$

故$h_1(n) = \begin{cases} 3^{n+1} - 2^{n+1} & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} = (3^{n+1} - 2^{n+1})u(n)$

(3)只考虑$-3x(n-2)$项

$$h_2(n) = -3h_1(n-2) = -3(3^{n-1} - 2^{n-1})u(n-2)$$

(4)整体

$$h(n) = h_1(n) + h_2(n) = (3^{n+1} - 2^{n+1})u(n) - 3(3^{n-1} - 2^{n-1})u(n-2)$$

§2.5单位样值响应,卷积和反卷积

4.因果系统充要条件

$$h(n)=0,(n<0) \Longleftrightarrow h(n)=h(n)u(n)$$

方程特点:$y(n)$由$x(n)$及$x(n-1),x(n-2)$, 决定

离散时间系统应用不局限于因果系统:原因是可以先存储再处理.

如:中值滤波器

信号	3	5	7	1	2	8	5	3	6	4	2
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
处理结果	3	5	5	2	2	5	5	5	5	4	2

§ 2.5单位样值响应,卷积和反卷积

5. 稳定系统充要条件

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| \le M \quad \text{即} h(n) \text{绝对可和}$$

6.稳定因果充要条件

$$\begin{cases} h(n) = h(n)u(n) \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| \le M \end{cases}$$

§ 2.5单位样值响应,卷积和反卷积

例4: $h(n)=\delta(n-5)$ 因果 稳定

$2u(n)$ 因果 不稳定

$2^n u(n)$ 因果 不稳定

$2^n[u(n)-u(n-5)]$ 因果 稳定

$0.5^n u(-n)$ 非因果 不稳定

$\dfrac{1}{n!}u(n)$ 因果 稳定

§ 2.5单位样值响应,卷积和反卷积

7.单位样值响应与单位阶跃响$g(n)$应关系

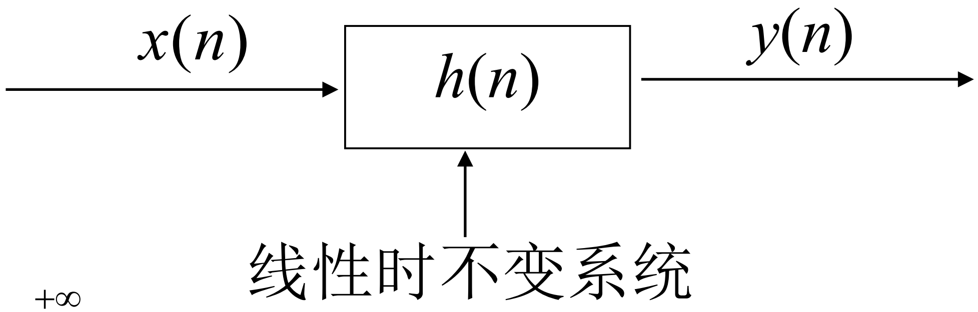
$$\delta(n)=u(n)-u(n-1)\Rightarrow h(n)=\nabla g(n)=g(n)-g(n-1)$$

$$u(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k)\Rightarrow g(n)=\sum_{k=0}^{\infty}h(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{n}h(k)$$

§ 2.5单位样值响应,卷积和反卷积

二. 卷积(卷积和)

1.卷积和定义



$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)\delta(n-m) \qquad \delta(n)\longrightarrow h(n)$$

$$\Rightarrow \delta(n-m)\longrightarrow h(n-m)\Rightarrow x(m)\delta(n-m)\longrightarrow x(m)h(n-m)$$

$$\Rightarrow x(n)\longrightarrow y(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)h(n-m)=x(n)*h(n)$$

$$x_1(n)*x_2(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x_1(m)x_2(n-m)$$

§ 2.5单位样值响应,卷积和反卷积

2.卷积和的性质

① $x(n)*\delta(n)=x(n)$

②$x_1(n)*x_2(n)=x_2(n)*x_1(n)$

③若$x_1(n)*x_2(n),x_2(n)*x_3(n),\ x_1(n)*x_3(n)$ 均存在,则:

$$[x_1(n)*x_2(n)]*x_3(n)=x_1(n)*[x_2(n)*x_3(n)]$$

$$x_1(n)*[x_2(n)+x_3(n)]=x_1(n)*x_2(n)+x_1(n)*x_3(n)$$

④$x_1(n)=x_1(n)u(n),\ x_2(n)=x_2(n)u(n),$

$$\Longrightarrow\ x_1(n)*x_2(n)=x_3(n)=x_3(n)u(n)$$

§2.5单位样值响应,卷积和反卷积

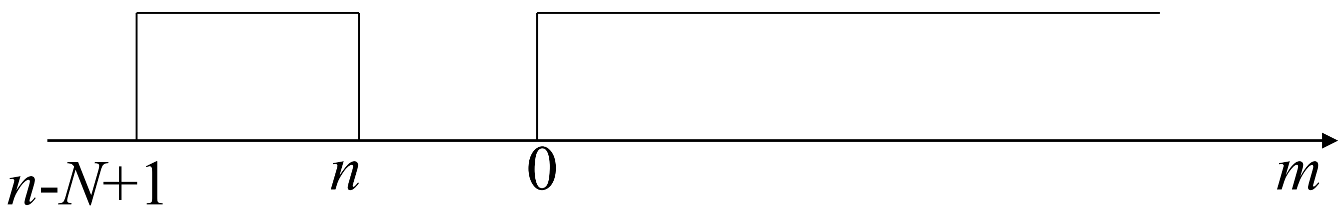
3. 卷积和的求法

① 直接法

② 对位相乘求和法(适用于两个有限序列)

§ 2.5单位样值响应,卷积和反卷积

例5: $h(n)=a^{n}u(n)$, $x(n)=u(n)-u(n-N)$



$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}h(m)x(n-m)=\begin{cases}0 & n<0\\ \sum_{m=0}^{n}a^{m} & 0\le n\le N-1\\ \sum_{m=n-N+1}^{n}a^{m} & n\ge N\end{cases}=\begin{cases}0 & n<0\\ \dfrac{1-a^{m}}{1-a} & 0\le n\le N-1\\ a^{n-N+1}\dfrac{1-a^{N}}{1-a} & n\ge N\end{cases}$$

§2.5单位样值响应,卷积和反卷积

例6: $x_1(n)=\{2,\underset{\uparrow}{1},4,1\}$, $x_2(n)=\{\underset{\uparrow}{3},1,5\}$　求 $x_3(n)=x_1(n)*x_2(n)$

解:

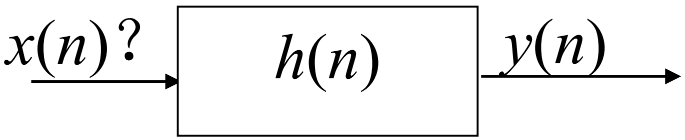
$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & 2 & 1 & 4 & 1 \\
 & & & 3 & 1 & 5 \\
\hline
 & & 10 & 5 & 20 & 5 \\
 & 2 & 1 & 4 & 1 & \\
6 & 3 & 12 & 3 & & \\
\hline
6 & \underset{\uparrow}{5} & 23 & 12 & 21 & 5
\end{array}
$$

两个有限长序列$x_1(n)$与$x_2(n)$的长度分别为L_1和L_2，左端起始位置分别为k_1和k_2，则两序列卷积后的序列长度和左端起始位置分别为L_1+L_2-1, k_1+k_2

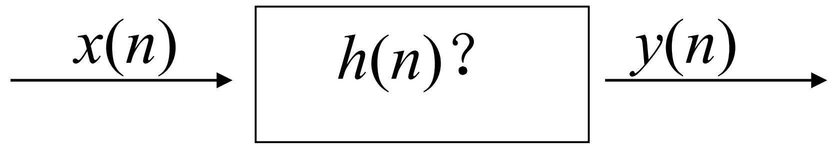
§ 2.5单位样值响应,卷积和反卷积

三. 反卷积

1.两种反卷积



信号检测



系统辨识

2.求反卷积的一般表达式

$$h(n)=h(n)u(n),\quad x(n)=x(n)u(n)$$

$$y(n)=\sum_{m=0}^{n}x(m)h(n-m)$$

§ 2.5单位样值响应,卷积和反卷积

①信号检测

$$\begin{pmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(0) & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ h(1) & h(0) & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ h(n) & h(n-1) & h(n-2) & \cdots & h(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(n) \end{pmatrix}$$

$$x(0) = y(0) / h(0)$$

$$x(1) = [y(1) - x(0)h(1)] / h(0)$$

$$x(2) = [y(2) - x(0)h(2) - x(1)h(1)] / h(0)$$

$$\cdots\cdots$$

$$x(n) = [y(n) - \sum_{m=0}^{n-1} x(m)h(n-m)] / h(0)$$

§ 2.5单位样值响应,卷积和反卷积

② 系统辨识

$$y(n)=\sum_{m=0}^{n}h(m)x(n-m)$$

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ x(1) & x(0) & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ x(n) & x(n-1) & x(n-2) & \cdots & x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(n) \end{bmatrix}$$

$$h(0)=y(0)/x(0)$$

$$h(1)=[y(1)-h(0)x(1)]/x(0)$$

$$h(2)=[y(2)-h(0)x(2)-h(1)x(1)]/x(0)$$

$$\cdots\cdots$$

$$h(n)=[y(n)-\sum_{m=0}^{n-1}h(m)x(n-m)]/x(0)$$

§2.5单位样值响应,卷积和反卷积

例7: $x(n)=\delta(n)+\frac{1}{2}\delta(n-1)$, $y(n)=(\frac{1}{2})^n u(n)$,求$h(n)$

解: $h(0)=y(0)/x(0)=1$

$$h(1)=[y(1)-h(0)x(1)]/x(0)=(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})/1=0$$

$$h(2)=[y(2)-h(0)x(2)-h(1)x(1)]/x(0)=\frac{1}{4}$$

$$h(3)=0$$

$$h(4)=\frac{1}{16}$$

$$h(n)=\begin{cases}0 & n=1,3,5,\cdots\cdots \\ (\frac{1}{2})^n & n=0,2,4,6,\cdots\cdots\end{cases}$$

第3章 信号流图

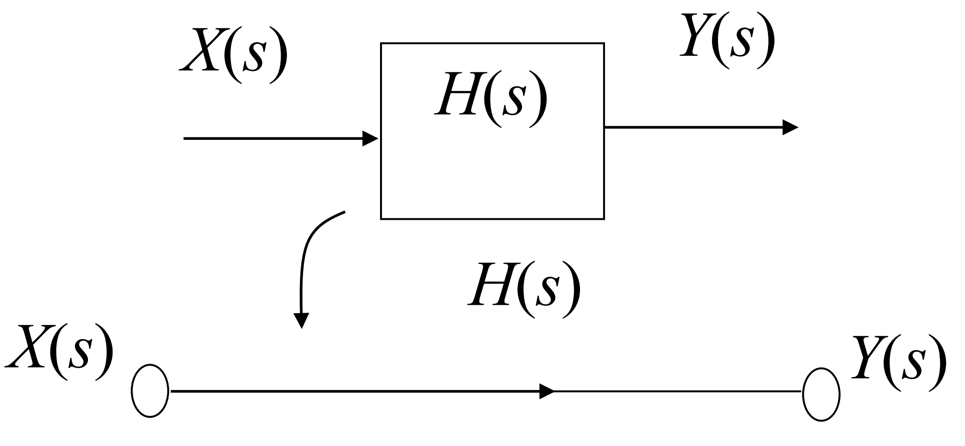
§3.1 信号流图

一、基本术语

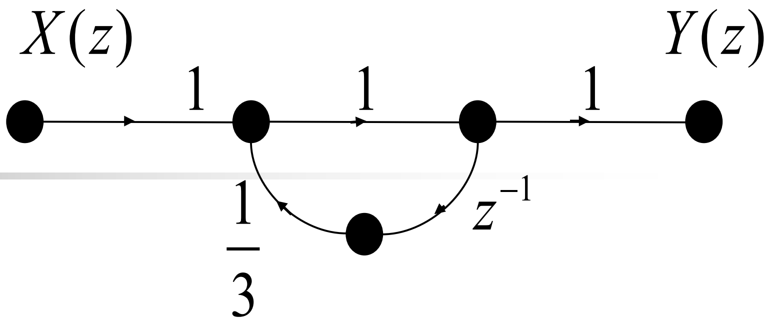
1. 概述

系统框图→系统的信号流图；

信号流图：用一些点和支路来描述系统，进一步简化系统的描述方法。



§ 3.1 信号流图



2．术语

（1）**结点**：表示系统中变量或信号的点；

（2）**转移函数**：两个结点之间的增益；

（3）**支路**：连接两个结点之间的定向线段；

（4）**输入结点或源点**：只有输出支路的结点，
它对应的是自变量（输入信号）；

（5）**输出结点或阱点**：只有输入支路的结点，
它对应的是因变量（输出信号）；

（6）**混合结点**：既有输入支路又有输出支路的结点；

§3.1 信号流图

（7）**通路：** 沿支路箭头方向通过各相连支路的途径（不允许有相反方向支路存在）；

（8）**开通路：** 通路与任一结点相交不多于一次；

（9）**闭通路：** 如果通路的终点就是通路的起点，并且与任何其他结点相交不多于一次，又称为环路；

（10）**环路增益：** 环路中各支路转移函数的乘积；

（11）**不接触环路：** 两环路之间没有任何公共结点；

（12）**前向通路：** 从输入结点（源点）到输出结点（阱点）方向的通路上，通过任何结点不多于一次的全部路径；

（13）**前向通路增益：** 前向通路中，各支路转移函数的乘积。

§3.1 信号流图

二、信号流图性质

1．支路：表示了一个信号与另一个信号的函数关系，
信号只能沿着支路上的箭头方向通过；

2．结点：可以把所有输入支路上的信号叠加，并把总和
信号传送到所有输出支路；

3．混合结点→输出结点：具有输入和输出支路的混合结点，
通过增加一个具有单位传输的支路，
可以把它变成输出结点；

4．给定系统，信号流图不唯一；
同一系统的方程可表示成不同形式

5．流图转置：转置后，其转移函数保持不变；
转置就是把流图中的各支路的信号传输方向给以调转，
同时把输入输出结点对换。

§ 3.1 信号流图

例1：系统模型为 $\frac{d}{dt}y(t)+a_0y(t)=b_1\frac{d}{dt}x(t)+b_0x(t)$

试画出它的信号流图。

解：利用算子符号，以p表示微分，$\frac{1}{p}$表示积分，则

$$(p+a_0)y(t)=(b_1p+b_0)x(t)$$

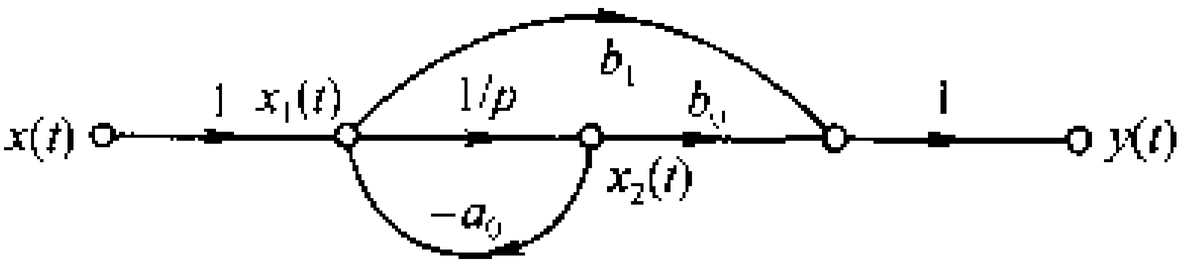
解得

$$y(t)=\frac{b_1}{1+\frac{a_0}{p}}x(t)+\frac{\frac{b_0}{p}}{1+\frac{a_0}{p}}x(t),$$ 按照此式画出信号流图如（a）所示。

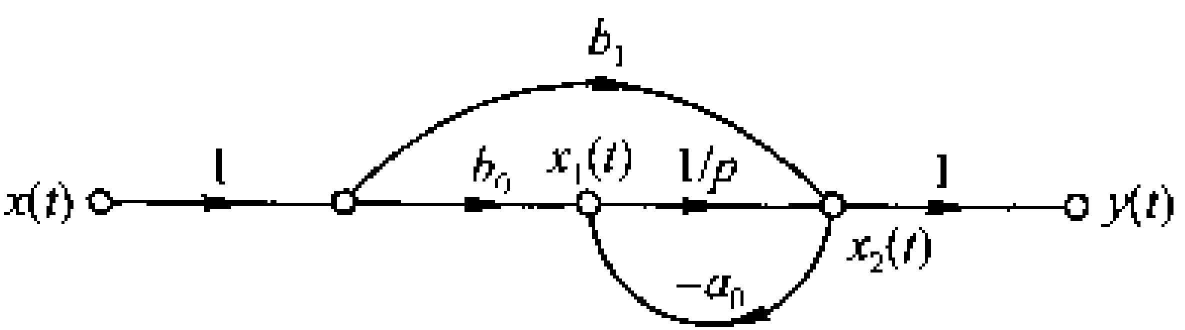
另外

$$y(t)=b_1x(t)+\frac{1}{p}[b_0x(t)-a_0y(t)],$$ 按照此式画出信号流图如（b）所示。

§ 3.1 信号流图



(a)



(b)

§3.1 信号流图

三、信号流图的代数运算规则

①只有一个输入支路的结点值等于输入信号乘以支路增益；

②支路串联的化简：串联支路总增益=各支路增益乘积，

串联支路可合并为单一支路

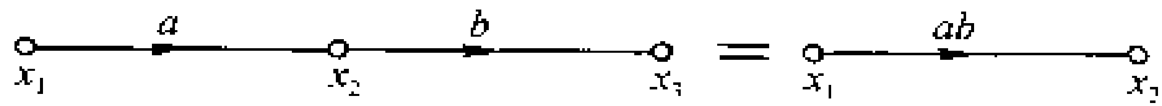
①支路并联的化简并联相加合并为单一支路；

②混合结点的消除：可以图式方式消除；

③环路消除；

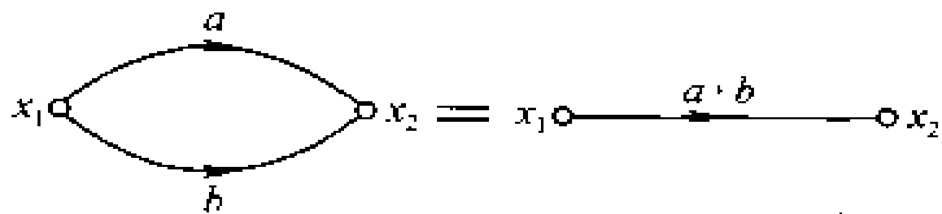
x_1
a
x_2
$x_2 = ax$

(a)



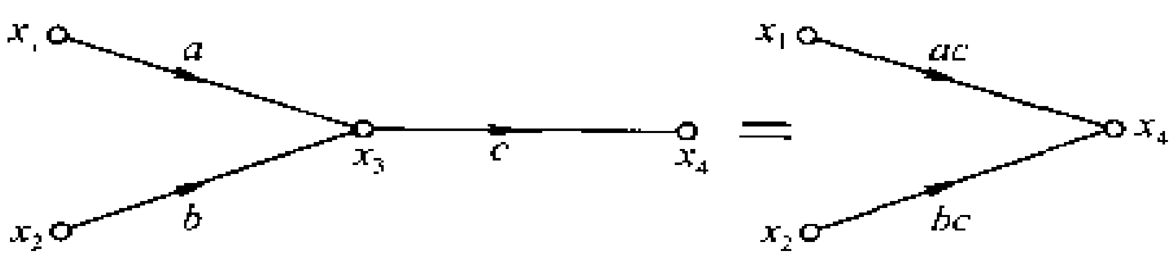
a
b
x_1
x_2
x_3
ab
x_1
x_2

(b)



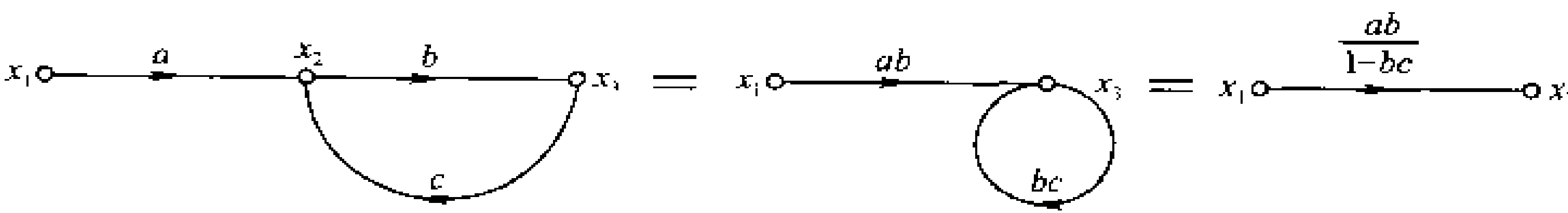
a
x_1
x_2
b
$a+b$
x_1
x_2

(c)



x_1
a
x_3
c
x_4
x_2
b
x_1
ac
x_4
x_2
bc

(d)



x_1
a
x_2
b
x_3
c
x_1
ab
x_3
bc
x_1
$\frac{ab}{1-bc}$
x_3

(e)

§3.1 信号流图

四、梅森（Mason）公式

梅森公式形式为 $H=\dfrac{1}{\Delta}\sum_{k}g_k\Delta_k$

式中：Δ——流图的特征行列式

$$\Delta=1-(\text{所有不同环路的增益之和})+(\text{每两个互不接触环路增益之和})$$

$$-(\text{每三个互不接触环路增益之和})+\cdots$$

$$=1-\sum_{a}L_a+\sum_{b,c}L_bL_c-\sum_{d,e,f}L_dL_eL_f+\cdots$$

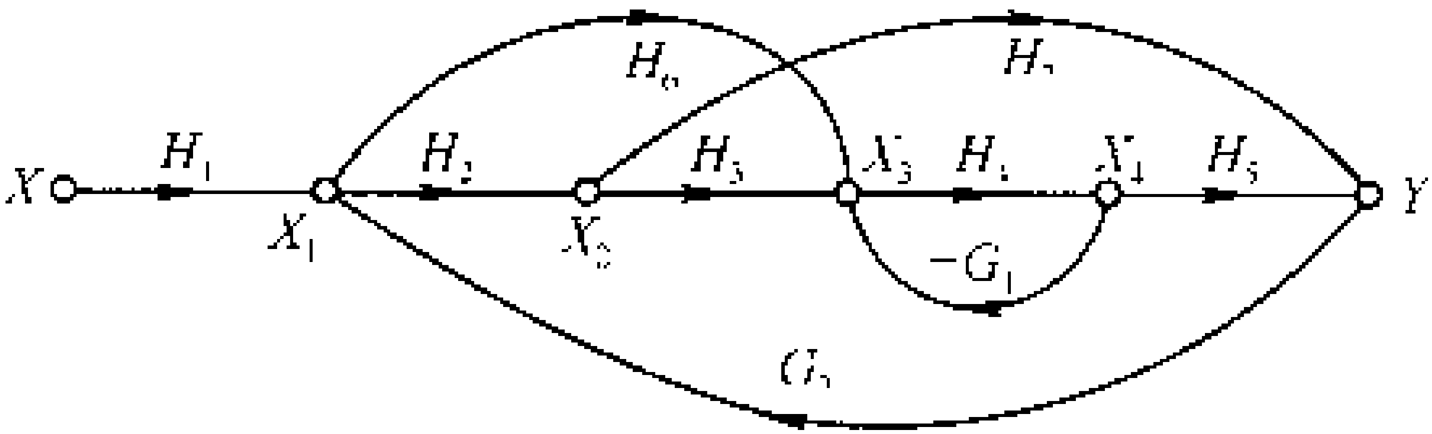
k——表示有源点到阱点之间的第 k 条前向通路的标号

g_k——表示有源点到阱点之间的第 k 条前向通路的增益

Δ_k——称为对于第k条前向通路特征行列式的余子式；
它是除去与第k条前向通路相接触的环路外，
余下的特征行列式。

§ 3.1 信号流图

例2：求图示信号流图的转移函数



§ 3.1 信号流图

解：（1）先求Δ

a）环路：

$$L_1 = (X_3 \to X_4 \to X_3) = -H_4 G_1$$
$$L_2 = (X_2 \to Y \to X_1 \to X_2) = -H_7 G_2 H_2$$
$$L_3 = (X_1 \to X_3 \to X_4 \to Y \to X_1) = -H_6 H_4 H_5 G_2$$
$$L_4 = (X_1 \to X_2 \to X_3 \to X_4 \to Y \to X_1) = -H_2 H_3 H_4 H_5 G_2$$

b）两两不接触环路

$$L_1 \cdot L_2 = H_2 H_4 H_7 G_1 G_2$$

由此得出

$$\Delta = 1 + (H_4 G_1 + H_7 G_2 H_2 + H_6 H_4 H_5 G_2 + H_2 H_3 H_4 H_5 G_2) + H_2 H_4 H_7 G_1 G_2$$

§ 3.1 信号流图

（2）前向通路：3条

第一条：$X \to X_1 \to X_2 \to X_3 \to X_4 \to Y$

$$g_1 = H_1 H_2 H_3 H_4 H_5$$

没有与第一条通路不接触的环路，所以 $\Delta_1 = 1$

第二条：$X \to X_1 \to X_3 \to X_4 \to Y$

$$g_2 = H_1 H_6 H_4 H_5$$

没有与第二条通路不接触的环路，所以 $\Delta_2 = 1$

第三条：$X \to X_2 \to Y$

$$g_2 = H_1 H_2 H_7$$

与第三条通路不接触的环路是 L_1 所以 $\Delta_3 = 1 + H_4 G_1$

§3.1 信号流图

（3）最后得到转移函数为

$$H=\frac{Y}{X}$$

$$=\frac{H_1H_2H_3H_4H_5+H_1H_6H_4H_5+H_1H_2H_7(1+H_4G_1)}{1+(H_4G_1+H_7G_2H_2+H_6H_4H_5G_2+H_2H_3H_4H_5G_2)+H_2H_4H_7G_1G_2}$$

§3.2系统函数零极点∽时域特性和稳定性

一、系统函数$H(s)$零极点与$h(t)$波形关系

1. 系统函数零极点概念

①分母多项式之根 $\rightarrow$ 极点

②分子多项式之根 $\rightarrow$ 零点

③阶次 $\lim\limits_{s\to p_1} H(s)=\infty$，$(s-p_1)H(s)|_{s=p_1}$=有限值 $\rightarrow$ 一阶

$(s-p_1)^k H(s)|_{s=p_1}$直到$k=n$才为有限值 $\rightarrow$ n阶

④ ∞ 处　分母次数 > 分子次数 则为零点，

阶次为分母次数－分子次数;

分母次数 < 分子次数 则为极点，

阶次为分子次数－分母次数

⑤ 零极点图中，$\times$表示极点，$\circ$表示零点

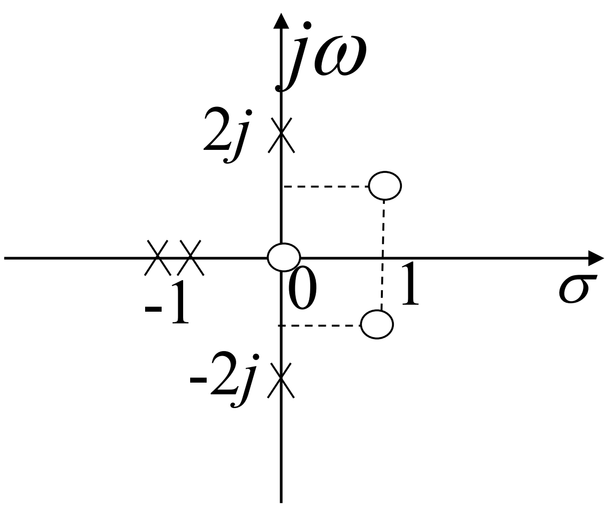
§3.2系统函数零极点∽时域特性和稳定性

[例1]：① $H(s)=\dfrac{s[(s-1)^2+1]}{(s+1)^2(s^2+4)}$

解：①极点：$s=-1$（二阶）$s=2j$（一阶） $s=-2j$（一阶）

零点：$s=0$（一阶） $s=1+j$（一阶）$s=1-j$（一阶）

$s=\infty$（一阶）

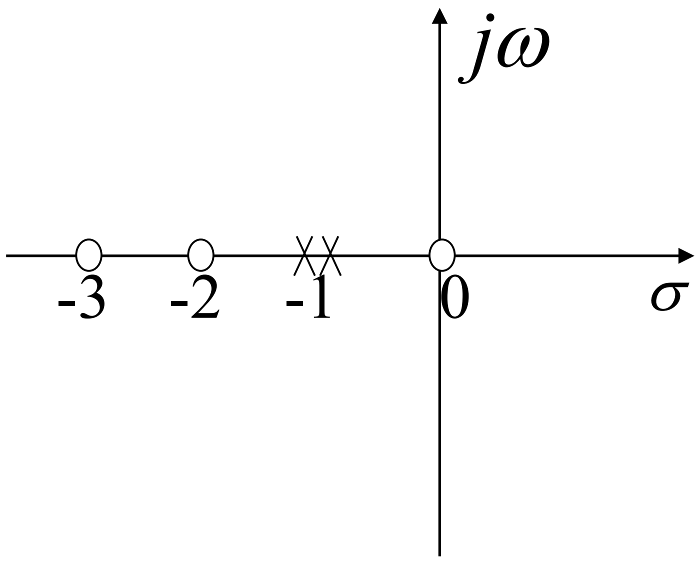


§3.2系统函数零极点∽时域特性和稳定性

[例1]： ② $H(s)=\dfrac{s(s+2)(s+3)}{(s+1)^2}$

解： ②极点：$s=-1$（二阶） $s=\infty$（一阶）

零点： $s=0$（一阶） $s=-2$（一阶） $s=-3$（一阶）

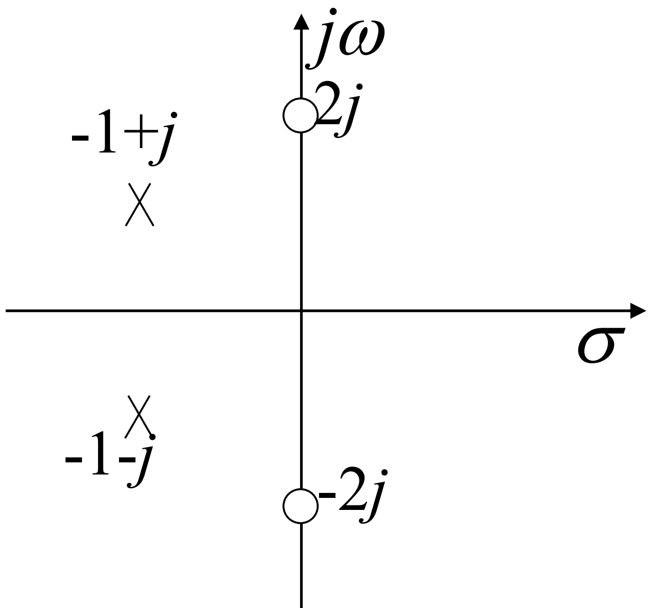


§3.2系统函数零极点∽时域特性和稳定性

[例1]： ③ $H(s)=\dfrac{s^2+4}{(s+1)^2+1}$

解： ③极点：$s=-1+j$（一阶） $s=-1-j$（一阶）

零点： $s=2j$（一阶） $s=-2j$（一阶）



§3.2系统函数零极点∽时域特性和稳定性

2. $H(s)$极点与$h(t)$波形特征关系

①
$$H(s)=\frac{K\sum_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

设 $\begin{cases} p_1 \neq p_2 \neq \ldots \neq p_n \text{ 则：} \\ m < n \end{cases}$

$$H(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{s-p_i} \Rightarrow h(t)=\sum_{i=1}^{n}h_i(t)=\sum_{i=1}^{n}k_i e^{P_i t}$$

故： $p_i \rightarrow e^{p_i t}$

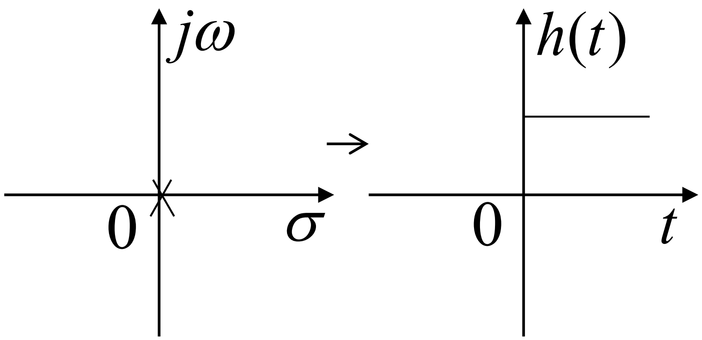
若 p_i 为k阶极点，则

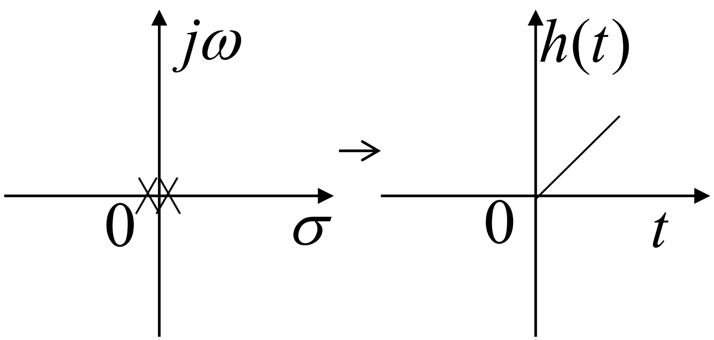
$$p_i \rightarrow \left[K_{i1}t^{k-1}+K_{i2}t^{k-2}+\cdots+K_{i(k-1)}t+K_{ik}\right]e^{p_i t}$$

§3.2系统函数零极点∽时域特性和稳定性

②典型情况

i) $p_i = 0$（一阶）　　　　$p_i = 0$（二阶）



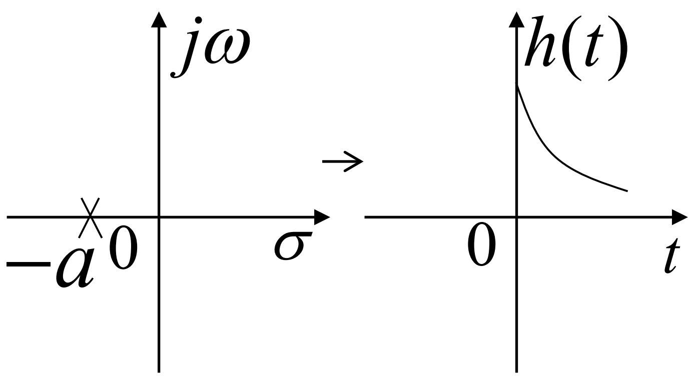


$$\frac{1}{s} \to h(t) = u(t)$$

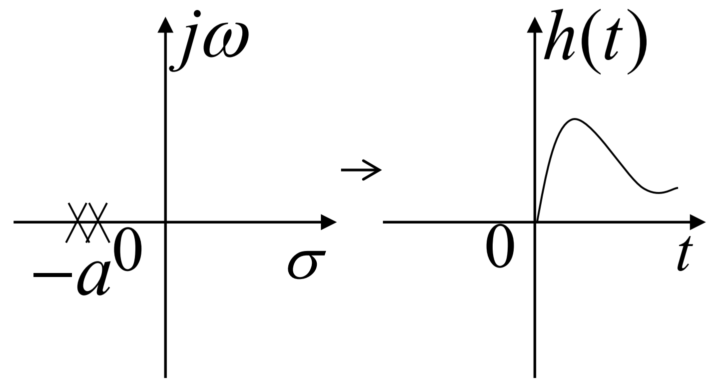
$$\frac{1}{s^2} \to h(t) = tu(t)$$

§3.2系统函数零极点∽时域特性和稳定性

ii) $p_i < 0$（实一阶）　　　　$p_i < 0$ (实二阶)



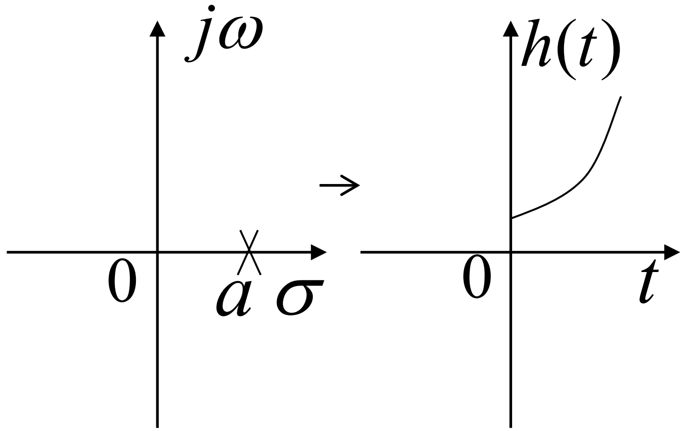
$$\frac{1}{s+a} \to e^{-at}u(t)$$

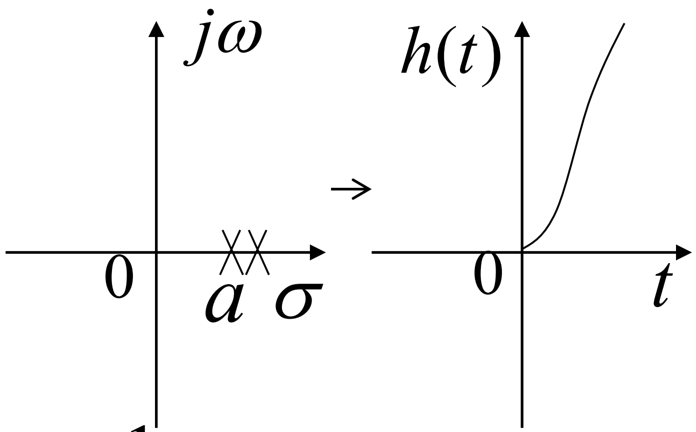


$$\frac{1}{(s+a)^2} \to te^{-at}u(t)$$

§ 3.2系统函数零极点∽时域特性和稳定性

iii) $p_i > 0$（实一阶） $p_i > 0$ (实二阶)



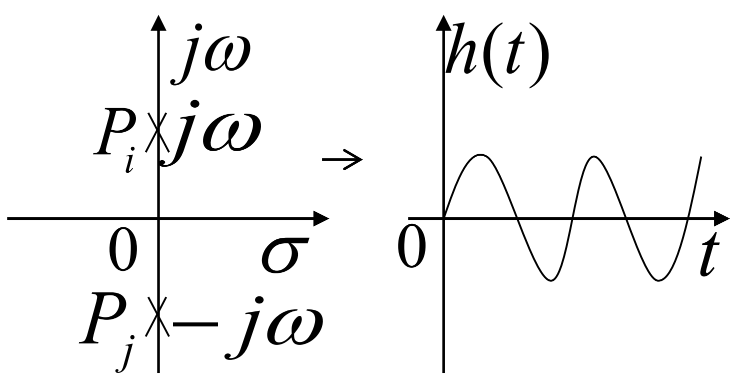


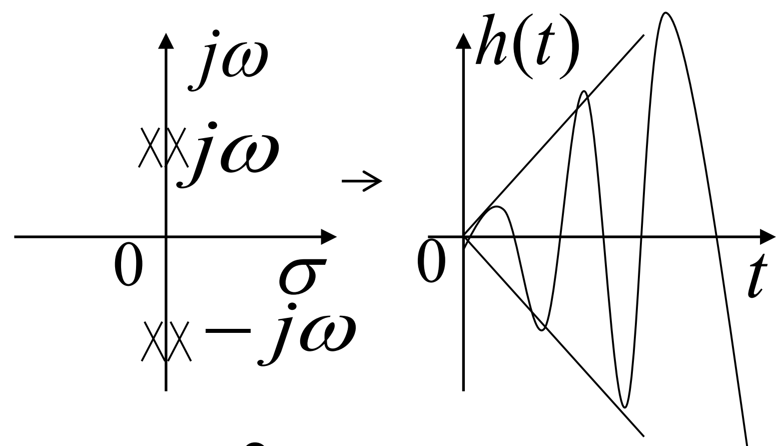
$$\frac{1}{s-a} \to e^{at}u(t)$$

$$\frac{1}{(s-a)^2} \to te^{at}u(t)$$

§3.2系统函数零极点∽时域特性和稳定性

iv) p_i, p_j虚轴上共轭复根（一阶）虚轴上共轭复根（二阶）



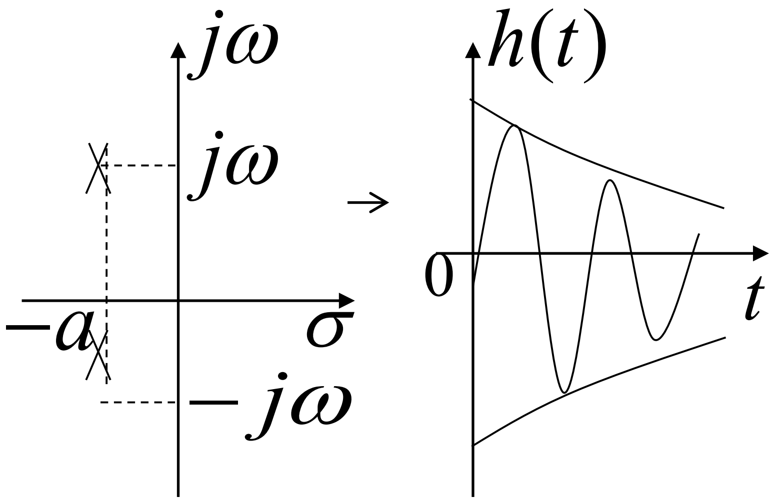


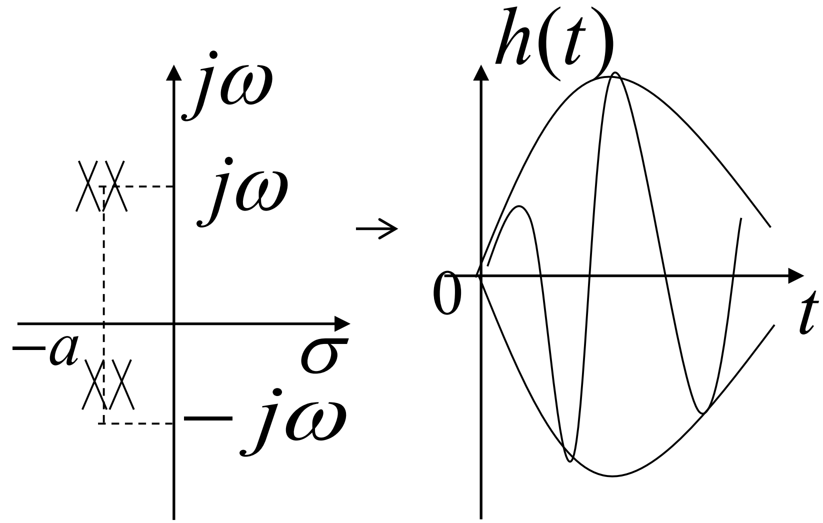
$$\frac{\omega}{s^2+\omega^2} \rightarrow \sin\omega t$$

$$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2} \rightarrow t\sin\omega t$$

§3.2系统函数零极点∽时域特性和稳定性

v) p_i, p_j共轭左半平面（一阶）　　　共轭左半平面（二阶）

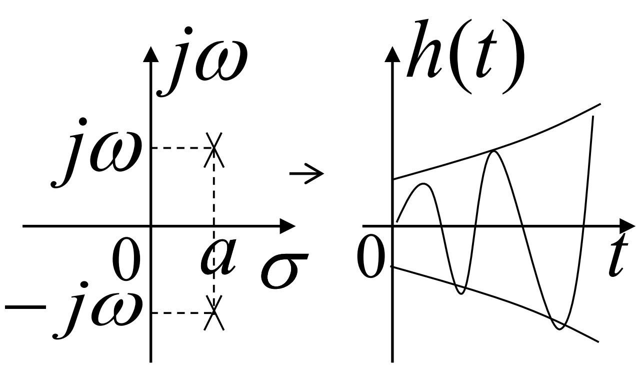


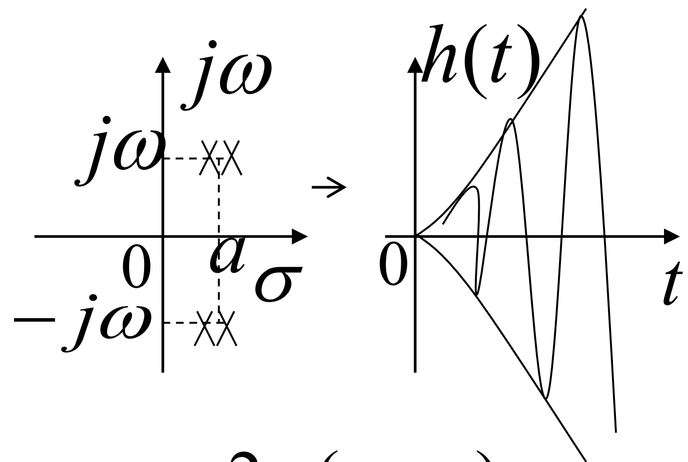


$$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2} \to e^{-at}\sin\omega t \qquad \frac{2\omega(s+a)}{[(s+a)^2+\omega^2]^2} \to te^{-at}\sin\omega t$$

§3.2系统函数零极点∽时域特性和稳定性

vi) p_i，p_j共轭右半平面（一阶）　共轭右半平面（二阶）





$$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2} \to e^{at}\sin\omega t \qquad \frac{2\omega(s-a)}{[(s-a)^2+\omega^2]^2} \to te^{at}\sin\omega t$$

§3.2系统函数零极点∽时域特性和稳定性

$$
H(s)\begin{cases}
\text{极点左半平面}\rightarrow h(t)\text{波形衰减} \\
\text{极点右半平面}\rightarrow h(t)\text{波形增长} \\
\text{虚轴上一阶极点}\rightarrow h(t)\text{波形等幅振荡或阶跃} \\
\text{虚轴上二阶或二阶以上极点}\rightarrow h(t)\text{波形增幅振荡}
\end{cases}
$$

§3.2系统函数零极点∽时域特性和稳定性

3. $H(s)$零点对$h(t)$波形影响（只影响幅度、相位、不改变波形形式）

[例2]： $$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2} \to e^{-at}\cos\omega t$$

$$\frac{s}{(s+a)^2+\omega^2} \to e^{-at}(\cos\omega t - \frac{a}{\omega}\sin\omega t)$$

$$= e^{-at}\cdot\sqrt{1+\frac{a^2}{\omega^2}}\cos(\omega t+\phi)$$

§3.2系统函数零极点∽时域特性和稳定性

二、$H(s)$，$E(s)$ 极点分布与自由响应、强迫响应关系

零状态 $R(s)=H(s)E(s)$ $\qquad r(t)=\mathcal{L}^{-1}[R(s)]$

设

$$H(s)=\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)} \qquad E(s)=\frac{\prod_{l=1}^{u}(s-z_l)}{\prod_{k=1}^{v}(s-p_k)}$$

1．假设所有p_i，p_k 均不相等，则

$$R(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{s-p_i}+\sum_{k=1}^{v}\frac{K_k}{s-p_k} \qquad r(t)=\sum_{i=1}^{n}K_ie^{p_it}+\sum_{k=1}^{v}K_ke^{p_kt}$$

自由 $\qquad$ 强迫

§3.2系统函数零极点∽时域特性和稳定性

2. K_i, K_k 均由 $H(s)$, $E(s)$ 共同决定

即自由响应的形式只由 $H(s)$决定，但幅度相位由$H(s)$, $E(s)$ 共同决定

强迫响应形式只由 $E(s)$决定，但幅度相位由$H(s)$, $E(s)$ 共同决定

3. 固有频率（自由频率）：系统特征方程的根，决定自由响应形式

分子分母因式可能相消使 $H(s)$ 丢失固有频率，则相应的自由响应会丢失

即$H(s)$只能反映零状态响应，而无法反映零输入响应

§ 3.2系统函数零极点∽时域特性和稳定性

[例3]： $$\frac{d^2r(t)}{dt^2}+3\frac{dr(t)}{dt}+2r(t)=\frac{de(t)}{dt}+e(t)$$

$$r(0_-)=1,\ r'(0_-)=1,\ e(t)=u(t)\quad 求\ r_{zs}(t),r_h(t)$$

解： $$H(s)=\frac{s+1}{s^2+3s+2}=\frac{1}{s+2}$$

$$R_{zs}(s)=\frac{1}{s+2}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{2}(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2})\leftrightarrow r_{zs}(t)=\frac{1}{2}(1-e^{-2t})u(t)$$

$$\alpha^2+3\alpha+2=0,\ \alpha=-1,\ \alpha=-2$$

$$r_h(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t},$$

$$r(0_+)=1,\ r'(0_+)=2,\qquad \begin{cases}A_1+A_2+\frac{1}{2}=1\\-A_1-2A_2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1=3\\A_2=-\frac{5}{2}\end{cases}$$

故 $$r_h(t)=3e^{-t}-\frac{5}{2}e^{-2t}$$

§3.2系统函数零极点∽时域特性和稳定性

三、$H(s)$极点与系统稳定性关系

1．稳定性：系统本身特性，与激励无关

2．$h(t)$与系统稳定性关系

因果系统（$h(t)=0 \quad t<0$）

$$
\begin{cases}
\lim\limits_{t\to\infty} h(t)=0 & \text{系统稳定} \\
\lim\limits_{t\to\infty} h(t)=A\text{或等幅振荡} & \text{系统临界稳定} \\
\lim\limits_{t\to\infty} h(t)=\text{不存在} & \text{系统不稳定}
\end{cases}
$$

§ 4.4系统函数零极点∽时域特性和稳定性

3. $H(s)$与系统稳定性关系

因果系统

$H(s)$　全部极点落于s左半平面　稳定

$H(s)$　有极点落于s右半平面，或在s虚轴上有二阶以上极点　不稳定

$H(s)$　有极点落于s平面虚轴上的均为一阶，

其它极点落于s左半平面，　临界稳定

4. 稳定系统的另一定义方法：BIBO方法（包括非因果系统）

$$|e(t)| \le M_e \Rightarrow |r(t)| \le M_r$$

§4.4系统函数零极点∽时域特性和稳定性

5．其他条件：$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt \le M$（即冲激响应 $h(t)$ 绝对可积）

证明： 充分性：$\begin{cases} r(t) = h(t) * e(t) \\ \int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt \le M \\ |e(t)| \le M_e \end{cases} \Rightarrow$

$$|r(t)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\cdot e(t-\tau)d\tau\right| \le \int_{-\infty}^{+\infty}|h(\tau)\cdot e(t-\tau)|d\tau$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty}|h(\tau)|\cdot M_e d\tau \le M_e \cdot M = M_r$$ 由BIBO可知系统稳定

§4.4系统函数零极点∽时域特性和稳定性

必要性：系统稳定$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt$有界$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt$无界

$\Rightarrow$系统不稳定

$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt$无界$\Rightarrow$至少对某种有界$e(t), r(t)$无界

设：$e(-t)=\operatorname{sgn}[h(t)]=\begin{cases}-1 & h(t)<0\\ 0 & h(t)=0\\ 1 & h(t)>0\end{cases}$ 则$|e(t)|\le 1$有界

$$\Rightarrow e(-t)h(t)=|h(t)|$$

但 $r(t)=e(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e(t-\tau)d\tau$

$$\Rightarrow r(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e(-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}|h(\tau)|d\tau\text{无界}$$

§4.4系统函数零极点∽时域特性和稳定性

6．因果稳定系统充要条件：$\begin{cases} h(t)=h(t)u(t) \\ \int_{0}^{+\infty}\left|h(t)\right|dt \le M \end{cases}$

7．BIBO稳定性把$H(s)$稳定性中的临界稳定性判为不稳定

§4.4系统函数零极点∽时域特性和稳定性

8．稳定（不包括临界稳定）的一个必要条件:

$H(s)$的分母多项式的系数都为正（或都为负）不能缺项。

对于一阶和二阶系统为充要条件。

例6：判断系统稳定性

① $$H(s)=\frac{s^2+2s+1}{s^3+4s^2-3s+2}$$ 不稳定

② $$H(s)=\frac{s^3+s^2+s+2}{s^3+7s+9}$$ 不稳定

§4.4系统函数零极点∽时域特性和稳定性

四、$H(s), E(s)$零极点与瞬态响应、稳态响应关系

1． 瞬态响应：$t \to \infty$时消失的相应部分

2． 稳态响应：$t \to \infty$ 时保留下来的相应部分

$$e^{p_i t}$$

$$\mathrm{Re}[p_i] < 0 \to \lim_{t\to\infty} e^{P_i t} = 0 \quad \text{瞬态响应}$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Re}[p_i] = 0 \to \lim_{t\to\infty} e^{p_i t} = 1\text{或等幅振荡} \\ &\mathrm{Re}[p_i] > 0 \to \lim_{t\to\infty} e^{p_i t} = \text{增幅振荡} \end{aligned}\right\} \text{稳态响应}$$

§4.4系统函数零极点∽时域特性和稳定性

3. $H(s)$的极点实部均小于0 $\Rightarrow$ 稳定系统，自由响应均为瞬态响应

若$E(s)$极点实部小于0则自由响应＋强迫响应 $\rightarrow$ 瞬态

若$E(s)$极点实部大于0或在虚轴上有极点，则强迫响应$\rightarrow$稳态

4. $H(s)$的极点实部等于0，自由响应 $\rightarrow$ 稳态

5. $H(s)$的极点实部大于0，不稳定，自由响应 $\rightarrow$稳态

6. $H(s)$的极点与$E(s)$零点相消，不出现该$H(s)$ 极点对应的自由响应