第八章 现代控制理论基础

- 20世纪50年代诞生，60年代发展。
- 标志和基础：状态空间法。
- 特点：揭示系统内部的关系和特性，研究和采用优良而和复杂的控制方法。
- 适用范围：单变量系统，多变量系统，线性定常系统，线性时变系统，非线性系统。

8.1状态空间法的基本概念

- 状态：时间域中系统的运动信息。
- 状态变量：**确定系统状态**的一组独立（数目最少的）变量。能完全确定系统运动状态而个数又最少的一组变量。
- **确定系统状态：**知道初始时刻一组状态变量的值及此后的输入变量，可以确定此后全部状态（或变量）的值。
- n阶微分方程描述的n阶系统，状态变量的个数是n。
- 状态变量的选取不是唯一的。

- 状态向量：由n个状态变量组成的向量。

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}^T(t)=[x_1(t),x_2(t),\cdots x_n(t)]$$

- 状态空间：以状态变量为坐标构成的n维空间。
- 状态方程：描述系统**状态变量之间**及其**和输入之间**的函数关系的<u>**一阶**</u>微分方程组。
- 输出方程：描述系统输出变量与状态变量（有时包括输入）之间的函数关系的<u>**代数**</u>方程（组）。
- 状态空间表达式：状态方程与输出方程的组合。

单变量

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 u \\
\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 u \\
\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n u
\end{cases}
$$

$$
y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n + du
$$

向量矩阵形式 $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu \\ y = C\mathbf{x} + du \end{cases}$

状态向量 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ 系数矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$

输入矩阵 $B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$ 输出矩阵 $C=\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}_{1\times n}$

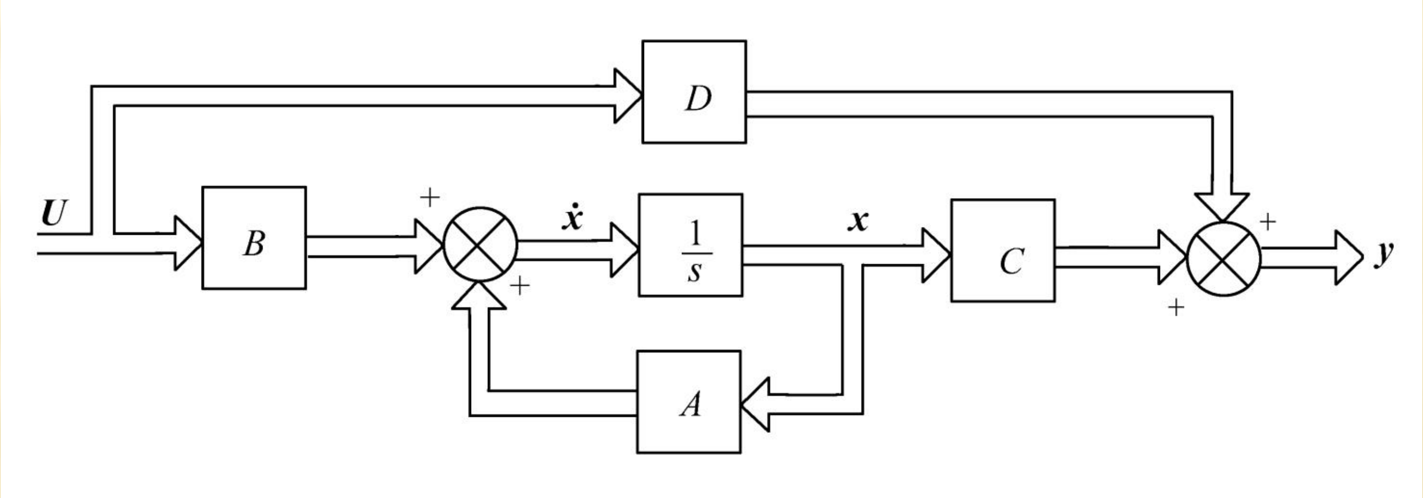
d为直接传递系数。

- 多变量，p个输入，q个输出

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \cdots b_{1p}u_p \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \cdots b_{2p}u_p \\ \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \cdots b_{np}u_p \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + d_{12}u_2 + \cdots d_{1p}u_p \\
y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots c_{2n}x_n + d_{21}u_1 + d_{22}u_2 + \cdots d_{2p}u_p \\
\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
y_q = c_{q1}x_1 + c_{q2}x_2 + \cdots c_{qn}x_n + d_{q1}u_1 + d_{q2}u_2 + \cdots d_{qp}u_p
\end{cases}
$$

矩阵形式 $\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x} + D\mathbf{u} \end{aligned}\right\}$



8.2 线性定常系统状态空间表达式的建立

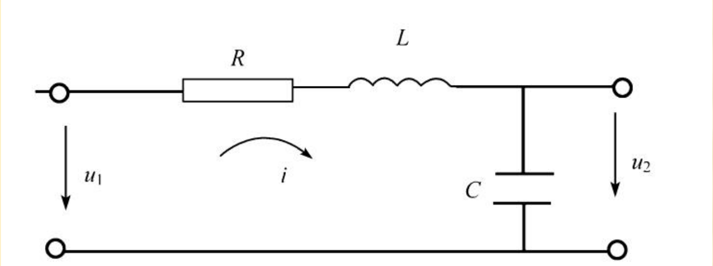
8.2.1 根据工作原理建立状态空间表达式

- 其一根据工作原理

  （其二由其他数学模型转换）
- 选择状态变量:

  与独立储能元件能量有关的变量，或试选与输出及其导数有关的变量，或任意 n 个相互独立的变量。

例 8-2-1　电压u_1、u_2分别是输入和输出量。建立状态空间表达式。



解　基本方程为

$$\begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}\,i(t)}{\mathrm{d}\,t}+Ri(t)+u_2(t)=u_1(t) \\ i(t)=C\dfrac{\mathrm{d}\,u_2(t)}{\mathrm{d}\,t} \end{cases}$$

取$u_2(t)$和$i(t)$为状态变量，它们与电感和电容的能量有关。

设 $x_1(t)=u_2(t), x_2(t)=i(t)$。

$$\begin{cases} \dot{u}_2(t)=\dfrac{1}{C}i(t) \\ \dot{i}(t)=-\dfrac{1}{L}u_2(t)-\dfrac{R}{L}i(t)+\dfrac{1}{L}u_1(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dfrac{1}{C} x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{1}{L} x_1 - \dfrac{R}{L} x_2 + \dfrac{1}{L} u_1 \end{cases} \qquad y = x_1$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu_1 \qquad y = C\mathbf{x}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{C} \\ -\dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

8.2.2 由微分方程和传递函数求状态空间表达式

- 1.方程不含输入的导数,传递函数无零点

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\cdots+a_{n-1}\dot{y}+a_ny=b_nu$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$

选 $\mathbf{x}=\begin{cases}x_1=y\\ x_2=\dot{y}\\ x_3=\ddot{y}\\ \vdots\\ x_n=y^{(n-1)}\end{cases}\Rightarrow\quad\dot{\mathbf{x}}=\begin{cases}\dot{x}_1=\dot{y}=x_2\\ \dot{x}_2=\ddot{y}=x_3\\ \quad\vdots\\ \dot{x}_{n-1}=y^{(n-1)}=x_n\\ \dot{x}_n=y^{(n)}=-a_ny-a_{n-1}\dot{y}-\cdots-a_1y^{(n-1)}+b_nu\\ \qquad=-a_nx_1-a_{n-1}x_2-\cdots-a_1x_n+b_nu\end{cases}$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \quad \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots - a_1 x_n + b_n u \end{cases}$$

$$y = x_1$$

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu$$

$$y = C\mathbf{x}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$A, C,$ 可观规范2型。

8.2.2 由微分方程和传递函数求状态空间表达式

- 2.方程含有输入的导数,传递函数有零点

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\cdots+a_{n-1}\dot{y}+a_ny=b_0u^{(n)}+b_1u^{(n-1)}+\cdots+b_{n-1}\dot{u}+b_nu$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_0s^{(n)}+b_1s^{(n-1)}+\cdots+b_{n-1}s+b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$

若选 $x_i=y^{(i-1)}$ $\Rightarrow$

$$\dot{x}_n=-a_nx_1-a_{n-1}x_2-\cdots-a_1x_n+b_0u^{(n)}+b_1u^{(n-1)}+\cdots+b_{n-1}\dot{u}+b_nu$$

若$t=t_0$时输入为阶跃函数，方程右边有δ和高阶δ函数。不能唯一确定$\mathbf{x}$，故上述变量不能取为状态变量。

选取状态变量的原则：状态变量的n个一阶微分方程中不能有输入变量的导数。

第一法

$$
\begin{cases}
x_1 = y - h_0 u \\
x_2 = \dot{x}_1 - h_1 u = \dot{y} - h_0 \dot{u} - h_1 u \\
x_3 = \dot{x}_2 - h_2 u = \ddot{y} - h_0 \ddot{u} - h_1 \dot{u} - h_2 u \\
\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
x_n = \dot{x}_{n-1} - h_{n-1} u = y^{(n-1)} - h_0 u^{(n-1)} - h_1 u^{(n-2)} - \cdots - h_{n-2} \dot{u} - h_{n-1} u
\end{cases}
$$

其中

$$
\begin{cases}
h_0 = b_0 \\
h_1 = b_1 - a_1 b_0 \\
h_2 = (b_2 - a_2 b_0) - a_1 h_1 \\
\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
h_n = (b_n - a_n b_0) - a_{n-1} h_1 - a_{n-2} h_2 - \cdots - a_2 h_{n-2} - a_1 h_{n-1}
\end{cases}
$$

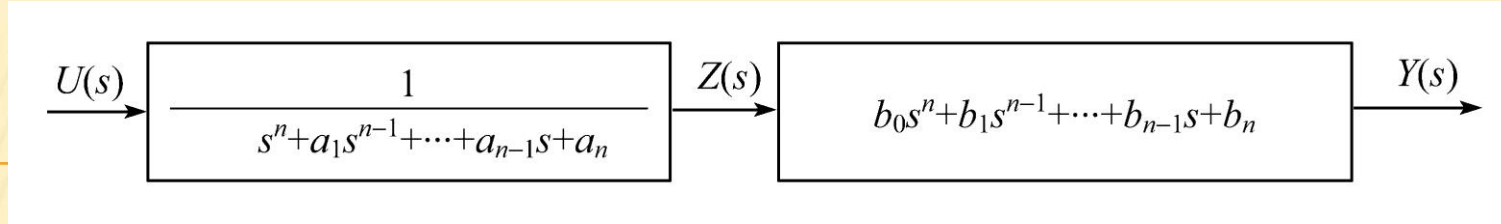
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu \\ y = C\mathbf{x} + du \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

$h_0 = b_0 = 0$ 时有： $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad d = b_0$

A、C是可观测规范2型。

第二法



取 $\begin{cases} x_1 = z \\ x_2 = \dot{x}_1 = \dot{z} \\ \quad\vdots \qquad \vdots \\ x_n = \dot{x}_{n-1} = z^{(n-1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu \\ y = C\mathbf{x} + du \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A、B是可控规范型。

$d = b_0$

若$b_0 = 0 \Rightarrow \quad C = \begin{bmatrix} b_n & b_{n-1} & \cdots & b_2 & b_1 \end{bmatrix}$

除了以上两种方法外，还可以推导出以下形式：

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \qquad b_0=0\text{时有}\ B=\begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad d=b_0$$

A、C是可观测规范型。（注意：不是2型）

例 8-2-3 $\dddot{y}+5\ddot{y}+\dot{y}+2y=\dot{u}+2u$ 列写状态空间表达式。

解:第一法 $a_1=5, a_2=1, a_3=2, b_0=b_1=0, b_2=1, b_3=2$

$h_0=b_0=0, h_1=b_1-a_1b_0=0, h_2=(b_2-a_2b_0)-a_1h_1=1$

$h_3=(b_3-a_3b_0)-a_2h_1-a_1h_2=-3$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & -1 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ -3\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

第二法 $\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{s+2}{s^3+5s^2+s+2}$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-2&-1&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}2&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

8.2.3 根据传函实数极点建状态空间表达式

1.传函只有各异的实数极点（2.含单重实数极点——不讲）

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{C_1}{s-s_1}+\frac{C_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{C_n}{s-s_n} \qquad C_i=[\frac{Y(s)}{U(s)}(s-s_i)]_{s=s_i}$$

$$\Rightarrow \quad Y(s)=\frac{C_1}{s-s_1}U(s)+\frac{C_2}{s-s_2}U(s)+\cdots+\frac{C_n}{s-s_n}U(s)$$

选
$$\begin{cases} X_1(s)=\dfrac{1}{s-s_1}U(s) \\ X_2(s)=\dfrac{1}{s-s_2}U(s) \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \\ X_n(s)=\dfrac{1}{s-s_n}U(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sX_1(s)=s_1X_1(s)+U(s) \\ sX_2(s)=s_2X_2(s)+U(s) \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \\ sX_n(s)=s_nX_n(s)+U(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = s_1 x_1 + u \\ \dot{x}_2 = s_2 x_2 + u \\ \quad\vdots \qquad \vdots \\ \dot{x}_n = s_n x_n + u \end{cases} \qquad y = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \cdots + C_n x_n$$

$$A = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & s_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{bmatrix}$$

A:对角线标准型。

例 8-2-4 $\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{2s+1}{s^3+7s^2+14s+8}$，求状态空间表达式。

解　极点：$s_1=-1, s_2=-2, s_3=-4$

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=-\frac{1}{3}\frac{1}{s+1}+\frac{3}{2}\frac{1}{s+2}-\frac{7}{6}\frac{1}{s+4}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$y=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{3}{2} & -\frac{7}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

8.2.4 状态变量的非唯一性和特征值不变性

- 状态变量个数一定，选取方法很多，系数矩阵多样。$z=Px(|P|\neq 0)$是状态向量——线性非奇异变换。
- $|sI-A|$：系统或矩阵的特征多项式。
  $|sI-A|=0$：特征值或特征根，传递函数极点。
  同一个系统特征值不变。

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$|sI-A|=s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n=0$$

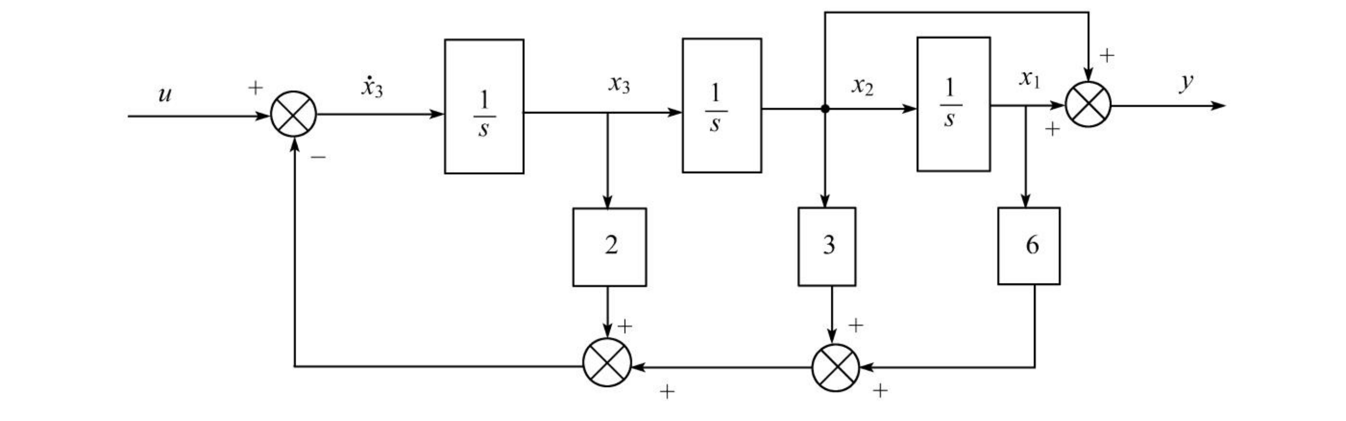
8.2.5 状态变量图

- 状态变量图包括积分器，加法器，比例器。
- 表示状态变量、输入、输出的关系。
- n阶系统有n个积分器。
- 状态变量图↔状态空间表达式

例8-2-8 $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u \quad y=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$

绘状态变量图。

解



$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \dot{x}_3=-6x_1-3x_2-2x_3+u\end{cases}$$

$y=x_1+x_2$

3个积分器，输出是状态变量，输入是其导数。

8.3 由状态空间表达式求传递函数

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu \\ y = C\mathbf{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s\mathbf{X}(s) = A\mathbf{X}(s) + BU(s) \\ Y(s) = C\mathbf{X}(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{X}(s) = [sI - A]^{-1} BU(s) \\ Y(s) = C[sI - A]^{-1} BU(s) \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C[sI - A]^{-1} B$$

一个系统的传递函数是相同的。

例8-3-1 $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

求传递函数。

解 $[sI-A]^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 5 & 3 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{\text{adj}[sI-A]}{|sI-A|} = \dfrac{\begin{bmatrix} s^2+2s+3 & s+2 & 1 \\ -5 & s(s+2) & s \\ -5s & -(3s+5) & s^2 \end{bmatrix}}{s^3+2s^2+3s+5}$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C[sI-A]^{-1}B = \frac{s^2+2s+3}{s^3+2s^2+3s+5}$$

状态空间表达式是可控规范型，可直接写出传递函数。

8.7 线性系统的可控性与可观测性

8.7.1 线性系统的可控性与可控性判据

- 输入能否在有限时间内使系统从任一初始状态转移到任意的希望状态。
- 1.线性定常连续系统的可控性

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$$

存在允许输入量$\mathbf{u}(t)$，能在有限时间内使状态从任意初态$\mathbf{x}(t_0)$，转移到任意希望的终态$\mathbf{x}(t_f)$，称状态完全可控，简称系统可控。

8.7.1.线性定常系统的可控性

讨论系统$\sum:\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx\end{cases}$的可控性 $\Rightarrow$ (A,B)

定义 存在允许输入量$\mathbf{u}(t)$，能在有限时间内使状态从任意初态$\mathbf{x}(t_0)$，转移到任意希望的终态$\mathbf{x}(t_f)$，称状态完全可控，简称系统可控。

定理一 n 阶线性定常连续系统 $\dot{\mathbf{x}}=A\mathbf{x}+B\mathbf{u}$ 完全可控的充要条件是：可控性矩阵$Q_k=[B\ \ AB\ \ A^2B\ \ \cdots\ \ A^{n-1}B]$的秩为 n。

定理一　n 阶线性定常连续系统　$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$　完全可控的充要条件是，可控性矩阵　$Q_k = [B \;\; AB \;\; A^2B \;\; \cdots \;\; A^{n-1}B]$ 的秩为 n，即

$$\operatorname{rank} Q_k = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$$

说明　完全可控的充要条件即，对任意$\mathbf{x}(0)$,$\mathbf{u}(t)$有解 $\Rightarrow$ $Q_k F = -\mathbf{x}(0)$ 对 F 有解。

充要条件是　$\operatorname{rank} Q_k = \operatorname{rank}[Q_k \;\; \mathbf{x}(0)]$

因为 $\mathbf{x}(0)$ 是任意的，故要求Q_k满秩，即　$\operatorname{rank} Q_k = n$。

例8-7-1 $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}u$ 判定可控性。

解 $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$

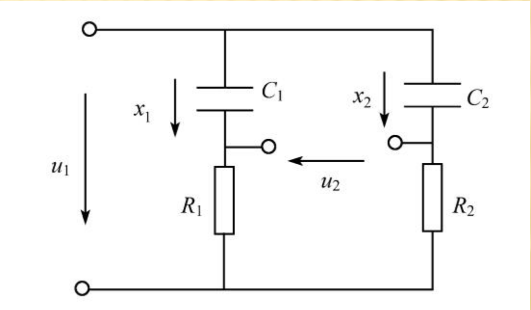
$\mathrm{rank}Q_k = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = 1 < n = 2$，不完全可控。

例8-7-2 $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{u}$ 判定可控性。

解 $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$

$\mathrm{rank}Q_k = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -3 & 3 \end{bmatrix} = 2$，完全可控。

例8-7-3 电压u_1、u_2分别是输入和输出，电压x_1、x_2是状态，求不可控的条件。



解 $\begin{cases} x_1 + R_1C_1\dot{x}_1 = u_1 \\ x_2 + R_2C_2\dot{x}_2 = u_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{1}{R_1C_1}x_1 + \dfrac{1}{R_1C_1}u_1 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{1}{R_2C_2}x_2 + \dfrac{1}{R_2C_2}u_1 \end{cases}$

输出方程 $u_2 = x_1 - x_2 \quad \Rightarrow$

$$A = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_1C_1} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1C_1} \\ \dfrac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{R_1^2C_1^2}\\ -\dfrac{1}{R_2^2C_2^2}\end{bmatrix}\Rightarrow Q_k=\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{R_1C_1} & -\dfrac{1}{R_1^2C_1^2}\\ \dfrac{1}{R_2C_2} & -\dfrac{1}{R_2^2C_2^2}\end{bmatrix}$$

$$\left|Q_k\right|=-\frac{1}{R_1C_1R_2^2C_2^2}+\frac{1}{R_1^2C_1^2R_2C_2}$$

$$\left|Q_k\right|=0\Rightarrow\frac{1}{R_1C_1}=\frac{1}{R_2C_2}\Rightarrow R_1C_1=R_2C_2\leftarrow \text{不可控的条件}$$

不可控的条件是严格的。

8.7.2 线性系统的可观测性与可观测性判据

- 从输出值计算状态的能力。
- 可观测：对任意初始时刻，在有限时间内，由输出和输入能唯一确定（初始）状态。

线性定常连续系统的可观测性

定理三 线性定常系统 $\begin{cases}\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x}\end{cases}$ 完全可观测的充要条件是，

$$\mathrm{rank}Q_g = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n \text{ 或 } \mathrm{rank}Q_g^T = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \cdots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix} = n$$

Q_g ：可观测矩阵。

8.7.2.线性定常系统的可观测性

讨论系统$\sum:\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx\end{cases}$的可观测性 $\Rightarrow$ (A,C)

定义　对于任意的初始时刻t_0，若能在有限的时间间隔$[t_0,t_\mathrm{f}]$内，根据对$\mathbf{y}(t)$的测量值和$\mathbf{u}(t)$，惟一地确定系统的初始状态$\mathbf{x}(t_0)$，则称系统的状态是完全可观的。

定理三　线性定常系统 $\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}=A\mathbf{x}+B\mathbf{u}\\ \mathbf{y}=C\mathbf{x}\end{cases}$ 完全可观测的充要条件是:

可观测性矩阵$Q_g=\begin{bmatrix}C\\ CA\\ \vdots\\ CA^{n-1}\end{bmatrix}$的秩为 n。

说明 系统完全可观测的充要条件是方程 $\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_0 \\ \boldsymbol{\beta}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_{n-1} \end{bmatrix}$

有唯一解。其中 $\boldsymbol{\beta}_i$ 由输出等决定。有唯一解的条件是 $\text{rank}Q_g = n$。

例 8-7-7 $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$

判定可观性。

解 $\text{rank}Q_g = \text{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \text{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 15 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3 = n$ 完全可观。

例 8-7-8 对例8-7-3系统，求不可观的条件。

解 $$Q_g=\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\dfrac{1}{R_1C_1} & \dfrac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix}$$

$$\left|Q_g\right|=0 \Rightarrow \frac{1}{R_1C_1}=\frac{1}{R_2C_2} \Rightarrow R_1C_1=R_2C_2$$

8.7.3 可控规范型和可观测规范型

1.可控规范型

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_k=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & -a_1 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & -a_1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -a_1 & a_1^2-a_2 & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \qquad |Q_k|=1，一定可控。$$

变成可控规范型的方法。

1)系统可控但非规范型 $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu$

取 $P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}^{-1}$ $\quad P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_1 A \\ \vdots \\ P_1 A^{n-1} \end{bmatrix}$

取 $\mathbf{x} = P^{-1}\mathbf{z} \Rightarrow$ 可控规范型 $\dot{\mathbf{z}} = A_1\mathbf{z} + B_1 u$

2)求特征多项式$\Rightarrow$可控规范型系数矩阵

2.可观测规范型

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1}\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}\text{ 或}$$

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \mathrm{rank}\,Q_g=n$ 可观测。

8.7.4 对偶原理

$$S_1:\begin{cases}\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x}\end{cases} \qquad S_2:\begin{cases}\dot{\mathbf{z}} = A^T\mathbf{z} + C^T\mathbf{v} \\ \mathbf{w} = B^T\mathbf{z}\end{cases}$$

$$Q_{k1} = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

$$Q_{g1} = \begin{bmatrix} C^T & A^TC^T & \cdots & (A^T)^{n-1}C^T \end{bmatrix}$$

$$Q_{k2} = \begin{bmatrix} C^T & A^TC^T & \cdots & (A^T)^{n-1}C^T \end{bmatrix}$$

$$Q_{g2} = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

一个系统的“可控性矩阵”与另一个的“可观测性矩阵”相同