§2.3 联结词的扩充与归约

由于一个n元逻辑联结词就是一个从$\{T,F\}^n$到$\{T,F\}$的映射，因此相应的真值函数表就有2^{2^n}种。下面以$n=1$和$n=2$为例来说明。

1. 联结词的扩充

1） $n=1$就有4个不同的从$\{T,F\}$到$\{T,F\}$的映射：

P	f_1	f_2	f_3	f_4
T	F	F	T	T
F	F	T	F	T

对应的真值函数为：

$f_1(P)=F$ ，为常联结词

$f_2(P)=\neg P$ ，为否定词 $\neg$

$f_3(P)=P$ ，为恒等联结词

$f_4(P)=T$ ，为常联结词

2) $n=2$有16个不同的从$\{T,F\}^2$到$\{T,F\}$的映射，即有16个不同的二元联结词，相应的真值函数表就有16个. 下面仅列出几个:

P	Q	f_2	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{14}	f_{15}
F	F	F	F	F	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F	F	T
T	T	T	F	T	F	T	T	F

f_9即为或非词 $\downarrow$：

$$f_9(P,Q)=\neg(P \vee Q)=P \downarrow Q$$

f_{15}即为与非词 $\uparrow$：

$$f_{15}(P,Q)=\neg(P \wedge Q)=P \uparrow Q$$

f_7即为异或词 $\overline{\vee}$：

$$f_7(P,Q)=\neg(P \leftrightarrow Q)=P \overline{\vee} Q$$

2. 联结词的归约

1) 可表示：设 h 为一 n 元联结词，A 为由 m 个联结词 $g_1, g_2, \cdots, g_m$ 构成的命题公式，若有 $h(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow A$ 则称联结词 h 可由联结词 $g_1, g_2, \cdots, g_m$ 来表示。

例
$$P \downarrow Q \Leftrightarrow \neg(P \vee Q)$$
$$P \uparrow Q \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$$
$$P \,\overline{\vee}\, Q \Leftrightarrow \neg(P \leftrightarrow Q)$$

3. 联结词的完备集：设 C 为联结词的集合若对任一命题公式都可由 C 中的联结词表示出来的公式与之等值，则称 C 是联结词的完备集，或称 C 是完备的联结词集合

定理1 $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 是完备的联结词集合.

类似的联结词完备集还有:

$\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \rightarrow\}$, $\{\uparrow\}$, $\{\downarrow\}$

$$P \vee Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$$

$$P \wedge Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$$

$$P \vee Q \Leftrightarrow \neg P \rightarrow Q$$

$$\neg P \Leftrightarrow \neg(P \wedge P) \Leftrightarrow P \uparrow P$$

$$P \wedge Q \Leftrightarrow \neg(\neg(P \wedge Q)) \Leftrightarrow \neg(P \uparrow Q)$$

$$\Leftrightarrow (P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)$$

$$\neg P \Leftrightarrow \neg(P \vee P) \Leftrightarrow P \downarrow P$$

$$P \vee Q \Leftrightarrow \neg(\neg(P \vee Q)) \Leftrightarrow \neg(P \downarrow Q)$$

$$\Leftrightarrow (P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow Q)$$

例 用$\{\uparrow\}$表示公式$(A\to\neg B)\to\neg C$

$$(A\to\neg B)\to\neg C\Leftrightarrow(\neg A\vee\neg B)\to\neg C$$

$$\Leftrightarrow\neg(\neg A\vee\neg B)\vee\neg C\Leftrightarrow\neg[(\neg A\vee\neg B)\wedge C]$$

$$\Leftrightarrow(\neg A\vee\neg B)\uparrow C$$

$$\Leftrightarrow(\neg(A\wedge B))\uparrow C\Leftrightarrow(A\uparrow B)\uparrow C$$