概率论与数理统计

哈工大数学系
概率统计与运筹控制研究所(教研室）
田波平
E-Mail:bopingt361147@hit.edu.cn
Tel: 0451-86412607
Office:G315（格物楼315-2）
Math Dept of HIT
Prof.Boping Tian

第一章　随机事件与概率

在丰富多彩的世界中，存在着两类基本现象：

- 例（1）在标准大气压的下，将水烧至100℃会沸腾。（物理学中的大气物理学定律）
- （2）空中初速为0的物体，在重力作用下经过时间 t（秒）下落的距离一定是$\frac{1}{2}gt^2$.
- g（这里是重力加速度）。

（牛顿动力学）

- （3）在真空中，光的传播速度为定值。

（300，000公里/秒）

（爱因斯坦的质能方程）

- （4）在室温（10^{0}C至 $40^{0}C$）下，生铁肯定不能熔化。（化学规律）

- **此类由某种特殊规律所支配并且可精确预测其结果的现象称之为必然现象。**

另一类现象也广泛存在：

例1：参加某保险公司的人在一年内是否死亡；（**保险精算**等问题）

例2：导弹向目标射击是否命中目标；（**可靠性工程**等问题）

例3：从一批产品中，随机地抽检n件产品合格品的数目是多少。

（**产品质量**检验等问题）

例4：赌徒在赌场上胜败。

（**商业、经济、金融等方面的博弈问题**）

例5：生物信息和生命科学中DNA序列的分类和病态基因突变。

（**生命科学技术与工程**等问题）

- 例6.考察水平面上花粉的运动；（**Browian运动**）
- 1、1827年英国的Browian观察了水平面上花粉的随机运动；
- 2、1900年法国的Bachelier将Brownian Motion用于股票价格描述；
- 3、1905年A.Einstain提出了Brownian Motion的数学模型概念；
- 4、1950年代P.A.Samuelson重新发现了Bachelier的工作并介绍给经济学界；
- 5、1973年Black-Scholes-Merton期权定价公式获1997年经济学Nobel Prize

保险、可靠性工程、产品质量管理、经济金融管理、生物生命工程、布朗运动等学科中现象大量存在。

以上现象称之为随机现象，它们是概率论研究的范畴。那么这种现象具有什么规律呢？如何进行研究？下面我们举2个经典的例子来说明。

例7：将一枚质量均匀的硬币抛掷 N 次，观察正面出现的次数n及频率n/N:

			N	n	n/N
18世纪	法国人	Buffon	4040	2048	0.5069
19世纪	英国人	K.Pearson	12000	6019	0.5016
			24000	12012	0.5005

此例表明不同时代、不同国籍、不同人做同样大量的投掷硬币的随机实验,出现正面的频率具有稳定性和统计规律性.同时也**说明客观实在的随机现象的统计规律并不随时间、地点、人物的变化而变化，它具有可重复性的一般规律的特点。**

例8 L.Brillouin, Science and Information Theroy, New York 1956 。

上面这本书中讨论与研究了英语的26个字母出现的频率，其中E出现的频率为0.105，空格出现的频率为0.20,那么这个例子对计算机的键盘的设计,密码的破译,信息的处理具有重要的意义。

概率论:它是一门研究随机现象统计规律性的数学科学。

历史简述：现代概率论起源一种说法是十七世纪数学家对赌博问题的研究，主要归功于Pascal 与Fermat两位数学家。历史上曾有一个叫贡博的赌徒提出了一个有意思的Mere问题：掷一枚骰子4次，至少出现一个6点的可能性很大(0.52)；若掷一对骰子24次，至少出现一双6点的可能性也很大(0.49)，这导致矛盾。此赌徒宣称:24次是4次的6倍，那么后者的可能性应当比前者可能性大，但事实却相反。于是他认为数学是自相矛盾的!

- 当时的Pascal和Fermat两位数学家通过通信联系并且讨论了大量公平赌博的例子，从中归纳出了今天我们熟知的排列与组合的新知识。另外概率论起源一种说法，是在1713年雅克.伯努里建立了概率论历史上的第一个极限定理。
- 十九世纪初，拉普拉斯给出古典概率的定义,二十世纪三十年代Kolmogrov利用康托的集合论和勒贝格的测度论创立概率论的严格的公理化体系，从这以后，人们可用集合论的语言和测度论来刻化和描述随机现象，

并且在Finance, Economics, Reliability Theory and Engineering Theory, Monte-Carlo Method, Computer Science, Information Theory等领域有广泛的应用。

但是概率论这一数学分支与历史悠久的代数、几何（2000年以上）相比而言，那就太年轻了。**发展缓慢原因有二：**

- **1、此学科与赌博有联系，研究概率论将有悖于科学圣洁之名，并且与传统道德相违；**

- 2、古典概率计算中庞大的有限集合所包含元素的个数计算的复杂性。
- 以上所述主要介绍了概率论研究的对象、方法、简史、主要应用的范围以及发展缓慢的原因，从中可以看出此门课程在理论与实际工程中的重要作用与意义，它已经成为每一位从事理工与经济管理同学的必修课。

下面讲讲学习概率论的基本要求：

- 1、认真读书：哈工大概率统计教材和参考书；
- 2、按时完成作业："概率论与数理统计同步训练"、"概率论与数理统计综合训练"及教材上的习题；
- 3 、养成课前预习、上课做笔记并且课后经常复习的好习惯。

购买哈工大编写教材三个类别

1 **“概率论与数理统计同步训练”**，10元/本
2 “概率论与数理统计同步辅导与习题解答”
22元/本
3 **“概率论与数理统计综合训练”** 12元/本

以班级为单位购买，（1）和（3）必须买。

时间：9月12日-9月19日 8：30-16：30

地点：学友书店；以班级为单位，不接受个人购买。

成绩的评价方式：

- 1、作　　业：　20分；

上交作业时间与地点：格物楼812；时间待定

- 2、**平时成绩**：　10分；

（小论文（至少2000字）、平时成绩（含课堂表现等）等）

- 3、**期末考试**：70分。

Reference

- [1] 浙江大学编，概率论与数理统计，高等教育出版社，2002年
- [2] 概率统计（英文）PROBABILITY AND STATISTICS.(叶中行等译，2007）

  MORRIS H.DeGroot,MarK J.Schervish
- [3]概率论及其应用（上、下册）（胡迪鹤、郑远禄译）An Introduction to Probability Theory and Its Applications

  William Feller.（2006，2007）

§1.1 随机事件 样本空间

下面我们引入随机现象的试验：

- 1、掷一枚硬币一次试验；

  S= {正面,反面}

- (a)在相同条件下可重复进行；
- (b)在一次E中所有可能结果为2个且已知；
- (c)对每一次具体试验其结果无法事先确定。

- 2、从一批产品中抽检100件产品的质量是否合格。

$$S=\{e_0,e_1,e_2,\cdots,e_{100}\}$$

e_i —表示100件产品中有i件合格品

i —0,1,2,...,100,

此E亦具有三个特点：

- （a）在相同条件下可重复进行；
- （b）在E中所有可能结果为101个；
- （c）对某一次具体E其结果事先无法确定。

3、观察某电话公司在某段时间内接到的呼叫次数试验。

$$S=\{e_0,e_1,e_2,\cdots,e_{100},\cdots\}$$

e_i—表示呼叫次数为i.

它亦具有三个特点。

- 4、观察某地接连两次发生三级以上地震所间隔的时间。

$$S=\{t \mid t>0, e_t\}=(0,\infty)$$

e_t—表示时间间隔为t.

它亦具有三个特点。

以上例1-4都合乎三条要求：

- 1、在相同条件下可重复进行；
- 2、试验的所有可能结果不止一个且事先已知；
- 3、对每一次具体的试验其结果事先无法确定的试验称为随机试验，简称为试验记E。

下面我们为某一E建立其数学模型。在平面几何或高等数学中我们研究了

点、线、面的构造，数、函数的构造，那么对于概率论中的E亦应建立一些相应的基本概念，即怎样描述随机现象是一件非常重要的事情，下面我们就概率论中的E建立一些基本概念及相应的构造。于是引入基本事件，样本空间等相关的概念。

基本事件：在E中每一个可能结果。简记为e，亦称样本点。

样本空间：在E中基本事件的全体。记为S。

- 例1 S={正面，反面}
- 例2 $S=\{e_0,e_1,\ldots,e_{100}\}$
- 例3 $S=\{0,1,2,\ldots,100,\ldots\}$
- 例4 $S=(0,+\infty)$

随机事件：在E中可能发生亦可能不发生的事情。用“A，B，C...”表示。

复合事件：由多个基本事件组成的事件。

S称为必然事件；ϕ称为不可能事件。

Question：两个特殊“事件”是否为随机事件？为什么？

Note：1°一个事件A在E中发生 $\Leftrightarrow \exists e_i$

$e_i \in A$ 且 e_i 在E中出现了；

2°引入S样本空间后，事件可用S的某个子集表示。在概率论的历史上。这种思想方法帮助消除了诸如Bertrand奇论等困难。

- **Bertrand奇论注**：在单位圆内随机地画一条弦。此弦比该圆的内接等边三角形的边长要长的概率是多少？
- **解释**：多种不同解法用不同的等可能假设，这样三个不同的E对应不同的概率空间。

- 例3、观察某电话公司在某段时间内接到的呼叫次数。

$$S=\{0,1,2,3,4,\cdots\cdots\}$$为样本空间

$$A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

$$B=\{4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

$C=\{4\}$, $D=\{5\}$均为随机事件

§ 1.2 事件的关系与运算(P9)

学会两种语言表述事件之间关系与运算

S 矩形域 圆域A-- -- B

- 1、事件的包含与相等: $A \subset B$ $A = C$
- 2、事件的积（或交）：AB or A∩B

AS=A

- 3、互不相容事件（互斥事件）：

AB= ф

n个事件互不相容:

设A_1，…，A_n为S中n个两两互不相容事件，即对

$$\forall i, j \in \{1,2,\cdots,n\}, i \neq j$$

$$A_i A_j = \phi$$

则称n个事件互不相容。

4、事件的和（或并）：$A\cup B$,

当$AB=\phi$ 时，$A\cup B$记为$A+B$。

5、事件的差：A-B，A-$A=\phi$，A- $\phi=A$，A-$S=\phi$

6、对立事件：S-$A=\overline{A}$

Note:1°事件的和与事件的积可推广到n个事件或可数无穷多个事件情形；

2°对立事件与互不相容事件关系怎样？

即两个事件互斥（互不相容）$\underset{\not\longrightarrow}{\longleftarrow}$ 两个事件互为对立事件。

- 3° $A-B=A\ \overline{B}=A-AB$（证明）

例3.观察某电话公司在某段时间内接到的呼叫次数试验。

$A=\{1,2\}$， $B=\{2,3,4\}$，

$C=\{1,2,3,5\}$, $D=\{1,5\}$

$S=\{0,1,2,3\ldots,100,\ldots\}$

则易知：

$$A \subset C$$

$$A \cap B = \{2\}$$

$$A \cap D = \{1\}$$

$$A \cup B = \{1,2,3,4\}$$

$$A - B = \{1\}$$

$$A - D = \{2\}$$

$B \cap D = \phi$ 即B与D互斥事件

$$\overline{A} = S - A = \{0,3,4,5,\cdots,100,\cdots\}$$

二、事件运算的性质

1、交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$

2、结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap（B\cap C）$

3、分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

4、对偶原理：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$　　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

推广：$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$　　$\overline{\bigcap_{j=1}^{n} A_j}=\bigcup_{j=1}^{n}\overline{A_j}$

语言表述：事件和的对立事件等于对立事件的积，事件积的对立事件等于对立事件的和。

例1 在检查某种圆柱体零件时，要求其长度和直径均合格。设A、B、C分别表示“直径合格”、“产品合格”、“长度合格”

试表示（1）A，B，C之间关系；

（2）$\overline{A}$,$\overline{B}$,$\overline{C}$ 之间关系

（1）$B=AC$，$B\subset A$，$B\subset C$，

$B=A-\overline{C}=C-\overline{A}$

（2）$\overline{B}=\overline{A}\cup\overline{C}$　$\overline{A}\subset\overline{B},\overline{C}\subset\overline{B}$

例2 某射手向一目标进行三次射击，令

A_i =“第i次射击命中目标”， i=1,2,3,

B_j =“在三次射击中 命中j次 ” j=0,1,2,3, 则

用A_i (i=1,2,3)及对立事件表示 B_0, B_1, B_2, B_3

解：

$$B_0 = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$$

$$B_1 = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$$

$$B_2 = A_1A_2\overline{A_3} + A_1\overline{A_2}A_3 + \overline{A_1}A_2A_3$$

$$B_3 = A_1A_2A_3$$

例3.用随机试验中的事件A，B，C表示下列事件：

(1) 仅B发生;(2)A,B,C至少有一个发生;(3)A,B,C恰有两个发生;

(4) A,B,C中不多于两个发生;(5)A,B,C中不多于一个发生;

(6)A,B,C中不少于两个发生。

(1) $\overline{A}B\overline{C} = B - A \cup C = B - A - C$

(2) $A \cup B \cup C = S - \overline{A \cup B \cup C} = S - \overline{A}\overline{B}\overline{C}$

$= AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} + ABC$

(3) $AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$

(4) $\overline{ABC} = \overline{A} \bigcup \overline{B} \bigcup \overline{C} = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$

(5) $\overline{A}\overline{B} \bigcup \overline{A}\overline{C} \bigcup \overline{B}\overline{C} = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C$

(6) $AB \bigcup AC \bigcup BC = AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$

§1.3　古典概率

我们知道：几何学中线段的长、平面图形的大小，物理学中物质的多少等都可用数来度量。在概率论中，事件在E中出现的可能性大小，是否亦可用数来度量呢？例1掷一枚均匀的硬币，出现“正面”与“反面”事件可能性为1/2。例2在掷随机点的E中，区域A面积愈大，点

落入该区域A的可能性亦愈大，且与区域A的度量成正比。例3参加人寿保险的人中一个老人在一年内死亡比此公司一个参险的年青人在一年内死亡的可能性大。由此可见，事件出现的可能性是客观存在的，并且可用数值来度量。我们把表示事件A出现可能性大小的数值称为事件A的概率，记为$P(A)$。

例1 大量的古典赌博E中事件发生可能性大小的计算。

（1）掷一枚均匀对称的骰子一次。

（2）从52张扑克中随机地抽一次。

（3）某袋中有20个球，其中10个白球，5个黑球，5个红球，从中任取一球。

定义：设E为一试验，若其样本空间S满足

（1）只有有限个基本事件；

（2）每个基本事件是等可能发生的，

则称E为古典概型的E。

在古典概型随机试验中，事件A的概率为：

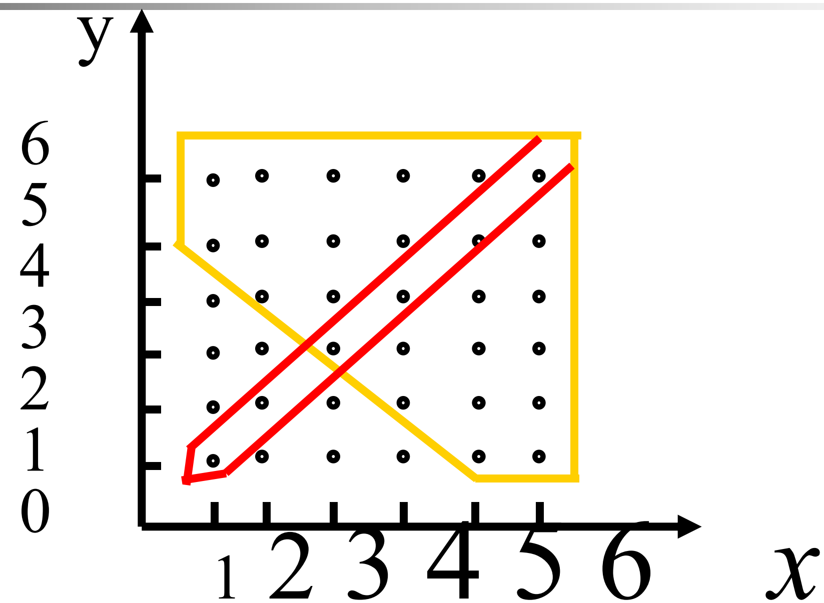
$P(A)$=A所含的基本事件个数/S所包含的基本事件总数=$\#(A)/\#(S)$

例2　掷两颗均匀骰子一次E中，S由36个点构成，设A、B分别表示“两颗骰子点数和不小于6”，“两颗骰子点数相等”求P(A)、$P(\overline{A})$P(B)、P(A-B)、P(A∪B)、P(AB)

例3，52张扑克牌，从中随机地抽取6张，求6张中有1张红桃，2张梅花，3张方块事件A的概率。

为计算S中基本事件的总数和#(A)，我们必须引入排列与组合知识。

例2 解:设x轴与y轴上六个整数点分别表示两个骰子可能出现的点数。



设A、B分别表示“两颗骰子的点数和不小于6”,“两颗骰子的点数相等”，则

$$P(A)=26/36 \qquad P(\overline{A})=10/36$$

$$P(B)=6/36 \qquad P(A-B)=22/36$$

$$P(A\cup B)=28/36$$

$$P(A\cap B)=4/36$$

例3 解：由题意

$$P(A)=\frac{C_{13}^{1}C_{13}^{2}C_{13}^{3}}{C_{52}^{6}}$$

1.3.2 排列与组合

1、两个基本原理：

（1）加法原理：$m+n$

（2）乘法原理：$m\times n$

(1)(2)均可推广。

2、排列

（1）有重复的排列：

n个不同元，有重复抽取m个元素并按一定顺序排列，共有排列方法：$N=n^m$

例1 由0,1,…,9十个数字可组成多个四个数电话码？（10^4）

（2）无重复的排列： $P_n^m\ (m \le n)$ n个不同元素，从中无重复地抽取m个元素排成一列，共有排列方法：

$$P_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1)$$

3、组合：

（1）两组组合：n个不同元素，每次无重复抽取m个元素不计次序并成一组。组合数为：

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{m!} = n(n-1)\cdots(n-m+1)/m!$$

$$= \frac{n!}{m!(n-m)!}, C_n^0 = 1$$

例2　哈工大21系，若各系均有一蓝球队，且系与系之间采用循环积分法进行比赛，问共有多少场比赛？（210）$C_{21}^{2}=\frac{21\times 20}{2\times 1}=210$

（2）多组组合：n个不同元素分成 $k(k\in\{2,3,\cdots,n\})$ 组，使第i组含n_i个元素，即$\sum_{i=1}^{k}n_i=n$；若组内元素不计次序，那么不同的分法为：$N=n!/n_1!n_2!\cdots n_k!$

（3）常用组合公式：

$$C_{n+1}^{m}=C_{n}^{m}+C_{n}^{m-1},$$

$$C_{m+n}^{k}=\sum_{i=0}^{k}C_{m}^{i}C_{n}^{k-i},\sum_{i=0}^{n}C_{n}^{i}=2^{n}$$

1. 3. 3　古典概率计算的例子

例1　设电话号码由五个数码组成，每个数码可为0，1，…9中的任一个。设A_1=“5个数码全相同”，A_2=“5个数码全不同”，A_3=“5个数码中有两个3”，求$P(A_i)(i=1,2,3)$

解：

$$P(A_1)=\frac{\#(A_1)}{\#(S)}=\frac{10}{10^5}$$

$$P(A_2)=\frac{\#(A_2)}{\#(S)}=\frac{P_{10}^5}{10^5}$$

$$P(A_3)=\frac{C_5^2 9^3}{10^5}$$

例2　设有N件产品，其中有M件正品，从中分别按不放回和有放回的抽样方式任取$n(n\leq N)$件，问在两种情况下恰有$m(m\leq n)$件正品的概率各为多少？

解：设A表示恰有m件正品事件

（1）组合：

$$P(A)=C_M^m\cdot C_{N-M}^{n-m}/C_N^n\text{(超几何概率)}$$

不放回的抽样 将从N个产品中抽取n件为一组的可能组合作为基本事件，总数为 C_N^n .导致事件A发生的基本事件为从

M件正品中取出m件，从N-M件次品中取出n-m件构成的组合，有 $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$ 个。

（2）排列

有放回的抽样 从N个产品中有放回地抽取n个产品进行排列，可能的排列数是N^n个。将每一排列看作基本事件，则基本事件总数为N^n。导致A发生的基本事件，为从M个正品中有放回地抽m件，从N-M件次品中有放回地抽n-m件得到的排列，这种排列数有 $C_n^m M^m (N-M)^{n-m}$ 个。

$$P(A)=C_n^m M^m (N-M)^{n-m} / N^n$$

$$=C_n^m\left(\frac{M}{N}\right)^m\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-m} \quad (二项概率)$$

Note：从直观上看，当产品总数(N)很大而抽样数(n)不大时，两种方式抽样对P(A)影响不大！、在实际中，抽样一般都采用不放回方式。但N很大，n很小时常用二项概率作为超几何概率的近似值。此结论常用于产品检验（原因：二项概率常有许多专门表格可查）。

$$\because \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} = C_n^m \left(\frac{M}{N}\right)^m \left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-m} \cdot$$

$$\frac{P_M^m \cdot P_{N-M}^{n-m} / M^m \cdot (N-M)^{n-m}}{P_N^n / N^n}$$

$$= C_n^m \left(\frac{M}{N}\right)^m \left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-m}$$

$$\cdot \left(\frac{P_M^m}{M^m} \cdot \frac{P_{N-M}^{n-m}}{(N-M)^{n-m}} / \frac{P_N^n}{N^n} \right)$$

$$= C_n^m \left(\frac{M}{N}\right)^m \left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-m} \quad \Delta n, m$$

而当*m*<<*M*，*n-m*<<*N-M*时， $\Delta_{n,m}=1$

$$\therefore \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} \approx C_n^m \left(\frac{M}{N}\right)^m \cdot \left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-m}$$

数理统计的引入：为了确定某批产品的次品率，通常采用的方法是从这批产品中抽若干个产品作为样本来检验，并用样本的次品率来估计整批产品的次品率。

而抽样带有随机性，因而不同的抽样可能得到不同的结果，所以，我们有必要对各种

结果出现的可能性大小进行讨论，这为我们根据样本情况推断整批产品情况提供了理论依据，这种研究是概率论的任务。二者相互联系。

例3 将10本书随机地放在书架上，求其中指定的3本书靠在一起A的概率。

两种方法：$P(A)=8!3!/10!$

或者$P(A)=8(3!\cdot 7!)/10!$

例4 将n双长短各不相同鞋子随机地分成n堆，每堆两只，求事件A=“每堆各成一双”的概率。

多组组合公式：

$$P(A) = n! / \frac{(2n)!}{(2!)^n}$$

$$= \frac{n!(2!)^n}{(2n)!}$$

- 例5　将r个人随机地分到n个房间里，每间房足以容纳r个人，设A_1="某指定的r个房间中各有一人"，设A_2="恰有r个房间中各有一人"，设A_3="某指定房间恰有k人"　求P(A_1),P(A_2) , P(A_3)
- 解：这是一个分配问题。把n个房子分配给r个人或r个人任选n间房子。此问题适用于分信到信箱中；分球到盒子中；生日问题等。
- 分配的基本原则：一个人不可同时占用2间或2间以上房子。

$$\#(S)=n^r$$

$$P(A_1)=\frac{\#(A_1)}{\#(S)}=\frac{r!}{n^r}$$

$$P(A_2)=\frac{C_n^r r!}{n^r}=\frac{P_n^r}{n^r}$$

$$P(A_3)=\frac{\#(A_3)}{\#(S)}=\frac{C_r^k (n-1)^{r-k}}{n^r}$$

例6 某袋中有a个黑球，b个白球，若随机地把球一个接一个地摸出来，求A="第k次摸出黑球"概率。（$1 \le k \le a+b$）

解：我们用两种方法：

（1）设a个黑球，b个白球均编号。

$$\#(S)=(a+b)!$$

$$P(A)=\frac{\#(A)}{\#(S)}=a[(a+b-1)!]/(a+b)!$$

$$=\frac{a}{a+b}$$

（2）设a个黑球无区别，b个白球亦无区别。

$$\#(S) = C_{a+b}^{a}$$

$$\#(A) = C_{a+b-1}^{a-1}$$

$$p(A) = \#(A)/\#(S)$$

$$= C_{a+b-1}^{a-1} / C_{a+b}^{a} = \frac{a}{a+b}$$

或者

$$\#(S) = C_{a+b}^{b} \qquad \#(A) = C_{a+b-1}^{b}$$

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(S)} = \frac{a}{a+b}$$

总结：

（1）对同一随机现象，可用不同的模型来描述，只要方法正确，结论总是一致的。

（2）此例从理论上说明了平常人们采用的“抓阄儿”办法是公平合理的。$P(A)$与k值无关！它常用于竞赛分组等。

§1.3.4 古典概率的性质

定理1.1 事件的古典概率具有下列性质：

（1）对于 $\forall A \subset S, 0 \le P(A) \le 1$ （非负性）

（2）$P(S)=1$ （规范性）

（3）若$AB=\phi$ 则$P(A+B)=P(A)+P(B)$

(有限可加性）

推广：若$A_1, \cdots, A_n$互不相容，则有：

$$P(A_1+\cdots+A_n)=P(A_1)+\cdots+P(A_n)$$

我们利用性质（1）—（3）直接导出：

（4） $P(\overline{A})=1-P(A)$

（5）$P(\phi)=0$

（6）若 $A\subset B$ 则 $P(A)\le P(B)$ 且

$P(B-A)=P(B)-P(A)$

（7）对于 $\forall A,B\subset S$ 均有：

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

(一般概率的加法公式）

证明

（4）　$\because A\overline{A}=\phi, A+\overline{A}=S$

$\therefore$ 利用$(2)(3)$: $P(S)=1=P(A)+P(\overline{A})$

$\therefore P(\overline{A})=1-P(A)$

（5）利用（4）：　$\phi=\overline{S}$

$\therefore P(\phi)=1-P(S)=1-1=0$

$$(6)\because A\subset B$$

$$\therefore B=A+B-A$$

$$\therefore P(B)=P(A)+P(B-A)$$

又利用$(1):P(B-A)\geq 0$

$$\therefore P(B)\geq P(A)$$

且$P(B-A)=P(B)-P(A)$

$$(7)\because A\bigcup B = A + (B - A)$$

而 $A\bigcap(B-A)=\phi$

$$B - A = B - AB$$

$$\therefore P(A\bigcup B) = P(A + (B - AB))$$

$$= P(A) + P(B - AB)$$

$$= P(A) + P(B) - P(AB)$$

推广：n=3，A_1，A_2，A_3 $\subset S$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

$$- P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3)$$

一般地， $n \ge 3$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_iA_j)$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$$

对于一般 $m \ge 3$可利用数学归纳法证明之。

我们在解决有关古典概率一类问题时，常常利用古典概率的性质(1)—(7)，它们利于问题简化和解决。

例7 五个数的电话号码是由0,1,2,…,9组成的，若设A=“五个数码中至少有两个相同”，求$P(A)$。

解：设A_i表示有且不多于i个数码相同事件(i=2,3,4,5)

(1)由题设

$$A = \sum_{i=2}^{5} A_i$$

$$P(A) = \sum_{i=2}^{5} P(A_i)$$

$$P(A_2) = 10C_5^2\left(P_9^3 + \frac{9C_3^2 \cdot 8}{2!}\right)/10^5$$

$$P(A_3) = 10C_5^3\left(P_9^2 + \left(9C_2^2\right)\right)/10^5$$

$$P(A_4) = 10C_5^4 P_9^1 / 10^5$$

$$P(A_5) = 10C_5^5 / 10^5$$

$$P(A)=0.6976=\left[\left(C_5^2P_{10}^4+\frac{5!}{2!2!1!2!}P_{10}^3\right)\right.$$

$$+\left(C_5^3P_{10}^3+\frac{5!}{3!2!}P_{10}^2\right)$$

$$\left.+\left(C_5^4P_{10}^2\right)+C_5^5P_{10}^1\right]/10^5$$

$$=\frac{61200+8100+450+10}{10^5}$$

- （2）利用 $P(\overline{A})=1-P(A)$
- $\overline{A}$ =“五个数码全不同”

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{P_{10}^5}{10^5}=0.6976$$

例8　设有180只产品，其中含有8只次品，今从中任取4只，问A=“次品超过一只”的概率是多少？

解：设A_i表示“有i只次品”事件。(i=0,1,2,3,4)

$$P(A_i)=C_8^i C_{172}^{4-i}/C_{180}^4 \qquad (i=0,1,2,3,4)$$

$$P(A_2)=0.010,$$

$$P(A_3)=0.000,$$

$$P(A_4)=0.000$$

从而 $P(A)=0.010$

例9 由10，11，…，99中任取一个两位数，求C = “这个数能被2或被3整除”的概率。

解：设A、B分别表示此数“被2整除”、“被3整除”

$$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

而$P(A)=45/90$

$$P(B)=30/90$$

$$P(AB)=15/90$$

$$P(C)=1/2+1/3-1/6=2/3$$

- 补充两个例子
- 例10（取卡片例子）某袋中有标号为1~n的n张卡片，从袋中依次摸出，求A=“至少有一张卡片标号与其排列的序号相同”的概率
- 例11（生日问题）教室中有四个人，求A=“至少有两个人生日所在月份相同”的概率。

§1.4 几何概率

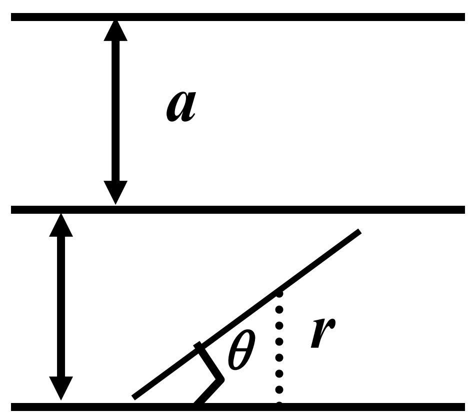
引子：古典概率定义的推广：

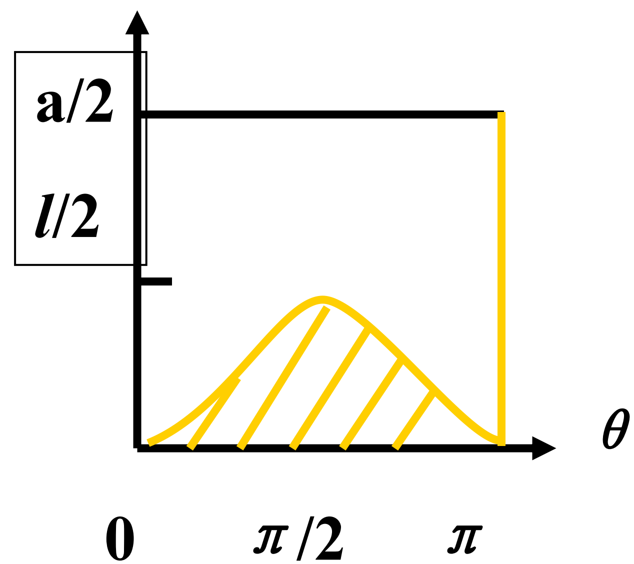
（1）#(S)有无限个；（2）等可能假设。

- 例1 某商场电梯每隔15分钟开一次，求每个顾客等梯时间不多于10分钟A的概率。
- 例2 向区域S内随机地掷一质点，考虑质点落在子区域A内概率。

- 例3 （Buffon投针问题，1777）在平面上画出等距离为a(a>0)的一些平行线，向平面上随机地掷一根长为l（ l<a）的针，求针与平行线相交A的概率。

解：设 θ 为棒的轴线与平行线夹角（正向），r为棒中心到最近平行线距离。





A表示针与平行线相交事件。

$$S=\left\{(\theta,r)\middle|\, 0\le\theta\le\pi, 0\le r\le\frac{a}{2}\right\}$$

$$A=\left\{(\theta,r)\middle|\, 0\le r\le\frac{l}{2}\sin\theta, 0\le\theta\le\pi\right\}$$

化为例1、例2同E概型计算。

1 几何概率定义

- 直观而合理的假设：随机点落在S内的任何子区域A内概率只与这个子区域的度量成正比，而与其位置与形状无关。等可能假设。
- Question：随机点落在S中某一点概率多大？
- **定义1：** 向一区域S（如一维区间、二维区间……）掷一质点，若M必落在S内，

且落在S的任何子区域A内的可能性只与A的度量（如长度、面积，……）成正比，而与A的位置与形状无关，则称这个E为几何概型E，并定义M落在A中概率为：

- $P(A)=L(A)/L(S)$

其中$L(S),L(A)$分别表示S，A的度量。

计算：

例1 $P(A)=L(TT_2)/L(T_1T_2)=10/15=2/3$

例2 $P(A)=L(A)/L(S)$

例3 P(A)=L(A)/L(S)= $\int_0^{\pi} \frac{l}{2} \sin\theta d\theta / \frac{a}{2} \cdot \pi = 2l / a\pi$

(含 π)

Note：在例3中P(A)与 π 有关，于是不少人想利用它来计算 π 的数值，其方法是投针N次，计算针与线相交次数n，再用比值n/N（频率）作为概率P(A)值代入上式得：

$$\pi = \frac{2Nl}{an}$$ （下面把a折算为1）

1850—1925年

1850 Wolf l=0.8 N=5000 n=2532 π=3.1596

1901 lazzerini l= 0.83 N=3408 n=1808 π=3.1415929

- **思想：建立一个概率模型，它与某些我们感兴趣的量（π等）有关，然后设计适当的E，并通过这个E的结果来确定这些量。**随着计算机的发展，已按上述思想建立了一类新的办法，称Monte-Carlo方法（**随机模拟方法or统计试验方法**）。数学家**徐钟济先生首先将此法引入中国，他曾师从K·Pearson**（英.著名统计学家），著作《Monte - Carlo方法》。

思考：利用Monte-Carlo方法计算积分

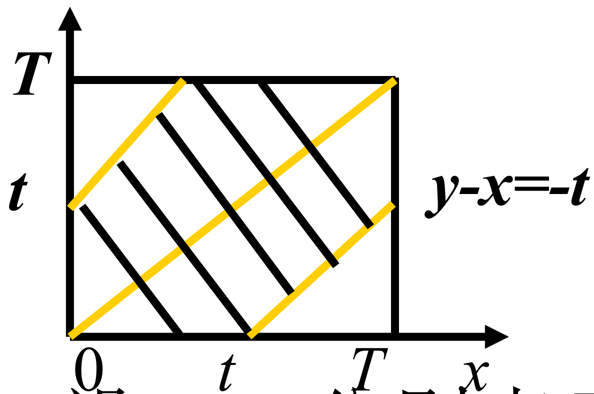
$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

（利用约当不等式:当 $0 < x \le \dfrac{\pi}{2}$ 时，

$$\frac{2}{\pi} \le \frac{\sin x}{x} < 1$$

）

- 例4（约会问题）二人约定于0至T时刻内在某地会面，先到者等$t(t \le T)$时后离去，求二人能会面A的概率。



- 解：设x，y分别表示甲、乙两人到达某地时间。
- 甲、乙两人会面（A发生）$\Leftrightarrow \begin{cases} \{|x-y| \le t\} \\ S \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \{(x \mid y) \mid y - x \le t \text{且} y - x \ge -t\} \\ S = \{(x, y) \mid 0 \le x \le T, 0 \le y \le T\} \end{cases}$$

$$A = \{(x, y) \mid \quad |x - y| \le t\}$$

$$S = \{(x, y) \mid 0 \le x \le T, 0 \le y \le T\}$$

$$P(A) = \frac{T^2 - (T - t)^2}{T^2} = 1 - \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2$$

注意讨论其蕴含人类的智慧

2 几何概率的性质（与古典概率一样）

定理： 事件的几何概率具有下列性质

（1）对 $\forall$事件$A \subset S$, $0 \le P(A) \le 1$

（2）$P(S)=1$

（3）设A_1，…, A_n为互不相容的事件，则

$$P(A_1+\cdots+A_n)=P(A_1)+\cdots+P(A_n)$$

（3）之证明需用到度量之可加性。

利用(1)(2)(3)可证明：(4)(5)(6)(7).

例5、（三角形构成问题）（ex25)

§1.5　统计概率

引子：在等可能假设的前提下，对于古典概型和几何概型的E中事件A发生的可能性大小，我们得到了两个特殊的数字

度量公式——古典概率和几何概率公式。显然，这无论在理论中或是在实际工程中都无法满足要求。

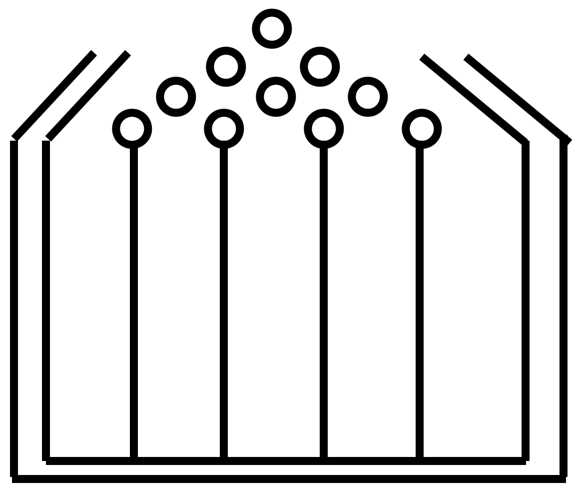
例1 在英语中讨论与研究所有字母出现的次数与频率统计表）如下：

字母		E	T	O	A	N
频率	0.2	0.105	0.072	0.0654	0.063	0.059
字母	I	R	S	H	D	L
频率	0.055	0.054	0.052	0.047	0.035	0.029
字母	C	F	U	M	P	Y
频率	0.023	0.0225	0.0225	0.021	0.0175	0.012
字母	X	J	Q	Z	W	G
频率	0.002	0.001	0.001	0.001	0.012	0.011
字母	B	V	K			
频率	0.0105	0.008	0.003			

引自L.Brillouin，Science and Information Theory,New York (1956)在进行了更深入的研究之后，人们发现各个字母被使用的频率具有稳定性。（作用与意义：对于打字机键盘的设计（方面），印刷铅字的铸造，信息码、密码的破译等均有现实意义。）

- 例2 （Galton板）自上端放入一小球，任其自由下落，在下落过程中当小球碰到钉子时，从左边落下与从右边落下的机会相等。碰到下一排针子时又是如此，

最后落入底板中的某一格子。求小球落入各个格子的概率。



英国著名生物统计学家Galton发现：若放入大量小球，小落入各个格子的频率十分稳定。

- 例3 掷一枚质量均匀硬币n次，并观察正面出现的次数。

			N	$m(A)$	$f_n(A)$
(1777)	Buffon	法	4040	2048	0.5069
(20世纪）	K ·Pearson	英	12000	6019	0.5016
	K ·Pearson	英	24000	12012	0.5005

结论：两位不同国家、不同时代的数学家进行同样E，都得到了随着n增大，且n很大时，硬币出现正面（A）的频率$f_n(A)$愈来愈接近1/2。

（据直观经验和直观假设）

1 频率的定义

定义1 设A为某E的事件，将E在相同条件下重复n次，用m表示A出现的次数，则比值m/n称为事件A的相对频率，简记为$f_n(A)$。

Note：（1）由上述例子表明，当n充分大时，$f_n(A)$呈现出明显的规律性（统计规律性）—频率的稳定性。

（2）频率$f_n(A)$具有不确定性，即对

$$\forall n, \text{一般地}, f_n^1(A) \neq f_n^2(A)$$

同例3说明：

（1）当n充分大时，$f_n(A)$围绕常数p=1/2摆；

（2）n愈来愈大时，这种摆动幅度愈来愈小。

从而频率所稳定的这个值p=1/2即相应事件发生可能性大小的一个客观的定量的度量，我们称之为相应事件的概率。

定义2 在一组固定条件下，重复进行n次E，若当n很大时，事件A出现的频率$f_n(A)$

围绕某个常数p摆来摆去；且一般来说随着n的增大，这种摆动的幅度愈来愈小，则称常数p为事件A的统计概率。记$P(A)=p$

Note:(1)此定义适合于一切类型E；

(2)定义中没有提供直接确定概率p的方法，但当n充分大时，$f_n(A)$呈现出规律性，有一个近似计算公式：

- $f_n(A)=m/n \approx P(A)$

按统计概率的定义，概率实际是频率的数学抽象；因此，我们据频率所具有的性质，来推断统计概率应具有的性质。

定理2 事件的频率具有以下性质：

（1）对$\forall$事件$A\subset S$,有：$0\le f_n(A)\le 1$

（2）$f_n(S)=1$

（3）设$A_1 \ldots, A_k$为S中k个互不相容事件，则：

$$f_n(A_1+A_2+\cdots+A_k)=f_n(A_1)+\cdots+f_n(A_k)$$

Poof: (1)(2)略

（3）设在n次E中，A_1，$\ldots$,A_k发生的次数分别为$n_1, n_2,\ldots,n_k$，由于A_1，$\ldots$, A_k互不相容，故事件$A_1+\cdots+A_k$发生的次数为$n_1+\cdots+n_k$, 从而得到:

$$f_n(A_1+\cdots+A_k)=(n_1+\cdots+n_k)/n$$
$$=n_1/n+\cdots+n_k/n$$
$$=f_n(A_1)+\cdots+f_n(A_k)$$

由Th2及定义2知，统计概率满足性质：

(i)$0\leq P(A)\leq 1$

(ii)$P(S)=1$

(iii)若$A_1,A_2,\ldots,A_n$是互不相容的，则

- $P(A_1+\cdots+A_n)=P(A_1)+\cdots+P(A_n)$

我们由(i)、(ii)、(iii)亦可导出(iv)—(vii)性质。

§1.6 概率的公理化定义

引子：古典概率、几何概率定义的局限性和统计概率的局限性。

原因：

（1）统计概率由事件A频率来定义，具有不确定性；

（2）p常数无法确定。这需要我们从前边多种E的数字模型中再进行一次数学抽象，

什么是概率的固有属性呢？这是问题的关键所在。

显然概率（就三种具有E）的前三条性质（非负性、规范性、有限可加性）是最基本亦是固有属性。由此人们自然地想到用它们或其推广形式作为概率论的基本公理，其余结论则是由它们经过

演绎导出。（十九世纪末以来，数学的各个分支广泛流行着一股公理化潮流）

在这种背景下，1933年，前苏联数学家Kolmogrov提出了概率论公理化结构，这个结构综合了前人成果，明确定义了基本概念，使概率论成为严谨的数学分支，对近几十年来概率论的迅速发展起了积极作用。

公理1 设S为样本空间，A为事件，那么对每个事件A都有一个满足不等式，$P(A)\geq 0$的实数$P(A)$与之对应，称之为事件A的概率。

公理2 $P(S)=1$

公理3 若A_1，A_2，…,是互不相容事件，那么$P(A_1+\cdots+A_n+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)$

$$+\cdots+P(A_n)+\cdots$$

又称之为可列可加性或完全可加性（包含有限可加性），适用于S含有限个点情形。

概率论全部理论都是建立在上面三条公理上的。

推论1　$P(\phi)=0$

推论2　设A_1，A_2，…，A_n互不相容事件，则

$$P(A_1+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

推论3　$0\le P(A)\le 1$

Note

(1)古典概率(4)—(7)可由公理1、2，推论2导出；

(2)特殊形式概率 →公理化概率定义（数学抽象）；

(3)没有提供 $P(A)$计算方法，但公理适合于各种不同的情形。

补充例子

例1 （1）r个人生日全不同概率；（2）教室里4个人至少有两人生日在同一个月概率；（EX7)

例2 6个人中生日在星期几等可能，求其生日在一星期中某两天但不在同一天A概率；(EX8)

例3 从编号为1~10任取三个，求（1）最小号码为5 这一事件A的概率；（2）最大号码为5这一事件 B的概率；(EX6)

例4 若A1,A2,A3同时发生必然导致A发生，则

$$P(A) \geq \sum_{i=1}^{3} P(A_i) - 2$$

（n=3时Bonferroni不等式）

例5若(EX23) $P(A)=P(B)=P(C)=1/4$,

, P（AB）=0=P（AC），P（BC）$= 1/8$

求 $P(A \cup B \cup C)$

例6 (EX16)设 $P(A)=p, P(B)=q, P(A\bigcup B)=r$

求 $P(AB), P(\overline{A}B), P(A\overline{B}), P(\overline{A}\cup B)$

例1 设$S=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$规定

①$P(e_i)\geq 0,\qquad i=\overline{1,n}$

② $$\sum_{i=1}^{n} P(e_i)=1$$

则对于 $\forall A=\{e_{i1},\cdots,e_{ik}\}$

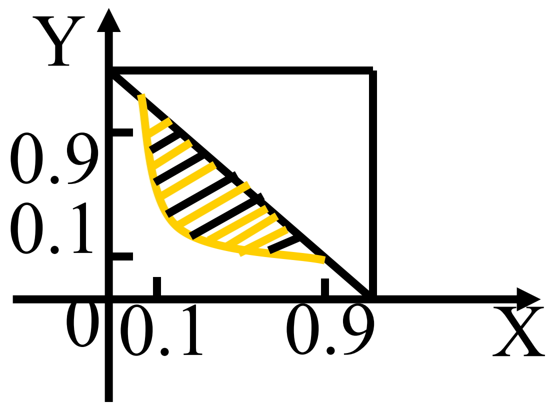
$$P(A)=\sum_{j=1}^{k} P\left(e_{i_j}\right)$$

若 $P(e_1)=\cdots=P(e_n)$

则$P(A)=\dfrac{k}{n}$

习题课（一节课）

1．随机地取两个小于1正数x,y，这两个数的每一个都不超过1，试求x与y之和不超过1，积不小于0.09的概率。



解：满足条件事件为A

$S=\{(x,y)|\ 0<x,y<1)\}$

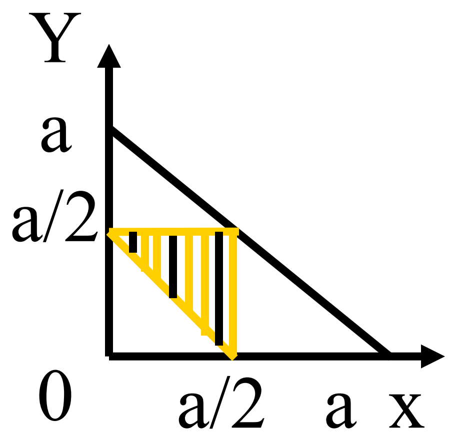
$A=\{(x,y)|\ 0<x+y\leq 1，\ xy\geq 0.09\}$

$P(A)=L(A)/L(S)$

$$= L(A)\big/L(S) = \int_{0.1}^{0.9}(1-x-\frac{0.09}{x})dx/1$$

$$=0.40-0.09ln9=0.\ 20$$

- 2．把长度为a的棒任意折成三段，求它们可以构成一个三角形的概率。



解：设三段长度分别为x,y，$a-(x+y)$，此三段能构成一个三角形事件为A。

$S=\{(x,y)|\ \ 0<x+y<a,\ a>x,\ y>0\}$

$$A\text{发生} \quad \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x+y>a-(x+y) \\ x+a-(x+y)>y \\ y+a-(x+y)>x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x+y>\dfrac{a}{2} \\ y<a/2 \\ x<a/2 \end{matrix}$$

$$A=\{(x,y)\,|\,a/2>x, a/2>y, x+y>a/2\}$$

$$P(A)=L(A)/L(S)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}a\times\frac{1}{2}a \Big/ \frac{1}{2}a^2=\frac{1}{4}$$

- 3．设A、B、C是随机E的三个事件，试用A、B、C及对立事件表示下列事件：
- （1）仅B发生；
- （2）A、B、C中至少有2个发生；
- （3）A、B、C中恰有两个发生；
- （4）A、B、C中不多于两个发生；
- （5）A、B、C中至多有一个发生。

$$(1)\ \overline{A}B\overline{C}$$

$$(2)\ AB \cup AC \cup BC = AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$$

$$(3)\ AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$$

$$(4)\ \overline{ABC} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

$$(5)\ \overline{A}\,\overline{B} \cup \overline{A}\,\overline{C} \cup \overline{B}\,\overline{C} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$$

- 4．设事件A_1，A_2，A_3同时发生必导致事件A发生，证明：
  - $P(A)\geq P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-2$
- 证明：由题意

$$A_1A_2A_3 \subset A$$

$$\therefore \bigcup_{i=1}^{3}\overline{A_i} = \overline{\bigcap_{i=1}^{3}A_i} \supset \overline{A}$$

$$于是 P\left(\overline{A}\right) \le P\left(\bigcup_{i=1}^{3} \overline{A}_i\right)$$

$$即 1 - P(A) \le \sum_{i=1}^{3} P\left(\overline{A}_i\right) - P\left(\overline{A}_1 \overline{A}_2\right) - P\left(\overline{A}_1 \overline{A}_3\right)$$

$$- P\left(\overline{A}_2 \overline{A}_3\right)$$

$$+ P\left(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3\right)$$

$$即 \quad 1 - P(A) \le 3 - \sum_{i=1}^{3} P(A_i) + W$$

$$W=-P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2\right)-P\left(\overline{A}_1\overline{A}_3\right)$$

$$-P\left(\overline{A}_2\overline{A}_3\right)+P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\right)$$

$$\therefore P(A)\geq P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)+P\left(A_3\right)-2-W$$

$$\geq\sum_{i=1}^{3}P\left(A_i\right)-2$$

$$[-W=P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2\right)+P\left(\overline{A}_1\overline{A}_3\right)$$

$$+P\left(\overline{A}_2\overline{A}_3\right)-P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\right)\geq 0$$

$$\because(\overline{A}_1\overline{A}_2\supset\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3,P(\overline{A}_1\overline{A}_2)\geq P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)$$

并且$P\left(\overline{A}_2\overline{A}_3\right)\geq 0,P\left(\overline{A}_1\overline{A}_3\right)\geq 0)$

- 5. 若事件A.B.C满足ABC=Φ， 能否断定A，B，C互不相容？为什么？
- 解：不能断定。
- 反例：在古典概型E中，
- $S=\{1,2,3,4,5,6\}$
- $A=\{1,2\}$，$B=\{2,3\}$，$C=\{4,5\}$
- $ABC=\phi$但$BC=\phi$，$AB\neq\phi$，于是
- 不能断定A、B、C互不相容。

- 6．一袋中装有$N-1$只黑球及1只白球，每次从袋中随机地摸出一球，并换入一只黑球，这样继续下去，问第k 次摸球时摸到黑球的概率是多少？
- 解：设A表示第k次摸到黑球事件，则$\overline{A}$表示第k次摸到白球。
- 因为袋中只有一只白球，而每次摸到白球总是换入黑球，故为了在第k次摸到白球，则前面的$k-1$次一定不能摸到白球，故$\overline{A}$表示第k次摸到白球。

因为袋中只有一只白球，而每次摸到白球总是换入黑球，故为了在第k次摸到白球，则前面的k－1次摸球时都摸出黑球而第k次摸出白球，于是有：

$$P(\overline{A})=(N-1)^{k-1}\cdot 1/N^{k}=(1-\frac{1}{N})^{k-1}\cdot\frac{1}{N}$$

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-(1-\frac{1}{N})^{k-1}\cdot\frac{1}{N}$$

- 7．袋中装有1，2，…,N号的球各一只，采用（1）有放回，（2）不放回方式摸球，求在第k次摸球时首次摸到1号球的概率。

- 解:(1)设第k次首次摸到1号球事件为A

$$P(A)=(N-1)^{k-1}\cdot 1/N^{k}=\left(1-\frac{1}{N}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{N}$$

- (2)A为第k次首次摸到1号球事件。

$$P(A)=P_{N-1}^{k-1}\cdot 1/P_{N}^{k}=\frac{1}{N}$$

- 8．设一个人的生日在星期几是等可能的，求6个人的生日都集中在一星期中的某两天但不是都在同一天的概率。
- 解：设6个人的生日都集中在一星期中某两天但不在同一天事件为A。

$$P(A)={}^{\#(A)}\!\big/_{\#(S)}=(C_7^2 2^6-C_7^2-C_7^2)/7^6$$

$$=(C_7^2 2^6-C_7^2\cdot 2)/7^6$$

第一章　事件与概率总结

三个问题：

（1）随机现象怎么描述？

（2）两类特殊概型及其概率的计算方法和例子；

（3）概率的本质是什么？