§2.5 命题演算形式系统(PC)

[本节主要内容]

1)命题演算形式系统PC的组成:包括
字符集及形成规则、公理、推理规则;
2)PC的基本定理;
3)PC的系统性质定理。

§2.5.1命题演算形式系统PC的组成

命题演算形式系统的组成通常包括语言部分和推理部分。命题演算形式系统的语言部分主要包括字符集、命题公式的形成规则。推理部分包括公理、推理规则及定理推导。

1. 字符集

1) 原子变元符: $p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$

2) 联结词完备集: $\{\neg, \rightarrow\}$

3) 辅助符号：圆括号()

通常将字符集部分用符号表表示为:

$$\Sigma = \{(\,,\,), \neg, \rightarrow, p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots\}$$

2. 形成规则： 由原子变元符及联结词形成命题公式的的规则，即命题公式的定义

3. 公理：挑选最基本的重言式作为公理，使得它们能作为推导其他所有重言式的依据。在PC系统中包括如下三个公理模式：

$$A1: A \to (B \to A)$$

$$A2: (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$$

$$A3: (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$$

4. 推理规则：用于从已有的公理和已推理出来的结论来推理另一结论。

在PC系统中仅有一个推理规则，称为分离规则 (r_{mp})：

即若有结论 A 及 $A \to B$ 成立

则必有结论 B成立.

可用形式化序列表示为：A，$A \to B$，B

5. 定理推导：是PC形式系统中的重要内容，包括所有的推理结论及其推理过程。

§2.5.2 PC的基本定理

定义1 证明：称下列公式序列为公式 A 在PC中的一个证明：

$$A_1, A_2, \cdots, A_m (= A)$$

其中 $A_i (i = 1, \cdots, m-1)$ 或为PC的公理，或为 $A_j (j < i)$ ，或为 $A_j, A_k (j, k < i)$ 使用 r_{mp} 导出的，而 A_m 即为公式 A

定义2 定理： 如果公式 A 在PC中有一个证明序列，则称 A 为PC的定理，记为 $\vdash_{PC} A$ 或简记为 $\vdash A$

定义3 演绎：设Γ为PC的一公式集，

称下列公式序列为公式A以Γ为前提的演绎：$A_1, A_2, \cdots, A_m (= A)$

其中$A_i (i = 1, \cdots, m-1)$或为PC的公理，

或为Γ中的成员，或为$A_j (j < i)$

或为$A_j, A_k (j, k < i)$使用r_{mp}导出的，

而A_m即为公式A

记为$\Gamma \vdash_{PC} A$或简记为$\Gamma \vdash A$

并称A为Γ的**演绎结果**。

定义4 演绎等价：若 $A \vdash B$ 且 $B \vdash A$

则称公式 A, B 演绎等价，

记为 $A \dashv\vdash B$

定理1 $\vdash A \to A$

定理2 若 $\vdash P$ 则有 $\vdash A \to P$

定理3 $\vdash \neg A \to (A \to B)$

定理4 $\neg\neg A \vdash A$

定理5 $\vdash (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

定理6 $\vdash (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$

定理7 $\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

定理8 $\vdash (\neg A \to A) \to A$

定理9 $\vdash \neg\neg A \to A$

定理10 $\vdash A \to \neg\neg A$

定理11 $\vdash (A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$

定理12 $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

定理13 $\vdash (\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$

定理14 $\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))$

定理15 $\vdash A \rightarrow A \vee B$ 及 $\vdash A \rightarrow B \vee A$

定理16 $\vdash A \wedge B \rightarrow A$ 及 $\vdash A \wedge B \rightarrow A$

定理17 $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow (A \wedge B \rightarrow C)$

定理18 $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$

定理19 $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C))$

定理20 $\vdash A \vee B \leftrightarrow B \vee A$

定理21 $\vdash A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$

定理22 $\vdash [(A \vee B) \vee C] \leftrightarrow [A \vee (B \vee C)]$

定理23 $\vdash [(A \wedge B) \wedge C] \leftrightarrow [A \wedge (B \wedge C)]$

定理24 $\vdash A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$

定理25 $\vdash A \vee (A \wedge B) \leftrightarrow A$

定理26 $\vdash A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

定理27 $\vdash (A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)]$

定理28 演绎定理：对PC中任意公式集

Γ和公式 A, B，

$\Gamma \cup \{A\} \vdash B$(或简记为$\Gamma; A \vdash B$)

当且仅当$\Gamma \vdash A \to B$

例 利用演绎定理在PC中证明下列定理

1) $\vdash [A \to (B \to C)] \to \{(C \to D) \to [A \to (B \to D)]\}$

2) $\vdash [(A \to B) \to (A \to C)] \to [A \to (B \to C)]$

3) $\vdash (A \to C) \to \{(B \to C) \to [(\neg A \to B) \to C]\}$

§2.5.3 PC的基本定理

定理1 PC是合理的(可靠的)

即对任意的公式集Γ及公式A

若$\Gamma \vdash A$ 则 $\Gamma \Rightarrow A$

特别地，若A为PC的定理，即$\vdash A$

则 A永真。

定理2 PC是一致性的

即PC中不存在公式 A 与 $\neg A$ 均为PC的定理，即不存在公式 A 使得 $\vdash A$ 及 $\vdash \neg A$ 同时成立。

定义1 完全的：一个系统Φ是完全的，

当且仅当该系统中的任一公式 A，

或者 $\Phi \vdash A$ 或者 $\Phi \vdash \neg A$

定理3 PC不是完全的

即在PC中存在公式A使得$\vdash A$ 及 $\vdash \neg A$

均不成立。

例 $A = P \to Q$ 其中 P, Q为原子变元符，

则$\vdash P \to Q$ 及 $\vdash \neg(P \to Q)$均不成立。

定义2 PC的理论：

$$Th(PC) = \{A \mid \vdash_{PC} A\}$$

PC的基于前提 Γ 的扩充：

$$Th(PC \cup \Gamma) = \{A \mid \Gamma \vdash_{PC} A\}$$

引理1 设PC的公式集 Γ 是一致的，

且 $\Gamma \nvdash A$ 则 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ 也是一致的。

引理2 若 Γ 是PC的一致的公式集，

则存在公式集 Δ 使得 $\Gamma \subseteq \Delta$

且 Δ 是一致的且完全的。

引理3 对PC中任一公式 A，

$$A \in \Delta \text{ 当且仅当 } \Delta \vdash A$$

引理4 设 Γ 是PC的一致的公式集，则存在一个指派 ∂ ，使得 Γ 中每一个公式 A 有 $\partial(A) = T$

定理4 PC是完备的

对PC中任一永真式 A，必为PC的定理，

即有 $\vdash_{PC} A$

一般地，对PC的公式集 Γ 若 $\Gamma \Rightarrow A$

则 $\Gamma \vdash_{PC} A$