Homework 5

1. Let x and y are positive numbers. Please design a Turing Machine (diagram) to compute x - y(multiple of x and y). You should explain the notation of x and y. Hint : you may get the notation as simple as you can.
2. Let x and y are positive numbers. Please design a Turing Machine (diagram) to compute $x \times y$(multiple of x and y). You should explain the notation of x and y. Hint : you may get the notation as simple as you can.
3. Show that the regular languages are closed under the following operations: min(*L*) = { *w* | *w* is in *L*, but no proper prefix of *w* is in *L* }.
4. Use the CFL pumping lemma to show that the following language is not context free

   $\{ a^i b^j c^k \mid i < j < k \}$
5. Give a context-free grammar for the following language over the alphabet Σ ={a, b}

   $L = \{a^i b^j \mid i \neq j \text{ and } i \neq 2j \}$

Homework 5

1. Let x and y are positive numbers. Please design a Turing Machine (diagram) to compute x - y(multiple of x and y). You should explain the notation of x and y. Hint : you may get the notation as simple as you can.

解：将整数x表示为x个0.

将整数y表示为y个0

最后的结果若为正数，则在纸带上只留下$x-y$个零.

最后的结果若为负数，则在纸带上留下1和$y-x$个零.

执行此减法的图灵机M说明如下：

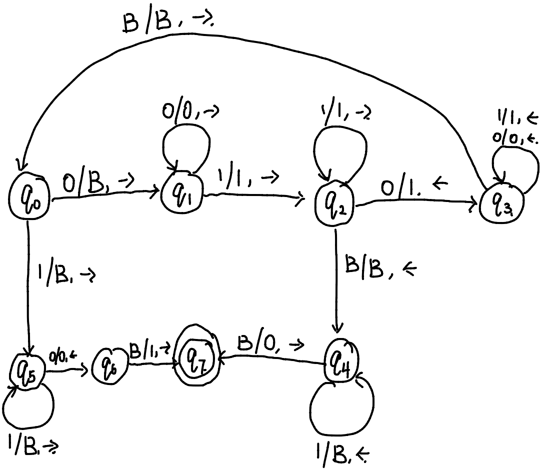
$M=\{\{q_0, q_1, q_2, \cdots, q_7\}, \{0,1\}, \{0,1,B\}, \delta, q_0, B\}$

输入的形式为0^x10^y. 那么.

⇒M的读写头从最左侧开始，将0改为B，然后向右跃过所有0，直到1，跃过所有的1，找到右侧第1个0，把这个0改写为1，读写头向左移动，直到遇到B，向右移动一步，读写头再次指向0，如此循环，直到如下两种情况结束.

①读写头在将左侧的0改为B之后，在右侧找0的过程中，发现找不到0，遇到了B，那么说明M已经将右侧所有0改写为1，那么左侧还剩下$x-y-1$个0，于是读写头向左移动，将其看到的1都改为B，直到遇到0，向右移动写入一个0，停机.

②读写头在循环开始时找不到可以改为B的0，那么右侧正好剩下$|x-y|$个0，于是读写头向右移动，将见到的1改为B，碰到第1个0之后，向左移动一格，写入一个1，停机.



000100

B00110

BB0111

BBB111B

BBB

001000

B01100

BB1110

BBB0

2. Let x and y are positive numbers. Please design a Turing Machine (diagram) to compute x ´ y(multiple of x and y). You should explain the notation of x and y. Hint : you may get the notation as simple as you can.

解：构造一个图灵机M. x, y的表示方法和1中相同.

思想：输入 $0^x 1 0^y 1$

该图灵机从最左侧的0开始，将0改为B，读写头向右移动，发现第1个1之后，右移，把右侧第一个0改为X，向右移，直到遇到1，越过1，越过所有0，写入一个0，读写头向左移，直到读写头碰到X，右移，改为X，重复上述过程，直到0^y全部改为X。即当遇到第1个X后右移碰到了1，那么读写头向左，把所有X改为0，其它不变，直到遇到B，向右移指向一个0，重复，直到0^x被B^x替换，即指到第1个0右移后为1，那么把1改为B，右移把所有0改为B，遇到1，改为B，停机.

000|00|

⇒B00|X0|0

⇒B00|XX|00

⇒B00|00|00

⇒BB0|X0|000

⇒BB0|XX|0000

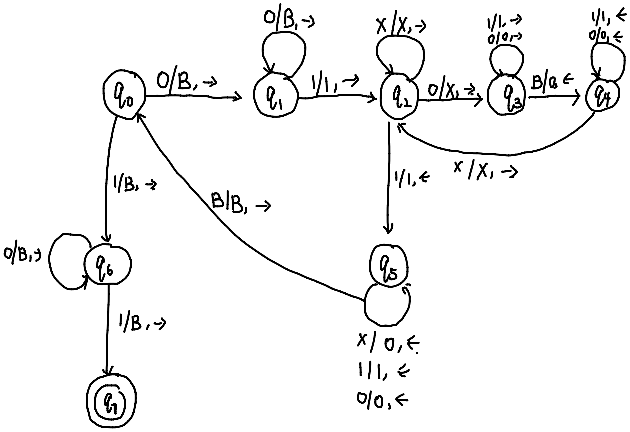
⇒BB0|00|0000

⇒BBB|X0|00000

⇒BBB|XX|000000

⇒BBB|00|000000

⇒BBBBBB000000



notation as simple as you can.

3. Show that the regular languages are closed under the following operations: min(L) = { w | w is in L, but no proper prefix of w is in L }. → 没有圈的PDA

会存在ε前缀.

解：要证L对于min(L)是封闭的，只需证明min(L)也是一个正则语言，即min(L)可以被某DFA接受。

如果L为一个正则语言，那么一定有一个DFA $D=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$可以接收L，现在D的基础上构造$D'=(Q',\Sigma,\delta',q_0,F)$，其中

$Q'=Q\cup\{q_\alpha\}$，且$q_\alpha\notin F$，$\delta'=\delta\cup A$，$A=\{\delta(q,\sigma)=q_\alpha \mid q\in F,\sigma\in\Sigma\}$。下面证明$D'$可以接收语言min(L)。

① 对$\forall w\in min(L) \Rightarrow w\in L(D')$

对于$\forall w\in min(L)$，有 ① $w\in L$

② 若$w=uv$，那么$v\neq\phi$时 $u\notin L$.

那么，∵ $\delta'\supseteq\delta$ 且 $w\in L$

∴ $\delta(q_0,w)\in F$，于是 $\delta'(q_0,w)\in F$，即w可以被自动机D'接受。

∴ 对$\forall w\in min(L) \Rightarrow w\in L(D')$

② 对$\forall w\in L(D') \Rightarrow \forall w\in min(L)$

由于δ'仅仅是在δ上增加了$\{\delta'(q,\sigma)=q_\alpha \mid q\in F,\sigma\in\Sigma\}$，于是，若$w\in L(D')$，有

$\delta'(q_0,w)\in F$

∴ $\delta(q_0,w)\in F$ 即 $w\in L$ ①

假设 $w=uv$，其中$v\neq\phi$，于是u为w的前缀且$u\neq w$，假设$u\in L$，那么，有

$\delta'(q_0,u)\in F$，而由于 $\{\sigma(q,\sigma)=q_\alpha \mid q\in F,\sigma\in\Sigma\}$

即所有在终节状态后面仍有的串都会被转移动q_α中去，于是

$\delta'(q_0,w)=q_\alpha\notin F$，这与$w\in L(D')$矛盾

∴ w中所有前缀都不属于L. ②

于是由①②，有 $w\in min(L)$

L_1, L_2 不为正则，$L_1\cap L_2$ 不是正则 X

$L_1=\{a^ib^j \mid i>j\}$

$L_2=\{a^ib^j \mid i\leq j\}$

$L_1\cap L_2=\phi$ 为正则

4. Use the CFL pumping lemma to show that the following language is not context free

$\{ a^i b^j c^k \mid i < j < k \}$

解: 设对于串 $z = a^n b^{n+1} c^{n+2}$, 有

若该语言L为上下文无关语言, 那么对于这样的串z, 可以将其分为 $z = uvwxy$, 且 $|vwx| \le n$

① 若 $|vwx| \le n$ 且 vwx 全部在 b 中, 那么, 我们有 vx 含有1, 并且至少含有一个1.

由泵引理, 我们有 $a^n b^i c^{n+2} \in L$ $(i \le n)$ 而显然 $n < i < n+2$ 不成立. 于是矛盾

说明语言L不为上下文无关语言.

② 若 $|vwx| \le n$ 且 vwx 全部在 a 中, 那么我们有 vx 含有1, 并且至少含有一个1.

由泵引理, 我们有 $uv^i w x^j y \in L$, 其中 $i+j \ge 1$, 那么 $uv^i w x^j y$ 可以表示为 $a^{n+i+j} b^{n+1} c^{n+2}$, 又 $i+j \ge 1$, ∴

$a^{n+i+j} b^{n+1} c^{n+2} \notin L$, 矛盾.

③ 若 $|vwx| \le n$, 且 vwx 不含有 c, 那么我们有 vx, 只含有 a, b 且至少含有1个.

$vx = aaabb$

⇒ 若 vx, 只含有 a, 由②知, 矛盾.

⇒ 若 vx, 只含有 b, 由①知, 矛盾.

⇒ 若 vx, 含有 a, b. 显然 v, x 不

且 a 的个数多于 b 的个数.

5. Give a context-free grammar for the following language over the alphabet å ={a, b}

$L = \{a^i b^j \mid i \neq j \text{ and } i \neq 2j\}$

解：对于本CFG. G=(V, T, P, S). 有

V= {S, A} T= {0,1}.

P: S→ aA | aAb

A→ aab | ~~aaAb~~

$\boxed{\begin{array}{l} i=j \\ S \to ab \mid aSb \end{array}}$

P→ aS | Sb

$\boxed{\begin{array}{l} i=2j \\ S \to aab \mid aaSb \end{array}}$

P→ aS | Sb | aSb

S→ A | B | C

i<j A→ aAb | b | Ab

j<i<2j B→ aaBb | aaDb

D→ aDb | ab

i>2j C→ aC | a | aaCb

i<j A→ aAb | ε.

B→ aA | aB

i>2j C→ aaCb | aab

D→ aC | aD

j<i<2j E→ aaGb

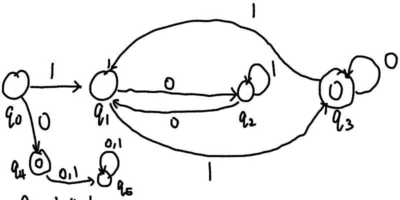
G→ aAb ⇒ 保证 G ≠ ε.

全a: F→ aF | a

构造一个DFA，~~接受~~$3_{(10)}$的倍数的字符串

3 11
6 110
9 1001
12 1011
15 1111
18 10010
21 10101

10
110
1001
1011
1111
10010



q_1：余数为1
q_2：余数为2
q_3：余数为3.

对于：$x = 3k + a$.

再读1位：$x0 = 2x + 0 = 6k + 2a$

$x1 = 2x + 1 = 6k + 2a + 1$

a	0	1	2
x0	0	2	1
x1	1	0	2

10
110
1001
1011
1111
10010
10101
11000

20+80