



§ 3.4 一阶谓词形式系统的语义

一阶语言中的个体常元、变元、项、函词、谓词等属于语法范畴的字符串，并没有实际的意义。一阶语言的语义就是对这些字符串赋予一定的意义，即对个体常元、函词、谓词进行指称，对变元取值的指派，对量词的意义的规定。一阶语言的语义是一个数学结构，包括论域 D 及对函词、谓词进行指称的解释 I 即赋予字符串特定的意义。

例1 对FC中的公式 $A = \forall x P(f(x, a), x)$

令论域 $D = R$ 为实数域;

常元 $a = 0$

二元谓词 $P(x, y) : x = y$

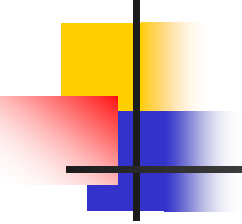
二元函词 $f(x, a) = x + a$

则此时公式 $A = \forall x (x + 0 = x)$

1. 解释 I 的组成:

一个解释就是一个映射 I ，它指称一阶语言中的常元、函词、谓词为：

- 1) 对任一常元 a 指定为论域 D 中的一个个体，记为 $I(a)$ ，简记为 \bar{a}
- 2) 对每一 n 元函词 $f^{(n)}$ 指定为 D 上一个 n 元函数，记为 $I(f^{(n)})$ ，简记为 $\bar{f}^{(n)}$
- 3) 对每一 n 元谓词 $P^{(n)}$ 指定为 D 上一个 n 元关系，记为 $I(P^{(n)})$ ，简记为 $\bar{P}^{(n)}$



2. 结构：对字符串形式的公式赋予特定意义的一个二元组 $\langle D, I \rangle$ 称为结构，记为 $U = \langle D, I \rangle$

将全体结构的集合记为 T

例2 对FC中的公式 $A = \exists x P(f(x, a), y)$

令论域 $D = N$ 为自然数域;

常元 $a = 1$

二元谓词 $P(x, y) : x < y$

二元函词 $f(x, a) = x + a$

则此时公式 $A = \exists x (x + 1 < y)$



3. 指派 S

一阶谓词演算中的指派是对个体变元指定为论域 D 中的个体作为其取值,

即为映射 $s : \{v_1, v_2, v_3, \dots\} \rightarrow D$

即对任一变元 v_i 有 $s(v_i) \in D$

指派 S 可扩展为从项集合到个体域的映射 \bar{S}

即对任意的项 t :

$$\bar{S}(t) = \begin{cases} s(v) & \text{当 } t \text{ 为变元 } v \text{ 时} \\ \bar{a} & \text{当 } t \text{ 为常元 } a \text{ 时} \\ \bar{f}^{(n)}(\bar{S}(t_1), \dots, \bar{S}(t_n)) & \text{当 } t \text{ 为 } n \text{ 元函词 } f^{(n)}(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

4. 记号 $\models_U A[s]$

称公式 A 在结构 $U = \langle D, I \rangle$ 及指派 S 下真值取值为真，记为 $\models_U A[s]$

反之则记为 $\not\models_U A[s]$

$\models_U A$ 则表示在结构 U 中，

对一切可能的指派 S ， A 均为真

$\models A$ 或 $\models_T A$ 则表示公式 A 在任何结构中均为真，即 A 永真



5. $\models_U A[s]$ 的严格定义

1) 当 A 为原子公式 $P^{(n)}(t_1, \dots, t_n)$ 时

$$\models_U A[s] \text{ iff } \langle \bar{s}(t_1), \dots, \bar{s}(t_n) \rangle \in \bar{P}^{(n)}$$

2) 当 A 为公式 $\neg B$ 时

$$\models_U A[s] \text{ iff } \not\models_U B[s]$$

3) 当 A 为公式 $B \rightarrow C$ 时

$$\models_U A[s] \text{ iff } \not\models_U B[s] \text{ 或 } \models_U C[s]$$

4) 当 A 为公式 $\forall v B$ 时

$$\models_U A[s] \text{ iff 对每一个 } d \in D \text{ 有:}$$

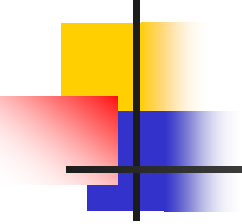
$$\models_U B[s(v \mid d)]$$

另对使用联结词 \vee, \wedge 和量词 \exists 时
作规定如下：

$$1) \models_U B \vee C[s] \text{ iff } \models_U B[s] \text{ 或 } \models_U C[s]$$

$$2) \models_U B \wedge C[s] \text{ iff } \models_U B[s] \text{ 且 } \models_U C[s]$$

$$3) \models_U \exists v B[s] \text{ iff 存在 } d \in D \text{ 使得} \\ \models_U B[s(v \mid d)]$$



例3 证明 $\models_U \neg \forall v \neg B[s]$
iff $\models_U \exists v B[s]$

例4 设论域 $D = N$ 为自然数集

一元函词 $\bar{f}(x) = x + 1$ 即 N 上的后继函数；

二元谓词 $\bar{P}(x, y) : x \leq y$

即 N 上的“小于等于”二元关系；

常元 $\bar{a} = 0$

则在此结构 U 下有如下结论：

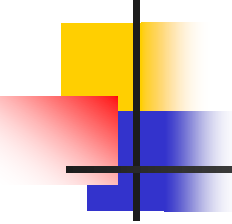
1) 当公式 $A = P(a, f(x))$ 时

则有 $\models_U A$

2) 当公式 $A = P(f(x), a)$ 时
则有 $\models_U A$

3) 当公式 $A = \forall x \exists y P(f(x), y)$ 时
则有 $\models_U A$

4) 当公式 $A = \exists y P(f(y), y)$ 时
则有 $\models_U A$



例5 证明对FC的公理 A ,
在所有的语义结构里均真, 即有 $\models_T A$

6. FC的逻辑蕴涵与逻辑等价的定义

设 Γ 为 FC 的公式集, B 为 FC 的公式,
若对任意使得 Γ 中每个公式均为真的结构
 U 及指派 s , 也使得 B 为真, 即有 $\models_U B[s]$
则称 Γ 逻辑蕴涵 B , 记为 $\Gamma \models B$.
若 $\Gamma = \{A\}$, 则有 $A \models B$, 称作 A 逻辑蕴涵 B .
若同时还有 $B \models A$, 则称 A 逻辑等价 B .