§3.2系统函数零极点∽时域特性和稳定性

一、系统函数$H(s)$零极点与$h(t)$波形关系

1． 系统函数零极点概念

①分母多项式之根 $\rightarrow$ 极点

②分子多项式之根 $\rightarrow$ 零点

③阶次 $\lim\limits_{s\rightarrow p_1} H(s)=\infty$，$(s-p_1)H(s)|_{s=p_1}$=有限值 $\rightarrow$ 一阶

$(s-p_1)^k H(s)|_{s=p_1}$直到 $k=n$ 才为有限值 $\rightarrow$ n阶

④ ∞ 处　分母次数 > 分子次数 则为零点，

阶次为分母次数－分子次数;

分母次数 < 分子次数 则为极点，

阶次为分子次数－分母次数

⑤ 零极点图中，$\times$表示极点，$\circ$表示零点

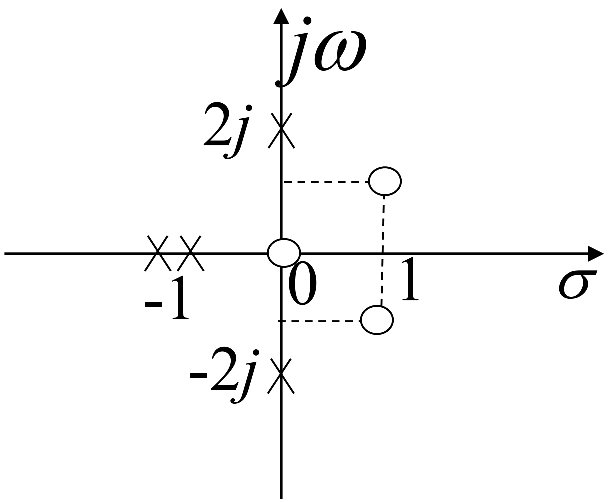
§3.2系统函数零极点∽时域特性和稳定性

[例1]： ① $H(s)=\dfrac{s[(s-1)^2+1]}{(s+1)^2(s^2+4)}$

解： ①极点：$s=-1$（二阶）$s=2j$（一阶） $s=-2j$（一阶）

零点：$s=0$（一阶） $s=1+j$（一阶）$s=1-j$（一阶）

$s=\infty$（一阶）

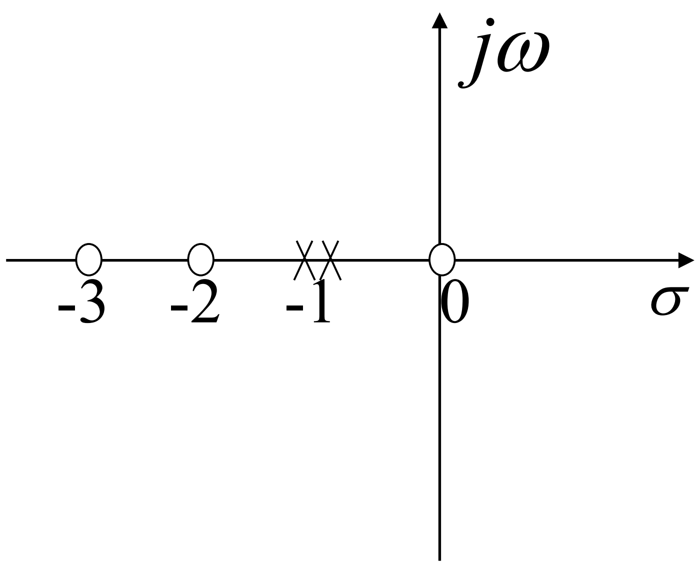


§3.2系统函数零极点∽时域特性和稳定性

[例1]： ② $H(s)=\dfrac{s(s+2)(s+3)}{(s+1)^2}$

解： ②极点：$s=-1$（二阶） $s=\infty$（一阶）

零点： $s=0$（一阶） $s=-2$（一阶） $s=-3$（一阶）

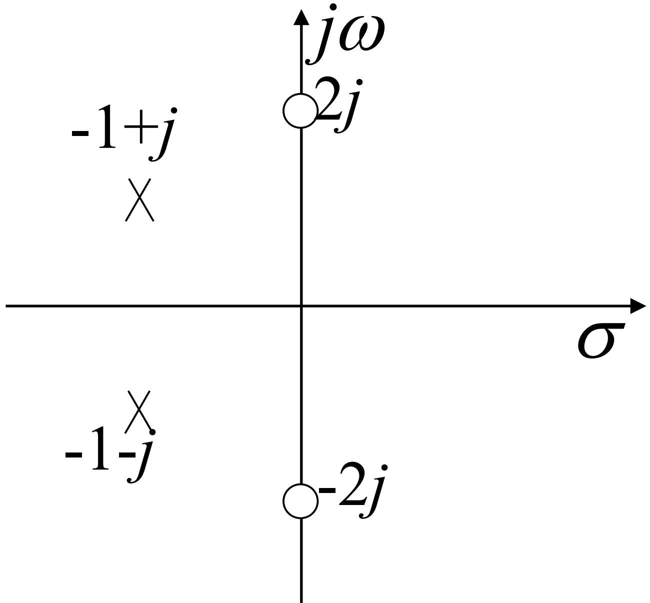


§3.2系统函数零极点∽时域特性和稳定性

[例1]：③ $H(s)=\dfrac{s^2+4}{(s+1)^2+1}$

解：③极点：$s=-1+j$（一阶） $s=-1-j$（一阶）

零点： $s=2j$（一阶） $s=-2j$（一阶）



§3.2系统函数零极点∽时域特性和稳定性

2. $H(s)$极点与$h(t)$波形特征关系

① $$H(s)=\frac{K\sum_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$ 设 $\begin{cases} p_1 \neq p_2 \neq \ldots \neq p_n \\ m<n \end{cases}$ 则：

$$H(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{s-p_i} \Rightarrow h(t)=\sum_{i=1}^{n}h_i(t)=\sum_{i=1}^{n}k_i e^{P_i t}$$

故： $p_i \to e^{p_i t}$

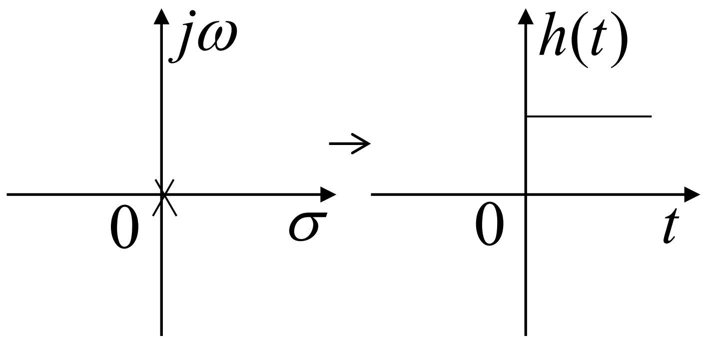
若 p_i 为k阶极点，则

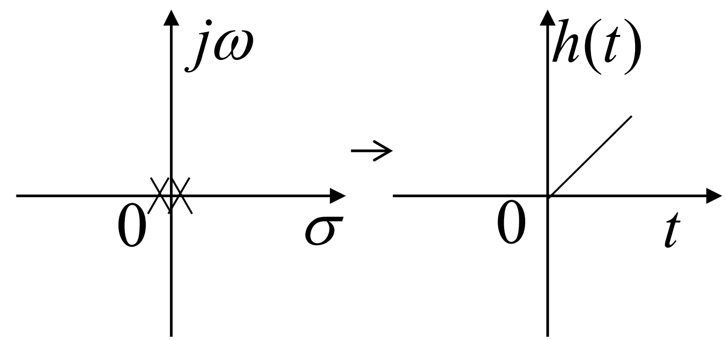
$$p_i \to \left[K_{i1}t^{k-1}+K_{i2}t^{k-2}+\cdots+K_{i(k-1)}t+K_{ik}\right]e^{p_i t}$$

§ 3.2系统函数零极点∽时域特性和稳定性

②典型情况

i) $p_i = 0$（一阶）　　　　$p_i = 0$（二阶）



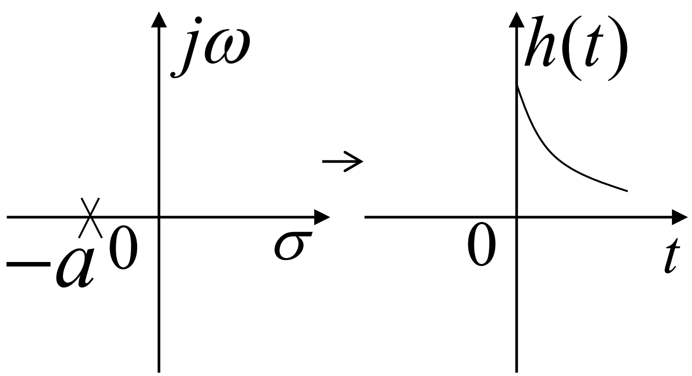


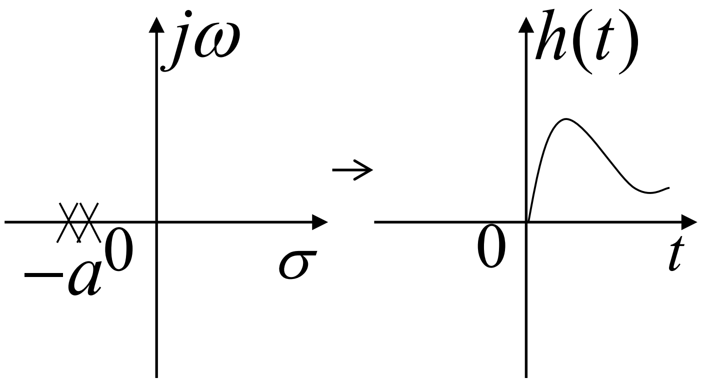
$$\frac{1}{s} \to h(t) = u(t)$$

$$\frac{1}{s^2} \to h(t) = tu(t)$$

§ 3.2系统函数零极点∽时域特性和稳定性

ii) $p_i < 0$（实一阶）　　　　$p_i < 0$ (实二阶)



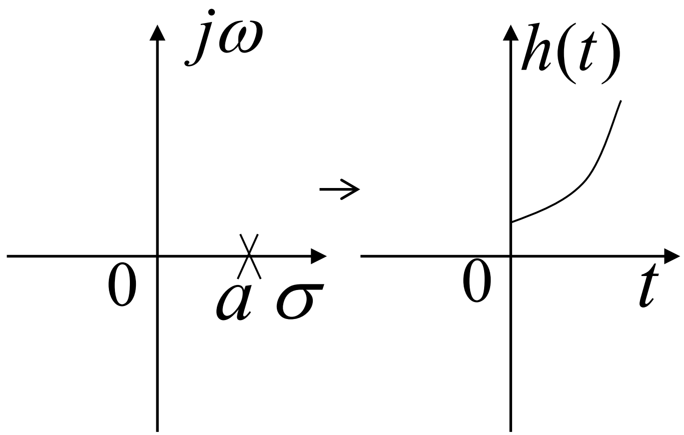


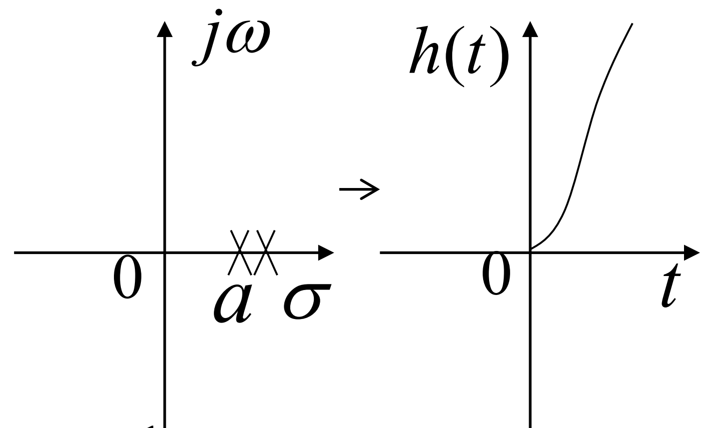
$$\frac{1}{s+a} \rightarrow e^{-at}u(t)$$

$$\frac{1}{(s+a)^2} \rightarrow te^{-at}u(t)$$

§3.2系统函数零极点∽时域特性和稳定性

iii) $p_i > 0$（实一阶） $p_i > 0$ (实二阶)



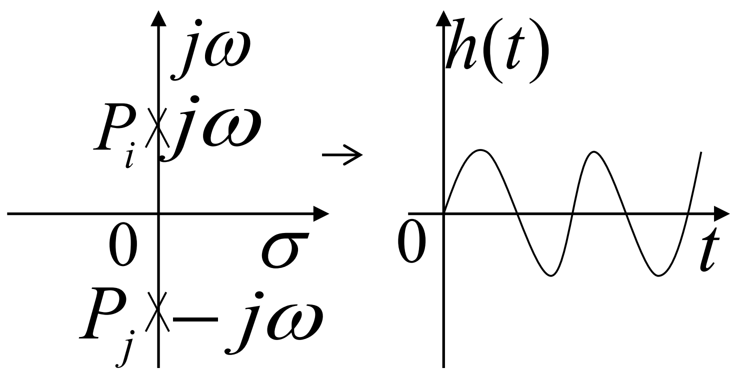


$$\frac{1}{s-a} \to e^{at}u(t)$$

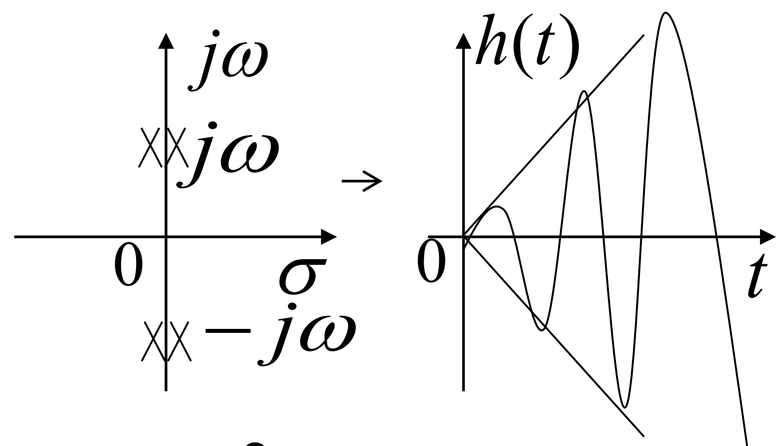
$$\frac{1}{(s-a)^2} \to te^{at}u(t)$$

§ 3.2系统函数零极点∽时域特性和稳定性

iv) p_i，p_j虚轴上共轭复根（一阶）虚轴上共轭复根（二阶）



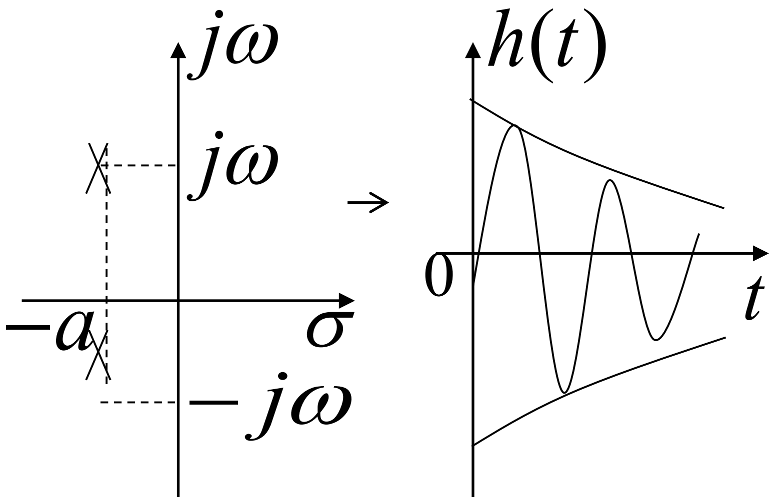
$$\frac{\omega}{s^2+\omega^2} \to \sin \omega t$$

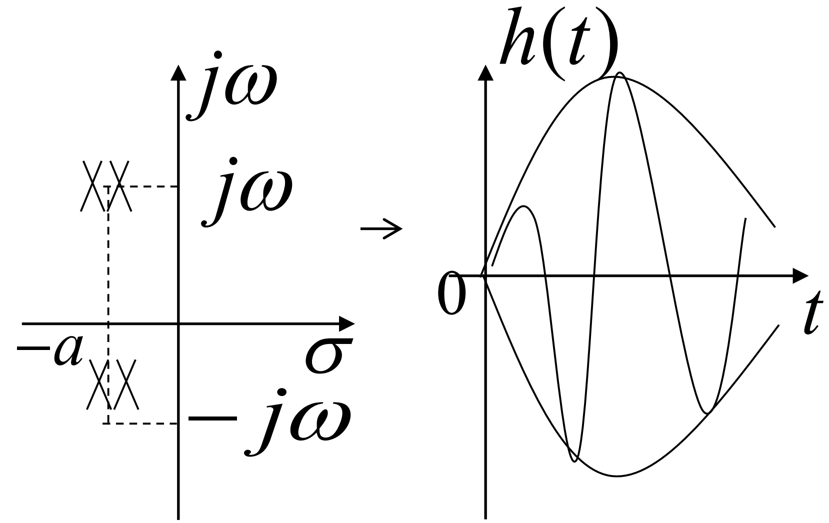


$$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2} \to t\sin \omega t$$

§3.2系统函数零极点∽时域特性和稳定性

v) p_i, p_j共轭左半平面（一阶）　　共轭左半平面（二阶）

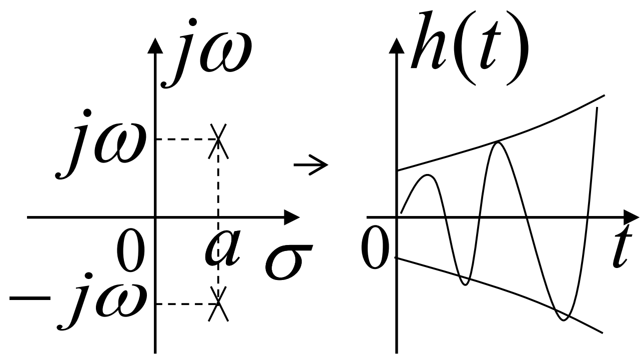


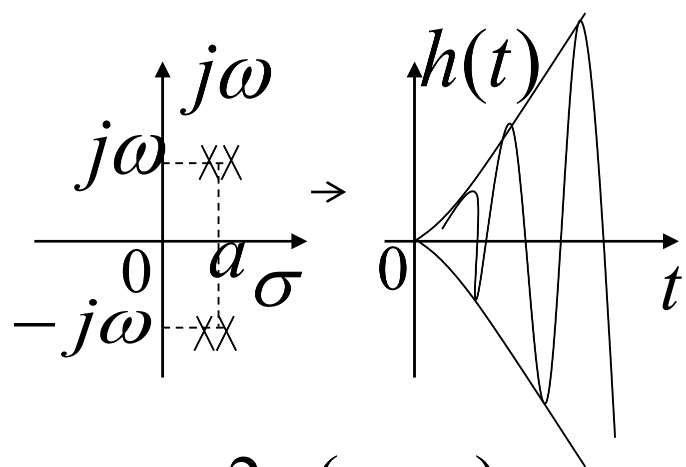


$$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2} \to e^{-at}\sin\omega t \qquad \frac{2\omega(s+a)}{[(s+a)^2+\omega^2]^2} \to te^{-at}\sin\omega t$$

§3.2系统函数零极点∽时域特性和稳定性

vi) p_i，p_j共轭右半平面（一阶）　共轭右半平面（二阶）





$$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2} \to e^{at}\sin\omega t \qquad \frac{2\omega(s-a)}{[(s-a)^2+\omega^2]^2} \to te^{at}\sin\omega t$$

§3.2系统函数零极点∽时域特性和稳定性

$$
H(s)\begin{cases}
\text{极点左半平面} \rightarrow h(t)\text{波形衰减} \\
\text{极点右半平面} \rightarrow h(t)\text{波形增长} \\
\text{虚轴上一阶极点} \rightarrow h(t)\text{波形等幅振荡或阶跃} \\
\text{虚轴上二阶或二阶以上极点} \rightarrow h(t)\text{波形增幅振荡}
\end{cases}
$$

§3.2系统函数零极点∽时域特性和稳定性

3. $H(s)$零点对$h(t)$波形影响（只影响幅度、相位、不改变波形形式）

[例2]： $$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2} \to e^{-at}\cos\omega t$$

$$\frac{s}{(s+a)^2+\omega^2} \to e^{-at}(\cos\omega t - \frac{a}{\omega}\sin\omega t)$$

$$= e^{-at}\cdot\sqrt{1+\frac{a^2}{\omega^2}}\cos(\omega t+\phi)$$

§3.2系统函数零极点∽时域特性和稳定性

二、$H(s)$，$E(s)$ 极点分布与自由响应、强迫响应关系

零状态 $R(s)=H(s)E(s)$　　$r(t)=\mathcal{L}^{-1}[R(s)]$

设

$$H(s)=\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}\qquad E(s)=\frac{\prod_{l=1}^{u}(s-z_l)}{\prod_{k=1}^{v}(s-p_k)}$$

1．假设所有p_i，p_k 均不相等，则

$$R(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{s-p_i}+\sum_{k=1}^{v}\frac{K_k}{s-p_k}\qquad r(t)=\underbrace{\sum_{i=1}^{n}K_ie^{p_it}}_{\text{自由}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{v}K_ke^{p_kt}}_{\text{强迫}}$$

§3.2系统函数零极点∽时域特性和稳定性

2. K_i, K_k 均由 $H(s), E(s)$ 共同决定

即自由响应的形式只由 $H(s)$决定，但幅度相位由$H(s)$, $E(s)$ 共同决定

强迫响应形式只由 $E(s)$ 决定，但幅度相位由$H(s), E(s)$ 共同决定

3．固有频率（自由频率）：系统特征方程的根，决定自由响应形式

分子分母因式可能相消使 $H(s)$ 丢失固有频率，则相应的自由响应会丢失

即 $H(s)$只能反映零状态响应，而无法反映零输入响应

§ 3.2系统函数零极点∽时域特性和稳定性

[例3]: $$\frac{d^2r(t)}{dt^2}+3\frac{dr(t)}{dt}+2r(t)=\frac{de(t)}{dt}+e(t)$$

$$r(0_-)=1,\ r'(0_-)=1,\ e(t)=u(t)\quad 求\ r_{zs}(t), r_h(t)$$

解: $$H(s)=\frac{s+1}{s^2+3s+2}=\frac{1}{s+2}$$

$$R_{zs}(s)=\frac{1}{s+2}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}\right)\leftrightarrow r_{zs}(t)=\frac{1}{2}(1-e^{-2t})u(t)$$

$$\alpha^2+3\alpha+2=0,\ \alpha=-1,\ \alpha=-2$$

$$r_h(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t},$$

$$r(0_+)=1,\ r'(0_+)=2,\qquad \begin{cases}A_1+A_2+\dfrac{1}{2}=1\\ -A_1-2A_2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1=3\\ A_2=-\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

故 $$r_h(t)=3e^{-t}-\frac{5}{2}e^{-2t}$$

§3.2系统函数零极点∽时域特性和稳定性

三、$H(s)$极点与系统稳定性关系

1．稳定性：系统本身特性，与激励无关

2．$h(t)$与系统稳定性关系

因果系统（$h(t)=0 \quad t<0$）

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to\infty} h(t)=0 & \text{系统稳定} \\ \lim\limits_{t\to\infty} h(t)=A\text{或等幅振荡} & \text{系统临界稳定} \\ \lim\limits_{t\to\infty} h(t)=\text{不存在} & \text{系统不稳定} \end{cases}$$

§4.4系统函数零极点∽时域特性和稳定性

3. $H(s)$与系统稳定性关系

因果系统

$$\begin{cases} H(s) & \text{全部极点落于}s\text{左半平面} & \text{稳定} \\ H(s) & \text{有极点落于}s\text{右半平面，或在}s\text{虚轴上有二阶以上极点} & \text{不稳定} \\ H(s) & \text{有极点落于}s\text{平面虚轴上的均为一阶，} & \\ & \text{其它极点落于}s\text{左半平面，} & \text{临界稳定} \end{cases}$$

4．稳定系统的另一定义方法：BIBO方法（包括非因果系统）

$$|e(t)| \le M_e \Rightarrow |r(t)| \le M_r$$

§4.4系统函数零极点∽时域特性和稳定性

5．其他条件：$\int_{-\infty}^{\infty}\left|h(t)\right|dt \le M$（即冲激响应 $h(t)$ 绝对可积）

证明：充分性：
$$\begin{cases} r(t) = h(t) * e(t) \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\left|h(t)\right|dt \le M \\ \left|e(t)\right| \le M_e \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left|r(t)\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\cdot e(t-\tau)d\tau\right| \le \int_{-\infty}^{+\infty}\left|h(\tau)\cdot e(t-\tau)\right|d\tau$$
$$\le \int_{-\infty}^{+\infty}\left|h(\tau)\right|\cdot M_e d\tau \le M_e \cdot M = M_r$$ 由BIBO可知系统稳定

§4.4系统函数零极点∽时域特性和稳定性

必要性：系统稳定$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt$有界$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt$无界

$\Rightarrow$系统不稳定

$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt$无界$\Rightarrow$至少对某种有界$e(t)$, $r(t)$无界

设：$e(-t)=\mathrm{sgn}[h(t)]=\begin{cases}-1 & h(t)<0 \\ 0 & h(t)=0 \\ 1 & h(t)>0\end{cases}$ 则$|e(t)|\le 1$有界

$$\Rightarrow e(-t)h(t)=|h(t)|$$

但 $r(t)=e(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e(t-\tau)d\tau$

$$\Rightarrow r(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e(-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}|h(\tau)|d\tau \text{无界}$$

§4.4系统函数零极点∽时域特性和稳定性

6．因果稳定系统充要条件：$\begin{cases} h(t) = h(t)u(t) \\ \int_0^{+\infty} \left| h(t) \right| dt \le M \end{cases}$

7．BIBO稳定性把$H(s)$稳定性中的临界稳定性判为不稳定

§4.4系统函数零极点∽时域特性和稳定性

8．稳定（不包括临界稳定）的一个必要条件:

$H(s)$的分母多项式的系数都为正（或都为负）不能缺项。

对于一阶和二阶系统为充要条件。

例6：判断系统稳定性

① $H(s)=\dfrac{s^2+2s+1}{s^3+4s^2-3s+2}$　　不稳定

② $H(s)=\dfrac{s^3+s^2+s+2}{s^3+7s+9}$　　不稳定

§4.4系统函数零极点∽时域特性和稳定性

四、$H(s), E(s)$零极点与瞬态响应、稳态响应关系

1. 瞬态响应：$t \to \infty$时消失的相应部分
2. 稳态响应：$t \to \infty$ 时保留下来的相应部分

$$e^{p_i t}$$

$$\mathrm{Re}[p_i] < 0 \to \lim_{t\to\infty} e^{P_i t} = 0 \qquad \text{瞬态响应}$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Re}[p_i] = 0 \to \lim_{t\to\infty} e^{p_i t} = 1\text{或等幅振荡} \\ &\mathrm{Re}[p_i] > 0 \to \lim_{t\to\infty} e^{p_i t} = \text{增幅振荡} \end{aligned}\right\} \text{稳态响应}$$

§4.4系统函数零极点∽时域特性和稳定性

3. $H(s)$的极点实部均小于0 $\Rightarrow$ 稳定系统，自由响应均为瞬态响应

若$E(s)$极点实部小于0则自由响应＋强迫响应 $\rightarrow$ 瞬态

若$E(s)$极点实部大于0或在虚轴上有极点，则强迫响应$\rightarrow$稳态

4. $H(s)$的极点实部等于0，自由响应 $\rightarrow$ 稳态

5. $H(s)$的极点实部大于0，不稳定，自由响应$\rightarrow$稳态

6. $H(s)$的极点与$E(s)$零点相消，不出现该$H(s)$极点对应的自由响应