



## § 2.5 命题演算形式系统(PC)

---

### [本节主要内容]

- 1) 命题演算形式系统PC的组成:包括  
字符集及形成规则、公理、推理规则;
- 2) PC的基本定理;
- 3) PC的系统性质定理。



## § 2.5.1 命题演算形式系统PC的组成

---

命题演算形式系统的组成通常包括语言部分和推理部分。命题演算形式系统的语言部分主要包括字符集、命题公式的形成规则。推理部分包括公理、推理规则及定理推导。

# 1. 字符集

1) 原子变元符:  $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$

2) 联结词完备集:  $\{\neg, \rightarrow\}$

3) 辅助符号: 圆括号  $()$

通常将字符集部分用符号表表示为:

$$\Sigma = \{ (, ), \neg, \rightarrow, p_1, p_2, \dots, p_n, \dots \}$$

2. 形成规则: 由原子变元符及联结词形成命题公式的规则, 即命题公式的定义

3. 公理：挑选最基本的重言式作为公理，使得它们能作为推导其他所有重言式的依据。在PC系统中包括如下三个公理模式：

$$A1: A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$A2: (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$A3: (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$$

4. **推理规则**：用于从已有的公理和已推理出来的结论来推理另一结论。

在PC系统中仅有一个推理规则，称为**分离规则** ( $r_{mp}$ )：

即若有结论  $A$  及  $A \rightarrow B$  成立  
则必有结论  $B$  成立。

可用形式化序列表示为： $A, A \rightarrow B, B$

5. **定理推导**：是PC形式系统中的重要内容，包括所有的推理结论及其推理过程。



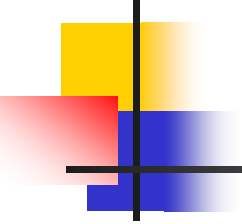
## § 2.5.2 PC的基本定理

---

**定义1 证明：**称下列公式序列为公式  $A$  在PC中的一个证明：

$$A_1, A_2, \cdots, A_m (= A)$$

其中  $A_i (i = 1, \cdots, m-1)$  或为PC的公理，  
或为  $A_j (j < i)$ ，或为  $A_j, A_k (j, k < i)$   
使用  $r_{mp}$  导出的，而  $A_m$  即为公式  $A$



---

**定义2 定理：** 如果公式  $A$  在PC中有一个证明序列，则称  $A$  为PC的定理，记为  $\vdash_{PC} A$  或简记为  $\vdash A$

**定义3 演绎：** 设  $\Gamma$  为PC的一公式集，

称下列公式序列为公式  $A$  以  $\Gamma$  为前提的演绎： $A_1, A_2, \dots, A_m (= A)$

其中  $A_i (i = 1, \dots, m-1)$  或为PC的公理，

或为  $\Gamma$  中的成员，或为  $A_j (j < i)$

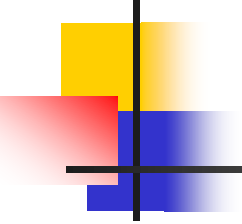
或为  $A_j, A_k (j, k < i)$  使用  $r_{mp}$  导出的，

而  $A_m$  即为公式  $A$

记为  $\Gamma \vdash_{PC} A$  或简记为  $\Gamma \vdash A$

并称  $A$  为  $\Gamma$  的**演绎结果**。





---

定义4 演绎等价：若  $A|-B$  且  $B|-A$   
则称公式  $A, B$  演绎等价，  
记为  $A||B$

定理1  $\vdash A \rightarrow A$

定理2 若  $\vdash P$  则有  $\vdash A \rightarrow P$

定理3  $\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$

定理4  $\neg \neg A \vdash A$

定理5  $\vdash (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

定理6  $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$

定理7  $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

定理8  $\vdash (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$

定理9  $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$

定理10  $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$

定理11  $\vdash (A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$

定理12  $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

定理13  $\vdash (\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$

定理14  $\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow C))$

定理15  $\vdash A \rightarrow A \vee B$  及  $\vdash A \rightarrow B \vee A$

定理16  $\vdash A \wedge B \rightarrow A$  及  $\vdash A \wedge B \rightarrow B$

定理17  $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow (A \wedge B \rightarrow C)$

定理18  $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$

定理19  $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C))$

定理20  $\vdash A \vee B \leftrightarrow B \vee A$

定理21  $\vdash A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$

定理22  $\vdash [(A \vee B) \vee C] \leftrightarrow [A \vee (B \vee C)]$

定理23  $\vdash [(A \wedge B) \wedge C] \leftrightarrow [A \wedge (B \wedge C)]$

定理24  $\vdash A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$

定理25  $\vdash A \vee (A \wedge B) \leftrightarrow A$

定理26  $\vdash A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

定理27  $\vdash (A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)]$

**定理28** 演绎定理：对PC中任意公式集

$\Gamma$ 和公式  $A, B$  ,

$\Gamma \cup \{A\} \vdash B$  (或简记为  $\Gamma; A \vdash B$ )

当且仅当  $\Gamma \vdash A \rightarrow B$

**例** 利用演绎定理在PC中证明下列定理

$$1) \vdash [A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow \{(C \rightarrow D) \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow D)]\}$$

$$2) \vdash [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)] \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow C)]$$

$$3) \vdash (A \rightarrow C) \rightarrow \{(B \rightarrow C) \rightarrow [(\neg A \rightarrow B) \rightarrow C]\}$$



## § 2.5.3 PC的基本定理

---

定理1 PC是合理的(可靠的)

即对任意的公式集 $\Gamma$ 及公式 $A$

若 $\Gamma \vdash A$  则  $\Gamma \Rightarrow A$

特别地, 若 $A$ 为PC的定理, 即 $\vdash A$   
则  $A$  永真。





## 定理2 PC是一致性的

即PC中不存在公式  $A$  与  $\neg A$

均为PC的定理,即不存在公式  $A$  使得  
 $\vdash A$  及  $\vdash \neg A$  同时成立。

定义1 完全的：一个系统  $\Phi$  是完全的，

当且仅当该系统中的任一公式  $A$  ，

或者  $\Phi \vdash A$  或者  $\Phi \vdash \neg A$

定理3 PC不是完全的

即在PC中存在公式  $A$  使得  $\vdash A$  及  $\vdash \neg A$  均不成立。

例  $A = P \rightarrow Q$  其中  $P, Q$  为原子变元符，

则  $\vdash P \rightarrow Q$  及  $\vdash \neg(P \rightarrow Q)$  均不成立。



---

定义2 PC的理论:

$$Th(PC) = \{ A \mid \vdash_{PC} A \}$$

PC的基于前提  $\Gamma$  的扩充:

$$Th(PC \cup \Gamma) = \{ A \mid \Gamma \vdash_{PC} A \}$$

引理1 设PC的公式集  $\Gamma$  是一致的，  
且  $\Gamma \not\vdash A$  则  $\Gamma \cup \{\neg A\}$  也是一致的。

引理2 若  $\Gamma$  是PC的一致公式集，  
则存在公式集  $\Delta$  使得  $\Gamma \subseteq \Delta$   
且  $\Delta$  是一致的且完全的。

引理3 对PC中任一公式  $A$  ,

$$A \in \Delta \text{ 当且仅当 } \Delta \vdash A$$

引理4 设  $\Gamma$  是PC的一致公式集,  
则存在一个指派  $\partial$  , 使得  $\Gamma$   
中每一个公式  $A$  有  $\partial(A) = T$



## 定理4 PC是完备的

对PC中任一永真式  $A$  , 必为PC的定理,

即有  $\vdash_{PC} A$

一般地, 对PC的公式集  $\Gamma$  若  $\Gamma \Rightarrow A$

则  $\Gamma \vdash_{PC} A$