HIT CS&E

第六章 平摊分析

骆吉洲
计算机科学与技术学院

HIT CS&E

提纲

HIT CS&E

6.1 平摊分析原理

- 平摊分析的基本思想
- 平摊分析方法

HIT CS&E

生活给我们的启发


平常的日子
开销低


犒劳一下自己
开销适中


聚会
开销高


购物
开销高

生活是有预算的，人们总是这样安排自己的生活
- 平常日子占绝大多数
- 偶尔犒劳一下自己，然后回归平常的生活
- 大笔开销之后，会适当地节约

结果：生活中的日均花销总维持在适当水平
某段时间的生活费 ≈ 日均花销 × 天数

HIT CS&E

看看我们的算法吧

- **Ch3的一个算法**

Graham-Scan(Q)

```
/* 栈S从底到顶存储按逆时针方向排列的CH(Q)顶点 */
1. 求Q中y-坐标值最小的点p0;
2. 按照与p0极角(逆时针方向)大小排序Q中其余点，结果为<p1, p2, …, pm>;
3. Push(p0, S); Push(p1, S); Push(p2, S);
4. FOR i=3 TO m DO
5.     While NextToTop(S),Top(S)和pi形成非左移动 Do
6.         Pop(S);
7.     Push(pi, S);
8. Rerurn S.
```

考察FOR循环的每次执行
- 如果5-6步被执行，代价较高
- 否则，代价很低

能否像日常生活的例子一样
- 分析操作的平摊代价
- 操作序列代价 = 操作个数×平摊代价

- 算法操作数据，数据结构管理数据
- 根据算法需求设计或选用数据结构
- 能否根据预算来设计数据结构
  - 确保频发操作代价低
  - 确保偶发操作代价高
  - 每个操作的平摊代价低
- 操作序列代价= 操作个数×平摊代价

HIT CS&E

本章目标

目标1：掌握平摊分析技术
- 能阅读并理解文献中的平摊分析过程和结果
- 能用它分析连续作用到某数据结构上的一系列操作的总代价
- 初步学习根据算法需求利用平摊分析设计数据结构

目标2：积累三种有用的数据结构，理解现有算法分析结果
- 动态表
- 斐波那契堆
- 并查集

目标3：理解高级程序设计语言中的抽象实现
- **Malloc申请的数组与定长数组操作代价相当**
- **Set的抽象实现的性能**

平摊分析

算法经常在某个数据结构上执行一系列操作
- 每个操作的代价各不相同（有高、有低）

问题
- 从平均效果看，每个操作的代价如何分析?
- 操作序列的时间复杂度如何分析?

平摊分析
- 将操作序列的总代价分摊到每个操作上
- 不涉及每个操作被执行的概率
- 不同于平均复杂度分析

平摊分析的基本思想

- 聚集方法（每个操作的代价）
  - 为每个操作都赋予相同的平摊代价
  - 确定n个操作的上界$T(n)$, 每个操作平摊$T(n)/n$
- 会计方法（整个操作序列的代价）
  - 不同类型操作赋予不同的平摊代价
  - 某些操作在数据结构的特殊对象上“预付”代价
- 势能方法（整个操作序列的代价）
  - 不同类型操作赋予不同的平摊代价
  - “预付”的代价作为整个数据结构的“能量”

6.2 聚集方法

- 聚集方法的原理
- 聚集方法的实例之一
- 聚集方法的实例之二

一目了然知原理

日期	开销
5月7日	30元
5月8日	50元
5月9日	120元
5月10日	30元
5月11日	30元
…..	……

操作	开销
OP_1	C_1
OP_2	C_2
OP_3	C_3
OP_4	C_4
OP_5	C_5
…..	……

日均开销= Σ每日开销 ÷ 天数

平摊代价= ΣC_i ÷ 操作个数

聚集方法的原理

聚集方法的目的
- 分析平摊代价的上界

分析方法
- 分析操作序列中每个操作的代价上界c_i
- 求得操作序列的总代价的上界$T(n)=c_1+c_2+...+c_n$
- 将$T(n)$平摊到每个操作上得到平摊代价$T(n)/n$

特点
- 每个操作获得相同的平摊代价
- 较准确地计算$T(n)$需要一定的技巧

聚集方法实例之一: 栈操作系列

- 普通栈操作及其时间代价
  - Push(S, x): 将对象压x入栈S
  - Pop(S)：弹出并返回S的顶端元素
  - 两个操作的运行时间都是$O(1)$
  - 可把每个操作的实际代价视为1
  - n个Push和Pop操作系列的总代价是n
  - n个操作的实际运行时间为$\theta(n)$

HIT CS&E

- 新的普通栈操作及其时间代价
  - 操作Multipop(S, k):

    去掉S的k个顶对象, 当$|S|<k$时弹出整个栈
  - 实现算法

```
Multipop(S, k)
While  not STACK-EMPTY(S) and k≠0  Do
        Pop(S);
        k←k-1.
```

  - Multipop(S, k)的实际代价 (设Pop的代价为1)
    - Multipop的代价为$min(|S|, k)$

HIT CS&E

- 初始栈为空的n个栈操作序列的分析
  - n个栈操作序列由Push、Pop和Multipop组成
  - 粗略分析
    - 最坏情况下，每个操作都是Multipop
    - 每个Multipop的代价最坏是$O(n)$
    - 操作系列的最坏代价为$T(n) =O(n^2)$
    - 平摊代价为$T(n)/n =O(n)$
  - 精细分析
    - 一个对象在每次被压入栈后至多被弹出一次
    - 在非空栈上调用Pop的次数(包括在Multipop内的调用)至多为Push执行的次数, 即至多为n
    - 最坏情况下操作序列的代价为$T(n)≤2n =O(n)$
    - 平摊代价=$T(n)/n=O(1)$

分析太粗糙
！！！

n-1个push
1个multipop

HIT CS&E

聚集方法实例之二：　二进计数器

- 问题定义：由 0 开始计数的k位二进计数器

  输入：k位二进制变量x，初始值为0

  输出：x+1 mod 2^k

  数据结构：

  $A[0..k-1]$作为计数器, 存储x

  x的最低位在$A[0]$中, 最高位在$A[k-1]$中

  $$x = \sum_{i=0}^{k-1} A[i] \cdot 2^i$$

HIT CS&E

- 计数器加1算法

  输入：$A[0..k-1]$，存储二进制数x

  输出：$A[0..k-1]$，存储二进制数x+1 *mod* 2^k

```
INCREMENT(A)
i←0
while  i<k and A[i]=1  Do
      A[i]←0;
      i←i+1;
If  i<k  Then  A[i]←1
```

- 初始为零的计数器上n个INCREMENT操作分析

Counter Value N	A[7]	A[6]	A[5]	A[4]	A[3]	A[2]	A[1]	A[0]	每个操作 Cost
0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
2	0	0	0	0	0	0	1	0	2
3	0	0	0	0	0	0	1	1	1
4	0	0	0	0	0	1	0	0	3
5	0	0	0	0	0	1	0	1	1
6	0	0	0	0	0	1	1	0	2
7	0	0	0	0	0	1	1	1	1
8	0	0	0	0	1	0	0	0	4
9	0	0	0	0	1	0	0	1	1
10	0	0	0	0	1	0	1	0	2
11	0	0	0	0	1	0	1	1	1
12	0	0	0	0	1	1	0	0	3
13	0	0	0	0	1	1	0	1	1
14	0	0	0	0	1	1	1	0	2
15	0	0	0	0	1	1	1	1	1
16	0	0	0	1	0	0	0	0	5

HIT CS&E

- 粗略分析
  - 每个Increment的时间代价最多$O(k)$
  - n个Increment序列的时间代价最多$O(kn)$
  - n个Increment平摊代价为$O(k)$
  - 例如上例中：$k*n$=8*16=128
- 精细分析

HIT CS&E

操作Cost＝O(发生改变的位数)

Counter Value N	A[7]	A[6]	A[5]	A[4]	A[3]	A[2]	A[1]	A[0]	Total Cost
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
2	0	0	0	0	0	0	1	0	3
3	0	0	0	0	0	0	1	1	4
4	0	0	0	0	0	1	0	0	7
5	0	0	0	0	0	1	0	1	8
6	0	0	0	0	0	1	1	0	10
7	0	0	0	0	0	1	1	1	11
8	0	0	0	0	1	0	0	0	15
9	0	0	0	0	1	0	0	1	16
10	0	0	0	0	1	0	1	0	18
11	0	0	0	0	1	0	1	1	19
12	0	0	0	0	1	1	0	0	22
13	0	0	0	0	1	1	0	1	23
14	0	0	0	0	1	1	1	0	25
15	0	0	0	0	1	1	1	1	26
16	0	0	0	1	0	0	0	0	31

HIT CS&E

- 精细分析
  - $A[0]$每1次操作发生一次改变，总次数为n
  - $A[1]$每2次操作发生一次改变，总次数为$n/2$
  - $A[2]$每4次操作发生一次改变，总次数为$n/2^2$
  - $A[3]$每8次操作发生一次改变，总次数为$n/2^3$
  - 一般地
    - 对于$i=0, 1, \ldots, \lg n$, $A[i]$改变次数为$n/2^i$
    - 对于$i>\lg n$, $A[i]$不发生改变
    （因为n个操作结果为n，仅涉及$A[0]$至$A[\lg n]$位）
  - $T(n)=\Sigma_{0\le i\le \lg n}\ n/2^i < n\ \Sigma_{0\le i\le\infty} 1/2^i = 2n = O(n)$
  - 每个Increment操作的平摊代价为$O(1)$

HIT CS&E

6.3 会计方法

- 会计方法的原理
- 会计方法的实例之一
- 会计方法的实例之二

HIT CS&E

一目了然知原理

预算：早餐5元
午餐10元
晚餐15元

日期	早餐	午餐	晚餐
5月7日	+1	+2	+3
5月8日	-2	-2	-2
5月9日	+0.5	+3	+2
5月10日	-0.5	-1	-1
5月11日	+1	+1	+1
…	…..	…..	…..

If 总结余≥0 then
总开销≤ (5+10+15)×天数

预算：第1类操作 α_1元
……
第k类操作 α_k元

操作	种类	实际代价	结余代价
OP_1	1	c_1	$c_1-\alpha_1$
OP_2	3	c_2	$c_2-\alpha_3$
OP_3	2	c_3	$c_3-\alpha_2$
OP_4	k	c_4	$c_4-\alpha_k$
OP_5	k-2	c_5	$c_5-\alpha_{k-2}$
…	…..	…..	…..

If 总结余≥0 then
总开销≤ α_1×第1类操作个数
+…+
α_k×第k类操作个数

结余代价应该怎么管理呢？

HIT CS&E

Accounting方法的原理

- Accounting方法
  - 目的是分析n个操作序列的复杂性上界
  - 一个操作序列中有不同类型的操作
  - 不同类型的操作的操作代价各不相同
  - 于是我们为每种操作分配不同的平摊代价
    - 平摊代价可能比实际代价大，也可能比实际代价小

数据结构中存储的Credit在任何时候都必须非负，即$\Sigma_{1\le i\le n}\alpha_i - \Sigma_{1\le i\le n}c_i \ge 0$恒成立

支付实际代价

  - 平摊代价的选择规则：
    - 设c_i和α_i是操作i的实际代价和平摊代价
    - $\Sigma_{1\le i\le n}\alpha_i \ge \Sigma_{1\le i\le n}c_i$ 必须对于任意n个操作序列都成立

HIT CS&E

栈操作序列的分析

- 各栈操作的实际代价
  - Cost(PUSH)=1
  - Cost(POP)=1
  - Cost(MULTIPOP)=$min\{k, s\}$
- 各栈操作的平摊代价
  - Cost(PUSH)=2
    - 一个*1*用来支付PUSH的开销,
    - 另一个*1*存储在压入栈的元素上, 预支POP的开销
  - Cost(POP)=0
  - Cost(MULTIPOP)=0
- 平摊代价满足
  - $\Sigma_{1\le i\le n}\alpha_i - \Sigma_{1\le i\le n}c_i \ge 0$ 对于任意n个操作序列都成立
    - 因为在n个操作序列中, POP个数(包括MULTIPOP中的POP)不大于PUSH个数.
- n个栈操作序列的总平摊代价
  - $O(n)$

HIT CS&E

二进制计数器Increment操作序列分析

- Increment操作的平摊代价
  - 每次一位被置1时，付2美元
    - 1美元用于置1的开销
    - 1美元存储在该“1”位上，用于支付其被置0时的开销
    - 置0操作无需再付款
  - Cost(Increment)=2
- 平摊代价满足
  - $\Sigma_{1\le i\le n}\alpha_i \ge \Sigma_{1\le i\le n} c_i$ 对于任意n个操作序列都成立，因为从前面的分析可知$\Sigma_{1\le i\le n} c_i < 2n$
- n个Increment操作序列的总平摊代价
  - $O(n)$

HIT CS&E

6.4 势能方法

- 势能方法的原理
- 势能方法的实例之一
- 势能方法的实例之二

HIT CS&E

一目了然知原理

大家有没有觉得会计方法很麻烦？

预算：早餐5元　　　午餐10元　　　晚餐15元

- 一个月30天，在饭卡中存30×(5+10+15)=900元
- 月底的时候，如果饭卡中仍有余款，则总开销≤900

预算：第1类操作α_1元　　　……　　　第k类操作α_k元

•给数据结构关联一个函数Φ用于管理结余代价

•如果Op_i是第j类操作，且

- ➢ 实际代价c_i低于α_j，则结余代价增长， Φ的函数值增长α_j-c_i
- ➢ 实际代价c_i高于α_j，则结余代价减小， Φ的函数值减小c_i- α_j

•所有操作结束后，如果结余代价大于0

总开销≤ α_1×第1类操作个数 +…+ α_k×第k类操作个数

HIT CS&E

Potential方法的原理

- Potential方法
  - 目的是分析n个操作系列的复杂性上界
  - 在会计方法中，如果操作的平摊代价比实际代价大，我们将余额与数据结构的数据对象相关联
  - Potential方法把余额与整个数据结构关联，所有的这样的余额之和，构成数据结构的势能
    - 如果操作的平摊代价大于操作的实际代价，势能增加
    - 如果操作的平摊代价小于操作的实际代价，要用数据结构的势能来支付实际代价，势能减少

- 数据结构势能的定义
  - 考虑在初始数据结构D_0上执行n个操作
  - 对于操作i
    - 操作i的实际代价为c_i
    - 操作i将数据结构D_{i-1}变为D_i
    - 数据结构D_i的势能是一个实数$\phi(D_i)$, ϕ是一个正函数
    - 操作i的平摊代价：$\alpha_i = c_i + \phi(D_i) - \phi(D_{i-1})$
  - n个操作的总平摊代价（必须是实际代价的上界）

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = \sum_{i=1}^{n}(c_i + \phi(D_i) - \phi(D_{i-1}))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i + \phi(D_n) - \phi(D_0)$$

  - 关键是ϕ的定义
    - 保证$\phi(D_n)\ge\phi(D_0)$, 使总平摊代价是总实际代价的上界
    - 如果对于所有i, $\phi(D_i)\ge\phi(D_0)$, 可以保证$\phi(D_n)\ge\phi(D_0)$
    - 实际可以定义$\phi(D_0)=0$，$\phi(D_i)\ge 0$

HIT CS&E

栈操作序列的分析

- 栈的势能定义
  - $\phi(D_m)$定义为栈D_m中对象的个数，于是
    - $\phi(D_0)=0$，D_0是空栈
    - $\phi(D_i)\ge 0=\phi(D_0)$，因为栈中对象个数不会小于0
    - n个操作的总平摊代价是实际代价的上界
  - 栈操作的平摊代价（设栈D_{i-1}中具有s个对象）
    - PUSH: $\alpha_i=c_i+\phi(D_i)-\phi(D_{i-1})=1+(s+1)-s=2$
    - POP: $\alpha_i=c_i+\phi(D_i)-\phi(D_{i-1})=1+(s-1)-s=0$
    - MULTIPOP(S, k): 设$k'=min(k,s)$

      $\alpha_i=c_i+\phi(D_i)-\phi(D_{i-1})=k'+(s-k')-s=k'-k'=0$
  - n个栈操作序列的平摊代价是$O(n)$

HIT
CS&E

二进制计数器操作序列分析

- 计数器的势能定义
  - $\phi(D_m)$定义为第m个操作后计数器中1的个数b_m
    - $\phi(D_0)=0$，D_0中1的个数为0
    - $\phi(D_i)\geq 0=\phi(D_0)$, 因为计数器中*1*的个数不会小于0
    - 于是，n个操作的总平摊代价是实际代价的上界
  - INCREMENT操作的平摊代价
    - 第i个INCREMENT操作将 t_i个1置0, 实际代价为t_i+1
    - 计算操作i的平摊代价$\alpha_i=c_i+\phi(D_i)-\phi(D_{i-1})$
      - If $b_i=0$, 操作i resets所有k位, 所以$b_{i-1}=t_i=k$
      - If $b_i>0$, 则$b_i=b_{i-1}-t_i+1$
      - 于是 $b_i \leq b_{i-1}-t_i+1$

        $\phi(D_i)-\phi(D_{i-1})=b_i-b_{i-1} \leq b_{i-1}-t_i+1-b_{i-1}=1-t_i$
      - 平摊代价$\alpha_i=c_i+\phi(D_i)-\phi(D_{i-1})\leq(t_i+1)+(1-t_i)=2$
  - n个操作序列的总平摊代价是$O(n)$

HIT
CS&E

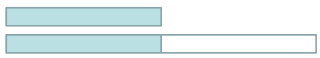
6.5 动态表性能平摊分析

- 动态表的概念
- 动态表的扩张与收缩
- 仅含扩张操作的动态表平摊分析
- 一般的动态表平摊分析
- 目标
  - ✓ 深入理解平摊分析的三种方法
  - ✓ 运用平摊分析算法复杂性
  - ✓ 深入理解一种语言现象

HIT
CS&E

编程初体验时的困惑

- 数组很受青睐
  - ✓ 优点：(1)结构简单；(2)操作方便、快捷…
  - ✓ 动态数据
    - size = …..   //获取数据元素个数
    - Array = malloc(size*sizeof(Object))
    - Array就可以像数组一项操作了
  - ✓ 动态申请的空间仍然不够用
    - Array = realloc(Array, newSzie*sizeof(Object))



    - 问题：大量的元素复制是否会严重影响算法的性能？
- 本小节尝试利用平摊分析技术回答上面的问题

HIT
CS&E

动态表—基本概念

- 动态表支持的操作
  - ✓ TABLE-INSERT:将某一元素插入表中
  - ✓ TABLE-DELETE:将一个元素从表中删除
- 数据结构:用一个(一组)数组来实现动态表
- 非空表T的装载因子$\alpha(T)=T$存储的对象数/表大小
  - ✓ 空表的大小为0，装载因子为1
  - ✓ 如果动态表的装载因子以一个常数为下界，则表中未使用的空间就始终不会超过整个空间的一个常数部分

HIT
CS&E

动态表的表示

设T表示一个动态表:
- *table*[T]是一个指向表示表的存储块的指针
- *num*[T]包含了表中的项数
- *size*[T]是T的大小
- 开始时，*num*[T]=*size*[T]=0

C语言的一种实现:

```
Typedef   struct  DynamicTable
{
    int        size;
    int        num;
    object *  table;
} DynamicTable;
```

HIT
CS&E

动态表的扩张

- 插入一个数组元素时,完成的操作包括
  - 分配一个包含比原表更多的槽的新表
  - 再将原表中的所有数据项复制到新表中去
- 常用的启发式技术是分配一个比原表大一倍的新表，
  - 只对表执行插入操作,则表的装载因子总是至少为1/2
  - 浪费掉的空间就始终不会超过表总空间的一半

HIT
CS&E

扩张算法

算法：TABLE—INSERT(T, x)　　　　　/*复杂的插入操作*/

```
1    If  size[T]=0 Then                       /*开销为常数*/
2        获取一个大小为1的表 table[T];
3        size[T]←1;
4    If  num[T]=size[T] Then                  /*开销取决于size[T]*/
5        获取一个大小为 2×size[T]的新表new-table;
6        将 table[T]中元素插入new-table;      /*简单插入操作*/
7        释放 table[T];
8        table[T]←new-table;
9        size[T]←2×size[T];
10   将 x插入table[T];
11   num[T]←num[T]+1
```

HIT

初始为空的表上*n*次插入操作的代价分析(1)

聚集分析-粗略分析

- 考察第i次操作的代价C_i
  - 如果i=1, C_i=1;
  - 如果$num[T]$<$size[T]$, C_i=1;
  - 如果$num[T]$=$size[T]$, C_i=i;
- 共有n次操作
  - 最坏情况下,每次进行n次操作,总的代价上界为n^2
- 这个界不精确
  - n次TABLE—INSERT操作并不常常包括扩张表的代价
  - 仅当i-1为2地整数幂时第i次操作才会引起一次表地扩张

聚集分析-精细分析

- 第i次操作的代价C_i
  - 如果i=2^m，C_i=i；　否则C_i=1
- n次TABLE—INSERT操作的总代价为 $\sum_{i=1}^{n} c_i \le n + \sum_{j=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} 2^j < n + 2n = 3n$

★每一操作的平摊代价为$3n/n$=3

HIT
CS&E

初始为空的表上*n*次插入操作的代价分析(2)

会计方法

- 每次执行TABLE—INSERT平摊代价为1（尝试）

第1次元素插入　$\boxed{{}^{0}x_1}$

第2次元素插入,扩张　$\boxed{{}^{-1}x_1}\boxed{{}^{0}x_2}$　　总余额<0

平摊代价须>1

HIT
CS&E

初始为空的表上*n*次插入操作的代价分析(2)

会计方法

- 每次执行TABLE—INSERT平摊代价为2（再尝试）

第1次元素插入　$\boxed{{}^{1}x_1}$

第2次元素插入,扩张　$\boxed{{}^{0}x_1}\boxed{{}^{1}x_2}$

第3次元素插入,扩张　$\boxed{{}^{-1}x_1}\boxed{{}^{0}x_2}\boxed{{}^{1}x_3}\boxed{}$

第4次元素插入　$\boxed{{}^{-1}x_1}\boxed{{}^{0}x_2}\boxed{{}^{1}x_3}\boxed{{}^{1}x_4}$

第5次元素插入扩张　$\boxed{{}^{-2}x_1}\boxed{{}^{-1}x_2}\boxed{{}^{0}x_3}\boxed{{}^{0}x_4}\boxed{{}^{1}x_5}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$　　总余额<0

平摊代价须>2

HIT
CS&E

初始为空的表上*n*次插入操作的代价分析(2)

会计方法

- 每次执行TABLE—INSERT平摊代价为3

第1次元素插入　$\boxed{{}^{2}x_1}$

第2次元素插入,扩张　$\boxed{{}^{1}x_1}\boxed{{}^{2}x_2}$

第3次元素插入,扩张　$\boxed{{}^{0}x_1}\boxed{{}^{1}x_2}\boxed{{}^{2}x_3}\boxed{}$

第4次元素插入　$\boxed{{}^{0}x_1}\boxed{{}^{1}x_2}\boxed{{}^{2}x_3}\boxed{{}^{2}x_4}$

一般情况下，刚扩张完　$\boxed{{}^{0}x_1}\boxed{{}^{0}x_2}\boxed{{}^{0}x_3}\boxed{{}^{0}x_4}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$

$\boxed{{}^{1}x_1}\boxed{{}^{0}x_2}\boxed{{}^{0}x_3}\boxed{{}^{0}x_4}\boxed{{}^{1}x_5}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$

再发生扩张时，会怎样？　$\boxed{{}^{1}x_1}\boxed{{}^{1}x_2}\boxed{{}^{1}x_3}\boxed{{}^{1}x_4}\boxed{{}^{1}x_5}\boxed{{}^{1}x_7}\boxed{{}^{1}x_6}\boxed{{}^{1}x_8}$

总余额≥0恒成立，根据会计方法原理，总实际代价≤总平摊代价

长度为n的操作序列，总实际代价≤3n

HIT
CS&E

初始为空的表上*n*次插入操作的代价分析(2)

会计方法

- 每次执行TABLE—INSERT平摊代价为3
  - ✓1支付第11步中的基本插入操作的实际代价
  - ✓1作为自身的存款
  - ✓1存入表中第一个没有存款的数据上
- 当发生表的扩张时，数据的复制的代价由数据上的存款来支付
- 任何时候，总余额非负
- 初始为空的表上n次TABLE-INSERT操作的平摊代价总和为3n

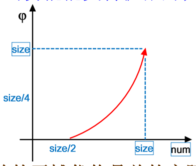
初始为空的表上n次插入操作的代价分析(3)

HIT CS&E

势能法分析

?势怎么定义才能使得表满发生扩张时势能能支付扩张的代价

- 如果势能函数满足
  - 刚扩充完,$\phi(T)=0$
  - 表满时 $\phi(T)=size(T)$
- $\phi(T)=2*num[T]-size[T]$
  - $num[T]\geq size[T]/2$，$\phi(T)\geq 0$
  - n次TABLE－INSERT操作的总的平摊代价是总的实际代价的一个上界
- 第i次操作的平摊代价
  - 如果发生扩张,$c_i=3$
  - 如果未发生扩张, $c_i=3$
- 初始为空的表上n次插入操作的代价的上界为3n



动态表的扩张与收缩

HIT CS&E

- 表的扩张
- 表的收缩
  - 表具有一定的丰满度
  - 表的操作序列的复杂度是线性的
- 表的收缩策略
  - 表的装载因子小于1/2时，收缩表为原表的一半
  - $n=2^k$,考察下面的一个长度为n的操作序列:
    - 前n/2个操作是插入，后跟I D D I I D D I I…

前n/2个插入操作得到满表 | x_1 | x_2 | ... | $x_{n/2}$ |

I | x_1 | x_2 | ... | $x_{n/2}$ | $x_{n/2+1}$ | | ... | | n/2+1个操作

D | x_1 | x_2 | ... | $x_{n/2}$ | | | ... | | 1个操作

D | x_1 | x_2 | ... | | n/2-1个操作

I

动态表的扩张与收缩

HIT CS&E

- 表的扩张
- 表的收缩
  - 表具有一定的丰满度
  - 表的操作序列的复杂度是线性的
- 表的收缩策略
  - 表的装载因子小于1/2时，收缩表为原表的一半
  - $n=2^k$,考察下面的一个长度为n的操作序列:
    - 前n/2个操作是插入，后跟I D D I I D D I I…

后n/2个操作中每组IDDI

共有n/8个IDDI分组
每组需要代价≥n

后n/2个操作总代价≥$n^2/8$

| x_1 | x_2 | ... | $x_{n/2}$ |

| x_1 | x_2 | ... | $x_{n/2}$ | $x_{n/2+1}$ | | ... | | n/2+1个操作

| x_1 | x_2 | ... | $x_{n/2}$ | | | ... | | 1个操作

| x_1 | x_2 | ... | | n/2-1个操作

动态表的扩张与收缩

HIT CS&E

- 表的扩张
- 表的收缩
  - 表具有一定的丰满度
  - 表的操作序列的复杂度是线性的
- 表的收缩策略
  - 表的装载因子小于1/2时，收缩表为原表的一半
  - $n=2^k$,考察下面的一个长度为n的操作序列:
    - 前n/2个操作是插入，后跟I D D I I D D I I…
    - 每次扩张和收缩的代价为O(n)，共有O(n)扩张或收缩
    - 总代价为$O(n^2)$，而每一次操作的平摊代价为O(n)--每个操作的平摊代价太高
- 如果改进的收缩策略呢？

动态表的扩张与收缩

HIT CS&E

- 表的扩张
- 表的收缩
  - 表具有一定的丰满度
  - 表的操作序列的复杂度是线性的
- 表的收缩策略
  - 表的装载因子小于1/2时，收缩表为原表的一半
  - $n=2^k$,考察下面的一个长度为n的操作序列:
    - 前n/2个操作是插入，后跟I D D I I D D I I…
    - 每次扩张和收缩的代价为O(n)，共有O(n)扩张或收缩
    - 总代价为$O(n^2)$，而每一次操作的平摊代价为O(n)--每个操作的平摊代价太高
- 改进的收缩策略(允许装载因子低于1/2)
  - 满表中插入数据项时，将表扩大一倍
  - 删除数据项引起表不足1/4满时，将表缩小为原表的一半
  - 扩张和收缩过程都使得表的装载因子变为1/2
  - 表的装载因子的下界是1/4

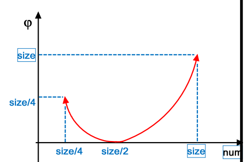
动态表上n次(插入、删除)操作的代价分析

HIT CS&E

势能函数的定义

- 操作序列过程,势能总是非负的
  - 保证一列操作的总平摊代价即为其实际代价的一个上界
- 表的扩张和收缩过程要消耗大量的势
- 势能函数应满足
  - $num(T)=size(T)/2$时，势最小
  - 当$num(T)$减小时，势增加直到收缩
  - 当$num(T)$增加时，势增加直到扩充
- 势能函数特征的细化
  - 当装载因子为1/2时，势为0
  - 装载因子为1时，有$num[T]=size[T]$，即$\phi(T)=num[T]$。这样当因插入一项而引起一次扩张时，就可用势来支付其代价
  - 当装载因子为1/4时，$size[T]=4\cdot num[T]$。即$\phi(T)=num[T]$。因而当删除某项引起一次收缩时就可用势来支付其代价

$$\Phi(T)=\begin{cases}2\cdot num[T]-size[T] & \alpha(T)\geq 1/2\\ size[T]/2-num[T] & \alpha(T)<1/2\end{cases}$$



HIT
CS&E

平摊代价的计算

- 第i次操作的平摊代价：$\alpha_i = c_i + \phi(T_i) - \phi(T_i - 1)$
  - 第i次操作是TABLE—INSERT： 未扩张 $\alpha_i \leq 3$
  - 第i次操作是TABLE—INSERT： 扩张 $\alpha_i \leq 3$
  - 第i次操作是TABLE—DELETE： 未收缩 $\alpha_i \leq 3$
  - 第i次操作是TABLE—DELETE： 收缩 $\alpha_i \leq 3$
- 作用于一动态表上的n个操作的实际时间为$O(n)$

HIT
CS&E

6.6 斐波那契堆性能平摊分析

- 斐波那契堆及其基本操作
- 应用平摊分析得出斐波那契堆的操作代价
- 运用平摊分析进行算法分析的尝试
- 目标
  - ✓ 深入理解势能方法
  - ✓ 运用平摊分析方法分析算法复杂性
  - ✓ 积累一种有用的数据结构

HIT
CS&E

堆的性能比较

操作	链表	二叉堆	二项堆	斐波那契堆	松散堆
make-heap	1	1	1	1	1
is-empty	1	1	1	1	1
insert	1	log n	log n	1	1
delete-min	n	log n	log n	log n	log n
decrease-key	n	log n	log n	1	1
delete	n	log n	log n	log n	log n
union	1	n	log n	1	1
find-min	n	1	log n	1	1

n -堆中存储的元素个数　　平摊分析

定理. 从初始为空的斐波那契堆开始，任意执行由a_1个插入，a_2个删除，a_3个键值减小操作构成的长度为n的操作序列，其时间复杂度$O(a_1 + a_2 \log n + a_3)$.

HIT
CS&E

堆的性能比较

操作	链表	二叉堆	二项堆	斐波那契堆	松散堆
make-heap	1	1	1	1	1
is-empty	1	1	1	1	1
insert	1	log n	log n	1	1
delete-min	n	log n	log n	log n	log n
decrease-key	n	log n	log n	1	1
delete	n	log n	log n	log n	log n
union	1	n	log n	1	1
find-min	n	1	log n	1	1

n -堆中存储的元素个数　　平摊分析

插入，删除不可能均在$O(1)$时间内完成. 为什么？

HIT
CS&E

斐波那契堆的过去和现状

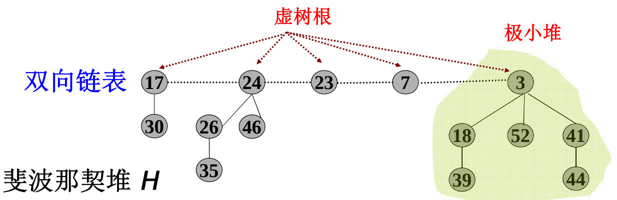
- 斐波那契堆的提出. [Fredman and Tarjan, 1986]
  - 巧妙的数据结构和分析
  - 提出动机: 改进 Dijkstra's算法的性能
  - Dijkstra算法执行:
    - |V|次插入堆元素操作
    - |V|次抽取堆顶元素操作
    - |E|次减小键值操作
    - 总时间复杂度为O(|E| log |V|)
  - 改进后时间复杂度为 $O(|E| + |V| \log |V|)$
- 斐波那契堆的最新研究成果

1.Strict fibonacci heaps， Symposium on the Theory of Computing ，pp 1177-1184, 2012
2.Violation Heaps: A Better Substitute for Fibonacci Heaps, *Data Structures and Algorithms, 2008*

HIT
CS&E

斐波那契堆的结构(1)

斐波那契堆：
- 一系列树，每棵树均是一个极小堆
  - 任意结点的键值不超过其孩子结点的键值
- 一个指针，指向最小元素
- 一些标记顶点

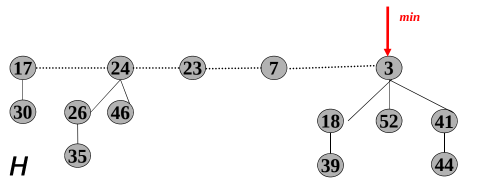


斐波那契堆的结构(2)

HIT CS&E

斐波那契堆：

- 一系列树，每棵树均是一个极小堆
- 一个指针，指向最小元素
  - 从堆中查找最小元素(Find_min操作)的开销为*O*(1)
- 一些标记顶点



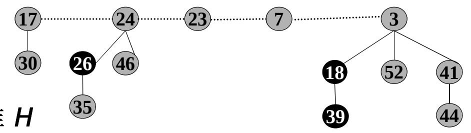
斐波那契堆 *H*

斐波那契堆的结构(3)

HIT CS&E

斐波那契堆：

- 一系列树，每棵树均是一个极小堆
- 一个指针，指向最小元素
- 一些标记顶点
  - 用于保持堆的“扁平结构”
  - 标记的具体含义是：*x*被标记，如果它以前是树根，但堆操作过程中变成其他结点的孩子且失去过孩子



斐波那契堆 *H*

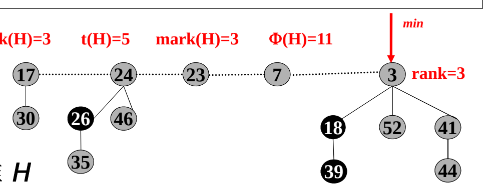
斐波那契堆的结构(4)

HIT CS&E

斐波那契堆记号：

- *n* ：堆H中数据元素的个数
- *rank*(*x*) ：堆中结点*x*的孩子数
- *rank*(*H*) ：堆H的所有结点中的最大孩子数
- t(*H*) ：堆H中树的棵数
- *mark*(*H*) ：堆H中被标记顶点的个数
- $\Phi(H)=t(H)+2\cdot mark(H)$：势能函数

n=15 rank(H)=3 t(H)=5 mark(H)=3 Φ(H)=11



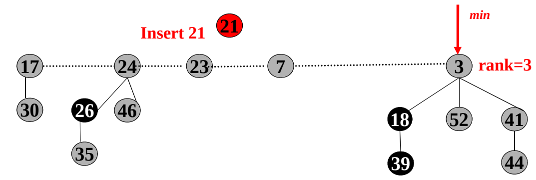
斐波那契堆 *H*

插入操作Insert

HIT CS&E

插入操作的过程：

- 以新结点为根，创建一棵新树
- 将新的树插入树根双向链表
- 如有必要，更新最小元素指针



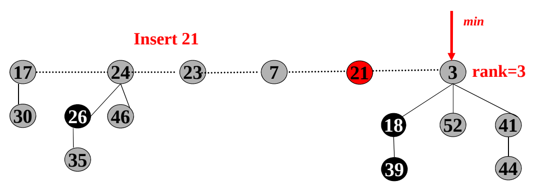
H

插入操作Insert

HIT CS&E

插入操作的过程：

- 以新结点为根，创建一棵新树
- 将新的树插入树根双向链表
- 如有必要，更新最小元素指针



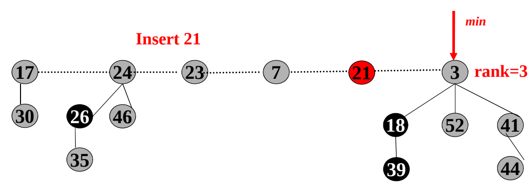
H

插入操作Insert分析

HIT CS&E

插入操作的代价分析： （势能函数$\Phi(H)=t(H)+2\cdot mark(H)$）

- 实际开销O(1)
- 平摊代价O(1)
  - 操作完成后，*t*(*H*)增大1，但mark(*H*)不变

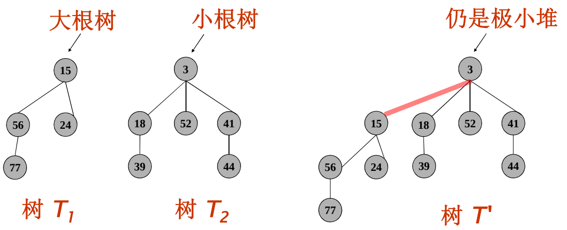


H

HIT CS&E

删除堆顶元素Delete_min(1)

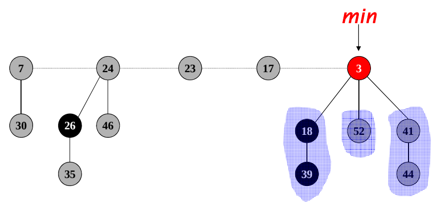
- 链接调整操作
  - 将大根树作为小根树的子树，链接在小根树的根下
  - Delete_min操作中调用的子操作
  - 实际开销为$O(1)$



HIT CS&E

删除堆顶元素Delete_min(2)

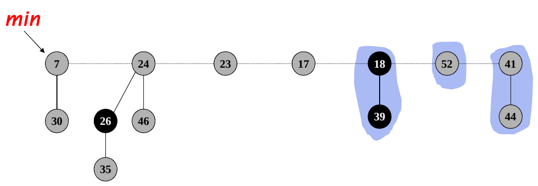
- Delete_min操作过程
  - 删除最小元素；将其所有孩子链入双向链表，更新最小元素指针
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同rank



HIT CS&E

删除堆顶元素Delete_min(3)

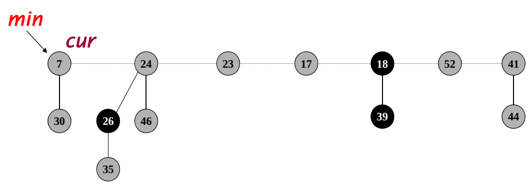
- Delete_min操作过程
  - 删除最小元素；将其所有孩子链如双向链表，更新最小元素指针
    - 实际开销O(t(H)+rank(x))
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同rank



HIT CS&E

删除堆顶元素Delete_min(4)

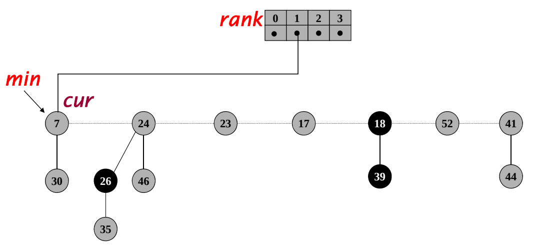
- Delete_min操作过程
  - 删除最小元素；将其所有孩子链如双向链表，更新最小元素指针
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同rank



HIT CS&E

删除堆顶元素Delete_min(5)

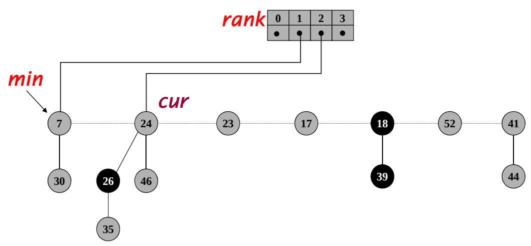
- Delete_min操作过程
  - 删除最小元素；将其所有孩子链如双向链表，更新最小元素指针
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同rank



HIT CS&E

删除堆顶元素Delete_min(5)

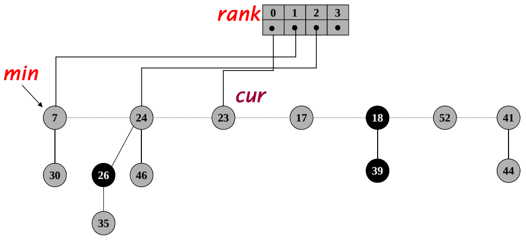
- Delete_min操作过程
  - 删除最小元素；将其所有孩子链如双向链表，更新最小元素指针
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同rank



HIT CS&E

删除堆顶元素Delete_min(5)

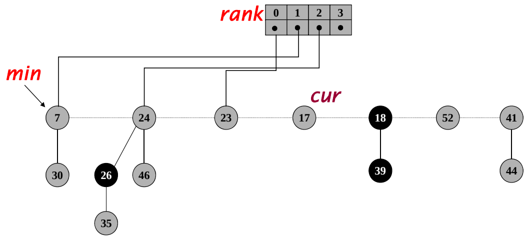
- **Delete_min操作过程**
  - 删除最小元素；将其所有孩子链如双向链表，更新最小元素指针
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同rank



HIT CS&E

删除堆顶元素Delete_min(5)

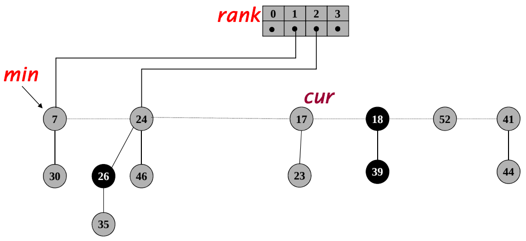
- **Delete_min操作过程**
  - 删除最小元素；将其所有孩子链如双向链表，更新最小元素指针
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同rank



HIT CS&E

删除堆顶元素Delete_min(5)

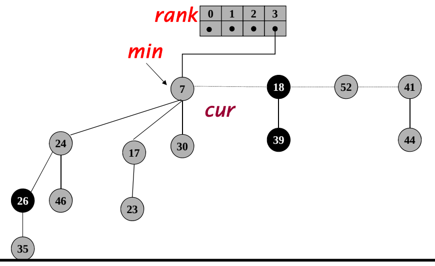
- **Delete_min操作过程**
  - 删除最小元素；将其所有孩子链如双向链表，更新最小元素指针
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同rank



HIT CS&E

删除堆顶元素Delete_min(5)

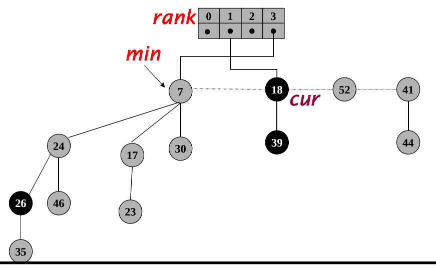
- **Delete_min操作过程**
  - 删除最小元素；将其所有孩子链如双向链表，更新最小元素指针
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同rank



HIT CS&E

删除堆顶元素Delete_min(5)

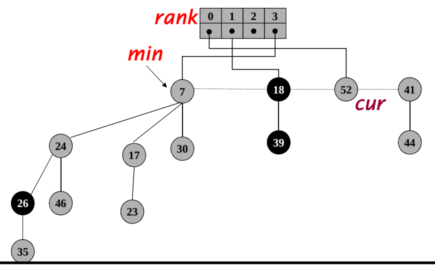
- **Delete_min操作过程**
  - 删除最小元素；将其所有孩子链如双向链表，更新最小元素指针
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同rank



HIT CS&E

删除堆顶元素Delete_min(5)

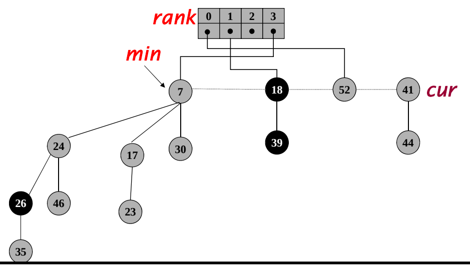
- **Delete_min操作过程**
  - 删除最小元素；将其所有孩子链如双向链表，更新最小元素指针
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同rank



HIT CS&E

删除堆顶元素Delete_min(5)

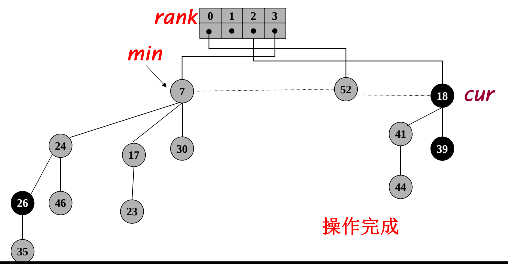
- **Delete_min**操作过程
  - 删除最小元素；将其所有孩子链如双向链表，更新最小元素指针
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同**rank**



HIT CS&E

删除堆顶元素Delete_min(5)

- **Delete_min**操作过程
  - 删除最小元素；将其所有孩子链如双向链表，更新最小元素指针
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同**rank**



HIT CS&E

删除堆顶元素Delete_min的分析

删除操作的代价分析：（势能函数$\Phi(H)=t(H)+2\cdot mark(H)$）

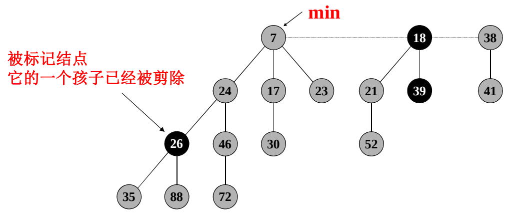
- 实际开销$O(rank(H))+O(t(H))$
  - $O(rank(H))$ 时间内将最小元素结点的孩子插入双向链表
  - $O(rank(H))+O(t(H))$ 时间内更新最小元素指针
  - $O(rank(H))+O(t(H))$ 维护双向链表
- 平摊代价$O(rank(H))$
  - 操作完成后的堆记为H',操作前的堆记为H
  - $t(H') \le rank(H)+1$,因为H'中没有两个树具有相同$rank$
  - $\Delta\Phi(H) \le rank(H)+1-t(H)$
- ***Delete_min*****操作的平摊代价很好吗？**
  - 对，这个代价很好，因为
  - 如果只有插入和删除操作，则结果即为二项堆
  - 这意味着$rank(H) \le \log n$
  - 减小键值操作也将确保$rank(H) \le \log n$

HIT CS&E

键值减小操作Decrease_key

直观上，键值减小操作作用于结点**x**，进行

- 若减小键值后，堆性质仍成立，则仅需减小键值
- 否则, 将**x**子树剪切下来插入双向链表，标记其父结点
- 为了保持堆的“扁平结构”，一旦剪除某个孩子的第二个孩子结点，则将该结点剪切下来插入双向链表（如果必要，需要去除该结点上的标记）



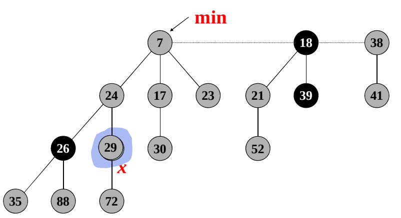
HIT CS&E

键值减小操作Decrease_key(2)

直键值减小操作作用于结点**x**（例如，键值从**46**减小为**29**）

情形1：减小键值后堆性质仍成立

- 减小键值
- 如有必要，更新最小元素指针



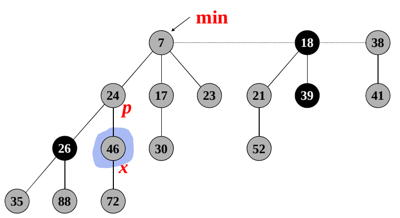
HIT CS&E

键值减小操作Decrease_key(3)

直键值减小操作作用于结点**x**（例如，键值从**46**减小为**15**）

情形2a：减小键值后堆性质不成立

- 减小键值
- 剪切**x**子树，插入双向链表，将**x**置为未标记结点
- 若**x**的父结点**p**未标记，则标价它
- 否则，剪切**p**,插入双向链表，将**p**置为未标记结点（递归过程）



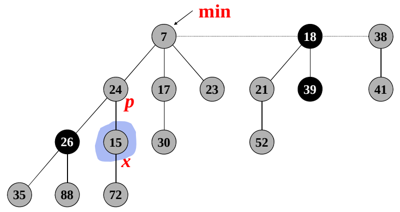
HIT CS&E

键值减小操作Decrease_key(3)

直键值减小操作作用于结点*x*（例如，键值从46减小为15）

情形2a：减小键值后堆性质不成立

- 减小键值
- 剪切*x*子树，插入双向链表，将*x*置为未标记结点
- 若*x*的父结点*p*未标记，则标价它
- 否则，剪切*p*,插入双向链表，将*p*置为未标记结点（递归过程）



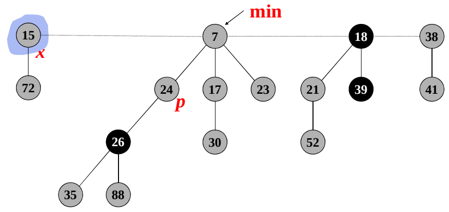
HIT CS&E

键值减小操作Decrease_key(5)

直键值减小操作作用于结点*x*（例如，键值从46减小为15）

情形2a：减小键值后堆性质不成立

- 减小键值
- 剪切*x*子树，插入双向链表，将*x*置为未标记结点
- 若*x*的父结点*p*未标记，则标价它
- 否则，剪切*p*,插入双向链表，将*p*置为未标记结点（递归过程）



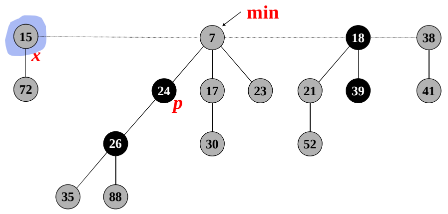
HIT CS&E

键值减小操作Decrease_key(6)

直键值减小操作作用于结点*x*（例如，键值从46减小为15）

情形2a：减小键值后堆性质不成立

- 减小键值
- 剪切*x*子树，插入双向链表，将*x*置为未标记结点
- 若*x*的父结点*p*未标记，则标价它
- 否则，剪切*p*,插入双向链表，将*p*置为未标记结点（递归过程）



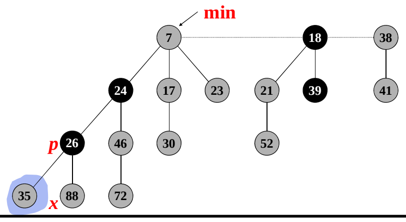
HIT CS&E

键值减小操作Decrease_key(7)

直键值减小操作作用于结点*x*（例如，键值从35减小为5）

情形2b：减小键值后堆性质不成立

- 减小键值
- 剪切*x*子树，插入双向链表，将*x*置为未标记结点
- 若*x*的父结点*p*未标记，则标价它
- 否则，剪切*p*,插入双向链表，将*p*置为未标记结点（递归过程）



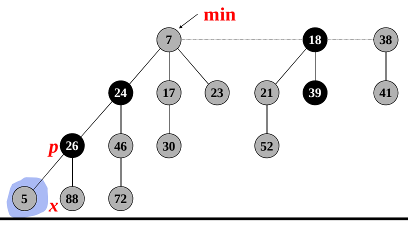
HIT CS&E

键值减小操作Decrease_key(8)

直键值减小操作作用于结点*x*（例如，键值从35减小为5）

情形2b：减小键值后堆性质不成立

- 减小键值
- 剪切*x*子树，插入双向链表，将*x*置为未标记结点
- 若*x*的父结点*p*未标记，则标价它
- 否则，剪切*p*,插入双向链表，将*p*置为未标记结点（递归过程）



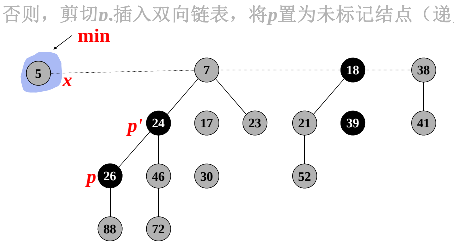
HIT CS&E

键值减小操作Decrease_key(9)

直键值减小操作作用于结点*x*（例如，键值从35减小为5）

情形2b：减小键值后堆性质不成立

- 减小键值
- 剪切*x*子树，插入双向链表，将*x*置为未标记结点
- 若*x*的父结点*p*未标记，则标价它
- 否则，剪切*p*,插入双向链表，将*p*置为未标记结点（递归过程）



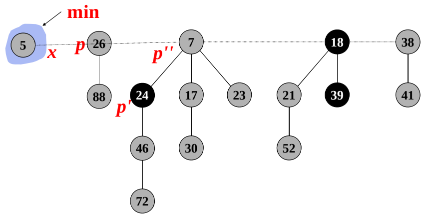
HIT CS&E

键值减小操作Decrease_key(10)

直键值减小操作作用于结点x（例如，键值从35减小为5）

情形2b：减小键值后堆性质不成立

- 减小键值
- 剪切x子树，插入双向链表，将x置为未标记结点
- 若x的父结点p未标记，则标价它
- 否则，剪切p,插入双向链表，将p置为未标记结点（递归过程）



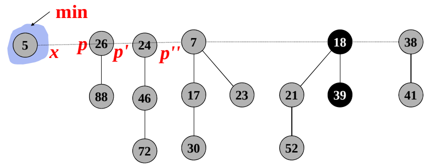
HIT CS&E

键值减小操作Decrease_key(11)

直键值减小操作作用于结点x（例如，键值从35减小为5）

情形2b：减小键值后堆性质不成立

- 减小键值
- 剪切x子树，插入双向链表，将x置为未标记结点
- 若x的父结点p未标记，则标价它
- 否则，剪切p,插入双向链表，将p置为未标记结点（递归过程）



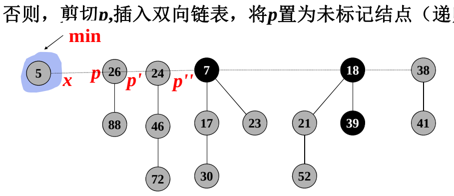
HIT CS&E

键值减小操作Decrease_key(12)

直键值减小操作作用于结点x（例如，键值从35减小为5）

情形2b：减小键值后堆性质不成立

- 减小键值
- 剪切x子树，插入双向链表，将x置为未标记结点
- 若x的父结点p未标记，则标价它
- 否则，剪切p,插入双向链表，将p置为未标记结点（递归过程）



HIT CS&E

键值减小操作Decrease_key的分析

键值减小操作的代价分析（ 势能函数$\Phi(H)=t(H)+2\cdot mark(H)$ ）

- 实际开销$O(c)$
  - $O(1)$ 时间内减小键值
  - 执行c次剪切操作，每次需要时间$O(1)$
- 平摊代价$O(1)$
  - 操作完成后的堆记为H',操作前的堆记为H
  - $t(H') \le t(H) + c$
  - $mark(H')=mark(H)-c+2$
  - $\Delta\Phi(H) = c+2(-c+2)=4-c$

HIT CS&E

目前得到的分析结果

在势能函数$\Phi(H)=t(H)+2\cdot mark(H)$ 下

- 插入操作的平摊代价$O(1)$
- 键值减小操作的平摊代价$O(1)$
- delete_min的代价是$O(rank(H))$
- 删除操作的平摊代价$O(rank(H))$
  - 先将节点x的键值减小为-∞,则x将出现在堆顶，平摊代价$O(1)$
  - 调用delete_min删除堆顶元素,平摊代价$O(rank(H))$

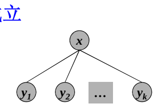
欲得定理结论，需证明$rank(H)=O(\log n)$

这意味着，斐波那契堆管理的元素个数是$rank(H)$的指数

HIT CS&E

$rank(H)$的上界分析

引理1. 设x是斐波那契堆中的任意结点，记$k=rank(x)$。设 $y_1,y_2,\ldots,y_k$ 是结点x的所有孩子结点且恰好按其成为x的孩子的先后次序列出，则$rank(y_1)\ge 0$,且$rank(y_i)\ge i-2$对$i=2,3,\ldots,k$成立



证明.当y_i成为x的孩子时，

x已有孩子$y_1,y_2,\ldots,y_{i-1}$,故$rank(x)=i-1$

y_i要成为x的孩子，需满足$rank(y_i)=rank(x)=i-1$

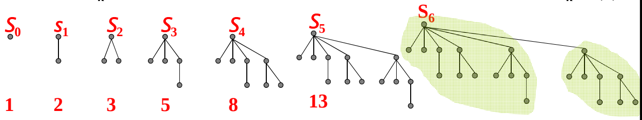
y_i成为x的孩子之后，至多失去一个孩子

HIT CS&E

$rank(H)$的上界分析

引理2. 设x是斐波那契堆中的任意结点，记$k=rank(x)$,则x所在的极小堆中至少有 $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}$个结点。

证明.令s_k表示阶为k的斐波那契堆中顶点的最小个数。归纳证明$s_k \geq F(k)$



根据引理1，用归纳法统计x及其子孙结点的个数有

$s_k= 1+s_0+s_0+s_1+...+s_{k-2}$

根 1 2 3 k

$\geq 1+1+F(0)+F(1)+...+F(k-2)$ （归纳假设）

$\geq F(k)$ （斐波那契数列性质，习题3.2）

$\geq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}$ （斐波那契数列性质，习题3.2）

HIT CS&E

$rank(H)$的上界分析

引理3. 设H是含有n个结点的斐波那契堆，则$rank(H)=O(\log n)$

证明.

- 记$rank(H)=k$
- 考虑H中结点的个数n
- 由引理2可知，结点个数至少为 $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}$
- 于是，$n \geq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}$

HIT CS&E

斐波那契堆上的合并操作Union

合并操作作用于堆H_1和H_2

- 合并H_1和H_2的根结点双向链表
- 实际开销$O(1)$
- 平摊开销$O(1)$
  - $t(H_1 \cup H_2)=t(H_1)+t(H_2)$
  - $mark(H_1 \cup H_2)=mark(H_1)+mark(H_2)$
  - $\Phi(H)=t(H)+2 \cdot mark(H)$
  - 势能改变量为0

HIT CS&E

斐波那契堆上的删除操作Delete

删除操作作用于堆的任意结点x

- 将x的键值减小为$-\infty$
- 删除堆顶元素
- 平摊开销$O(\log n)$
  - 减小键值操作的平摊代价为$O(rank(H))$
  - $mark(H)=O(\log n)$
  - 删除堆顶元素的平摊代价为$O(1)$

HIT CS&E

结论

操作	链表	二叉堆	二项堆	斐波那契堆	松散堆
make-heap	1	1	1	1	1
is-empty	1	1	1	1	1
insert	1	log n	log n	1	1
delete-min	n	log n	log n	log n	log n
decrease-key	n	log n	log n	1	1
delete	n	log n	log n	log n	log n
union	1	n	log n	1	1
find-min	n	1	log n	1	1

n -堆中存储的元素个数　　　平摊分析

定理. 从初始为空的斐波那契堆开始，任意执行由a_1个插入，a_2个删除，a_3个键值减小操作构成的长度为n的操作序列，其时间复杂度$O(a_1 + a_2 \log n + a_3)$.

HIT CS&E

6.7并查集性能平摊分析

- 并查集的概念和基本操作
- 并查集的线性链表实现
- 并查集的森林实现
- 并查集性能的平摊分析

HIT
CS&E

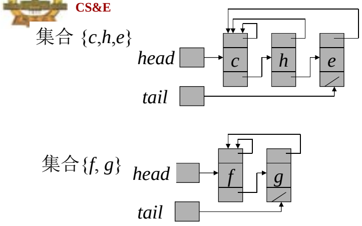
并查集

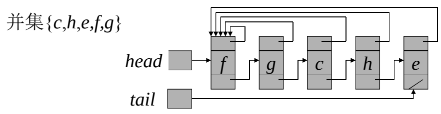
- 目的：管理n个不相交的集合$C=\{S_1,...,S_n\}$
  - 每个集合S_i维护一个代表元素x_i
- 支持的操作
  - MAKE-SET(x): 创建仅含元素x的集合.
  - UNION(x,y)　: 合并代表元素分别x和y的集合
  - FIND-SET(x) : 返回x所在集合的代表元素
- 目标：使得如下操作序列的代价尽可能低
  - n个MAKE-SET 操作 (开始阶段执行).
  - m个MAKE-SET, UNION, FIND-SET操作(后续)
  - $m \geq n$,UNION操作至多执行 n-1次
- 典型应用（管理图的连通分支）
  - 找出图的连通分支
  - Krusal算法中维护生成树产生过程中的连通分支
- 最新研究

1.Finding dominators via disjoint set union, *Journal of Discrete Algorithms,vol23,* pp 2-20, 2013
2. Disjoint set union with randomized linking, *Symp. on Discrete Algorithms,* pp1005-1017, 2014

HIT
CS&E

并查集直接实现为链表





每个集合维护为一个链表
- •**head**: 链表头指针
- •**tail**　:链表尾指针
- •**rep**　:指向代表元素
- •**Make-Set**:　O(1)
- •**Find(x)**　:　O(1)
- •**Union(x,y)**: O($|s_x|$)

HIT
CS&E

并查集链表实现的性能分析

考虑并查集上 如下特定的操作序列的代价

•开始阶段执行n个MAKE-SET 操作的总代价$O(n)$
•后跟n-1个 UNION操作的总代价$O(n^2)$

Union(x_1,x_2)	代价O(1)
Union(x_2,x_3)	代价O(2)
Union(x_3,x_4)	代价O(3)
...	
Union(x_{n-1},x_n)	代价O(n-1)

•总共执行执行2n-1次操作的总代价为$O(n^2)$
•从平摊效果看，每个操作的开销为$O(n)$

说明链表实现方式是很“蹩脚”，如何提高效率？

HIT
CS&E

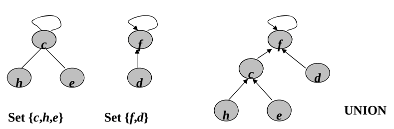
并查集链表实现的一种简单改进

考虑并查集链表实现的如下改进，效果会怎么样？
•每个链表表头记录集合（或）链表中元素的个数
•Union操作时将较短链表链接到较长链表
结果
在改进后的并查集上执行由Make_set, Find和Union操作构成的长度为$m+n$的操作序列（其中Make_Set操作有m个），则该操作序列的时间复杂度为$O(m+n\log n)$
为什么？
- 考虑每个元素的rep指针被修改的次数 (总共n个元素)
- 每个元素至多参与log$n$次并，因为并操作使链表长度至少倍增
- 所有Union操作一起至多$n$log$n$次修改rep指针

HIT
CS&E

并查集的森林实现

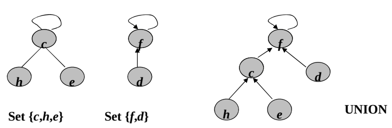
并查集三种操作
- 每个集合表示为一棵有根树
- 树根是代表元素
- 每个结点的指针指向其父结点，根结点指向自身



HIT
CS&E

并查集的直接森林实现

并查集可以实现为森林
- MAKE-SET(x): 创建仅含元素x的一棵树　　$O(1)$
- UNION(x,y)　: 将x作为y的孩子　　$O(1)$
- FIND(x)　　: 从结点x沿父指针访问直到树根　$O(T_x)$
- n次合并操作可能得到深度为n的树（简单路径）
- 在此极端情况下，Find(x)的最坏时间复杂性为$O(n)$
- n次Find操作的时间复杂度可能达到$O(n^2)$

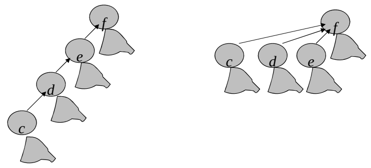


HIT CS&E

改进策略之路径压缩

执行Find(x)时

- 修改x到根结点r的路径上的所有结点的指针，使其指向根结点r
- 路径压缩增加了执行单次Find操作的时间开销
- 树中的路径长度大幅度降低，为后续Find操作节省了时间



HIT CS&E

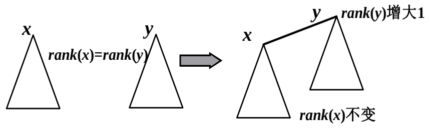
改进策略之按秩合并

根据以下规则，维护每个结点的秩

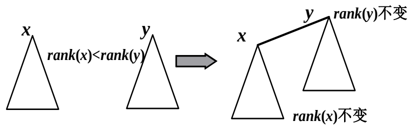
- **MakeSet(x)操作执行时定义结点x的秩为0**
- **Find操作不改变任意顶点的秩**
- **Union(x,y) 分两种情况修改结点的秩：**
  - 情形a：**rank(x)=rank(y)**。此时，令x指向y且y是并集的代表元素，**rank(y)**增加1，**rank(x)**不变（其他结点的秩也保持不变）
  - 情形b：**rank(x)<rank(y)**。此时，令x指向y且y是并集的代表元素，**rank(y)**和**rank(x)**保持不变（其他结点的秩也保持不变）

HIT CS&E

情形a



情形b



HIT CS&E

并查集操作算法

UNION(x,y)
1. LINK(FIND(x),FIND(y))

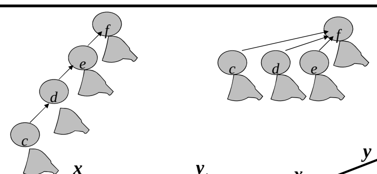
MAKE-SET(x)
1. rank[x]←0
2. p[x]←x

FIND(x)
1. Q←∅
2. While x≠ p[x] Do
3. 将x插入Q;
4. x← p[x];
5. For ∀y∈Q do
6. p[y] ← x;
7. 输出x

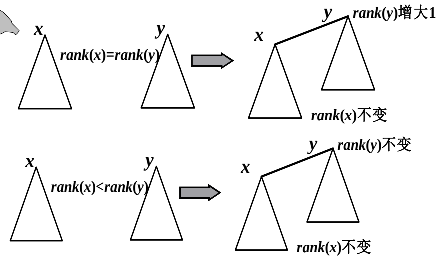
LINK(x,y)
1. if rank[x]>rank[y] then
2. p[y] ←x
3. else p[x] ←y
4. if rank[x]=rank[y] then
5. rank[y] ← rank[y] +1

HIT CS&E

Find



Union



并查集中每个元素的秩有什么基本性质呢？

HIT CS&E

秩的性质

引理1.对于含有n个结点的并查集，秩具有如下性质:

(1) 如果x≠$p(x)$，则$rank(x) < rank(p(x))$

(2) $rank(x)$的初始值为0，缓慢递增直到x不再是集合的代表元素，此后保持不变

(3)对于任意x, $rank(p(x))$是在操作过程中单调缓慢递增

(4)$rank(x)$≤n-1对任意结点成立

证明.根据秩的定义和并查集上的操作算法可得

rank(x)缓慢增长

如果将rank(x)与一个缓慢增长的函数相关联

能否得出秩的其他性质呢？

HIT CS&E

并查集的性能

在并查集上执行m个操作的时间复杂度为$O(m\alpha(n))$

- n是Make_Set操作的个数（亦即：并查集中元素的个数）
- $\alpha(n)\le 4$，对于绝大多数应用成立
- 近似地看，并查集上的操作序列的时间复杂度几乎是线性的

欲得上述结果，需要

- 讨论一个增长缓慢的函数-阿克曼函数的逆函数
- 深入讨论秩的性质
- 证明上述时间复杂度

HIT CS&E

阿克曼函数

阿克曼函数是定义在$k\ge 0, j\ge 1$上的递归函数

$$A_k(j)=\begin{cases} j+1 & \text{如果}k=0 \\ A_{k-1}^{(j+1)}(j) & \text{如果}k\ge 1 \end{cases}$$

利用数学归纳法，不难验证欲得上述结果，需要

- $A_1(j)=A_0(A_0(\ldots(A_0(j))\ldots))$ （j+1层递归）
  $=A_0(A_0(\ldots(A_0(j))\ldots))+1$ (j层递归)
  $=A_0(A_0(\ldots(A_0(j))\ldots))+1+1$ (j-1层递归)
  $=\ldots$
  $=A_0(j)+j$
  $=2j+1$

HIT CS&E

阿克曼函数

阿克曼函数是定义在$k\ge 0, j\ge 1$上的递归函数

$$A_k(j)=\begin{cases} j+1 & \text{如果}k=0 \\ A_{k-1}^{(j+1)}(j) & \text{如果}k\ge 1 \end{cases}$$

利用数学归纳法，不难验证欲得上述结果，需要

- $A_2(j)=A_1(A_1(\ldots(A_1(j))\ldots))$ （j+1层递归）
  $=2A_1(A_1(\ldots(A_1(j))\ldots))+1$ (j层递归)
  $=2[2A_1(A_1(\ldots(A_1(j))\ldots))+1]+1$ (j-1层递归)
  $=2^2A_1(A_1(\ldots(A_1(j))\ldots))+2+1$ (j-1层递归,整理上式)
  $=\ldots$
  $=2^jA_1(j)+2^{j-1}+2^{j-2}+\ldots+2+1$ (1层递归)
  $=2^j(2j+1)+2^{j-1}+2^{j-2}+\ldots+2+1$
  $=2^{j+1}j+2^{j+1}-1$ （整理上式）
  $=2^{j+1}(j+1)-1$

HIT CS&E

阿克曼函数

阿克曼函数是定义在$k\ge 0, j\ge 1$上的递归函数

$$A_k(j)=\begin{cases} j+1 & \text{如果}k=0 \\ A_{k-1}^{(j+1)}(j) & \text{如果}k\ge 1 \end{cases}$$

利用数学归纳法，不难验证欲得上述结果，需要

- $A_1(j)=2j+1$
- $A_2(j)=2^{j+1}(j+1)-1$
- $A_k(j)$是一个“急速”增长的函数
  $A_0(1)=1+1=2$
  $A_1(1)=2*1+1=3$
  $A_2(1)=2^{1+1}(1+1)-1=7$
  $A_3(1)=A_2^{(1+1)}(1)=A_2^{(2)}(1)=A_2(A_2(1))=A_2(7)=2^{7+1}(7+1)-1=2047$
  $A_4(1)=A_3^{(2)}(1)=A_3(A_3(1))=A_3(2047)=A_2^{(2048)}(2047)$
  $\gg A_2(2047)=2^{2048}.2048-1>2^{2048}=(2^4)^{512}=(16)^{512}>10^{80}$

$A_k^{(j)}(x)$的性质
k-层， 层越大，增长越快
j-迭代次数，迭代次数越大，增长越快

HIT CS&E

阿克曼函数的逆函数

阿克曼函数的逆函数定义为

$\alpha(n)=\min\{k \mid A_k(1)\ge n\}$

由于阿克曼函数急速增长，故$\alpha(n)$缓慢增长

$\alpha(n)\le 4$在人类实践认知范围总成立

n	$0\le n\le 2$	$n=3$	$4\le n\le 7$	$8\le n\le 2047$	$2048\le n\le A_4(1)$	...
$\alpha(n)$	0	1	2	3	4	...

将$\alpha(.)$作用到rank(x)上，能否得出rank(x)的其他性质？

HIT CS&E

并查集性能的平摊分析

对并查集中的每个结点x,定义

$$Level(x)=\max\{k \mid rank(p(x))\ge A_k(rank(x))\}$$

$$Iter(x)=\max\{i \mid A_{Level(x)}^{(i)}(rank(x))\le rank(p(x))\}$$

$p(x)$ rank($p(x)$)

rank(x) 与rank($p(x)$)的距离用$\alpha(.)$来刻画

x rank(x)

- 直观上

路径上rank值单调递增有界

– 一条路径上有*Level*值或Iter值较大的节点，路径就很短,继而Find(x)的代价就低
– Level值、Iter可能有助于建立势能函数，它们有什么性质呢？

并查集性能的平摊分析(1)

HIT CS&E

对并查集中的每个结点x,定义

$$Level(x) = \max\{k \mid rank(p(x)) \geq A_k(rank(x))\}$$

$$Iter(x) = \max\{i \mid A^{(i)}_{Level(x)}(rank(x)) \leq rank(p(x))\}$$

- $0 \leq Level(x) < \alpha(n)$, 且$Level(x)$随时间递增
  - $0 \leq Level(x)$， 因为$rank(p(x)) \geq rank(x)+1 = A_0(rank(x))$
  - $Level(x) < \alpha(n)$，因为$A_{\alpha(n)}(rank(x)) \geq A_{\alpha(n)}(1) \geq n > rank(p(x))$
- $1 \leq Iter(x) \leq rank(x)$, 且只要$Level(x)$不变则$Iter(x)$不变或增大
  - $1 \leq Iter(x)$， 因为$rank(p(x)) \geq A_{Level(x)}(rank(x)) = A^{(1)}_{Level(x)}(rank(x))$
  - $Iter(x) \leq rank(x)$， 因为 $A^{(rank(x)+1)}_{Level(x)}(rank(x)) = A_{Level(x)+1}(rank(x)) > rank(p(x))$
- 只要$Level(x)$不变则$Iter(x)$不变或增大
  - 由于$rank(p[x])$随时间单调递增，仅当$Level(x)$增大时$Iter(x)$减小

并查集性能的平摊分析(2)

HIT CS&E

定义并查集上q个操作之后结点x的势能$\phi_q(x)$为

$$\phi_q(x) = \begin{cases} \alpha(n) \cdot rank(x) & \text{若}x\text{是树根或}rank(x)=0 \\ [\alpha(n) - Level(x)] \cdot rank(x) - Iter(x) & \text{若}x\text{不是树根且}rank(x) \geq 1 \end{cases}$$

- $0 \leq \phi_q(x) \leq \alpha(n) rank(x)$
  - 若x是树根，显然
  - 若x不是树根，则
  - $\phi_q(x) = [\alpha(n) - Level(x)] rank(x) - Iter(x)$
    $\geq [\alpha(n) - (\alpha(n)-1)] rank(x) - rank(x)$
    $= 0$
  - $\phi_q(x) = [\alpha(n) - Level(x)] rank(x) - Iter(x)$
    $\leq [\alpha(n) - (0)] rank(x) - 0$
    $= \alpha(n) rank(x)$

并查集性能的平摊分析(3)

HIT CS&E

定义并查集上q个操作之后结点x的势能$\phi_q(x)$为

$$\phi_q(x) = \begin{cases} \alpha(n) \cdot rank(x) & \text{若}x\text{是树根或}rank(x)=0 \\ [\alpha(n) - Level(x)] \cdot rank(x) - Iter(x) & \text{若}x\text{不是树根且}rank(x) \geq 1 \end{cases}$$

- 若x不是树根，第q+1个操作是Union或Find，则$\phi_{q+1}(x) \leq \phi_q(x)$
  - $rank(x)$和$\alpha(n)$不变
  - 若$rank(x)=0$,由$Iter(x) \leq rank(x)$可知，论断成立
  - 若$rank(x) \geq 1$，（$Level(x)$单调递增）
    - $Level(x)$保持不变，$Iter(x)$增大，$\phi_{q+1}(x) \leq \phi_q(x)-1$
    - $Level(x)$增大，$Iter(x)$不变或减小，
      $[\alpha(n) - Level(x)] rank(x)$至少减小$rank(x)$
      $Iter(x)$至多减小$rank(x)-1$，因为$Iter(x) < rank(x)$
      $\phi_{q+1}(x) \leq \phi_q(x)-1$

并查集性能的平摊分析(4)

HIT CS&E

定义并查集在q个操作之后的势能ϕ_q为

$$\phi_q = \Sigma_x\, \phi_q(x)$$

- $\phi_q \geq 0$恒成立，因为$0 \leq \phi_q(x) \leq \alpha(n) rank(x)$对任意$x$成立
- 并查集上任意操作序列的总平摊代价≥总实际代价

并查集性能的平摊分析(5)

HIT CS&E

势能$\phi_q = \Sigma_x\, \phi_q(x)$

$$\phi_q(x) = \begin{cases} \alpha(n) \cdot rank(x) & \text{若}x\text{是树根或}rank(x)=0 \\ [\alpha(n) - Level(x)] \cdot rank(x) - Iter(x) & \text{若}x\text{不是树根且}rank(x) \geq 1 \end{cases}$$

Make_Set操作的平摊代价为$O(1)$

Make_Set(y):

- 实际代价为$O(1)$
- 势能的增量为0
  - ➢ 新增一棵以y为树根的树，y的势能为0
  - ➢ 不改变其他树的结构和rank，其他结点的势能不变

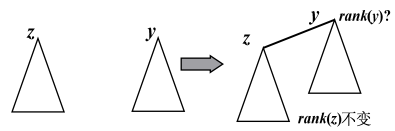
并查集性能的平摊分析(6)

势能$\phi_q = \Sigma_x\, \phi_q(x)$

$$\phi_q(x) = \begin{cases} \alpha(n) \cdot rank(x) & \text{若}x\text{是树根或}rank(x)=0 \\ [\alpha(n) - Level(x)] \cdot rank(x) - Iter(x) & \text{若}x\text{不是树根且}rank(x) \geq 1 \end{cases}$$

Union(y,z)操作的平摊代价为$\Theta(\alpha(n))$

- 实际代价为$\Theta(1)$
- 势能增量为$\Theta(\alpha(n))$
  - ➢ 不妨设合并后，y是z的父结点
  - ➢ 操作仅可能改变$rank(y)$



哪些节点的势能可能会发生改变？可能会怎么变？

势能$\phi_q=\Sigma_x\ \phi_q(x)$　　并查集性能的平摊分析(6)

$$\phi_q(x)=\begin{cases}\alpha(n)\cdot rank(x) & 若x是树根或rank(x)=0\\ [\alpha(n)-Level(x)]\cdot rank(x)-Iter(x) & 若x不是树根且rank(x)\ge 1\end{cases}$$

Union(y,z)操作的平摊代价为$\Theta(\alpha(n))$

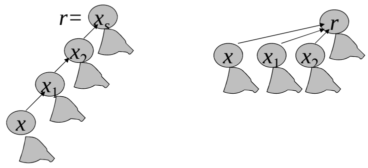
- 实际代价为$\Theta(1)$
- 势能增量为$\Theta(\alpha(n))$
  - 不妨设合并后，y是z的父结点
  - 操作仅可能改变rank(y)
  - 势能发生变化的结点只能是y，z和操作之前y的子结点w
    - w不是树根，必有$\phi_{q+1}(w)\le\phi_q(w)$（参照前面的性质）
    - z的势能不会增加
      操作前，z是树根，故$\phi_q(z)=\alpha(n)$rank(z)
      操作后，rank(z)不变，且$0\le\phi_{q+1}(z)\le\alpha(n)$rank(z)
    - y的势能至多增大$\alpha(n)$
      操作前，y是树根，故$\phi_q(y)=\alpha(n)$rank(y)
      操作时，rank(y)增大1或保持不变
      操作后，y仍是树根，$\phi_{q+1}(y)\le\phi_q(y)+\alpha(n)$

势能$\phi_q=\Sigma_x\ \phi_q(x)$　　并查集性能的平摊分析(7)

$$\phi_q(x)=\begin{cases}\alpha(n)\cdot rank(x) & 若x是树根或rank(x)=0\\ [\alpha(n)-Level(x)]\cdot rank(x)-Iter(x) & 若x不是树根且rank(x)\ge 1\end{cases}$$

Find(x)操作的平摊代价为$\Theta(\alpha(n))$

- 实际代价为$\Theta(s)$



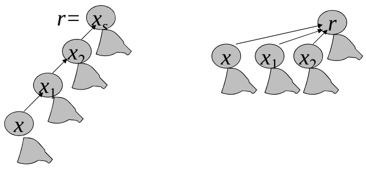
- $x=x_0,x_1,\ldots,x_{s-1}$的势能不会增加
  因为它们不是树根，故$\phi_{q+1}(x_i)\le\phi_q(x_i)$（前面的结论）
- 树根r的势能不会发生变化
  rank(r)未发生变化

势能$\phi_q=\Sigma_x\ \phi_q(x)$　　并查集性能的平摊分析(8)

$$\phi_q(x)=\begin{cases}\alpha(n)\cdot rank(x) & 若x是树根或rank(x)=0\\ [\alpha(n)-Level(x)]\cdot rank(x)-Iter(x) & 若x不是树根且rank(x)\ge 1\end{cases}$$

Find(x)操作的平摊代价为$\Theta(\alpha(n))$

- 实际代价为$\Theta(s)$



- 平摊代价为$\Theta(\alpha(n))$
  路径$x,x_1,\ldots,x_s$上至少有s-[$\alpha(n)$+2]个结点的势能至少减小1（参见讲义）

HIT CS&E　　结论

在并查集上执行m个操作的时间复杂度为$O(m\alpha(n))$

- Make_Set操作的平摊代价为$O(1)$
- Union操作的平摊代价为$\Theta(\alpha(n))$
- Union操作的平摊代价为$\Theta(\alpha(n))$
- n是Make_Set操作的个数，亦即并查集管理的数据对象的个数
- $\alpha(n)\le 4$，对于绝大多数应用成立
- 近似地看，并查集上的操作序列的时间复杂度几乎是线性的