第二章 映射

基本要求

1.要求掌握函数的基本概念,弄清单射、满射、双射之间的区别.给定一个函数要求能确定它是否是单射、满射、双射等。

2.掌握诱导映射和逆映射的定义,弄清楚它们存在的条件。

3.掌握抽屉原理的应用。

4.理解集合的象及原象的定义及相关性质。给定一个函数,能确定一点的象,一个集合的象,一个集合的原象及两映射的合成等。

部分习题解答

§2.2

4. 证明:分别以650个点为圆心,铺放小垫圈,那么阴影部分总共具有的面积是 $650\pi(3^2-2^2)$,事实上小垫圈必在一个半径为(16+3)寸的圆内相互覆盖那么至少覆盖这个圆的垫圈数可这样计算,$9\times\pi\times19^2<650\pi(3^2-2^2)$ 即必有一个小范围至少上面盖有十个小垫圈。这就意味着:把一个小垫圈的圆心置于该范围内,那么原有的十个小垫圈的圆心都在其内了。 [证毕]

§2.3

3. 证明:设 $\forall y\in B\cap f(A)$ 即 $y\in B$ 且 $y\in f(A)$ 则 $\exists x\in f^{-1}(B)$ 且 $x\in A$,使得 $f(x)=y$,于是 $y\in f(f^{-1}(B)\cap A)$,所以 $(B\cap f(A))\subseteq f(f^{-1}(B)\cap A)$

其次,设 $\forall y\in f(f^{-1}(B)\cap A)$ 则 $\exists x\in f^{-1}(B)\cap A$ 使得 $y=f(x)$ $\because x\in f^{-1}(B)$

$\therefore y\in B$. 又 $\because x\in A$ $\therefore y\in f(A)$ 即 $y\in B\cap f(A)$ $\therefore f(f^{-1}(B)\cap A)\subseteq B\cap f(A)$

$\therefore f(f^{-1}(B)\cap A)=B\cap f(A)$

4. (1) a (2) b (3) c (4) d

7. 不正确 ∵设 $M=Y\setminus Im(X)$ 则 $M\subseteq(f(A))^c$ 但 $M\nsubseteq f(A^c)$ 故而不成立.

§2.4

4. 解: $f: X\to Y$, $g: Y\to Z$. 则映射 $gf: X\to Z$

$f: 2^X\to 2^Y$, $g: 2^Y\to 2^Z$, 诱导映射的合成 $gf: 2^X\to 2^Z$ 是映射 gf 的诱导映射之.

5. 证明: 设 $x\in(gf)^{-1}(A)$ 则 $gf(x)\in A$, $x\in X$. 令 $f(x)=y$ 即 $g(y)\in A$ ∴ $y\in g^{-1}(A)$ $=\{y\mid g(y)\in A, y\in Y\}$ 又 $y=f(x)$ ∴ $f(x)\in g^{-1}(A)\Rightarrow x\in f^{-1}(g^{-1}(A))=\{x\mid f(x)\in g^{-1}(A), x\in X\}$ 故 $(gf)^{-1}(A)\subseteq f^{-1}(g^{-1}(A))$ 其次, 设 $x\in f^{-1}(g^{-1}(A))$, $f^{-1}(g^{-1}(A))=\{x\mid f(x)\in g^{-1}(A), x\in X\}$. 于是 $f(x)\in g^{-1}(A)$, 令 $y=f(x)$ 即 $y\in g^{-1}(A)=\{y\mid g(y)\in A, y\in Y\}$ ∴ $g(y)\in A$. 即 $gf(x)\in A$ 于是 $x\in gf^{-1}(A)=\{x\mid gf(x)\in A, x\in X\}$, 故 $f^{-1}(g^{-1}(A))\subseteq(gf)^{-1}(A)$

所以 $gf^{-1}(A)=f^{-1}(g^{-1}(A))$ [证毕].

§2.5

4. 证明: "⇒" n阶方阵是可逆的, 则 $AA^{-1}=A^{-1}A=I$. A^{-1}亦为n阶方阵, 令 $B=A^{-1}$. ∴ ∃一个n阶方阵B使得 $AB=I$.

"⇐" 若 存在一个n阶方阵B使得 $AB=I$ 则 用B左乘AB 即 $BAB=BI=B=IB$ $\Rightarrow BA=I$ 于是 B是A的逆, 即n阶方阵A可逆。 [证毕]

§2.7

2. 证明: 设 $a=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $s=\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是自然数序列的一个子序列. $s'=\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是s的一个子序列, 则 $a\circ s$ 是 a 的一个子序列, $a\circ s'$ 是 $a\circ s$ 的一个子序列. 又易见 s' 也是自然数序列的一个子序列。故 $a\circ s'$ 也是 a 的一个子序列。∴原结论成立. [证毕]