例 8 设 G 是一个 $p(p\ge 3)$ 个顶点的连通图。u 和 v 是 G 的两个不邻接的顶点,并且 $\deg u+\deg v\ge p$。

证明：G 是哈密顿图 $\Leftrightarrow G+uv$ 是哈密顿图。

证明： $\Rightarrow$ 显然成立。

$\Leftarrow$ 假设 G 不是哈密顿图，则由题意知，在 G 中必有一条从 u 到 v 的哈密顿路。不妨设此路为 $uv_2v_3\cdots v_{p-1}v$，令 $\deg u=k,\deg v=l$，则在 G 中与 u 邻接的顶点为 $u_{i_1},u_{i_2},\cdots,u_{i_k}$，其中 $2=i_1<i_2<\cdots<i_k\le p-1$。此时顶点 $u_{i_r-1}(r=2,3,\cdots,k)$ 不能与顶点 v 邻接。否则 G 有哈密顿回路 $uv_2\cdots v_{i_r-1}vv_{p-1}\cdots v_{i_r}u$，因此 v 至少与 $u,v_2,\cdots,v_{p-1}$ 中的 k 个顶点不邻接。于是 $l\le p-1-k$，从而 $k+l\le p-1$，即 $\deg u+\deg v\le p-1$，与题设矛盾。故假设不成立，因此 G 是哈密顿图。

例 9 设 $G=(V,E)$ 是连通图且顶点数为 p，最小度数为 δ。若 $p>2\delta$，则 G 中有一长至少为 2δ 的路。

证: 假设 G 中的最长路为 L：$L=v_0v_1\cdots v_l$,其长度为 $l<2\delta$。因为 $\deg v_0\ge\delta$，$\deg v_l\ge\delta$，所以存在 $0\le i\le l-1$，使 v_0v_{i+1} 与 v_iv_l 在 G 中相邻，得一长为 $l+1$ 的

回路：$v_0v_1\cdots v_iv_lv_{l-1}\cdots v_{i+1}v_0$。

又因为 G 连通，且 G 的顶点数 $p>2\delta$，故存在 $v\ne v_i(0\le i\le l)$ 与回路上 $v_j(0\le j\le l)$ 相邻，则把回路在 v_j 处断开，并把 v 连入回路中，得到一条长为 $l+1$ 的路，矛盾。

所以 G 中有一长至少为 2δ 的路。

例 10 设 G 为有 p 个顶点的简单无向图，证明：

（1）若 G 的边数 $q=(p-1)\cdot(p-2)/2+2$，则 G 为哈密顿图；

（2）若 G 的边数 $q=(p-1)\cdot(p-2)/2+1$，则 G 是否一定为哈密顿图？

证：（1）首先证明 G 中任意两个不相邻的顶点的度数之和均大于等于 p，否则存在 v_i,v_j 不相邻，且 $\deg(v_i)+\deg(v_j)\le p-1$。

令 $V_1=\{v_i,v_j\}$，$G_1=G\setminus V_1$，则 G_1 是有 $p-2$ 个顶点图，它的边数 q 应满足：

$q \geq (p-1)(p-2)/2+2-(p-1)=(p-2)(p-3)/2+1$，

这与G_1是有$p-2$个顶点的简单图，矛盾。

所以G中任意两个互不相邻的顶点的度数之和均大于等于p。

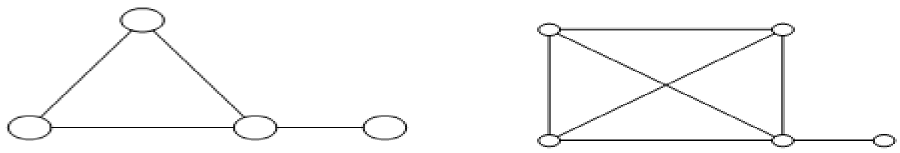
根据定理可知，G是哈密顿图。

（2）若G的边数$q=(p-1)\cdot(p-2)/2+1$，则G不一定是哈密顿图。

例如：如图 7 所示的两个图都不是哈密顿图。

例 11 证明：完全图K_9中至少存在彼此无公共边的两条哈密顿回路和一条哈密顿路？

证：在K_9中，$\forall v \in V, \deg v = 8 \geq p/2$，由定理可知，必有一条哈密顿回路$C_1$；令$G_1$为$K_9$中删除$C_1$中全部边之后的图，则$G_1$中每个顶点的度均为$\deg v = 6 \geq p/2$，故$G_1$仍为哈密顿图，因而存在$G_1$中的哈密顿回路$C_2$，显然$C_1$与$C_2$无公共边。再设$G_2$为$G_1$中删除$C_2$中的全部边后所得图，则$G_2$每个顶点的度均为$\deg v = 4$。又由定理可知$G_2$为半哈密顿图，因而$G_2$中存在哈密顿路。设$L$为$G_2$中的一条哈密顿路，显然$C_1, C_2, L$无公共边。



例 12 已知 9 个人$v_1, v_2, \cdots, v_9$，其中v_1和两个人握过手，v_2, v_3, v_4, v_5各和 3 个人握过手，v_6和 4 个人握过手，v_7, v_8各和 5 个人握过手，v_9和 6 个人握过手。证明这 9 个人中一定可以找出 3 个人互相握过手。

证：设$v_1, v_2, \cdots, v_9$为图G的 9 个顶点，v_i与v_j握过手就连一条边v_iv_j，于是得到图G。根据题意有：

$$\deg(v_1)=2, \deg(v_2)=\deg(v_3)=\deg(v_4)=\deg(v_5)=3,$$

$$\deg(v_6)=4, \deg(v_7)=\deg(v_8)=5, \deg(v_9)=6。$$

与v_9相邻的点有 6 个，其中必有一点v_k为v_6, v_7, v_8之一，因此有$\deg(v_k) \geq 4$。

与 v_9 相邻的其余 5 个点中必存在一点 v_k 与 v_k 相邻如图 4 所示，否则有 $\deg(v_k) \leq 8-5=3$，矛盾。由此 v_9, v_k, v_k 三个人互相握过手。

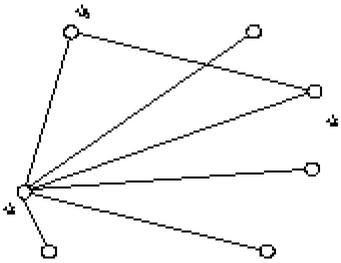


图 5

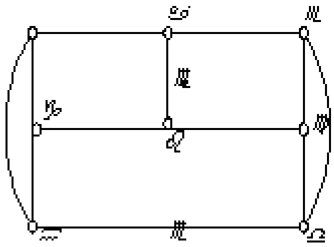


图 6

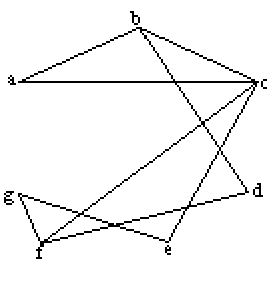
图 7

例 13 某次会议有 20 人参加，其中每个人都至少有 10 个朋友，这 20 人围一圆桌入席，要想使与每个人相邻的两位都是朋友是否可能？根据什么？

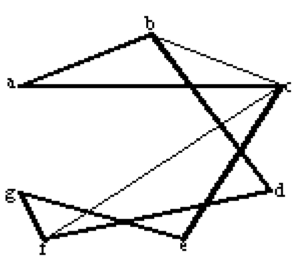
例 14 图 G 是哈密顿图。试证明：若图中的哈密顿圈中含边 e1，则它一定同时也含 e2。

例 15 已知 a,b,c,d,e,f,g 7 个人中，a 会讲英语；b 会讲英语和汉语；c 会讲英语、意大利语和俄语；d 会讲汉语和日语；e 会讲意大利语和德语；f 会讲俄语、日语和法语；g 会讲德语和法语。能否将他们的座位安排在圆桌旁，使得每个人都能与他身边的人交谈？

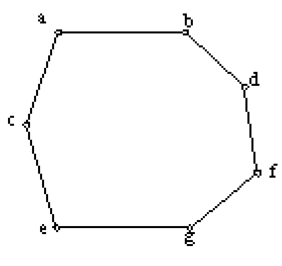
证：用 a,b,c,d,e,f,g 7 个顶点代表 7 个人，若两人能交谈（会讲同一种语言），就在代表他们的顶点之间连一条无向边，所得无向图如图 4(a) 所示，此图中存在哈密顿回路：$abdfgeca$（如图 4(b) 所示），于是按图 4(c) 所示的顺序安排座位即可。



(a)



(b)



(c)

例 16 设 $G=(V,E)$ 是 $p(p\geq 3)$ 个顶点的简单无向图,设 G 中最长的路 L 的长度为 l $(l\geq 2)$，起点与终点分别为 u，v，而且 $\deg u+\deg v\geq p$ 。证明：G 中必有与 L 不完全相同但长度也为 l 的路。

证：设图 G 的最长的路 L 为：$uv_1\cdots v_{l-1}v$，其长度为 l。因 L 为最长的路，所以与 u，v 相邻的顶点必在 L 上。

若 u 和 v 相邻，则构成一个回路 $uv_1\cdots v_{l-1}vu$，回路长为 $l+1$；

若 u 和 v 不相邻，设与 u 相邻的顶点为 $v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_r}$，其中

$1=v_{i_1}<v_{i_2}<\cdots<v_{i_r}<l-1$，则 v 必与某个 $v_{i_j-1}(2\leq j\leq r)$ 邻接。否则，v 至多与最长路上其余的顶点邻接，所以

$$\deg u+\deg v\leq r+(p-1-r)<p$$

这是不可能的。于是 $uv_{i_j}v_{i_j+1}\cdots v_{l-1}vv_{i_j-1}v_{i_j-2}\cdots v_1u$ 是 G 中的一个回路，此回路长度为 $l+1$。去掉这个回路的任意一条边，便得到一条相应的最长的路，所以对于这个回路有 $l+1$ 个不同的最长的路且 $l\geq 2$。

故 G 中必有与 L 不完全相同，但长度也为 l 的路。

例5 证明：在一个连通图中，两条最长的路有一个公共的顶点。

证：设 L_1 与 L_2 是图中的两条最长的路，$L_1:v_1v_2\cdots v_i\cdots v_n$，$L_2:u_1u_2\cdots u_j\cdots u_n$。

假设 L_1 与 L_2 没有公共顶点，因为 G 是连通的，所以 L_1 与 L_2 之间必有一条路 P 连接且 $|P|\geq 1$。令 P 与 L_1 上的 v_i 连接，与 L_2 上的 u_j 连接，则

若 $i\geq j$，则路 $v_1v_2\cdots v_iPu_ju_{j+1}\cdots u_m$ 比 L_2 长，矛盾；

若 $i\leq j$，则路 $u_1u_2\cdots u_jPv_iv_{i+1}\cdots v_n$ 比 L_1 长，矛盾。

故假设不成立，即两条最长的路必有公共顶点。

例 6 设 G 是图，证明：若δ(G)≥2，则 G 中包含长至少是δ(G)+1 的圈。

例 7 设 G 为 p 阶简单无向图，$p>2$ 且 p 为奇数，G 和 G 的补图 G^c 中度数为奇数的顶点的个数是否一定相等？试证明你的结论。

解： 一定相等。

因为 $p>2$ 为奇数，则对于奇数个顶点的 p 阶无向完全图，每个顶点的度数必为偶数。若 G 的奇度数顶点为 p_1 个，则对应补图 G^c 在这 p_1 个顶点的度数必为（偶数－奇数）＝奇数。另外，对于 G 中度数为偶数的顶点，其在补图 G^c 中，这些顶点的度数仍为（偶数－偶数）＝偶数。所以，G 中度数为奇数的顶点个数与 G^c 中度数为奇数的顶点个数相同。

例 8 在一个有 n 个人的宴会上，每个人至少有 m 个朋友(2≤m≤n)。试证：有不少于 m+1 个人，使得他们按某种方法坐在一张圆桌旁，使得他们按着某种方法坐在一张圆桌旁，每人的左、右均是他的朋友。

例 9 一个图 G 是连通的，当且仅当将 V 划分成两个非空子集 V1 和 V2 时，G 总有一条联结 V1 的一个顶点与 V2 的一个顶点的边。

例 10 设 G 是一个(p,q)图，证明：

(1)若 q≥p，则 G 中有圈；(2)若 q>p+4，则 G 包含两个边不重的圈；

例 11 图 G 的围长是 G 的最短圈的长；G 中若没圈，则定义 G 的围长为无穷大。证明：围长为 4 的 k-正则图至少有 2k 个顶点，而且(同构意义下)在 2k 个顶点上恰好有一个这样的图。(Kk,k)

例 5 证明：r(3,4)=9。即证明：任何 9 个人的团体里，或有 3 个人互相认识，或有 4 个互相不认识。但 8 个人的团体里，上述性质未必成立。

证： 这就是要证任何 9 个顶点的图 G 中，或 G 中包含 K_3，或 G 中包含 K_4^C。并且有的 8 个顶点的图 H，H 中既不包含 K_3 也不包含 K_4^C，图 2 中给出了这样的一个图。

设 $G=(V,E)$，$|V|=9$。若 $\exists v\in V, \deg v\geq 4$，则 G 中有 4 个顶点 v_1,v_2,v_3,v_4 在

G中与v邻接。这时若有$i \neq j$，$v_i v_j \in E$，则$v v_i v_j v$是G中的一个K_3；否则v_1, v_2, v_3, v_4是G的互不相邻接的4个顶点，所以G包含K_4^C。

若$\forall v \in V, \deg v \leq 3$，则在$G^c$中每个顶点的度$\geq 5$。但是9是奇数，$G^c$中奇度数顶点的个数必为偶数，所以有一个偶度顶点$u, \deg u \geq 6$。$G^c$中与$u$邻接的6个顶点导出$G^c$中的6个顶点的子图。由定理1知$G^c$有$K_3$，它与$u$形成了$G^c$中的$K_4$，即$G$中的$K_4^C$或$G^c$中含$K_3^C$即$G$包含$K_3$。

因此，$r(3,4) = 9$。