§2.4线性常系数差分方程的求解

一．常系数线性差分方程

1．常系数线性差分方程的一般形式

$$a_0 y(n)+a_1 y(n-1)+\ \dots\ +a_{N-1}y(n-N+1)+a_N y(n-N)$$
$$=b_0 x(n)+b_1 x(n-1)+\ \cdots\ +b_{M-1}x(n-M+1)+b_M x(n-M)$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k)=\sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

2．求解方法

①迭代法（缺点：通常不能给出完整解析解；
　　　　　优点：概念清楚比较简便）

②时域经典法（齐次解+特解）主要适用于$n=-\infty\sim+\infty$都有$x(n)$加入

③零输入、零状态（适用于$n\geq0$加入）

④变换域法 （Z变换）

§ 2.4线性常系数差分方程的求解

3．迭代法

例1：$y(n)-ay(n-1)=x(n)$　已知：$y(-1)=0,\ x(n)=\delta(n)$

解：$y(0)=ay(-1)+x(0)=1$

$y(1)=ay(0)+x(1)=a$

……

$y(n)=a^n$

$y(-1)=0$

$y(-2)=0$

……

$y(-\infty)=0$

故 $y(n)=a^n u(n)$

§ 2.4线性常系数差分方程的求解

例2: $y(n)-y(n-1)-y(n-2)=0$ 已知: $y(0)=0, y(1)=1$

解:

$$y(n)=y(n-1)+y(n-2)$$

$$\Longrightarrow y(2)=y(1)+y(0)=1$$

$$y(3)=y(2)+y(1)=2$$

$$\cdots\cdots$$

$$\{0,1,1,2,3,5,8,13,\cdots\cdots\}$$

无法给出闭式解集

§2.4线性常系数差分方程的求解

二．时域经典法----齐次解+特解

1．齐次解----自由响应

①齐次方程：$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k)=0$

②特征根

$$y(n)-ay(n-1)=0 \Rightarrow a=\frac{y(n)}{y(n-1)} \Rightarrow y(n)=ca^n$$

一般情况下：令$y=c\alpha^n$代入$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k)=0$

$\sum_{k=0}^{N} a_k c\alpha^{n-k}=0$ 消去c，除以 α^{n-N}

可得 $a_0\alpha^N+a\alpha^{N-1}+\cdots\cdots+a_{N-1}\alpha+a_N=0$ 特征方程

有N个根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_N$ 特征根

§2.4线性常系数差分方程的求解

③齐次解一般形式

i)特征根互不相同的实根

齐次解 $y_h(n) = c_1\alpha^n{}_1 + c_2\alpha^n{}_2 + \cdots\cdots + c_N\alpha^n{}_N$

连续： $r_h(t) = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t} + \cdots\cdots + c_N e^{\alpha_N t}$

ii) α_1 与 α_2 互为共轭 $\alpha_1 = A \bullet e^{jB}, \alpha_2 = A \bullet e^{-jB}$

α_1与α_2对应的齐次解部分 $= A^n(C_1 \cos Bn + C_2 \sin Bn)$

（连续：$\alpha_1 = A + Bj, \alpha_2 = A - Bj$ ）

α_1与α_2对应的齐次解部分 $= e^{At}(C_1 \cos Bt + C_2 \sin Bt)$

iii) α_1为k重

α_1对应齐次解部分 $= \alpha_1{}^n(C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \cdots\cdots + C_k n^{k-1})$

（连续：α_1为k重，齐次解 $= e^{\alpha_1 t}(C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + \cdots\cdots + C_k t^{k-1})$

§2.4线性常系数差分方程的求解

例3求 $y(n)-y(n-1)-y(n-2)=0$ ，$y(1)=1, y(2)=1$

解： $\alpha^2-\alpha-1=0$ 得$\alpha_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \alpha_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

所以 $y(n)=C_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n+C_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

$$\begin{cases} 1=C_1\frac{1+\sqrt{5}}{2}+C_2\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1=C_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2+C_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2 \end{cases}$$ 推出：$$\begin{cases} C_1=\frac{1}{\sqrt{5}} \\ C_2=\frac{-1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$y(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

§2.4线性常系数差分方程的求解

例4：求 $y(n)+6y(n-1)+12y(n-2)+8y(n-3)=0$ 的齐次解形式

解：$\alpha^3+6\alpha^2+12\alpha+8=0$

得 $(\alpha+2)^3=0$　　$\alpha=-2$(三重)

得：$y_h(n)=(C_1n^2+C_2n+C_3)\bullet(-2)^n$

§2.4线性常系数差分方程的求解

例5：$y(n)-2y(n-1)+2y(n-2)-2y(n-3)+y(n-4)=0$

边界条件为：$y(1)=1, y(2)=0, y(3)=1, y(5)=1$

解：$\alpha^4-2\alpha^3+2\alpha^2-2\alpha+1=0$ 即：$(\alpha-1)^2(\alpha^2+1)=0$

得：$\alpha_1=\alpha_2=1, \alpha_3=j=e^{j\frac{\pi}{2}}, \alpha_4=-j=e^{-j\frac{\pi}{2}}$

所以 $y(n)=(C_1 n+C_2)\bullet 1^n+1^n\bullet(P\cos\frac{n\pi}{2}+Q\sin\frac{n\pi}{2})$

$$\left.\begin{aligned} 1&=C_1+C_2+Q \\ 0&=2C_1+C_2-P \\ 1&=3C_1+C_2-Q \\ 1&=5C_1+C_2+Q \end{aligned}\right\} \text{得：} \begin{cases} C_1=0 \\ C_2=1 \\ P=1 \\ Q=0 \end{cases}$$

故 $y(n)=1+\cos\frac{n\pi}{2}$

§2.4线性常系数差分方程的求解

2．特解------强迫响应

将$x(n)$代入右端化简得自由项，由自由项形式和特征根情况决定特解

自由项形式	特征根情况	特解形式 $D(n)$
常数	1不是特征根	A
	1是k重根	An^k
n的p次多项式	1不是特征根	n的p次多项式
	1是k重根	n^k(n的p次多项式)
α^n	α不是特征根	$C\alpha^n$
	α是k重根	$Cn^k\alpha^n$

§2.4线性常系数差分方程的求解

自由项形式	特征根情况	特解形式 $D(n)$
α^n(n的p次多项式)	α 不是特征根	α^n(n的p次多项式)
	α 是k重根	$n^k\alpha^n$(n的p次多项式)
$\alpha^n A_1 \sin bn$ 或 $\alpha^n A_2 \cos bn$	$\alpha e^{\pm jb}$ 不是特征根	$\alpha^n[C_1 \cos bn + C_2 \sin bn]$
	$\alpha e^{\pm jb}$ 是k重根	$\alpha^n n^k[C_1 \cos bn + C_2 \sin bn]$

§2.4线性常系数差分方程的求解

例6：①自由项$=n$，1不是特征根

$$D(n)=A_1 n+A_2$$

②自由项$=\cos\frac{n\pi}{2}$，j为特征根

$$D(n)=n[A_1\cos\frac{n\pi}{2}+A_2\sin\frac{n\pi}{2}]$$

③自由项$=(n^2+2n+3)\bullet 2^n$，2为2重根

$$D(n)=n^2(A_1 n^2+A_2 n+A_3)2^n$$

§ 2.4线性常系数差分方程的求解

3．完全解

$$y(n) = y_h(n) + D(n) = C_1\alpha_1{}^n + C_2\alpha_2{}^n + \cdots\cdots + C_N\alpha_N{}^n + D(n)$$

边界条件：$y(0), y(1), \cdots\cdots, y(N-1)$

$$y(0) = C_1 + C_2 + \cdots\cdots + C_N + D(0)$$

$$y(1) = C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 + \cdots\cdots + C_N\alpha_N + D(1)$$

$$\vdots$$

$$y(N-1) = C_1\alpha_1{}^{N-1} + C_2\alpha_2{}^{N-1} + \cdots\cdots + C_N\alpha_N^{N-1} + D(N-1)$$

$$\begin{pmatrix} y(0)-D(0) \\ y(1)-D(1) \\ \vdots \\ y(N-1)-D(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^{N-1} & \alpha_2^{N-1} & \cdots & \alpha_N^{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_N \end{pmatrix}$$

得：$\boldsymbol{Y}(k) - \boldsymbol{D}(k) = \boldsymbol{VC}$ $\qquad$ $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{V}^{-1}[\boldsymbol{Y}(k) - \boldsymbol{D}(k)]$

§2.4线性常系数差分方程的求解

①例子

例7：第一类型（方程右端无$x(n)$项，即齐次方程）

$$y(n)-3y(n-1)+2y(n-2)=0,\ y(0)=1, y(2)=2$$

解特点：无特解项 $y(n)$的n取值从$-\infty\sim\infty$

$$\alpha^2-3\alpha+2=0 \quad 得\alpha_1=1,\alpha_2=2$$

即：$y(n)=C_1+C_2\bullet 2^n$

$$\begin{cases}1=C_1+C_2\\2=C_1+2C_2\end{cases} \quad 得:\begin{cases}C_1=0\\C_2=1\end{cases}$$

即 $y(n)=2^n$

§ 2.4线性常系数差分方程的求解

例8：第二类型（方程右端只有$x(n)$项，$x(n)$定义在$-\infty \backsim +\infty$上）

$$y(n)-3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)$$

$$y(0)=1, y(1)=2, x(n)=n$$

解特点：$y(n)$含义从$-\infty \backsim +\infty$

设特解为 $D(n)=(An+B)\bullet n$， 把$D(n)$代入方程左边

$$(An+B)\bullet n-3[A(n-1)+B]\bullet(n-1)+2[A(n-2)+B]\bullet(n-2)=n$$

得：$A=-\dfrac{1}{2}, B=-\dfrac{5}{2}$

完全解形式 $y(n)=C_1\bullet 1^n+C_2\bullet 2^n+D(n)$

$$\begin{cases} 1=C_1+C_2 \\ 2=C_1+2C_2-\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2} \end{cases} \quad 得 \quad \begin{cases} C_1=-3 \\ C_2=4 \end{cases}$$

所以 $y(n)=-3\bullet 1^n+4\bullet 2^n+(-\dfrac{1}{2}n-\dfrac{5}{2})n$

§ 2.4线性常系数差分方程的求解

例9：第三类型（方程右端只有$x(n)$项，$x(n)$在$n=0$处加入）

$$y(n)-3y(n-1)+2y(n-2)=x(n),\ y(0)=1, y(1)=2, x(n)=2^n u(n)$$

解特点：$y(n): n=0\sim\infty$ | $n=-\infty\sim-1$

$y_h(n): n=0\sim\infty$ | $y_h'(n)=-\infty\sim-1$

$D(n): n=0\sim\infty$ | $D'(n)=0\quad -\infty\sim-1$

用 $y(0)\cdots\cdots\ y(N-1)$ | $y(-1)\ \cdots\cdots\ y(-N)$

$$y(n)=\underbrace{[y_h(n)+D(n)]}_{n\ge 0\text{时}}u(n)+\underbrace{y_h'(n)u(-n-1)}_{n\le -1\text{时}}$$

n≥0时　　n≤-1时

§2.4线性常系数差分方程的求解

解:当$n\geq 0$时 $y(n)=C_1\bullet 1^n+C_2\bullet 2^n+D(n)$其中$D(n)=A_1\bullet n\bullet 2^n$

把$D(n)$代入方程左端得:$2\bullet A_1\bullet 2^n=2^n$ 解得:A_1=0.5

故:
$$y(n)=C_1\bullet 1^n+C_2\bullet 2^n+\frac{1}{2}n\bullet 2^n$$

$$\begin{cases}1=C_1+C_2\\2=C_1+2C_2+2\end{cases}\quad 得\quad\begin{cases}C_1=2\\C_2=-1\end{cases}$$

当$n\leq$-1时 $y(n)=C_1\bullet 1^n+C_2\bullet 2^n$, $y(-1)=\frac{1}{2},y(-2)=\frac{1}{4}$,

$$\begin{cases}\frac{1}{2}=C_1+C_2\bullet 2^{-1}\\\frac{1}{4}=C_1+2^{-2}\bullet C_2\end{cases}\quad 得\quad\begin{cases}C_1=0\\C_2=1\end{cases}\quad 故\ y(n)=2^n$$

所以 $y(n)=2^n u(-n-1)+[2-2^n+\frac{1}{2}\bullet n.\bullet 2^n]u(n)$

§ 2.4线性常系数差分方程的求解

例10:第四类型(方程右端含有$x(n)$,$x(n-k)$系统, $x(n)$在 $-\infty \sim \infty$)

$$y(n)-3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)-x(n-1), x(n)=3^n, y(0)=1, y(1)=2$$

解: 同第二类型

$$\text{自由项}=3^n-3^{n-1}=\frac{2}{3}\bullet 3^n, \quad D(n)=C_3\bullet 3^n$$

$$(C_3-C_3+\frac{2}{9}C_3)\bullet 3^n=\frac{2}{3}\bullet 3^n \qquad \text{得}C_3=3$$

$$y(n)=C_1\bullet 1^n+C_2\bullet 2^n+D(n)=C_1\bullet 1^n+C_2\bullet 2^n+3^{n+1}$$

$$\begin{cases}1=C_1+C_2+3\\2=C_1+2C_2+27\end{cases} \quad \text{得} \quad \begin{cases}C_1=21\\C_2=-23\end{cases}$$

所以 $y(n)=21-23\bullet 2^n+3^{n+1}$

§ 2.4线性常系数差分方程的求解

例11: 第五类型(方程右端含有$x(n)$, $x(n-k)$系统, $x(n)$在$n=0$处加入)

$$y(n)-3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)-x(n-5)$$

$$x(n)=3^n u(n), y(0)=1, y(1)=2$$

解: ①当n≤-1时 $y(n)=C_1 \bullet 1^n + C_2 \bullet 2^n$ 用$y(-1), y(-2)$

②当0≤n≤4 $x(n)=3^n$ 用 $y(0), y(1)$

$$y(n)=C_1 \bullet 1^n + C_2 \bullet 2^n + D(n) \qquad D(n)=C_3 \bullet 3^n$$

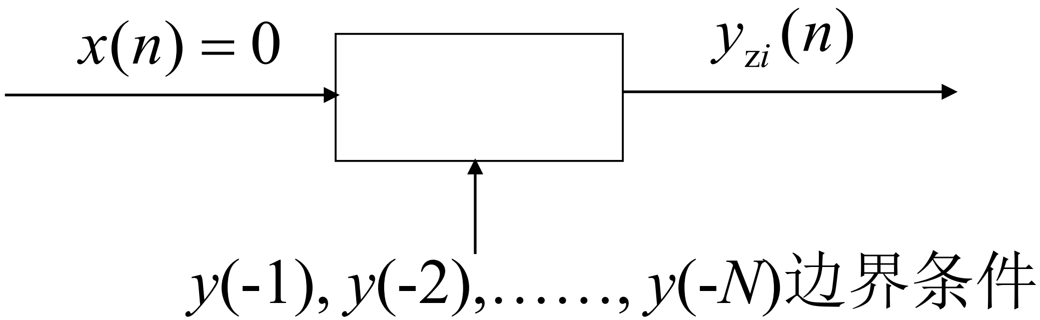
③当n≥5时 , $x(n)=3^n-\dfrac{3^n}{3^5}$ 用$y(5), y(6)$

$$y(n)=C_1 \bullet 1^n + C_2 \bullet 2^n + D(n) \qquad D(n)=C_3 \bullet 3^n$$

§2.4线性常系数差分方程的求解

三. 零输入响应、零状态响应(适用于求解 $x(n)$, $n=0$ 时刻加入)

1.零输入响应

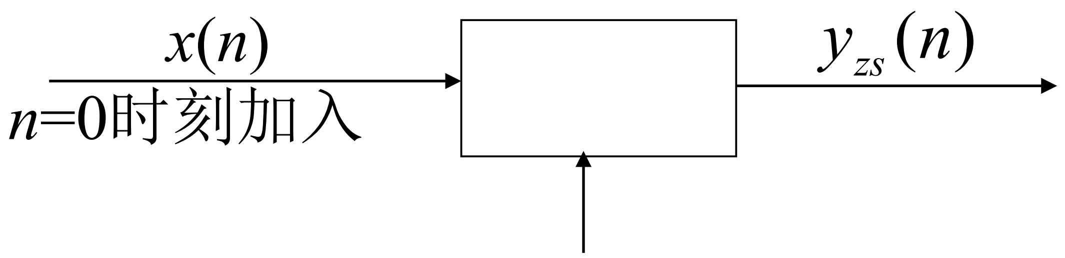


$$y_{Zi}(n)=C_{Zi1}\bullet\alpha_1^{\ n}+C_{Zi2}\bullet\alpha_2^{\ n}+\cdots\cdots+C_{ZiN}\bullet\alpha_N^{\ n}$$

作用范围 $n=-\infty\sim+\infty$

§ 2.4线性常系数差分方程的求解

2.零状态响应



$$y(-1)=y(-2)=\ldots\ldots=y(-N)=0$$

$$y_{zs}(n)=C_{zs1}\bullet\alpha_1^{\ n}+C_{zs2}\bullet\alpha_2^{\ n}+\cdots\cdots+C_{zsN}\bullet\alpha_N^{\ n}+D(n)$$

作用范围 $n=0\ \sim +\infty$

§2.4线性常系数差分方程的求解

3.例子:

例12 第一类型(不含$x(n)$项,只含零输入响应=齐次解)

例13 第二类型(只含$x(n)$项, $x(n)$在n=0时刻加入)

$$y(n)-0.9y(n-1)=0.05u(n),\ y(-1)=1$$

解: 零输入 $y_{zi}(n)=C_{zi}\cdot 0.9^n$

由$y(-1)=1$得$C_{zi}=0.9$,所以$y_{zi}(n)=0.9^{n+1}$

零状态 $y_{zs}(n)=C_{zs}\cdot 0.9^n+D(n)$

$D(n)=A$,由$A-0.9A=0.05$ 得$A=0.5$

故$y_{zs}(n)=C_{zs}\cdot 0.9^n+0.5$

由$y(-1)=0$ 推出$C_{zs}\cdot\dfrac{1}{0.9}=-0.5,C_{zs}=-0.45$

所以 $y(n)=0.9^{n+1}+(-0.45\bullet 0.9^n+0.5)u(n)$

§ 2.4线性常系数差分方程的求解

例14: 第五类型(方程右端含有$x(n), x(n-k)$系统, $x(n)$在$n=0$处加入)

$$y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=x(n)-3x(n-2), x(n)=u(n), y(-1)=\frac{5}{6}, y(-2)=\frac{13}{36}$$

解: 零输入 $y_{zi}(n)=C_1 \bullet 2^n + C_2 \bullet 3^n$

$$\begin{cases} \frac{5}{6}=C_1 \bullet \frac{1}{2}+C_2 \bullet \frac{1}{3}{}_{n} \\ \frac{13}{36}=C_1 \bullet \frac{1}{4}+C_2 \bullet \frac{1}{9} \end{cases}$$

解得 $C_1=1, C_2=1$

§ 2.4线性常系数差分方程的求解

单独对右边 $x(n)$项求零状态 $y_{zs1}(n)$

然后单独对右边$-3x(n-2)$ 项求零状态 $-3y_{zs1}(n-2)$

$$y_{zs1}(n)=C_1\bullet 2^n+C_2\bullet 3^n+D(n) \qquad D(n)=\frac{1}{2}$$

$$y_{zs1}(n)=C_1\bullet 2^n+C_2\bullet 3^n+\frac{1}{2}$$ 由已知条件可得:

$$\begin{cases}0=C_1\bullet\dfrac{1}{2}+C_2\bullet\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\\ 0=C_1\bullet\dfrac{1}{4}+C_2\bullet\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{2}\end{cases} \qquad \begin{cases}C_1=-4\\ C_2=-\dfrac{9}{2}\end{cases}$$ 可求出$y_{zs1}(n)$

最后得: $y(n)=y_{zi}(n)+y_{zs1}(n)u(n)-3y_{zs1}(n-2)u(n-2)$

§ 2.4线性常系数差分方程的求解

总结:

1.第一类型(齐次方程)　初始条件任意给定 $\left\{\begin{array}{l}\text{齐次解+特解项(只含齐次解)}\\ \text{零输入零状态(只含零输入响应)}\end{array}\right.$

2.第二类型(右端只含$x(n)$一项, $n=-\infty\sim+\infty$)

第四类型(右端含有$x(n), x(n-k)$项, $n=-\infty\sim+\infty$)

只能用齐次解+特解项法求解, 初始条件任意给定

§2.4线性常系数差分方程的求解

3.第三类型(右端只含$x(n)$一项, $n=0$时刻加入)

$$\begin{cases} \text{齐次解+特解项(需分n<0和n≥0两种情况} \\ \quad y(n)=y_{h1}(n)u(-n-1)\text{, 在n<0} \\ \quad y(n)=[y_{h2}(n)+D(n)]u(n)\text{,在n≥0)} \\ \text{零输入+零状态(推荐使用)} \end{cases}$$

4.第五类型(右端含有$x(n)$, $x(n-k)$系统, $x(n)$在$n=0$处加入)

$$\begin{cases} \text{齐次解+特解项(需分n<0, } A_1 \le n < A_2\text{, } A_2 \le n < A_3\text{各种情况)} \\ \text{零输入+零状态(推荐使用)} \\ \quad y(n)=y_{zi}(n)+\sum_{r=0}^{M} b_r y_{zs_1}(n-r)u(n-r) \end{cases}$$