第八章 连通图和匹配

P164.

2. 如图(p,q)图G是边k-连通的，试证：$q \ge kp/2$。

[证] 由已知 $\lambda(G) \ge k$ 又由定理得 $\lambda(G) \le \delta(G)$

故 $k \le \delta(G)$ 则 $kp \le p\cdot\delta(G) \le 2q$

则 $q \ge \frac{kp}{2}$

[证毕]

3. 设G是k-边连通的，$k>0$，E'是G的k条边的集合。证明$G-E'$的支数小于或等于2。

[证] 当$\lambda(G) > k$时，则显然$G-E'$的支数为1.

当$\lambda(G)=k$时，E'恰好是为了使G不连通而需要去掉的最少边的集合，则$G-E'$的支数等于2

否则，$G-E'$的支数仍为1.

[证毕]

4. 构造一个(p,q)图G使得$\delta(G)=[\frac{p}{2}-1]$，$\lambda(G)<\delta(G)$.

解：

6. G是一个三次正则图，试证：$\kappa(G)=\lambda(G)$.

[证] 由定理可知 $\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)=3$

当$\lambda(G)=1$时，即G中有桥，显然$\kappa(G)=1=\lambda(G)$.

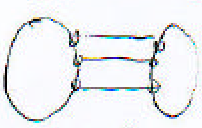
当$\lambda(G)=2$时，有A，B两种可能，当为A时，显然$\kappa(G)=\lambda(G)=2$.

A

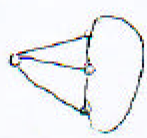
B.

当为B时，则v_1还需而且只能再连一条边，设为v_1u，则去掉v_1u，G显然不连通，则$\lambda(G)=1$，矛盾，故B不可能。

当$\lambda(G)=3$时，有如下三种情况


C

D


E

C、E显然满足$\kappa(G)=\lambda(G)=3$

D中，v_1还需而且只能再连一条边，设为v_1u，去掉v_1u与v_2v_5，G显然不连通

7. 设 $r \geq 2$, G 是 r 正则图, $\kappa(G)=1$, 证明: $\lambda(G) \leq [\frac{r}{2}]$.

证明: 因 $\kappa(G)=1$, 则 G 可表示成如图 A, B 两部分, u 为是割点

因 $\deg u = r$, 由抽屉原理, A, B 中必有一部分与 u 连的边数小于等于 $[\frac{r}{2}]$. 去掉这些边, 则 G 不连通.

则 $\lambda(G) \leq [\frac{r}{2}]$.

[证毕].

P276. 1. 设 $X=\{1,2,3,4,5\}$, 判断下列各系统哪些有相异代表系。

(a) $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4,5\}$.

没有, 因为前四个集合总共只含有3个元素, 小于4。

(b) $\{1,2\}$, $\{2,3\}$, $\{4,5\}$, $\{4,5\}$.

有, 可取 $S=\{1,3,4,5\}$.

(c) $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1,2\}$, $\{3\}$.

没有, 因为四个集合的元素之和为 $3 <$ 集合数 4.

(d) $\{1,3,4\}$, $\{1,4,5\}$, $\{2,3,5\}$, $\{2,4,5\}$.

有, 可令 $S=\{1,4,5,2\}$.

2. 设 $X=\{1,2,\cdots,50\}$, 系统 T: $\{1,2\}$, $\{2,3\}$, $\{3,4\}$, $\cdots$, $\{49,50\}$, $\{50\}$ 有多少个相异代表系?

解: 设有相异代表系 S, 易知 S 中有50个元素, $|T|=50$, 故 S 中的元素为 $1,2,3,\cdots,50$, 而 1 只能从 $\{1,2\}$ 中取, 2 又只能从 $\{2,3\}$ 中取, 3 又只能从 $\{3,4\}$ 中取. 以此类推, S 中的50个元素仅只有一种取法, 故 T 只有 1 个相异代表系 $\{1,2,3,\cdots,50\}$.