

集合论与图论习题册

第一章 集合及其运算

P_8 习题

1. 写出方程 $x^2 + 2x + 1 = 0$ 的根所构成的集合。
2. 下列命题中哪些是真的，哪些为假
 - a) 对每个集 A , $\phi \in A$;
 - b) 对每个集 A , $\phi \subseteq A$;
 - c) 对每个集 A , $A \in \{A\}$;
 - d) 对每个集 A , $A \in A$;
 - e) 对每个集 A , $A \subseteq A$;
 - f) 对每个集 A , $A \subseteq \{A\}$;
 - g) 对每个集 A , $A \in 2^A$;
 - h) 对每个集 A , $A \subseteq 2^A$;
 - i) 对每个集 A , $\{A\} \subseteq 2^A$;
 - j) 对每个集 A , $\{A\} \in 2^A$;
 - k) 对每个集 A , $\phi \in 2^A$;
 - l) 对每个集 A , $\phi \subseteq 2^A$;
 - m) 对每个集 A , $A = \{A\}$;
 - n) $\phi = \{\phi\}$;
 - o) $\{\phi\}$ 中没有任何元素;
 - p) 若 $A \subseteq B$, 则 $2^A \subseteq 2^B$
 - q) 对任何集 A , $A = \{x | x \in A\}$;
 - r) 对任何集 A , $\{x | x \in A\} = \{y | y \in A\}$;
 - s) 对任何集 A , $y \in A \Leftrightarrow y \in \{x | x \in A\}$;
 - t) 对任何集 A , $\{x | x \in A\} \neq \{A | A \in A\}$ 。

答案:

3. 设有 n 个集合 A_1, A_2, \dots, A_n 且 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq A_1$, 试证: $A_1 = A_2 = \dots = A_n$ 。
4. 设 $S = \{\phi, \{\phi\}\}$, 试求 2^S ?
5. 设 S 恰有 n 个元素, 证明 2^S 有 2^n 个元素。

P_{16} 习题 6. 设 A 、 B 是集合, 证明: $(A \setminus B) \cup B = (A \cup B) \setminus B \Leftrightarrow B = \phi$ 。

7. 设 A 、 B 是集合, 试证 $A = \phi \Leftrightarrow B = A \Delta B$ 。

9. 设 A , B , C 为集合, 证明: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$ 。

10. 设 A , B , C 为集合, 证明: $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ 。

11. 设 A , B , C 为集合, 证明: $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ 。

12. 设 A , B , C 都是集合, 若 $A \cup B = A \cup C$ 且 $A \cap B = B \cap C$, 试证 $B=C$ 。

15. 下列命题是否成立? 说明理由 (举例)。

(1) $(A \setminus B) \cup C = A \setminus (B \setminus C)$; (2) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$;

(3) $A \setminus (B \cup C) = (A \cup B) \setminus B$ 。(答案: 都不正确)

16. 下列命题哪个为真? 答案: _____

a) 对任何集合 A, B, C , 若 $A \cap B = B \cap C$, 则 $A=C$ 。

b) 设 A, B, C 为任何集合, 若 $A \cup B = A \cup C$, 则 $B=C$ 。

c) 对任何集合 A, B , $2^{A \cup B} = 2^A \cup 2^B$ 。 d) 对任何集合 A, B , $2^{A \cap B} = 2^A \cap 2^B$ 。

e) 对任何集合 A, B , $2^{A \setminus B} = 2^A \setminus 2^B$ 。 f) 对任何集合 A, B , $2^{A \Delta B} = 2^A \Delta 2^B$ 。

17. 填空: 设 A, B 是两个集合。

a) $x \in A \cup B \Leftrightarrow$ _____; b) $x \in A \cap B \Leftrightarrow$ _____

c) $x \in A \setminus B \Leftrightarrow$ _____; d) $x \in A \Delta B \Leftrightarrow$ _____。

18. 设 A, B, C 为三个集合, 下列集合表达式哪一个等于 $A \setminus (B \cap C)$? 答案: _____

(a) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$; (b) $(A \cap B) \setminus (A \cap C)$;

(c) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$; (d) $(A \cup B) \setminus (A \cup C)$; (e) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ 。

P_{20} 习题

20. 设 A, B, C 为集合, 并且 $A \cup B = A \cup C$, 则下列断言哪个成立?

(1) $B = C$; (2) $A \cap B = A \cap C$; (3) $A \cap B^c = A \cap C^c$; (4) $A^c \cap B = A^c \cap C$ 。

答案:

21. 设 A, B, C 为任意集合, 化简

$$(A \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup \\ (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c)$$

P_{25} 习题

24. 设 $A = \{a, b, c\}, B = \{e, f, g, h\}, C = \{x, y, z\}$ 。求 $A \times B, B \times A, A \times C, A^2 \times B$ 。

25. 设 A, B 为集合, 试证: $A \times B = B \times A$ 的充要条件是下列三个条件至少一个成立: (1) $A = \phi$; (2) $B = \phi$; (3) $A = B$ 。

26. 设 A, B, C, D 为任四个集合, 证明: $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

29. 设 A, B, C 是三个任意集合, 证明: $A \times (B \Delta C) = (A \times B) \Delta (A \times C)$ 。

30. 设 A, B 为集合, 下列命题哪些为真?

(1) $(x, y) \in A \times B \Leftrightarrow x \in A$ 且 $y \in B$; (2) $(x, y) \in A \times B \Leftrightarrow x \in A$ 或 $y \in B$;

(3) $2^{A \times B} = 2^A \times 2^B$;

(4) 若 $A \times C = B \times C$, 则 $A = B$;

(5) 若 $A \times C = B \times C, C \neq \emptyset$, 则 $A = B$ 。

答案: _____

31. 设 A 有 m 个元素, B 有 n 个元素, 则 $A \times B$ 是多少个序对组成的? $A \times B$ 有多少个不同的子集?

答案: _____

32. 设 A, B 是两个集合, $B \neq \emptyset$, 试证: 若 $A \times B = B \times B$, 则 $A = B$ 。

P_{33} 习题

33. 设 A, B 是两个有限集, 试求 $|2^{A \times B}| = ?$

34. 某班学生中有 45% 正在学德文, 65% 正在学法文。问此班中至少有百分之几的学生正同时学德文和法文?

第二章 映射习题

P_{39} 习题

1. 设 A, B 是有穷集, $|A|=m, |B|=n$ 。则

- (1) 计算 $|A^B|$; (2) 从 A 到 A 有多少个双射?

P_{43} 习题

3. 证明: 从一个边长为 1 的等边三角形中任意选 5 个点, 那么这 5 个点中必有 2 个点, 它们之间的距离至多为 $1/2$, 而任意 10 个点中必有 2 个点其距离至多是 $1/3$ 。

5. 证明在 52 个整数中, 必有两个整数, 使这两个整数之和或差能被 100 整除。

6. 设 a_1, a_2, \dots, a_n 为 $1, 2, 3, \dots, n$ 的任一排列, 若 n 是奇数且 $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdots (a_n - n) \neq 0$, 则乘积为偶数。

P_{46} 习题

7. 设 $f: X \rightarrow Y$, $C, D \subseteq Y$, 证明 $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$

8. 设 $f: X \rightarrow Y$, $A, B \subseteq X$, , 证明 $f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B)$ 。

10. 设 $f: X \rightarrow Y, A \subseteq X, B \subseteq Y$ 。以下四个小题中, 每个小题均有四个命题, 这四个命题有且仅有一个正确, 请找出正确的那个。

(1) (a) 若 $f(x) \in f(A)$, 则 x 未必在 A 中; (b) 若 $f(x) \in f(A)$, 则 $x \in A$;

(c) 若 $f(x) \in f(A)$, 则 $\bar{x} \in \bar{A}$; (d) 若 $f(x) \in f(A)$, 则 $x \in A^c$ 。

(2) (a) $f(f^{-1}(B)) = B$; (b) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$;

(c) $f(f^{-1}(B)) \supseteq B$; (d) $f(f^{-1}(B)) = B^c$ 。

(3) (a) $f^{-1}(f(A)) = A$; (b) $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$;

(c) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$; (d) 上面三个均不对。

(4) (a) $f(A) \neq \emptyset$; (b) $f(B) \neq \emptyset$;

(c) 若 $y \in Y$, 则 $f^{-1}(y) \in x$; (d) 若 $y \in Y$, 则 $f^{-1}(y) \subseteq x$ 。

P_{50} 习题

15. 设 $X = \{a, b, c\}, Y = \{0, 1\}, Z = \{2, 3\}, f: X \rightarrow Y, f(a) = f(b) = 0$,

$f(c) = 1; g: Y \rightarrow Z, g(0) = 2, g(1) = 3$, 试求 $g \circ f$ 。

P_{55} 习题

17. 设 $N = \{1, 2, 3, \dots\}$, 试构造两个映射 f 和 $g: N \rightarrow N$, 使得

(1) $fg = I_N$, 但 $gf \neq I_N$; (2) $gf = I_N$, 但 $fg \neq I_N$ 。

18. 设 $f: X \rightarrow Y$ 则

(1) 若存在唯一的一个映射 $g: Y \rightarrow X$, 使得 $gf = I_X$, 则 f 是可逆的吗?

(2) 若存在唯一的一个映射 $g: Y \rightarrow X$, 使得 $fg = I_Y$, 则 f 是可逆的吗?

20. 是否有一个从 X 到 X 的一一对应 f , 使得 $f = f^{-1}$, 但 $f \neq I_X$?

P_{63} 习题

21. 设 $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, 求 $\sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_1, \sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}$ 。

22. 将置换 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 1 & 6 & 5 & 2 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ 分解成对换的乘积。

第三章 关系习题

P_{86} 习题

1. 给出一个既不是自反的又不是反自反的二元关系？
2. 是否存在一个同时不满足自反性，对称性，反对称性，传递性和反自反性的二元关系？
3. 设 R, S 是 X 上的二元关系，下列命题哪些成立：
 - a) 若 R 与 S 是自反的，则 $R \cup S, R \cap S$ 分别也是自反的；
 - b) 若 R 与 S 是对称的，则 $R \cup S, R \cap S$ 分别对称的；
 - c) 若 R 与 S 是传递的，则 $R \cap S$ 也是传递的；
 - d) 若 R 与 S 不是自反的，则 $R \cup S$ 也不是自反的；
 - e) 若 R 与 S 是反自反的，则 $R \cup S, R \cap S$ 也是反自反的；
 - f) 若 R 是自反的，则 R^c 也是反自反的；
 - g) 若 R 与 S 是传递的，则 $R \setminus S$ 是传递的。

答案：_____

4. 实数集合上的“小于”关系 $<$ 是否是反自反的？集合 X 的幂集上的“真包含”关系 \subset 是否是反自反的？为什么？

5. 设 R, S 是 X 上的二元关系。证明：

$$\begin{aligned} (1) \quad (R^{-1})^{-1} &= R; & (2) \quad (R \cup S)^{-1} &= R^{-1} \cup S^{-1}; \\ (3) \quad (R \cap S)^{-1} &= R^{-1} \cap S^{-1}; & (4) \quad \text{若 } R \subseteq S, \text{ 则 } R^{-1} &\subseteq S^{-1}; \end{aligned}$$

6. 设 R 是 X 上的二元关系, 证明: $R \cup R^{-1}$ 是对称的二元关系。

7. 设 R 为 X 上的是反自反的和传递的二元关系, 证明: R 是反对称的。

P_{92} 习题

9. “父子”关系的平方是什么关系? 答案: _____

11. 设 R 与 S 为 X 上的任两个二元关系, 下列命题哪些为真? 答案: _____

- a) 若 R, S 都是自反的, 则 $R \circ S$ 也是自反的;
- b) 若 R, S 都是对称的, 则 $R \circ S$ 也是对称的;
- c) 若 R, S 都是反自反的, 则 $R \circ S$ 也是反自反的;
- d) 若 R, S 都是反对称的, 则 $R \circ S$ 也是反对称的;
- e) 若 R, S 都是传递的, 则 $R \circ S$ 也是传递的。

12. 设 R_1 是 A 到 B , R_2 和 R_3 是 B 到 C 的二元关系, 则一般情况下:

$$R_1 \circ (R_2 \setminus R_3) \neq (R_1 \circ R_2) \setminus (R_1 \circ R_3)。$$

但有人声称等号成立, 他的证明如下: 设 $(a, c) \in R_1 \circ (R_2 \setminus R_3)$, 则 $\exists b \in X$, 使得 $(a, b) \in R_1$ 且 $(b, c) \in R_2 \setminus R_3$ 。于是 $(b, c) \in R_2$ 且 $(b, c) \notin R_3$ 。从而 $(a, c) \in R_1 \circ R_2$ 且 $(b, c) \notin R_1 \circ R_3$, 所以 $(a, c) \in (R_1 \circ R_2) \setminus (R_1 \circ R_3)$, 即 $R_1 \circ (R_2 \setminus R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \setminus (R_1 \circ R_3)$ 。同理可证相反的包含关系成立, 故等式成立, 这个证明错在什么地方?

13. 设 R, S 是 X 上的满足 $R \circ S \subseteq S \circ R$ 的对称关系, 证明 $R \circ S = S \circ R$ 。

P_{113} 习题

25. 设 $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{1, 2\}, S = \{f \mid f: X \rightarrow Y\}$ 。 \cong 是 S 上的二元关系:

$$\forall f, g \in S, f \cong g \Leftrightarrow I_m(f) = I_m(g)。$$

证明: (1) \cong 是 S 上的等价关系; (2) 求等价类的集合。

26. 设 $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{1, 2\}, S = \{f \mid f: X \rightarrow Y\}$ 。 \cong 是 S 上的二元关系:

$$\forall f, g \in S, f \cong g \Leftrightarrow f(1) + f(2) + f(3) = g(1) + g(2) + g(3)。$$

证明: (1) \cong 是 S 上的等价关系; (2) 求等价类数。

27. 设 $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{1, 2\}, S = \{f \mid f: X \rightarrow Y\}$ 。 \cong 是 S 上的二元关系:

$$\forall f, g \in S, f \cong g \Leftrightarrow \{f^{-1}(y) \mid y \in Y\} = \{g^{-1}(y) \mid y \in Y\}。$$

证明: (1) \cong 是 S 上的等价关系; (2) 求等价类。

28. 由置换 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 5 & 8 & 1 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ 确定了 $X = \{1, 2, \dots, 8\}$ 上的一个关系

$\cong: i, j \in X, i \cong j$ 当且仅当 i 与 j 在 σ 的循环分解式中的同一循环置换中, 证明: \cong 是 X 上的等价关系, 求 X/\cong 。

29. 给出 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 上两个等价关系 R 与 S , 使得 $R \circ S$ 不是等价关系。

30. 设 R 是 X 上的一个自反关系, 证明: R 是等价关系 \Leftrightarrow 若 $(a, b) \in R$ 且 $(a, c) \in R$, 则 $(b, c) \in R$ 。

35. 设 X 是一个集合, $|X| = n$, 试求:

- (1) X 上自反二元关系的个数; (2) X 上反自反二元关系的个数;
- (3) X 上对称二元关系的个数; (4) X 上自反或对称关系的个数。

P_{125} 习题

38. 存在一个偏序关系 \leq , 使得 (X, \leq) 中有唯一的极大元素, 但没有最大元素? 若有请给出一个具体例子; 若没有, 请证明之。

39. 令 $S = \{1, 2, \dots, 12\}$, 画出偏序集 $(S, |)$ 的 Hass 图, 其中“ $|$ ”是整除关系, 它有几个极大(小)元素? 列出这些极大(小)元素。

第四章 无穷集合及其基数习题

1. 设 A 为由序列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 的所有项组成的集合, 则 A 是否是可数的? 为什么?
2. 证明: 直线上互不相交的开区间的全体所构成的集合至多可数。
3. 证明: 单调函数的不连续点的集合至多可数。
4. 任一可数集 A 的所有有限子集构成的集族是可数集合。
5. 判断下列命题之真伪:
 - (1) 若 $f: X \rightarrow Y$ 且 f 是满射, 则只要 X 是可数的, 那么 Y 是至多可数的;
 - (2) 若 $f: X \rightarrow Y$ 且 f 是单射, 那么只要 Y 是可数的, 则 X 也是可数的;
 - (3) 可数集在任一映射下的像也是可数的;
7. 设 Σ 为一个有限字母表, Σ 上所有字 (包括空字) 之集记为 Σ^* 。证明 Σ^* 是可数集

P_{142} 习题

1. 找一个初等可数 $f(x)$ ，使得它是 $(0,1)$ 到实数 R 的一一对应。
4. 利用康托的对角线法证明 2^A 是不可数集，其中 A 为可数集。
5. 利用康托的对角线法证明所有的 $0, 1$ 的无穷序列是不可数集。

第六章 图的基本概念

P_{206} 习题

1. 画出具有 4 个顶点的所有无向图(同构的只算一个)。
2. 画出具有 3 个顶点的所有有向图(同构的只算一个)。
3. 画出具有 4 个、6 个、8 个顶点的三次图。
4. 某次宴会上, 许多人互相握手。证明: 握过奇数次手的人数为偶数(注意, 0 是偶数)。

P_{209} 习题

1. 设 u 与 v 是图 G 的两个不同顶点。若 u 与 v 间有两条不同的通道(迹), 则 G 中是否有圈?
2. 证明: 一个连通的 (p, q) 图中 $q \geq p-1$ 。
3. 设 G 是一个 (p, q) 图, 且 $q > (p-1)(p-2)/2$, 则 G 是连通的。

6. 在一个有 n 个人的宴会上, 每个人至少有 m 个朋友 ($2 \leq m \leq n$)。试证: 有不少于 $m+1$ 个人, 使得他们按某种方法坐在一张圆桌旁, 每人的左、右均是他的朋友。

8. 设 G 是图。证明: 若 $\delta(G) \geq 2$, 则 G 包含长至少是 $\delta(G)+1$ 的圈。

P_{216} 习题

1. 证明: 若图 G 不是连通图, 则 G° 是连通图。

2. 证明: 每一个自补图有 $4n$ 或 $4n+1$ 个顶点。

P_{228} 习题

1. 给出一个 10 个顶点的非哈密顿图的例子, 使得每一对不邻接的顶点 u 和 v , 均有: $\deg u + \deg v \geq 9$ 。

2. 试求 K_p 中不同的哈密顿圈的个数。

4. 完全偶图 $K_{m,n}$ 为哈密顿图的充分必要条件是什么?

10. 证明具有奇数顶点的偶图不是哈密顿图。

第七章 树和割集

P_{243} 习题

1. 分别画出具有 4、5、6 个顶点的所有树(同构的只算一个)。
2. 证明：每个非平凡树是偶图。
3. 设 G 是一棵树且 $\Delta(G) \geq k$ ，证明： G 中至少有 k 个度为 1 的顶点。
4. 令 G 是一个有 p 个顶点， k 个支的森林，证明： G 有 $p-k$ 条边。
6. 设树 T 中有 $2n$ 个度为 1 的顶点，有 $3n$ 个度为 2 的顶点，有 n 个度为 3 的顶点，则这棵树有多少个顶点和多少条边？
7. 一棵树 T 有 n_2 个度为 2 的顶点， n_3 个度为 3 的顶点， \dots ， n_k 个度为 k 的顶点，则 T 有多少个度为 1 的顶点？

P_{257} 习题

1. P 个顶点的图中，最多有多少个割点？
3. 证明：有一座桥的三次图中至少有 10 个顶点。
4. 设 v 是图 G 的一个割点，证明 v 不是 G 的补图 G^c 的割点。
7. 有割点的连通图是否一定不是欧拉图？是否一定不是哈密顿图？有桥的连通图是否一定不是欧拉图和哈密顿图。

第八章 连通度和匹配

P_{264} 习题

1. 设 G 是一个有 p 个顶点的图, $\delta(G) \geq (p+k-1)/2$ $p \geq 2$ 。试证: G 是 k -连通的, 其中 $k < p$ 。

6. G 是一个三次正则图, 试证: $k(G) = \lambda(G)$ 。

7. 设 $r \geq 2$, G 是 r -正则图且 $k(G)=1$ 。试证: $\lambda(G) \leq \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ 。

第九章 平面图和图的着色

P_{281} 习题

1. 设 $G=(p,q)$ 是一个具有 f 个面, k 个分支的平面图, 则 $p-q+f=k+1$ 。

2. 若 G 是顶点数 $p \geq 11$ 的平面图, 试证 G^c 不是平面图。

4. 证明: 不存在 7 条棱的凸多面体。

P_{294} 习题

1. 设 G 是一个没有三角形的平面图。应用欧拉公式证明 G 中有一个顶点 v , 使得 $\deg v \leq 3$ 。

2. 设 G 是一个没有三角形的平面图。应用数学归纳法证明 G 是 4-可着色的。

第十章 有向图

P_{301} 习题

2. 画出具有三个顶点的所有互不同构的有向图的图解。

3. 具有 p 个顶点的完全有向图中有多少条弧?

P_{307} 习题

1. 设 D 是一个有 p 个顶点 q 条弧的有向图。若 D 是连通的, 证明: $p-1 \leq q \leq p(p-1)$ 。

2. 设 D 是一个有 p 个顶点 q 条弧的强连通的有向图, 则 q 至少是多大?

P_{307} 习题

2. 有向图 D 的图解如图 10.4.3 所示

(1) 写出 D 的邻接矩阵及可达矩阵; (2) 写出 D 关联矩阵。

3. 设 D 为图 10.4.4 中的有向图, 试求 v_2 到其余每个顶点的长 ≤ 4 的所有通道的条数。

P_{321} 习题

1. 设 T 是一个正则 m 元有序树, 它有 n_0 个叶子, T 有多有多少条弧?

3. 设 T 是一个有 n_0 个叶子的二元树，出度为 2 的顶点为 n_2 ，试证： $n_0 = n_2 + 1$ 。

4. 具有三个顶点的有序树共有多少个？具有三个顶点的有根树有多少个？注意，同构的只算一个。

8. 用数学归纳法证明每个比赛图中必有有向哈密顿路。