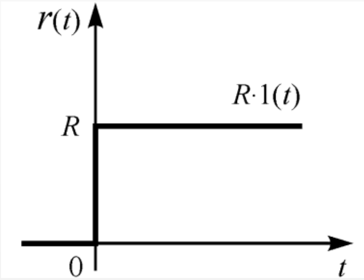
第三章 控制系统的时域分析方法

3.1 引言

3.1.1 典型输入信号

- 1.阶跃函数

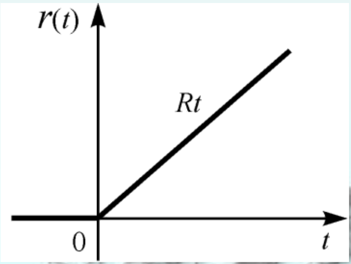
$$r(t)=\begin{cases} R\cdot 1(t) & (t\geq 0) \\ 0 & (t<0) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{s}$$



$R=1$,为单位阶跃函数

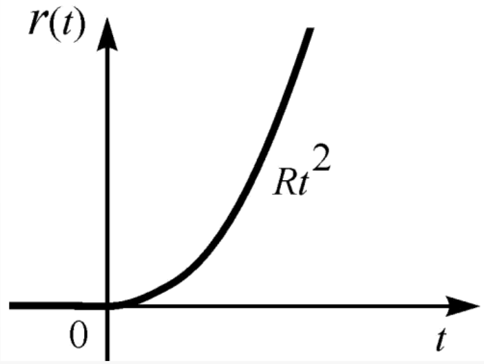
- 2.斜坡函数

$$r(t)=\begin{cases} R\cdot t & (t\geq 0) \\ 0 & (t<0) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{s^2}$$



$R=1$,为单位斜坡函数

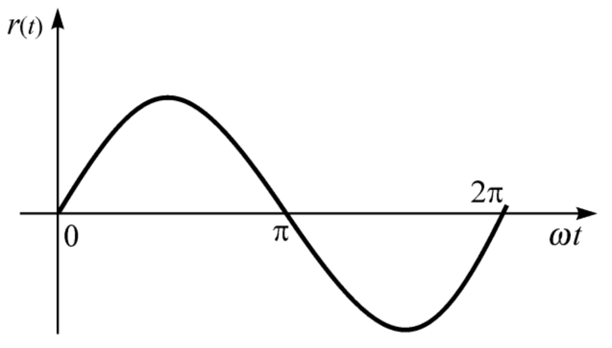
◈ 3.加速度函数



$$r(t)=\begin{cases}R\cdot t^{2} & (t\geq 0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\frac{2R}{s^{3}}$$

$R=1/2$,为单位加速度函数

◈ 4.正弦函数

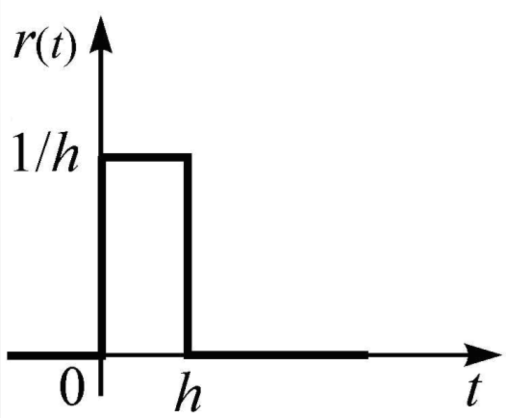


$$r(t)=A\sin\omega t$$

A为振幅或幅值，ω为角频率。

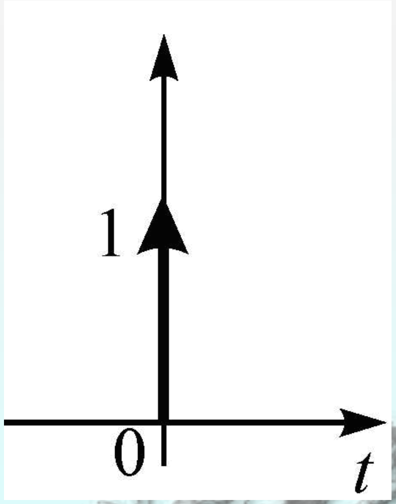
- 5.单位脉冲函数与单位冲激函数

$$\delta_h(t)=\begin{cases}1/h & (0\le t\le h)\\ 0 & (t<0,t>h)\end{cases}$$



$$\delta(t)=\lim_{h\to 0}\delta_h(t) \quad 及 \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}(t)=1$$

$$\mathrm{L}[\delta(t)]=1$$



- 单位冲激函数的性质

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t)\mathrm{d}(t)=f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}(t)=f(t_0)$$

3.1.2 单位冲激响应

- 输入信号R(s),输出信号C(s),传递函数G(s)

$$C(s)=G(s)R(s)$$

若$r(t)=\delta(t)$,则

$$R(s)=\mathrm{L}[\delta(t)]=1 \quad \Rightarrow \quad C(s)=G(s)$$

$$c(t)=\mathrm{L}^{-1}[G(s)]=g(t)$$

- 对$C(s)=G(s)R(s)$取拉氏反变换，由卷积定理可得

$$c(t)=g(t)*r(t)=\int_0^t g(\tau)r(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^t g(t-\tau)r(\tau)\mathrm{d}\tau$$

3.1.3 系统的时间响应

- 根据拉氏变换理论，C(s)的极点与c(t)有下述关系

极　　点	运动模态
实数单极点 m重实数极点σ 一对复数极点σ+jω m重复数极点σ+jω	$ke^{\sigma t}$ $(k_1+k_2t+\cdots k_m t^{m-1})e^{\sigma t}$ $ke^{\sigma t}\sin(\omega t+\phi)$ $e^{\sigma t}[k_1\sin(\omega t+\phi_1)+k_2 t\sin(\omega t+\phi_2)+\cdots k_m t^{m-1}\sin(\omega t+\phi_m)]$

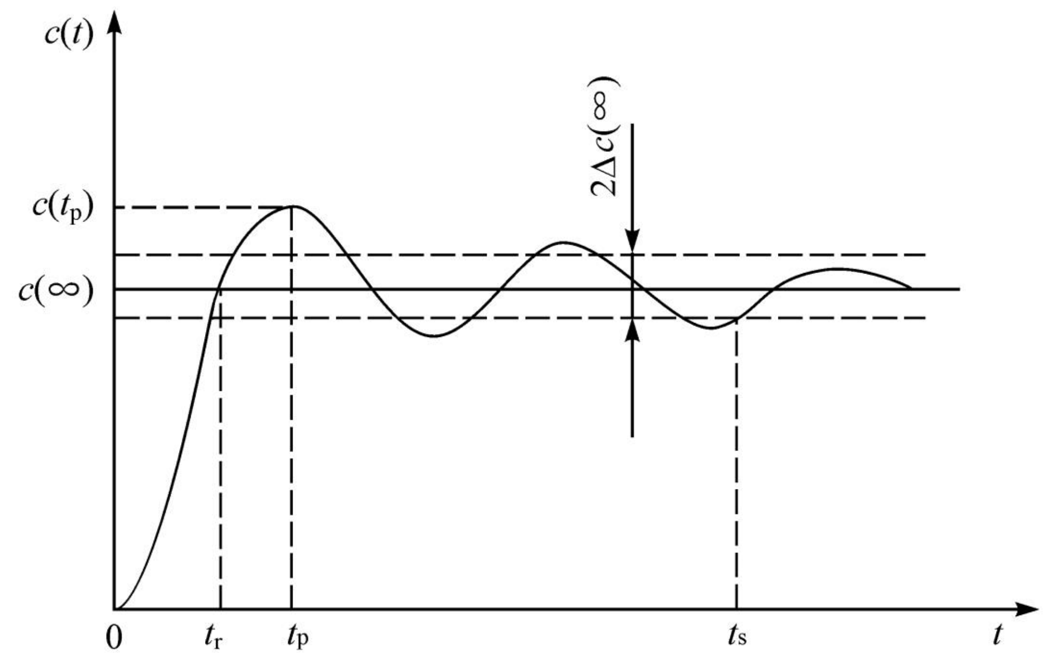
- ——输入信号是R(s),输出信号是C(s),零初始条件有 C(s)= G(s)R(s)；
- ——与传递函数极点对应的输出称为瞬态响应，与输入信号极点对应的输出称为稳态响应；
- ——传递函数零点不形成新的模态，但影响模态前的系数；
- ——系统对输入信号导数的响应，等于系统对该输入响应的导数；
- ——系统对输入信号积分的响应，等于系统对该输入响应的积分。

3.1.4 时间响应的性能指标

- 1）上升时间 t_r ；
- 2）峰值时间 t_p ；
- 3）最大超调(量) σ_p

$$\sigma_p = \frac{c(t_p)-c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$$

- 4）过渡过程时间 t_s
- 5）振荡次数N



$t<t_s$,动态；$t>t_s$，稳态

t_r、t_p和t_s反映响应速度——快速性

σ_p、N和t_s反映阻尼程度——平稳性