



§ 2.3 联结词的扩充与归约

由于一个 n 元逻辑联结词就是一个从 $\{T, F\}^n$ 到 $\{T, F\}$ 的映射，因此相应的真值函数表就有 2^{2^n} 种。下面以 $n = 1$ 和 $n = 2$ 为例来说明。

1. 联结词的扩充

1) $n = 1$ 就有4个不同的从 $\{T, F\}$ 到 $\{T, F\}$

的映射:

P	f_1	f_2	f_3	f_4
T	F	F	T	T
F	F	T	F	T

对应的真值函数为:

$f_1(P) = F$, 为常联结词

$f_2(P) = \neg P$, 为否定词 \neg

$f_3(P) = P$, 为恒等联结词

$f_4(P) = T$, 为常联结词

2) $n = 2$ 有16个不同的从 $\{T, F\}^2$ 到 $\{T, F\}$ 的映射, 即有16个不同的二元联结词, 相应的真值函数表就有16个. 下面仅列出几个:

P	Q	f_2	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{14}	f_{15}
F	F	F	F	F	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F	F	T
T	T	T	F	T	F	T	T	F

f_9 即为或非词 \downarrow :

$$f_9(P, Q) = \neg(P \vee Q) = P \downarrow Q$$

f_{15} 即为与非词 \uparrow :

$$f_{15}(P, Q) = \neg(P \wedge Q) = P \uparrow Q$$

f_7 即为异或词 ∇ :

$$f_7(P, Q) = \neg(P \leftrightarrow Q) = P \nabla Q$$

2. 联结词的归约

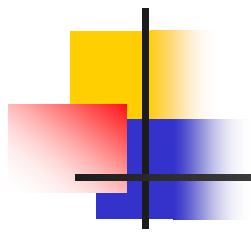
1) 可表示：设 h 为一 n 元联结词，

A 为由 m 个联结词 g_1, g_2, \dots, g_m 构成的命题公式，若有 $h(P_1, P_2, \dots, P_n) \Leftrightarrow A$ 则称联结词 h 可由联结词 g_1, g_2, \dots, g_m 来表示。

例 $P \downarrow Q \Leftrightarrow \neg(P \vee Q)$

$$P \uparrow Q \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$$

$$P \nabla Q \Leftrightarrow \neg(P \leftrightarrow Q)$$



3. 联结词的完备集：设 C 为联结词的集合
若对任一命题公式都可由 C 中的联结词
表示出来的公式与之等值，则称 C 是联结词
的完备集，或称 C 是完备的联结词集合

定理1 $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 是完备的联结词集合.

类似的联结词完备集还有:

$\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \rightarrow\}$, $\{\uparrow\}$, $\{\downarrow\}$

$$P \vee Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$$

$$P \wedge Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$$

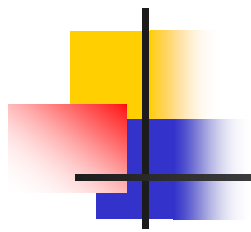
$$P \vee Q \Leftrightarrow \neg P \rightarrow Q$$

$$\neg P \Leftrightarrow \neg(P \wedge P) \Leftrightarrow P \uparrow P$$

$$P \wedge Q \Leftrightarrow \neg(\neg(P \wedge Q)) \Leftrightarrow \neg(P \uparrow Q) \\ \Leftrightarrow (P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)$$

$$\neg P \Leftrightarrow \neg(P \vee P) \Leftrightarrow P \downarrow P$$

$$P \vee Q \Leftrightarrow \neg(\neg(P \vee Q)) \Leftrightarrow \neg(P \downarrow Q) \\ \Leftrightarrow (P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow Q)$$



例 用 $\{\uparrow\}$ 表示公式 $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg C$

$$(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg C \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg C$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B) \vee \neg C \Leftrightarrow \neg[(\neg A \vee \neg B) \wedge C]$$

$$\Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B) \uparrow C$$

$$\Leftrightarrow (\neg(A \wedge B)) \uparrow C \Leftrightarrow (A \uparrow B) \uparrow C$$