第4章 多维随机向量及其分布

§4.1 多维随机变量及其分布函数、边缘分布函数

- 引言：在概率论的实际应用中，对同一随机试验，被测量的量不是一个而是两个或两个以上。
- 例1. 假设E_0是一随机试验，有r种可能的结局A_1，…A_r，它们出现概率分别为$P_1 \dots P_r$，其中$P_i > 0$，

$$\sum_{i=1}^{r} P_i = 1$$用 $X_i (i=\overline{1,r})$

- 表示A_i出现次数，它们都是E_0产生的$r\cdot v$；

例 2. 用$X=(X_1,\cdots X_n)$表示对某物理量的 n 次随机测量的结果，则$(X_1,\cdots X_n)$是同一 E 产生的 n 个 $r\bullet v$。

- 例3．掷一对均匀称骰子一次E，X，Y分别表示两枚骰子出现的点数，于是E结果可表为（X，Y）。

- 例4．检测钢成分E：（含C量，含S量，含P量）
- 例5．检测人的生理情况（H，W，S，V）
- 例6．考 弹落点位置E：（X，Y，Z）
- 显然，在研究同一随机试验所产生的$r{\cdot}v$的概率特征分布时，除每个$r{\cdot}v$的概率特征外，

- 还要研究它们的联合概率特征：后者可完全决定前者，但是前者一般不能完全决定后者。因此，我们必须研究随机向量，利于整体而全面研究随机现象！
- Definition1．若$X_1(e), X_2(e), \ldots, X_n(e)$定义同一个样本空间$S$上的$n$个$r \cdot v$，$\forall e \in S$ ，则它们构成的n维向量$(X_1(e), X_2(e), \ldots, X_n(e))$称为$n$维随机向量,或称为$n$维随机变量

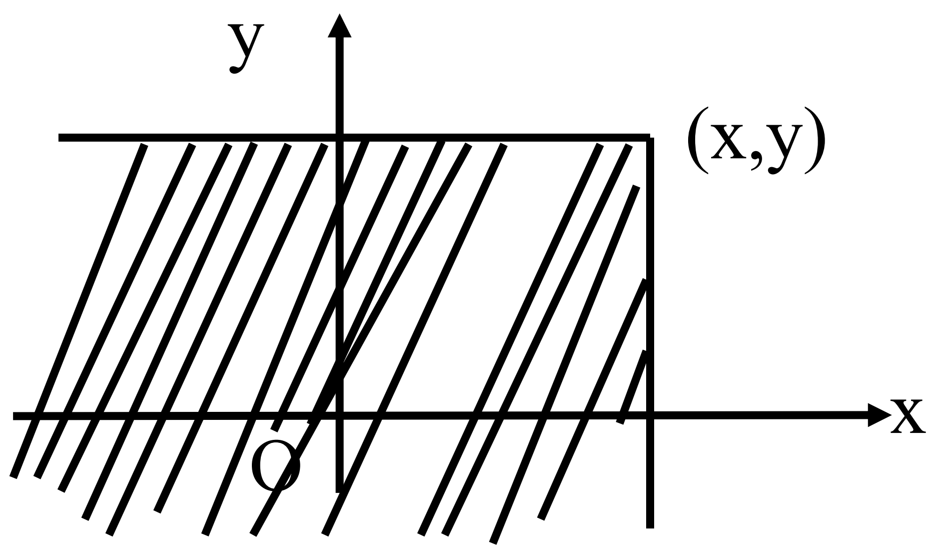
- 简记为$(X_1\ X_2\ \ldots, X_n)$, n=1为第三章情形， 我们讨论n=2情形，二维随机向量（X，Y）主要研究三方面问题：
- （1）二维随机向量（X，Y）的概率分布；
- （2）联合分布与边缘分布之间关联性；
- （3）二维随机向量（X，Y）函数分布.

- Definition 2．设（X，Y）为二维$r\cdot v$，$\forall x, y \in R$，则二元函数

$$F(x, y) = P(X \le x, Y \le y)$$

- 称为二维$r\cdot v$，（X，Y）的分布函数，或称为X和Y的联合分布函数。
- 二维$r\cdot v$（X，Y）的分布函数F（X，Y）几何解释：

- （X，Y）——随机点之坐标，
- $\forall x, y \in R$，F（x,y）——表示随机点（X，Y）落在以点（x,y）为顶点的左下方无穷矩形域内的概率。

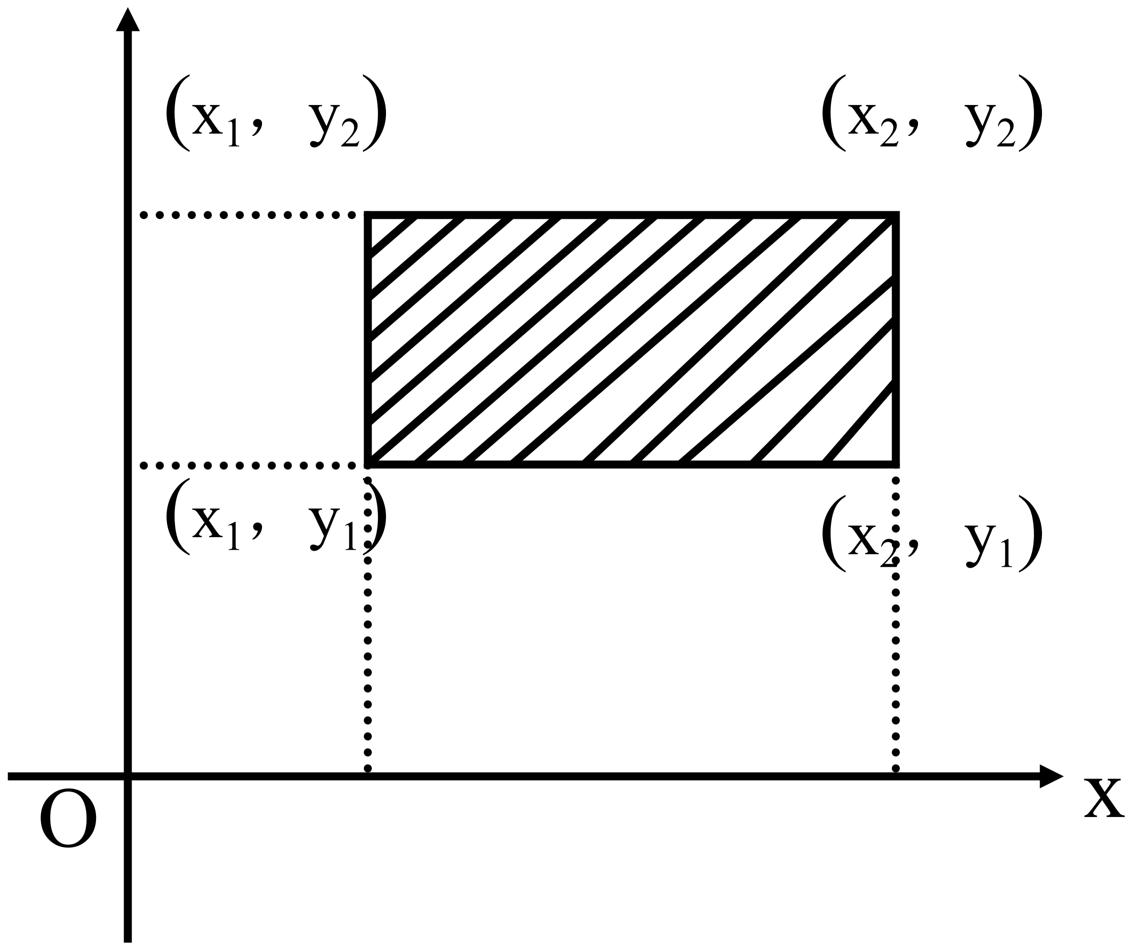


$$F(x, y) = P(X \le x, Y \le y)$$

- Question: 对$\forall x_1 < x_2, y_1 < y_2$求事件
- “$x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2$”概率利用二维

$r \cdot v(X,Y)$的$df F(x,y)$在(x_1,y_1)，(x_1,y_2)，(x_2,y_1)

- 与(x_2,y_2)四点上取值求之。


(x1, y2)
(x2, y2)
(x1, y1)
(x2, y1)
O
x

$$P(x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2)$$

$$= P((x_1 < X \le x_2) \cap ((Y \le y_2) - (Y \le y_1)))$$

$$= P((x_1 < X \le x_2) \bigcap (Y \le y_2))$$

$$- P(\,(x_1 < X \le x_2) \bigcap (Y \le y_1))$$

$$= P([(X \le x_2) - (X \le x_1)] \cap (Y \le y_2))$$

$$- P(([(X \le x_2) - (X \le x_1)] \cap (Y \le y_1)))$$

$$= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) - F(x_2, y_1)$$

- 可与一维$r\cdot v X$的$df F(x)$比较，二维$r\cdot v$（X,Y）的$df F(x,y)$满足：
- （1） $\forall x, y \in R, \quad 0 \le F(x, y) \le 1$
- （2）$F(x,y)$对每个自变量都是单调不减函数；

（3）$\forall x, y \in R$

$$F(-\infty, y) = F(x,-\infty) = F(-\infty,-\infty) = 0$$

$$F(+\infty,+\infty)=1$$

- （4）$F(x,y)$对每个自变量都是右连续的；

（5）对于$\forall x, y \in R$，$y_1 \leq y_2$有：

$$F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1) - F(x_1,y_2)\geq 0$$

- 反之，若一个二元实函数满足

(1)(2)(3)(4)(5)则必存在一个二维$r\cdot v$（X,Y）以$F(x,y)$作为其df。

- 虽然一个随机向量的概率行为完全由它的df来决定，但df却不利于处理一些具体问题。它主要用于一般随机向量的理论研究，在处理具体问题时，主要应考虑概率分布特殊表现形态，两类：离散型$r\cdot v(X,Y)$;连续型$r\cdot v(X,Y)$。
- 二维$r\cdot v(X,Y)$关于X和Y的边缘分布函数：

- 若二维$r\cdot v(X,Y)$的$df F(x,y)$已知，那么$r\cdot v\ X, Y$的df分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$，可由$F(x,y)$求得

$$F_X(X) = P(X \le x) = P(X \le x, Y < +\infty)$$
$$= F(x,+\infty)$$
$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X \le +\infty, Y < y)$$
$$= F(+\infty, y)$$
$$\forall x, y \in R$$

- 这里称$F_X(X)$，$F_Y(y)$为二维$r\cdot v(X,Y)$关于X，Y的边缘概率密度函数。

- §4.2、二维离散型随机变量

- Definition 1. 若二维$r\cdot v(X,Y)$所有可能取值是有限对或者至多可数无穷时,则称(X,Y)为二维离散型$r\cdot v$。

- Question:若(X,Y)为二维$r\cdot v$，则X，Y同为S离散型$r\cdot v$
- $\Leftrightarrow$ (X,Y)为二维离散型$r\cdot v$。
- 关于二维$r\cdot v(X,Y)$，主要讨论两方面问题。
- （1）(X,Y)取值范围
- （2）(X,Y)以多大概率取值！

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$P_{i\cdot}$
X_1	P_{11}	P_{12}	$\cdots$	P_{1j}	$\cdots$	$P_{1\cdot}$
X_2	P_{12}	P_{22}	$\cdots$	P_{2j}	$\cdots$	$P_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
X_i	P_{i1}	P_{i2}	$\cdots$	P_{ij}	$\cdots$	$P_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_{\cdot j\cdot}$	$P_{\cdot 1}$	$P_{\cdot 2}$	$\cdots$	$P_{\cdot j}$	$\cdots$	1

- Definiton2 设(X,Y)为二维离散型$r\cdot v$，所有可能取值为(x_i,y_j)　　$i,j=1,2\ldots$ 令
- $$P_{ij}=P\left(X=x_i,Y=y_j\right)\quad i,j=1,2,\cdots\text{（I）}$$
- 则称（I）为$r\cdot v(X,Y)$的分布列，或称为X与Y的联合分布列。
- 二维离散型$r\cdot v$分布列具有：
- （1）　$P_{ij}\ge 0\qquad i,j=1,2\cdots$
- （2）
$$\sum_{i,j=0}^{\infty}P_{ij}=1$$

- （3）$P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty}P_{ij}\triangleq P_{i\cdot}$

  $P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}P_{ij}\triangleq P_{\cdot j}$
- 且 $\sum_{i=1}^{\infty}P_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{\infty}P_{\cdot j}=1,\qquad \forall i,j=1,2,\cdots$
- Proof：（1）易证Chapter Ⅰ公理1
- （2）$\bigcup_{i,j=1}^{\infty}(X=x_i,Y=y_j)=\sum_{i,j=1}^{\infty}(X=x_i,Y=y_j)=S$
- 利用关系易证Chapter Ⅰ公理3

- （3） $\forall i=1,2,\cdots$

$$(X=x_i)=\left(X=x_i,\bigcup_{j=1}^{\infty}(Y=y_j)\right)$$

$$=\bigcup_{j=1}^{\infty}(X=x_i,Y=y_j)$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}(X=x_i,Y=y_j)$$

- 利用Chapter one 公理3

- 称 $P_{i\cdot} = P(X = x_i), P_{\cdot j} = P(Y = y_j)$ 为二维离散型$r\cdot v$关于X，Y的边缘分布列。
- 二维离散型$r\cdot v(X,Y)$ df 为$F(x,y)$，于是有：

$$F(x, y) = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_j \le y} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_j \le y} P_{ij}$$

- 例1 设盒内有2件次品，3件正品，我们发别按有放回和无放回方式抽取2次，用X，Y分别表示第一次、第二次取得次品个数，求(X,Y)的分布列，边缘分布列。
- 解：由题设

$$X=\begin{cases}1, & \text{第一次取得次品}\\ 0, & \text{第一次取得正品}\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}1, & \text{第二次取得次品}\\ 0, & \text{第二次取得正品}\end{cases}$$

（1）有放回方式：

$X \backslash Y$	0	1	$P_{i\cdot}$
0	$\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}$	$\frac{15}{25}$
1	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}$	$\frac{10}{25}$
$P_{\cdot j}$	$\frac{15}{25}$	$\frac{10}{25}$	1

（2）不放回方式：

$X \backslash Y$	0	1	$P_{i\cdot}$
0	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$	$\frac{12}{20}$
1	$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$	$\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}$	$\frac{8}{20}$
$P_{\cdot j}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{8}{20}$	1

$$P(X=0,Y=0)=P(X=0)P(Y=0\mid X=0)$$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$$

$$P(X=0,Y=1)=P(X=0)P(Y=1\mid X=0)$$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$$

$$P(X=1,Y=0)=P(X=1)P(Y=0\mid X=1)$$

$$=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$$

$$P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1\mid X=1)$$

$$=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}$$

- 例2 某袋中有10件产品，其中2件一级品，7件二级品，1件次品。从中任取3件，X,Y分别表示取得一级品和二级品件数，求(X,Y)分布列和边缘分布列。
- 解：由题设
- X可能取0,1,2, Y可能取0,1,2,3

$$P\left(X=x_i, Y=y_j\right)=P\left(X=i, Y=j\right)=\frac{C_2^i C_7^j C_1^{3-i-j}}{C_{10}^3}$$

$$=\frac{C_2^i C_7^j}{C_{10}^3}$$

- 显然，$i+j=2$或3，$P_{ij}>0$ 其它情况,$P_{ij}=0$
- 于是有：

$$C_{10}^{3} = \frac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1} = 120$$

$$P(X=0, Y=2) = \frac{C_7^2}{120} = \frac{21}{120}$$

$$P(X=0, Y=3) = \frac{C_7^3}{120} = \frac{25}{120}$$

$$P(X=1, Y=1) = \frac{C_2^1 C_7^1}{120} = \frac{14}{120}$$

$$P\left(X=1,Y=2\right)=\frac{C_2^1C_7^2}{120}=\frac{42}{120}$$

$$P\left(X=2,Y=0\right)=\frac{C_2^2C_7^0}{120}=\frac{1}{120}$$

$$P\left(X=2,Y=1\right)=\frac{C_2^2C_7^1}{120}=\frac{7}{120}$$

- 类似于2010年数三的一个研究生考题。

Y / X	0	1	2	3	P_i
0	0	0	21/120	35/120	56/120
1	0	14/120	42/120	0	56/120
2	1/120	7/120	0	0	8/120
P_j	1/120	21/120	63/120	35/120	1

- §4.3　连续型随机变量
- 定义1 设二维$r\cdot v(X,Y)$的分布函数为$F(x,y)$,若存在一个非负可积的二元函数$P(x,y)$,使得对$\forall x, y \in R$有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}P(u,v)dudv$$

- 则称(X,Y)为二维连续型$r\cdot v$，并称$P(x,y)$为二维$r\cdot v(X,Y)$的pdf或称为X和Y的联合pdf。

- 物理解释：设pdf(x,y)为质量面密度，则F(x,y)相对于以P(x,y)为质量密度分布在
- $(-\infty, x]\times(-\infty, y]$ 中物质总质量。
- 由定义知，若 $P(x, y)$在点(x_0,y_0)处连续，则有：

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}\bigg|(x_0, y_0) = P(x_0, y_0)$$

- 此等式刻划了$F(x,y)$与$P(x,y)$之间关系。
- 二维连续型$r\cdot v(X,Y)$的$pdf P(x,y)$满足：
- （1）$P(x,y) \geq 0 \quad \forall x, y \in R$
- （2）$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} P(x,y)dxdy = F(+\infty,+\infty) = 1$
- （3）设G为xoy平面上的一个区域，则点(X,Y)落在G中概率为：

$$P\{(X,Y) \in G\} = \iint_G p(x,y)dxdy$$

- 上述诸性质的几何意义如下：
- （1）表示z=$P(x,y)$曲面张在xoy平面上方；
- （2） z=$P(x,y)$曲面与xoy平面所夹空间区域体积为1；
- （3）$P\{(x,y)\in G\}$在数值上等于以z=$P(x,y)$ 为顶，以平面区域G为底的曲顶柱体的体积。

- 定义：若二维连续型$r\cdot v(X,Y)$的df为$F(x,y)$，则有：

$$\forall x, y \in R$$

$$F_X(x) = F(x,+\infty) = \int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} P(u,v)dv\right)du$$

$$F_Y(y) = F(+\infty, y) = \int_{-\infty}^{y}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} P(u,v)du\right)dv$$

- 由一维连续型$r\cdot v$定义：

$$P_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}P(x,y)dy$$

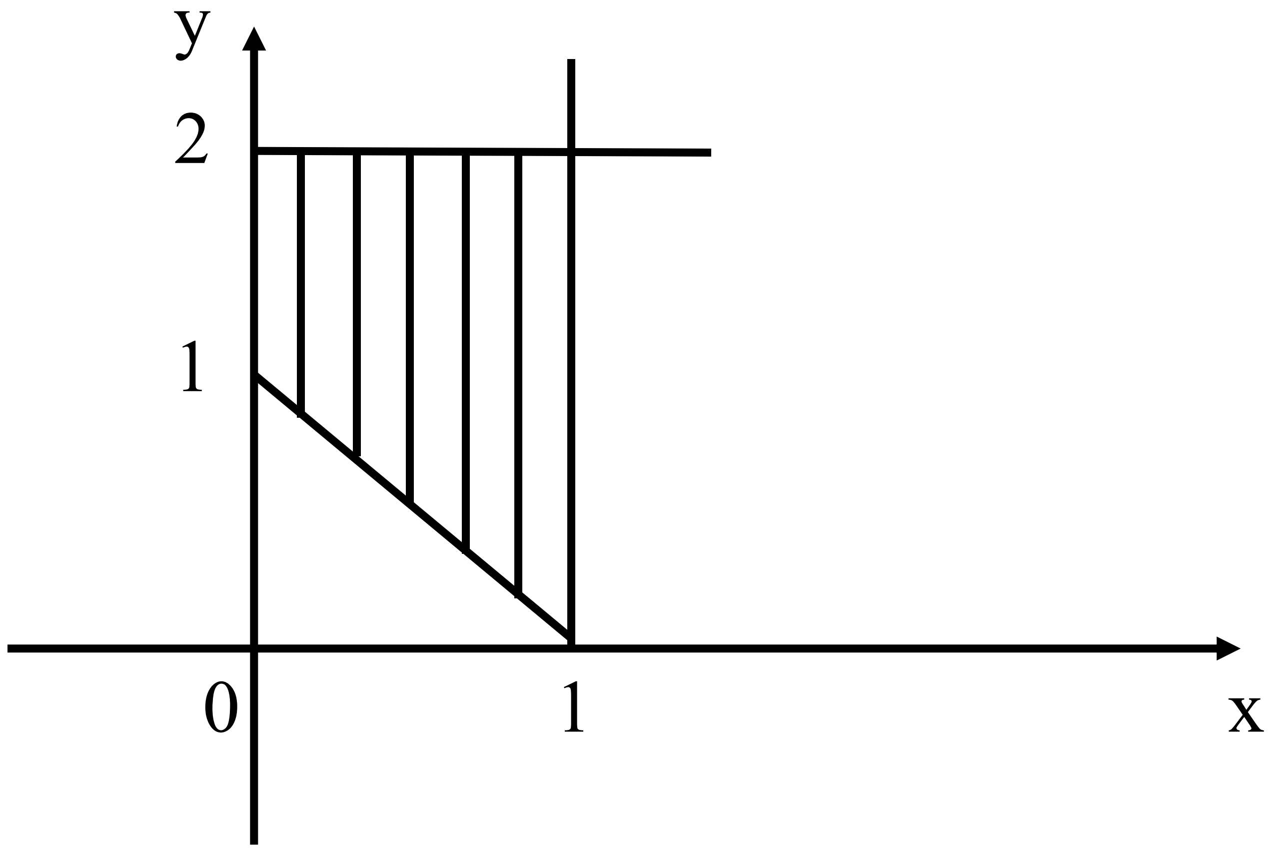
$$P_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}P(x,y)dx$$

- 称 $P_X(x),P_Y(y)$ 为二维$r\cdot v(X,Y)$关于X,Y的边缘概率密度函数。

- 例1 设二维$r\cdot v(X,Y)$的pdf为：

$$P(x,y)=\begin{cases} x^2+\dfrac{xy}{3}, & 0\le x\le 1, \quad 0\le y\le 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

- 求：（1）$P(X+Y\ge 1)$
- （2）$r\cdot v(X,Y)$的$d\cdot f\ F(x,y)$


y
2
1
0
1
x

- 解：
- （1）$P\left(X+Y\geq 1\right)=1-P\left(X+Y<1\right)$

$$=1-\iint_D\left(x^2+\frac{xy}{3}\right)dxdy=65/72$$

$$=1-\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(x^2+\frac{xy}{3}\right)dy$$

$$=1-\int_0^1\left(x^2y+\frac{x}{6}y^2\right)\Big|_0^{1-x}dx$$

$$= 1 - \int_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{x}{6}(1-x)^2 \right) dx$$

$$= 1 - \int_0^1 \left(x^2 - x^3 + \frac{x}{6} - \frac{2}{6}x^2 + \frac{x^3}{6} \right) dx$$

$$= 1 - \int_0^1 \left(\frac{x}{6} + \frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{6}x^3 \right) dx$$

$$= 1 - \left[\frac{x^2}{12} + \frac{2}{9}x^3 + \frac{5}{24}x^4 \right] \Big|_1^0$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{12} + \frac{2}{9} - \frac{5}{24} \right)$$

$$= 1 - \frac{7}{72}$$

$$= \frac{65}{72}$$

$$0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2\text{时}$$

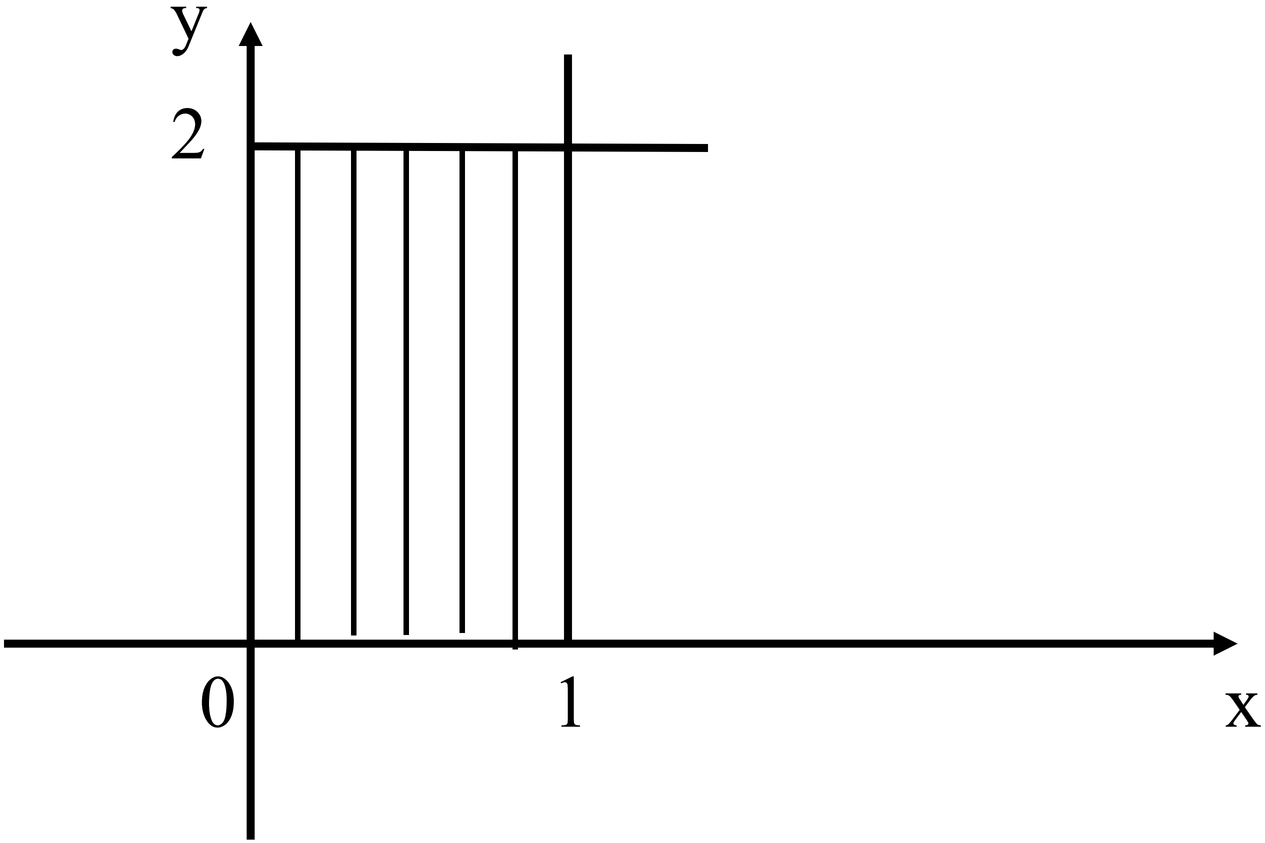
- （2）

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}P(u,v)dudv$$

$$=\int_0^x\int_0^y(u^2+\frac{uv}{3})dudv=\int_0^x(u^2v+\frac{uv^2}{6})\Big|_0^y du$$

$$=\int_0^x(u^2y+\frac{uy^2}{6})du=(\frac{u^3y}{3}+\frac{u^2y^2}{12})\Big|_0^x$$

$$=\frac{y}{3}x^3+\frac{x^2y^2}{12}$$



y
2
0
1
x

$$F(x,y)=\begin{cases} \dfrac{yx^3}{3}+\dfrac{x^2y^2}{12}, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 2 \\ \dfrac{y}{3}+\dfrac{y^2}{12}, & x>1, 0\le y\le 2 \\ \dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{x^2}{3}, & 0\le x\le 1, y>2 \\ 1, & x>1, y>2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

- 例2 设(X,Y)的 pdf 为

$$P(x,y)=\begin{cases} ce^{-(x+y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

- 求（1）常数C=?
- （2）$r \cdot v(X,Y)$的$dfF(x,y)$ 边缘分布函数及边缘pdf;
- （3） $P(0 \le X \le 1, 0 \le Y \le 1)$

- 解：（1）由题设

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}P(x,y)dxdy$$

$$=c\int_{0}^{+\infty}e^{-x}dx\int_{0}^{+\infty}e^{-y}dy$$

$$=c\left(-e^{-x}\Big|_{0}^{+\infty}\right)\left(-e^{-y}\Big|_{0}^{+\infty}\right)$$

- $$=c$$

$$\therefore c=1$$

- （2） $\forall\ x, y \in R$

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}P(u,v)dudv$$

- 当$x>0, y>0$时

$$F(x,y)=\int_0^x\int_0^y e^{-u-v}dudv$$

$$=\int_0^x e^{-u}du\int_0^y e^{-v}dv$$

$$=\left(-e^{-u}\right)\Big|_0^x\left(-e^{-v}\right)\Big|_0^y$$

$$=\left(1-e^{-x}\right)\left(1-e^{-y}\right)$$

$$F(x,y)=\begin{cases}\left(1-e^{-x}\right)\left(1-e^{-y}\right), & x>0,y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$F_X(x) = F(x, +\infty)$$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = F(+\infty, y)$$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$$

$$P_X(x) = F_X^{'}(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

$$P_Y(y) = F_Y^{'}(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$$

- （3） $1)P(0 \le X \le 1, 0 \le Y \le 1)$

$$= F(1,1) - F(1,0) + F(0,0) - F(0,1)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{e}\right)^2$$

$$2)P(0 \le X \le 1, 0 \le Y \le 1)$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 e^{-x-y} dxdy$$

$$= \int_0^1 e^{-x} dx \int_0^1 e^{-y} dy$$

$$= \left(-e^{-x}\right)\Big|_0^1 \left(-e^{-y}\right)\Big|_0^1$$

$$= \left(1 - \frac{1}{e}\right)^2$$

- 两个特殊的分布：
- （1）二维均匀分布：设G是平面上有界区域，其面积为A，若二维$r\cdot v(X,Y)$具有pdf:

$$P(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}, & (x,y)\in G \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

- 则称(X,Y)在G上服从均匀分布。

- 验证$P(x,y)$满足
- （1）$P(x,y)\geq 0, \qquad \forall x,y\in R$
- （2）$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}P(x,y)dxdy = \iint\limits_{G}\frac{1}{A}dxdy = 1$
- （3）设D为G中任一子区域，面积为$S(D)$，则有

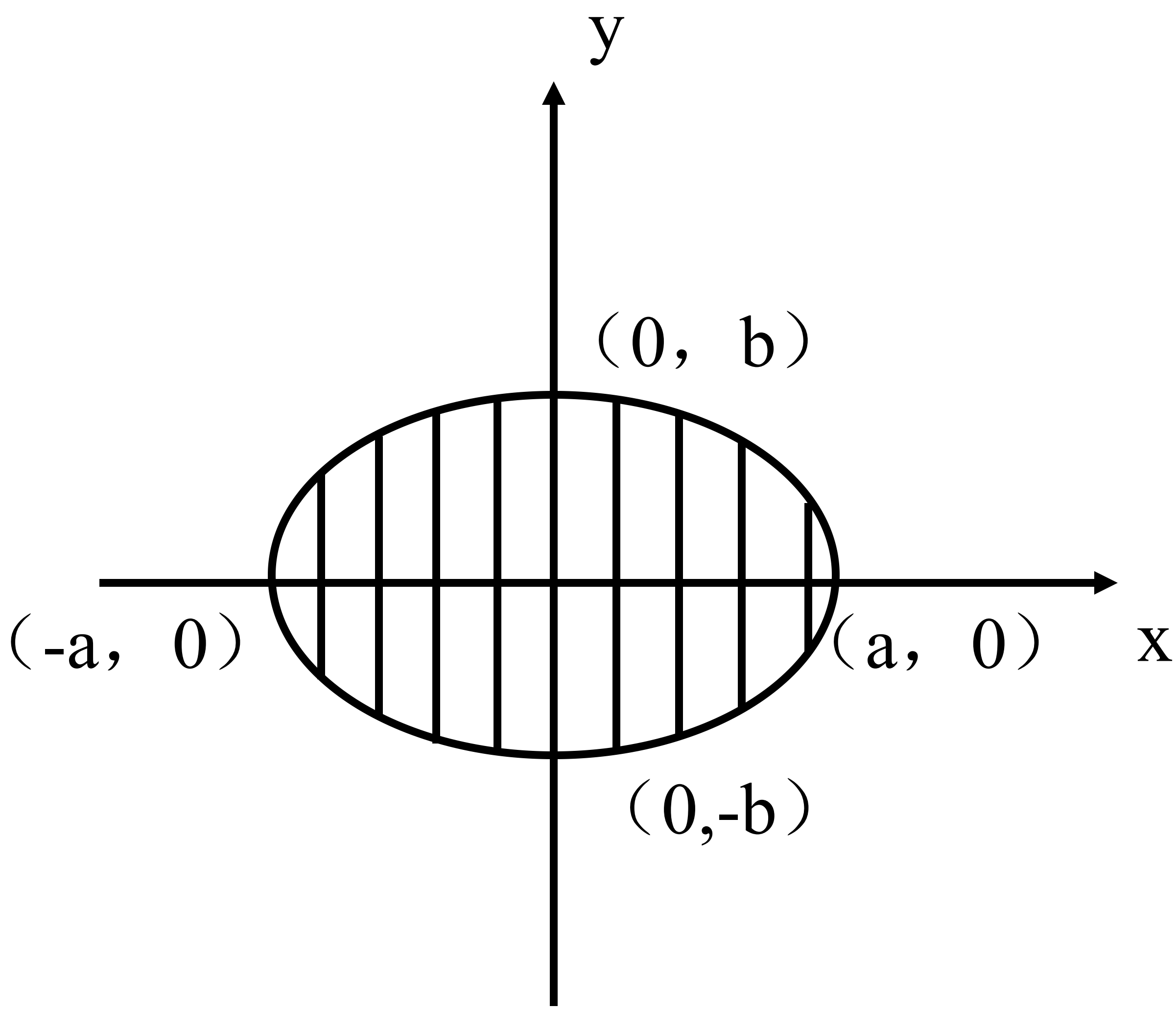
$$P\{(X,Y)\in D\} = \iint\limits_{D}P(x,y)dxdy = \frac{S(D)}{A}$$

- （3）说明：二维均匀分布等价于二维区域上几何概率。

- 例3 设(X,Y)在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$ 内服从均匀分布，其pdf为

$$P(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi ab}, & \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

- 求 $P_X(x),P_Y(y)$


y
（0， b）
（-a， 0）
（a， 0）
x
（0,-b）

- 解：当 $|x| \le a$ 时

$$P_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x,y)\,dy$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} 0\,dy + \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \frac{1}{\pi ab}\,dy + \int_{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{+\infty} 0\,dy \right)$$

$$= \frac{2}{\pi a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

$$P_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi a}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}, & |x|\le a\\ 0, & |x|>a\end{cases}$$

- 同理 $P_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi b}\sqrt{1-\dfrac{y^2}{b^2}}, & |y|\le b\\ 0, & |y|>b\end{cases}$

- Question:已知$r\cdot v(X,Y)$服从二维均匀分布$r\cdot vX,Y$是否服从一维均匀分布呢？
- (2)二维正态分布
- 定义：设二维$r\cdot v(X,Y)$的pdf为：

$$P(x, y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-e^2\right)}\left[\frac{\left(x-\mu_1\right)^2}{\sigma_1^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-2\rho\frac{\left(x-\mu_1\right)\left(y-\mu_2\right)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{\left(y-\mu_2\right)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$-\infty < x < +\infty, \qquad -\infty < y < +\infty$$

- 其中 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 均为常数且

  $\sigma_1, \sigma_2 > 0 \qquad |\rho| < 1$

- 则称(X,Y) 服从参数为 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 的二维正态分布，记

$$(X,Y) \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho\right)$$

- 验证 $P(x,y)$ 满足
- （1）$P(x,y)\geq 0, \forall x, y \in R$
- （2）$\int_{-\infty}^{+\infty} P_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} P_X(x)dx$
- 思路：因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} P(x,y)dxdy$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} P(x,y)dx\right]dy$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty} P_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} P_X(x)dx$$

故我们只需证明$P_Y(y)$， $P_X(x)$分别为$r{\cdot}v\,Y$、X的pdf.

对$\forall y \in R$

$$P_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x, y)\, dx$$

$$u = \frac{x - \mu_1}{\sigma^1}$$

$$v = \frac{y - \mu^2}{\sigma^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[u^2 - 2\rho uv + v^2\right]\right\} du$$

$$= \frac{1}{\sigma^2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(1-\rho^2\right)}}$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\left(u-\rho v\right)^2+v^2\left(1-\rho^2\right)\right]\right\}du$$

$$= \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{u}{\sqrt{1-\rho^2}}-\frac{\rho v}{\sqrt{1-\rho^2}}\right]^2\right\}$$

$$d\left(\frac{u}{\sqrt{1-\rho^2}}+\frac{\rho v}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},-\infty<y<+\infty$$

- 同理可得：

$$P_X(x)=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},-\infty<x<+\infty$$

于是$X\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right),Y\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$

利用$P_X(x),P_Y(y)$与$P(x,y)$之间关系,易证:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}P(x,y)dxdy = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty}P_X(x)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}P_Y(y)dy$$

- 结论：$P_X(\underline{x}),P_Y(y)$均与参数 ρ 无关，故对不同的正态分布，只要参数 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2$
- 相同，那么其边缘分布亦相同。即二维正态分布完全决定了边缘分布，但反之不成立。

- §4.5　随机变量的独立性
- 一般来说，$r\cdot v$之间关系有三种：
- （1）相互独立；
- （2）随机相依（相关关系）；
- （3）函数关系。
- 首先，我们定义两个$r\cdot vX$、Y独立的概念。设$r\cdot vX$、Y定义于同一个S上的，对$\forall x,y\in R$

- 考察“$X \le x$”与“$Y \le y$ ”事件独立含义：

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y)$$

$$\text{即} F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

- 这种定义使我们可以充分利用分布函数显示的巨大优越性！

- 定义：设 $F(x, y), F_X(x), F_Y(y)$ 依次为

- $r{\cdot}v(X,Y)$，X,Y的df，若对于$\forall x, y \in R$满足：

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$$

- 则称$r{\cdot}vX,Y$相互独立。
- 例1 设$r{\cdot}v(X,Y)$是否相互独立？

$$F(x,y)=\begin{cases}\left(1-e^{-x}\right)\left(1-e^{-y}\right), & x>0,y>0\\ 0, & 0,x\le 0\end{cases}$$

- 问 $r{\cdot}vX,Y$是否相互独立？
- 解：由题设

$$\forall x, y \in R$$

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = F(+\infty, y) = \begin{cases} 1 - e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$$

- 显然对于$\forall x, y \in R$满足：

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$$

- 根据两个$r\cdot v$独立定义：$r\cdot vX,Y$相互独立。
- 对于二维离散型$r\cdot v(X,Y)$：若$r\cdot v(X,Y)$分布列为 则$r\cdot vX,Y$独立 对于 $P_{ij}(i,j=1,2,\cdots)$ $\Leftrightarrow$

  $\forall i,j\in\{1,2,\cdots\}$均有：$P_{ij}=P_{i\cdot}\cdot P_{\cdot j}$

  $or\quad P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$

- 对于二维离散型$r\cdot v(X,Y)$，验证$r\cdot vX,Y$是否独立较复杂！
- 对于二维连续型$r\cdot v(X,Y)$：若$r\cdot vX,Y$的联合pdf为$P(x,y)$边缘概率密度为

$$P_X(x),P_Y(y)$$

- 则$r\cdot vX,Y$相互独立$\Leftrightarrow$ 新的二元函数
- $P_X(x)P_Y(y)$ 亦为$r\cdot v(X,Y)$的pdf。

- Proof : “$\Rightarrow$”因为$r \cdot v X, Y$相互独立，故对
- $\forall x, y \in R$ 满足：

$$F(x, y) = F_X(x_1)F_Y(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{x} P_X(t)dt \int_{-\infty}^{y} P_Y(v)dv$$

$$= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} P_X(t)P_Y(v)dtdv$$

- 故由二维连续型 $r \cdot v(X, Y)$ 的pdf定义：
- 新的二元函数 $P_X(x)P_Y(y)$ 为$r \cdot v(X, Y)$

- 的pdf.
- "$\Leftarrow$"若$P_X(x)P_Y(y)$为$r.v(X,Y)$的pdf
- 于是有: $$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}P(t,v)dtdv$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}P_X(t)P_Y(v)dtdv$$

$$=\int_{-\infty}^{x}P_X(t)dt\int_{-\infty}^{y}P_Y(v)dv$$

$$=F_X(x)F_Y(y)$$

- 故 $r\cdot v(X,Y)$ 独立。

- Question:对于二维连续型 $r\cdot v(X,Y)$
- 在什么条件下，当$r\cdot v X,Y$ 独立时有

$P(x,y)=P_X(x)P_Y(y)$(对$\forall x,y\in R$)?

$P(x,y), P_X(x), P_Y(y)$分别在 $(x,y), x, y$ 点连续！

- 例3 设$r \cdot v(X, Y)$的pdf为

$$P(x, y)=\begin{cases}12 e^{-3x-4y}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

- 问$r \cdot v X, Y$是否独立？

- 解：因为 $\forall x, y$

$$P_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}P(x,y)dy=\begin{cases}3e^{-3x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

- (

$x>0$时

$$\because P_X(x)=\int_{-\infty}^{0}0dy+\int_{0}^{+\infty}12e^{-3x-4y}dy$$

$$=3e^{-3x}\int_0^{+\infty}4e^{-4y}dy$$

$$=3e^{-3x}\left(-e^{-4y}\Big|_0^{+\infty}\right)$$

$$=3e^{-3x}$$

)

$$\therefore P_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x,y)\,dy$$

$$= \begin{cases} 3e^{-3x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

同理$P_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x,y)\,dx$

$$= \begin{cases} 4e^{-4y}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$$

$$P_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x,y)\,dx = \begin{cases} 4e^{-4y}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$$

而对 $\forall x, y \in R$满足:

$$P(x, y) = P_X(x)P_Y(y)$$

故$r \cdot v X, Y$独立.

- 例4 设二维 $r\cdot v(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho\right)$
- 则 $r\cdot vX,Y$ 相互独立 $\Leftrightarrow \rho=0$

$$\Pr oof\ :\text{"}\Leftarrow\text{"}\ \rho=0 \qquad \forall x,y\in R$$

$$P(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(x-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

$$= P_X(x) P_Y(y)$$

$r \cdot v X, Y$独立.

- $"\Rightarrow" r\cdot v X, Y$独立，且 $\forall x, y \in R, P(x, y),$
- $P_X(x), P_Y(y)$ 均连续，故满足：

$$P(x, y) = P_X(x) P_Y(y)$$

$$\therefore \rho = 0$$

- 其它研究生考试三个真题。（2010年，2011年，200x年）

- §4.6随机变量的函数
- 关于二维 $r \cdot v(X,Y)$ 函数的分布，我们主要考虑几种特殊函数Z=X+Y, $\sqrt{X^2+Y^2}$
- $\max(X,Y), \min(X,Y)$ 的分布，基于二维
- $r \cdot v(X,Y)$ 函数分布的复杂性，我们需要加上 $r \cdot vX,Y$ 独立的条件，从而使问题简化！

- 一、和的分布：
- 1、离散型 $r \cdot v(X,Y)$，求$Y+X=Z$的分布。
- 例1 设X,Y独立，$X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2)$,
- 求$Z=X+Y$的概率分布。
- 解：$\forall\ k \in \{0,1,2,\cdots\}$

$$(Z=k)=(X=0,Y=k)+(X=1,Y=k-1)$$

$$+\cdots+(X=k,Y=0)$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\left(X=i,Y=k-i\right)$$

$$P\left(Z=k\right)=\sum_{i=0}^{k}P\left(X=i,Y=k-i\right)\quad r\cdot vX,Y\text{独立}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}P\left(X=i\right)P\left(Y=k-i\right)$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{k-i}}{\left(k-i\right)!}e^{-\lambda_2}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} \lambda_1^i \lambda_2^{k-i}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} C_k^i \lambda_1^i \lambda_2^{k-i}$$

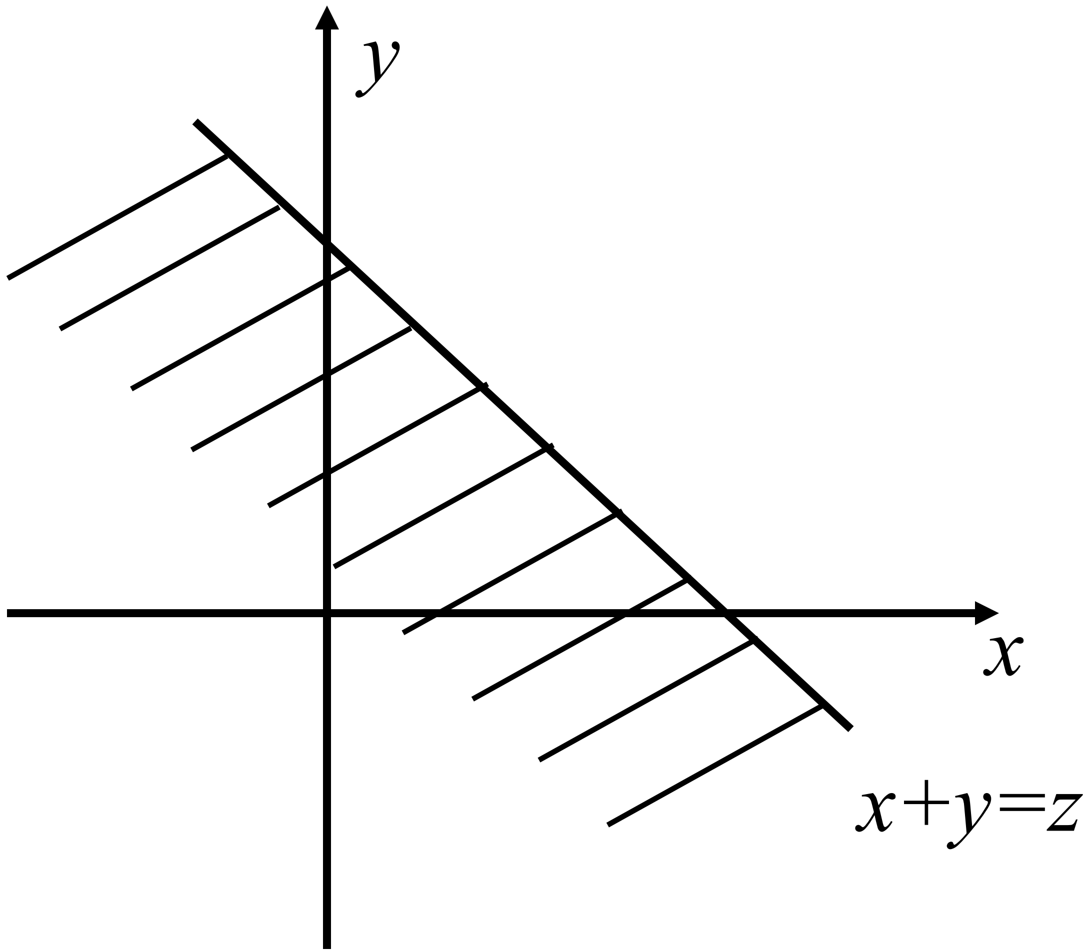
$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} (\lambda_1 + \lambda_2)^k$$

- 故

$$P(Z=k) = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}, k \in \{0,1,2,\cdots\}$$

$$Z \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$$

- 这种求独立$r \cdot v$和的分布公式——亦称为求离散褶积公式，又称为求离散卷积公式！
- 2、求连续型 $r \cdot v(X,Y)$:设(X,Y)为二维连续型$r \cdot v$，其pdf为$P(x,y)$已知，$r \cdot v X,Y$
- pdf为 $P_X(x), P_Y(y)$ 求$Z=X+Y$的pdf $P_Z(z)$


y
x
x+y=z

- 解：分布函数方法！

$$\forall z \in R$$

$$F_Z(z) = P(Z + Y \leq z)$$

$$= \iint\limits_{x+y\leq z} P(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} P(x,y)\,dy$$

$$\underset{y=u-x}{\overset{x=x}{=}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z} P(x, u-x) du$$

$$= \int_{-\infty}^{z} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} P(x, u-x) dx \right) du$$

- 由 $r \cdot v$ 概率密度定义：Z为连续型 $r \cdot v$
- 且pdf为

$$P_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x, z-x) dx$$

- 特别：若 $r \cdot v X, Y$ 独立，边缘pdf为
- $P_X(x), P_Y(y)$ 则 Z=X+Y的pdf为：

$$\forall z \in R$$

$$P_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_X(x) P_Y(z-x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} P_X(z-y) P_Y(y) dy$$

$$= P_X * P_Y$$ —— 卷积公式

卷积运算

- 例2 设X,Y独立同分布，$X \sim N(0,1)$，求$Z=X+Y$的pdf。
- 解：利用卷积公式

$$\forall \quad z \quad \in \quad R$$

$$P_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_X(x) P_Y(z-x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2+zx-\frac{z^2}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2-\frac{z^2}{4}}dx$$

$$=\frac{e^{-\frac{z^2}{4}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{(2x-z)^2}{2\left(\sqrt{2}\right)^2}}d(2x-z)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{z\left(\sqrt{2}\right)^2}},(z\in R)$$

- 故 $Z \sim N\left(0,\left(\sqrt{2}\right)^{2}\right)=N\left(0,1^{2}+1^{2}\right)$
- 结论：若 $X_1,\cdots X_n$独立, ，且

$$X_i \sim N\left(\mu_i,\sigma_i^{2}\right), i=\overline{1,n}$$

- 则

$$X_1+\cdots+X_n \sim N\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i,\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^{2}\right)$$

- （推广到有限个$r\cdot v$线性组合亦成立），

若 $(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^{2};\mu_2,\sigma_2^{2};\rho\right)$ 则有

$r \cdot vX$, Y独立 $\Leftrightarrow \rho = 0$, 则

$X + Y \sim N\left(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)$

- 例3 设$X \sim U(0,1)$, 而Y的pdf为:

$$P_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & y \geq 0 \end{cases}$$

$r \cdot vX, Y$独立, 求$Z = X + Y$的pdf.

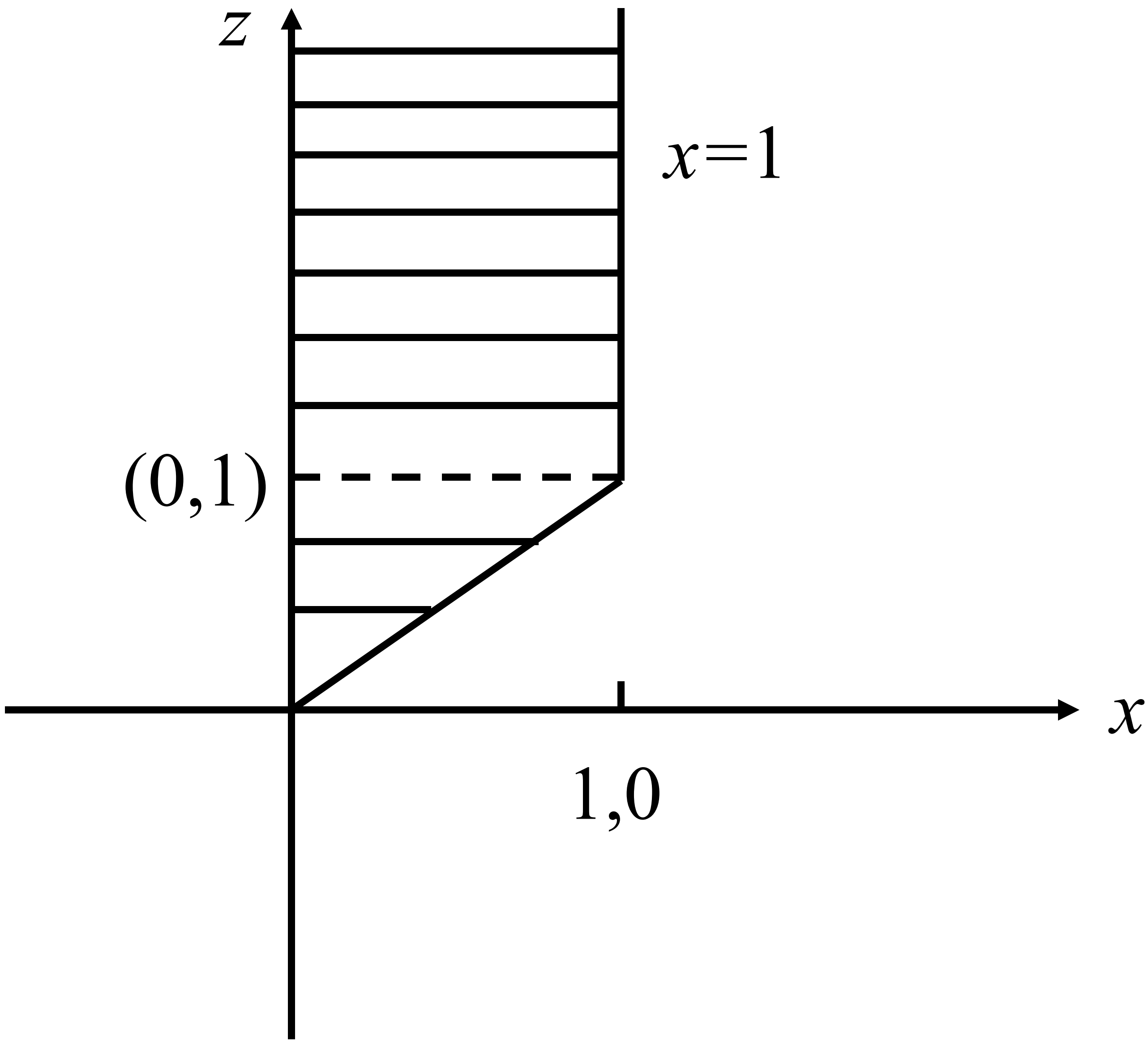
$$r \cdot v X, Y\text{独立} \Leftrightarrow \rho = 0, \text{则}$$

$$X + Y \sim N\left(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)$$

- 例3 设 $X \sim U(0,1)$,而Y的pdf为:

$$P_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & y \geq 0 \end{cases}$$

$$r \cdot v X, Y\text{独立}, \text{求} Z = X + Y\text{的}pdf.$$


z
x=1
(0,1)
x
1,0

- 解: 由题设

$$P_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$\forall z \in R$$

$$P_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_X(x) P_Y(z-x) dx$$

- 被积函数 $P_X(x)P_Y(z-x)$ 只有满足下列不等式时才不为0：

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ z - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ z > x \end{cases}$$

- 于是有：

当$z \le 0$时 $P_Z(z) = 0$

当$0 < z < 1$时 $P_Z(z) = \int_0^z e^{-z+x} dx$

$$= e^{-z} \cdot e^{x} \Big|_0^z = 1 - e^{-z}$$

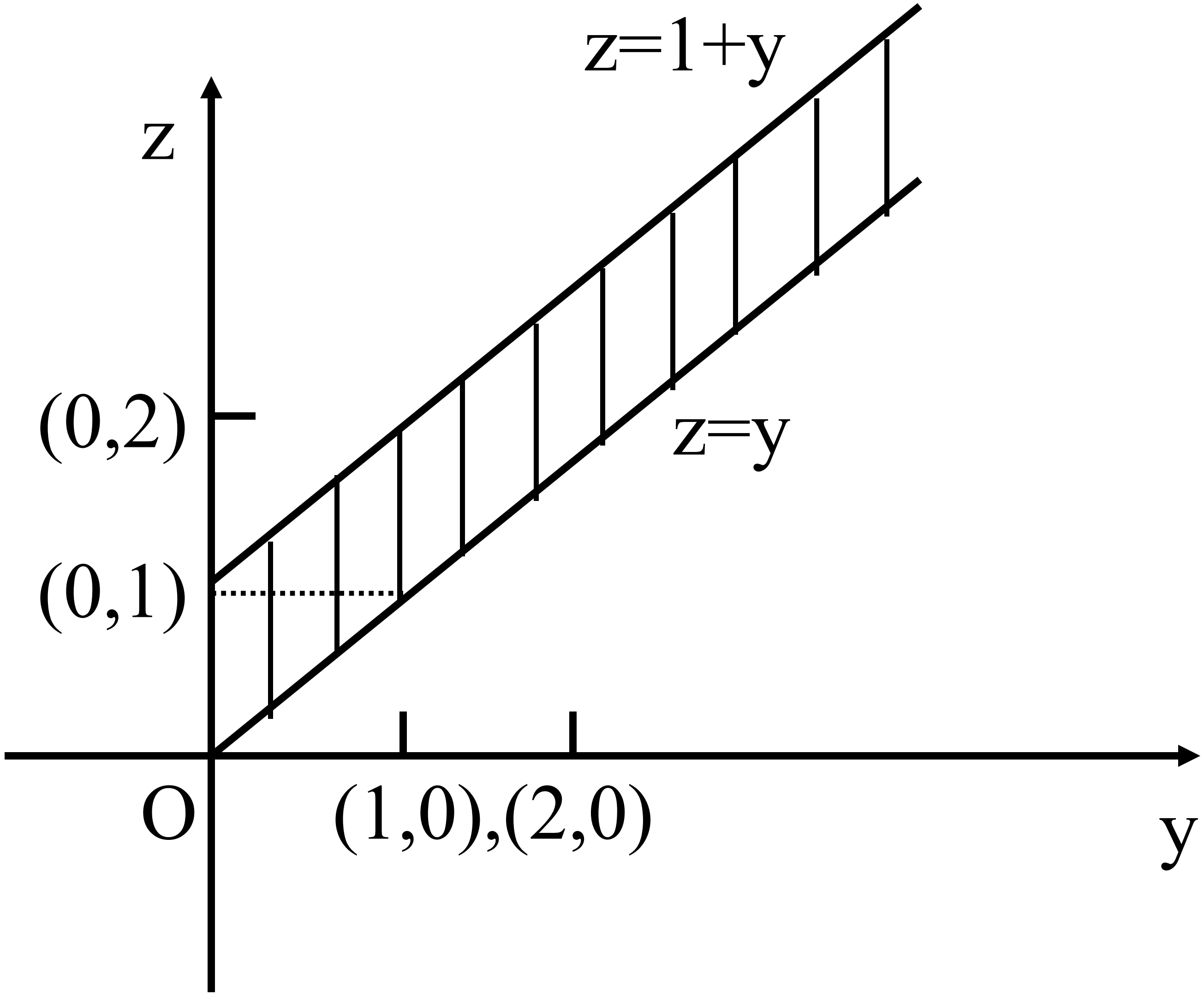
当$z \ge 1$时 $P_Z(z) = \int_0^1 e^{-z} \cdot e^{x} dx$

$$= e^{-z} \cdot e^{x} \Big|_0^1 = e^{1-z} - e^{-z}$$

- 故 $$P_Z(z)=\begin{cases} 0, & z\le 0 \\ 1-e^{-z}, & 0<z<1 \\ e^{1-z}-e^{-z}, & z\ge 1 \end{cases}$$

- 同理

$$P_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}P_X(z-y)P_Y(y)dy$$


z=1+y
z
(0,2)
z=y
(0,1)
O
(1,0),(2,0)
y

- 被积函数$P_Y(y)P_Z(z-y)$只有满足

$$\begin{cases} y>0 \\ 0<z-y<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y>0 \\ z>y \\ z<y+1 \end{cases}$$ 时才不为0

- 于是 $$P_Z(z)=\begin{cases} 0, & z\le 0 \\ 1-e^{-z}, & 0<z<1 \\ e^{1-z}-e^{-z}, & z\ge 1 \end{cases}$$

- 二、瑞利分布（Rayleigh Distribution)：

设 $r \cdot vX, Y$ 相互独立 $X, Y \sim N\left(0, \sigma^2\right)$

求$z=\sqrt{X^2+Y^2}$的分布.

- 分布函数方法
- 当 $z \leq 0$时, $F_Z(z)=0, P_Z(z)=0$
- 当z>0时

$$F_Z(z)=P\left(\sqrt{X^2+Y^2} \leq z\right)=\iint_{\sqrt{x^2+y^2} \leq z} P(x, y) dxdy$$

$$\overset{r\cdot v X,Y}{\underset{独立}{=}} \iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le z} P_X(x)P_Y(y)dxdy$$

$$= \iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le z} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dxdy$$

$$\overset{x=\rho\cos\theta}{\underset{y=\rho\sin\theta}{=}} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} \rho d\rho$$

$$= \int_0^z - e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} d\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$=1-e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$$

$$P_Z(z)=F'(z)=\frac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$$

- 于是

$$P_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0 \\ \frac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z>0\end{cases}\quad \text{（I）}$$

- 若r·vz其pdf为(I),则称Z服从Rayleigh分布。
- 作用与意义：在误差分析中有十分重要的作用。

- 三、$\max(X,Y)$与$\min(X,Y)$的分布
- 设　$M=\max(X,Y), N=\min(X,Y)$,
- 又设r·vX和Y的d·f分别为$F_X(x), F_Y(y)$
- 且X，Y相互独立，求M及N的d·f
- 补充定理：设r·vX,Y相互独立，则有：

$$\forall x, y \in R, \overline{(X \le x)} 与 (Y \le y), (X \le x) 与 \overline{(Y \le y)},$$

$$\overline{(X \le x)} 与 \overline{(Y \le y)}$$

相互独立。

- 1.先求 $M = \max(X, Y)$的$d \cdot f$: $\quad \forall z \in R$

$$F_M(z) = P(M \le z) = P(\max(X, Y) \le z)$$

- 因为

$$(\max(X,Y) \le z) \Leftrightarrow (X \le z, Y \le z)$$

$$(\min(X,Y) \ge z) \Leftrightarrow (X \ge z, Y \ge z)$$

$$(\max(X,Y) > z) \Leftrightarrow (X > z) \cup (Y > z)$$

$$(\min(X,Y) < z) \Leftrightarrow (X < z) \cup (Y < z)$$

- 故 $F_M(z) = P(\max(X, Y) \le z)$

$$= P(X \le z, Y \le z)$$

$$= P(X \le z) P(Y \le z) = F_X(z) F_Y(z)$$

- 于是 $F_M(z) = F_X(z) F_Y(z)$
- 2.求 $N = \min(X, Y)$ 分布：
- 对 $\forall z \in R$

$$F_N(z) = P(N \le z) = 1 - P(N > z)$$

$$= 1 - P(X > z, Y > z)$$

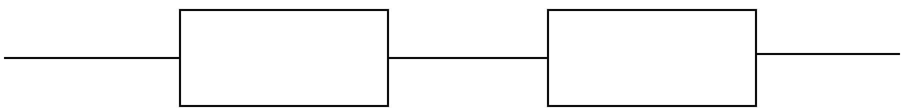
$$= 1 - P(X > z)P(Y > z)$$

$$= 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]$$

- 关于M．N分布推广到n个r·v情形。
- 例4设电子仪器由两个互相独立的同类电子管装置L_1，L_2组成，组成方式有两种：(a) L_1与L_2串联；(b) L_1 与L_2并联，已知L_1,L_2寿命分别为X，Y，其d·f分别为：

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}, x>0\\ 0 \quad\quad\quad, x\le 0\end{cases} \quad F_Y(Y)=\begin{cases}1-e^{-\beta y}, y>0\\ 0 \quad\quad\quad, y\le 0\end{cases}$$

- 其中 $\alpha,\beta>0$ 且 $\alpha\neq\beta$
- 求在(a)(b)情况下，仪器寿命Z的pdf

-  (a)
- (a) $Z=\min(X,Y)$ $r\cdot vX,Y$ 独立

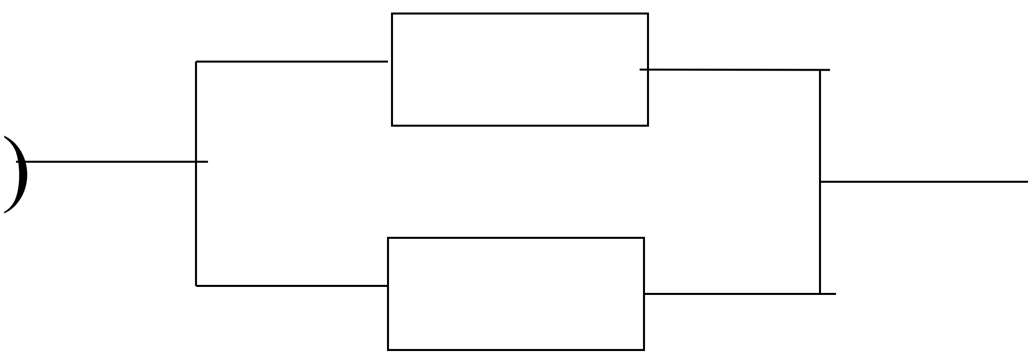
$$\forall z\in R$$

$$F_Z(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

- 从而 $$=\begin{cases}1-e^{-(\alpha+\beta)Z}, Z>0\\ 0 \qquad\qquad Z\le 0\end{cases}$$
-

$$P_Z(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)Z}, Z>0\\ 0 \qquad\qquad Z\le 0\end{cases}$$

- (b)



- (b) $Z = \max(X, Y)$, rvX, Y独立

$\forall z \in R$

$$F_Z(z) = F_X(z)F_Y(z)$$

$$= \begin{cases} (1-e^{-\alpha z})(1-e^{-\beta z}), Z > 0 \\ 0 \qquad\qquad , Z \le 0 \end{cases}$$

- 从而

$$P_z(Z) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha z} + \beta e^{-\beta z} - (\alpha + \beta)e^{-(\alpha+\beta)}, Z > 0 \\ 0 \qquad\qquad , Z \le 0 \end{cases}$$

- §4.7条件分布
- 离散场合：条件分布列；
- 连续场合：条件概率密度。

例5．设 $r\cdot v(X,Y)\,p\cdot d\cdot f$

：

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$ 求 $f_X(x), f_Y(y)$

，求

$$f_{X|Y}(x|y), f_{Y|X}(y|x)$$

- 例6.某袋中有5件产品，其中3件正品，2件次品，从中任取两件，令X与Y表示第一次和第二次取到次品的个数，求
- （1）(X,Y)的分布列
- （2）已知（$X=0)$条件下，Y的条件分布列；
- (3)已知（$Y=1)$条件下，X的条件分布列。
- 例6”习题37

- 例7 设随机变量的

X与Y相互独立，X的概率分布：$P(X=i)=\frac{1}{3}(i=-1,0,1)$，$Y$的

- 概率密度 $f_Y(y)=\begin{cases}1, 0\le y\le 1,\\ 0, 其他\end{cases}$ $Z=X+Y.$

I) 求 $P(Z\le \frac{1}{2}\mid X=0)$;

II) 求 Z的概率密度 $f_Z(z)$.

- 习题
- 1，一个袋子中装有四个球，它们上面分别标有数字1，2，2，3，今从袋中任取一球后不放回，再从袋中任取一球，以X,Y分别表示第一次，第二次取出的球上的标号，求(X,Y)的联合分布列。
- 解：X和Y的可能值均为1，2，3，由

$$P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j\mid X=i)$$

$$i,j=1,2,3$$

- 得(X,Y)的联合分布列为

X \ Y	1	2	3
1	0	1/6	1/12
2	1/6	1/6	1/6
3	1/12	1/6	0

$$P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1\mid X=1)=\frac{1}{4}\times 0=0$$

$$P(X=1,Y=2)=P(X=1)P(Y=2\mid X=1)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$$

$$P(X=1,Y=3)=P(X=1)P(Y=3\mid X=1)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$$

$$P(X=2,Y=1)=P(X=2)P(Y=1\mid X=2)=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$$P(X=2,Y=2)=P(X=2)P(Y=2\mid X=2)=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$$P(X=2,Y=3)=P(X=2)P(Y=3\mid X=2)=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$$P(X=3,Y=1)=P(X=3)P(Y=1\mid X=3)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$$

$$P(X=3,Y=2)=P(X=3)P(Y=2\mid X=3)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$$

$$P(X=3,Y=3)=P(X=3)P(Y=3\mid X=3)=\frac{1}{4}\times 0=0$$

- 2．将一硬币连掷三次，以X表示在三次中出现正面的次数，以Y表示三次中出现正面次数与出现反面次数之差的绝对值，试写出（X，Y）的联合分布列及边缘分布列。

- 解: X的可能值为0，1，2，3，当X取0或3时，Y取3，当X取1或2时Y取1，即Y的

- 可能值为1，3。于是（X，Y）的联合分布列和边缘分布列如下：

Y \ X	0	1	2	3	$P_{\cdot j}$
1	0	3/8	3/8	0	6/8
3	1/8	0	0	1/8	2/8
$P_{i\cdot}$	1/8	3/8	3/8	1/8	1

$$P\left(X=0,Y=1\right)=0$$

$$P\left(X=0,Y=3\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

$$P\left(X=1,Y=1\right)=C_3^1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$$

$$P\left(X=1,Y=3\right)=0$$

$$P\left(X=2,Y=1\right)=C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

$$P(X = 2, Y = 3) = 0$$

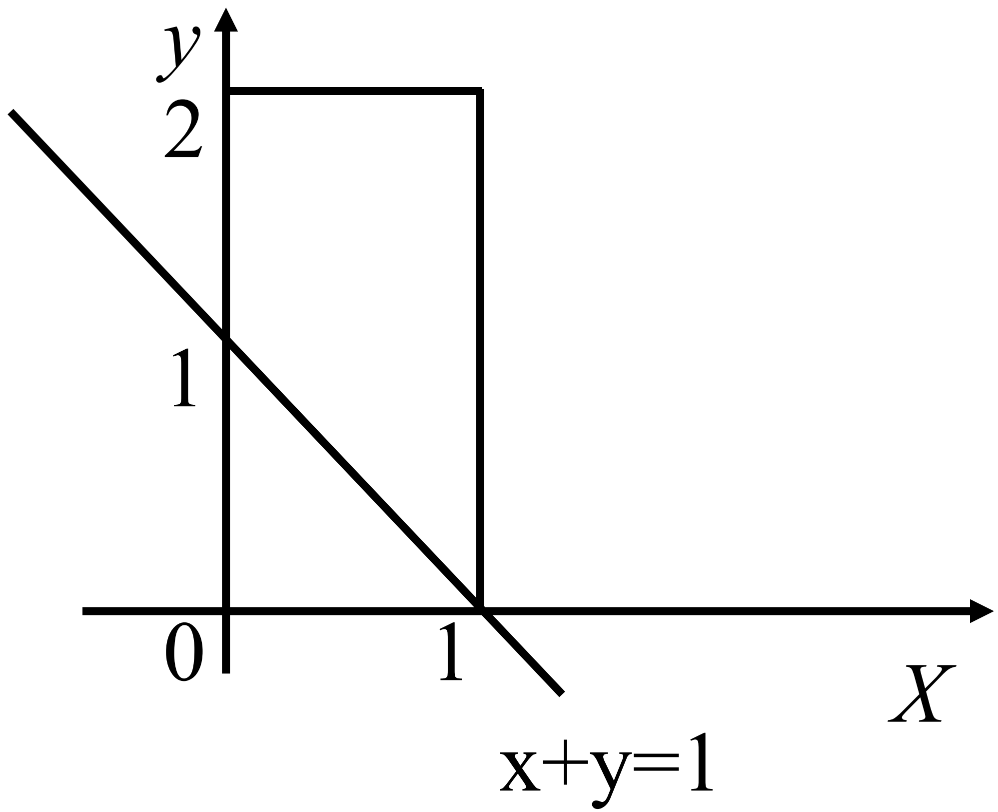
$$P(X = 3, Y = 1) = 0$$

$$P(X = 3, Y = 3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

3 设(X,Y)的概率密度为

$$p(X,Y)=\begin{cases} x^2+\dfrac{xy}{3} & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求$P(X+Y\ge 1)$


y
2
1
0
1
X
x+y=1

解：

$$P(X+Y\geq 1)$$

$$=\iint_{x+y\geq 1} p(x,y)dxdy \int_0^1\int_{1-x}^2\left(x^2+\frac{xy}{3}\right)dxdy$$

4 设(X,Y)的概率密度为

$$P(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)} & x\geq 0, y\geq 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

问 X 与 Y 是否独立？

解：关于 X 的边缘密度为

$$P_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx=\begin{cases} e^{-y}, & y\geq 0 \\ 0, & y<0 \end{cases}$$

$$P_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}P(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_0^{+\infty}e^{-(x+y)}dy, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}e^{-x}\cdot\int_0^{+\infty}e^{-y}dy & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}e^{-x} & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

可见 $\quad P(x,y)=P_X(x)\cdot P_Y(y)$

5．设(X,Y)的概率密度为

$$P(x,y)=\begin{cases} 8xy, & 0\le x<y<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

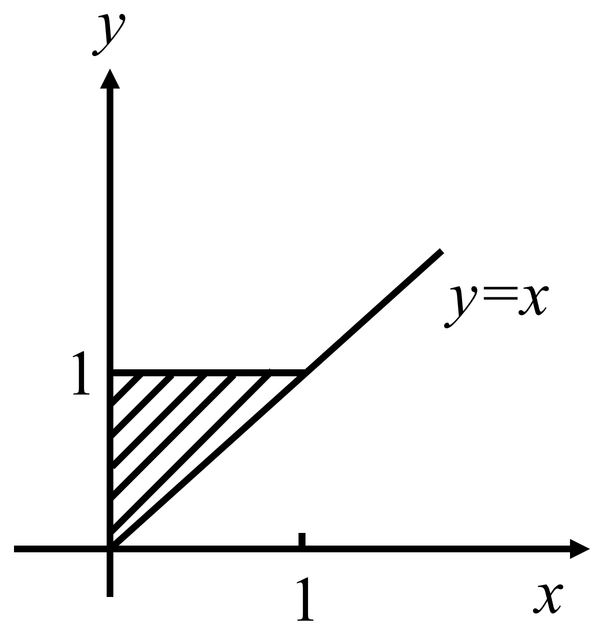
问 X，Y 是否独立？

解：关于 X 的边缘密度为

$$P_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_x^1 8xydy, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}4xy^2\Big|_x^1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}4x\left(1-x^2\right), & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



关于 Y 的边缘密度为

$$P_Y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}\int_0^y 8xydx & 0<y<1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

$$=\begin{cases}4y^3, 0<y<1\\ 0, \quad 其它\end{cases}$$

因为$P(x,y)=P_X(x),P_Y(y)$，所以 X，Y 不独立。

5 如果(X,Y)的联合分布列为

Y \ X	1	2	3
1	1/6	1/9	1/18
2	1/3	α	β

问（1）α与β满足什么条件？

（2）若 X 与 Y 相互独立，则 α 与β各等于多少？

解：（1）由联合分布列的性质，α与β应满足条件： $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ 且

$$\alpha + \beta = 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

（2）若 X，Y 相互独立，则

$$P(X = i, Y = j) = P(X = i) P(Y = j)$$

i=1,2,3　　j=1,2

于是

$$\begin{aligned}\alpha &= P(X=2, Y=2)\\ &= P(X=2)P(Y=2)\\ &= \left(\frac{1}{9}+\alpha\right)\left(\frac{1}{3}+\alpha+\beta\right)\\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{9}+\alpha\right),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\beta &= P(X=3, Y=2) \\
&= P(X=3)P(Y=2) \\
&= \left(\frac{1}{18}+\beta\right)\left(\frac{1}{3}+\alpha+\beta\right) \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{18}+\beta\right),
\end{aligned}
$$

$$\beta = \frac{1}{9} \qquad \alpha = \frac{2}{9}$$

X \ Y	1	2	3	$P_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β	$\alpha+\beta+\frac{1}{3}$
$P_{\cdot j}$	$\frac{1}{2}$	$\alpha+\frac{1}{9}$	$\beta+\frac{1}{18}$	1

$$\alpha + \beta = \frac{1}{3}$$

$$\alpha = P_{22} = P_{2\cdot} P_{\cdot 2}$$

$$= \left(\alpha + \beta + \frac{1}{3} \right) \left(\alpha + \frac{1}{9} \right)$$

$$\beta = \left(\alpha + \beta + \frac{1}{3} \right) \left(\beta + \frac{1}{18} \right)$$

- 6 设X,Y相互独立，其概率密度分别为

$$P_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$P_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

- 解 由卷积公式，$X+Y$的概率密度为

$$P_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}P_X(x)P_Y(z-x)dx$$

其中

$$P_X(x)P_Y(z-x)$$

$$=\begin{cases} e^{-(z-x)}, & 0\le x\le 1, z-x>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

不等式$0\le x\le 1, z-x>0$确定了平面区域D（如图，于是当$z\le 0$时，$P_Z(z)$=0，当0<z<1 时

$$P_Z(z)=\int_0^z e^{-(z-x)}dx=e^{-z}\cdot e^x\,\big|_0^z=1-e^{-z}$$

当 z>1 时

$$P_Z(z)=\int_0^1 e^{-(z-x)}dx=e^{-z}\cdot e^x\,\big|_0^1=e^{-z}(e-1)$$

- 综上所述$X+Y$的概率密度为

$$P_Z(z)=\begin{cases}0 & z\le 0\\ 1-e^{-z} & 0<z\le 1\\ e^{-z}(e-1) & 1<z\end{cases}$$

- **补充4个方面的例子**
- 例1离散与连续性随机变数的独立和；E32
- 连续性随机变量与离散随机变数的独立积；G2009
- 利用连续型随机变量定义离散型随机变量；
- E(5)39
- 例2连续性随机变量与退化随机变数的极大极小分布；E34
- 例3 连续型随机变量之差的绝对值和连续性随机变量之乘积的概率分布；E30,30”
- 例4非独立场合下的和函数以及极大极小分布例子。E20, E31，E33, G2011(1), G2011(2)

- 第四章 多维随机变量及其分布总结

- （1）多维随机向量及其分布，边缘分布
- （2）离散型随机向量及其分布；
- （3）连续型随机向量及其分布；
- （4）独立性概念；
- （5）多维随机向量函数分布；
- （6）条件分布。