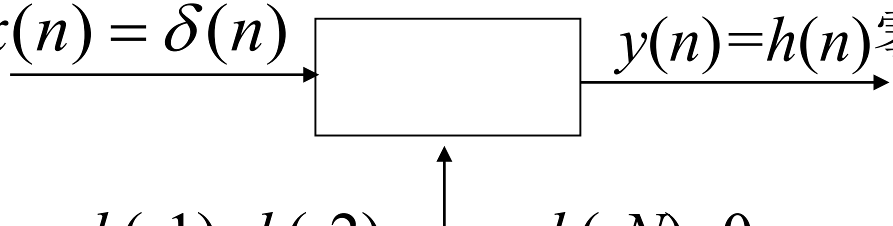
§ 2.5单位样值响应,卷积和反卷积

一.单位样值响应

1.定义

$x(n)=\delta(n)$ $y(n)=h(n)$零状态响应



$h(-1)=h(-2)\ldots\ldots=h(-N)=0$

$y(-1)=y(-2)\ldots\ldots=y(-N)=0$

形式:齐次解形式, $n<0$时$h(n)=0$(因果系统)

§ 2.5单位样值响应,卷积和反卷积

2.迭代法

例1:$y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)=x(n)$ 求$h(n)$

解:

$h(0)-\frac{1}{2}h(-1)=\delta(0)$ 得$h(0)$=1

$h(1)=\frac{1}{2}h(0)+\delta(1)=\frac{1}{2}$

$h(n)=(\frac{1}{2})^n$ $(n>0)$

$h(-1)=0$

$h(-2)=0$

$\vdots$

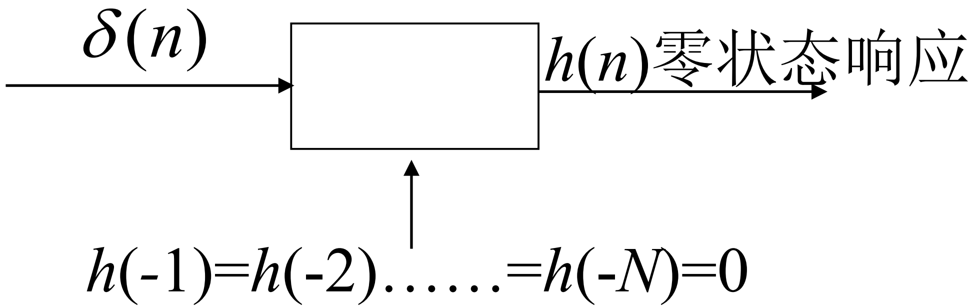
$h(-\infty)=0$

故 $h(n)=(\frac{1}{2})^n u(n)$

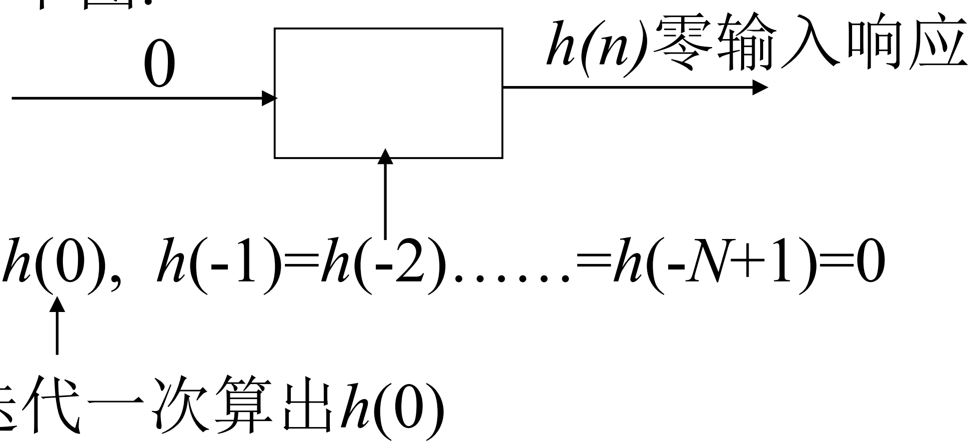
§ 2.5单位样值响应,卷积和反卷积

3.零状态响应转零输入响应法

1.定义



等价于下图:



§ 2.5单位样值响应,卷积和反卷积

例2: 第二类型 [$x(n)=\delta(n)$,右端只有项$x(n)$]

$$y(n)-3y(n-1)+3y(n-2)-y(n-3)=x(n)$$

求$h(n)$

解: (1)特征根: $\alpha^3-3\alpha^2+3\alpha-2=0$,即 $(\alpha-1)^3=0$ 所以 $\alpha=1$ (三重)

(2)齐次解形式$h(n)=C_1n^2+C_2n+C_3$

(3)初始条件 $h(-1)=h(-2)=h(-3)=0$

得出$h(0)=1, h(-1)=h(-2)=0$

所以 $\begin{cases} C_3=1 \\ C_1-C_2+C_3=0 \\ 4C_1-2C_2+C_3=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} C_3=1 \\ C_1=\dfrac{1}{2} \\ C_2=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

(4) $h(n)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}(n^2+3n+2), n\geq 0 \\ 0 \qquad n<0 \end{cases}$

§ 2.5单位样值响应,卷积和反卷积

例3: 第五类型($x(n)=\delta(n)$,方程右端含有$x(n)$,$x(n-k)$等多项)

求解方法:先求右端只含$x(n)$ 一项的单位样值响应，再利用线性时不变特性写出完整的单位样值响应.

即: $a_0y(n)+a_1y(n-1)+\cdots\cdots+a_{N-1}y(n-N+1)+a_Ny(n-N)$
$=b_0x(n)+b_1x(n-1)+\cdots\cdots+b_{M-1}x(n-M+1)+b_Mx(n-M)$

先求 $a_0y(n)+a_1y(n-1)+\cdots\cdots+a_{N-1}y(n-N+1)+a_Ny(n-N)=x(n)$ 的 $h_1(n)$ 则

$h(n)=b_0h_1(n)+b_1h_1(n-1)+\cdots\cdots+b_{M-1}h_1(n-M+1)+b_Mh_1(n-M)$

$$y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=x(n)-3x(n-2)$$

§2.5单位样值响应,卷积和反卷积

解: (1)齐次解形式 $C_1 \bullet 2^n + C_2 \bullet 3^n$

(2)若右端作用的只为$x(n)$ 则$h_1(n)$由$h_1(0)=1, h_1(-1)=0$求出

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 0 = \frac{1}{3}C_1 + \frac{1}{2}C_2 \end{cases} \quad 得 \begin{cases} C_1 = 3 \\ C_2 = -2 \end{cases}$$

故$h_1(n) = \begin{cases} 3^{n+1} - 2^{n+1} & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} = (3^{n+1} - 2^{n+1})u(n)$

(3)只考虑$-3x(n-2)$项

$$h_2(n) = -3h_1(n-2) = -3(3^{n-1} - 2^{n-1})u(n-2)$$

(4)整体

$$h(n) = h_1(n) + h_2(n) = (3^{n+1} - 2^{n+1})u(n) - 3(3^{n-1} - 2^{n-1})u(n-2)$$

§ 2.5单位样值响应,卷积和反卷积

4.因果系统充要条件

$$h(n)=0,(n<0) \Longleftrightarrow h(n)=h(n)u(n)$$

方程特点:$y(n)$由$x(n)$及$x(n-1),x(n-2)$, 决定

离散时间系统应用不局限于因果系统:原因是可以先存储再处理.

如:中值滤波器

信号	3	5	7	1	2	8	5	3	6	4	2
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
处理结果	3	5	5	2	2	5	5	5	5	4	2

§ 2.5单位样值响应,卷积和反卷积

5. 稳定系统充要条件

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| \le M \quad \text{即} h(n)\text{绝对可和}$$

6.稳定因果充要条件

$$\begin{cases} h(n) = h(n)u(n) \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| \le M \end{cases}$$

§2.5单位样值响应,卷积和反卷积

例4:

$h(n)=\delta(n-5)$	因果　稳定
$2u(n)$	因果　不稳定
$2^n u(n)$	因果　不稳定
$2^n[u(n)-u(n-5)]$	因果　稳定
$0.5^n u(-n)$	非因果　不稳定
$\frac{1}{n!}u(n)$	因果　稳定

§ 2.5单位样值响应,卷积和反卷积

7.单位样值响应与单位阶跃响应$g(n)$应关系

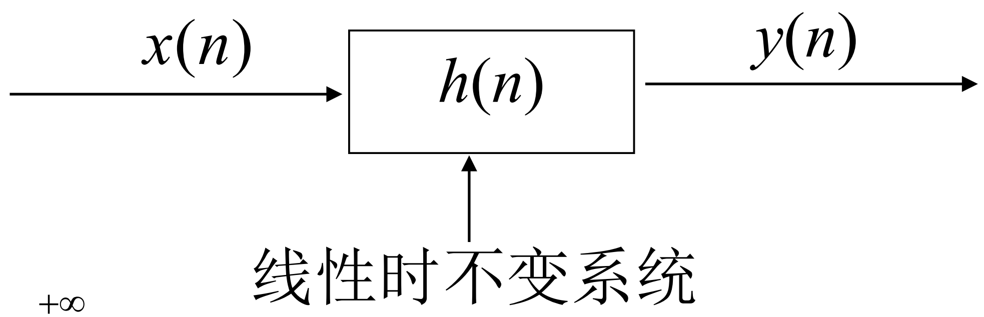
$$\delta(n)=u(n)-u(n-1)\Rightarrow h(n)=\nabla g(n)=g(n)-g(n-1)$$

$$u(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k)\Rightarrow g(n)=\sum_{k=0}^{\infty}h(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{n}h(k)$$

§ 2.5单位样值响应,卷积和反卷积

二. 卷积(卷积和)

1.卷积和定义



$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)\delta(n-m) \qquad \delta(n)\longrightarrow h(n)$$

$$\Rightarrow \delta(n-m)\longrightarrow h(n-m)\Rightarrow x(m)\delta(n-m)\longrightarrow x(m)h(n-m)$$

$$\Rightarrow x(n)\longrightarrow y(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)h(n-m)=x(n)*h(n)$$

$$x_1(n)*x_2(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x_1(m)x_2(n-m)$$

§ 2.5单位样值响应,卷积和反卷积

2.卷积和的性质

① $x(n)*\delta(n)=x(n)$

② $x_1(n)*x_2(n)=x_2(n)*x_1(n)$

③若 $x_1(n)*x_2(n)$, $x_2(n)*x_3(n)$, $x_1(n)*x_3(n)$ 均存在,则:

$$[x_1(n)*x_2(n)]*x_3(n)=x_1(n)*[x_2(n)*x_3(n)]$$

$$x_1(n)*[x_2(n)+x_3(n)]=x_1(n)*x_2(n)+x_1(n)*x_3(n)$$

④ $x_1(n)=x_1(n)u(n)$, $x_2(n)=x_2(n)u(n)$,

$$\Longrightarrow\ x_1(n)*x_2(n)=x_3(n)=x_3(n)u(n)$$

§ 2.5单位样值响应,卷积和反卷积

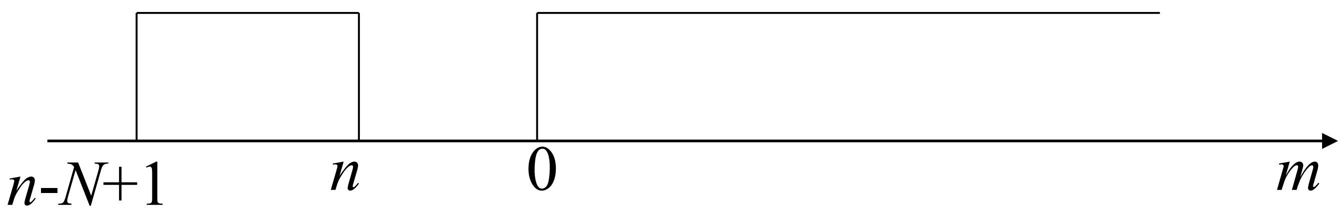
3. 卷积和的求法

① 直接法

② 对位相乘求和法(适用于两个有限序列)

§ 2.5单位样值响应,卷积和反卷积

例5: $h(n)=a^{n}u(n)$, $x(n)=u(n)-u(n-N)$



$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}h(m)x(n-m)=\begin{cases}0 & n<0\\ \displaystyle\sum_{m=0}^{n}a^{m} & 0\le n\le N-1\\ \displaystyle\sum_{m=n-N+1}^{n}a^{m} & n\ge N\end{cases}=\begin{cases}0 & n<0\\ \dfrac{1-a^{m}}{1-a} & 0\le n\le N-1\\ a^{n-N+1}\dfrac{1-a^{N}}{1-a} & n\ge N\end{cases}$$

§ 2.5单位样值响应,卷积和反卷积

例6: $x_1(n)=\{2,\underset{\uparrow}{1},4,1\}$, $x_2(n)=\{\underset{\uparrow}{3},1,5\}$ 求 $x_3(n)=x_1(n)*x_2(n)$

解:

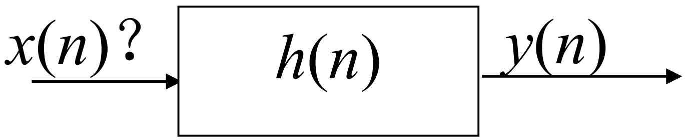
$$
\begin{array}{cccccc}
 & & 2 & 1 & 4 & 1 \\
 & & & 3 & 1 & 5 \\
\hline
 & & 10 & 5 & 20 & 5 \\
 & 2 & 1 & 4 & 1 & \\
6 & 3 & 12 & 3 & & \\
\hline
6 & \underset{\uparrow}{5} & 23 & 12 & 21 & 5
\end{array}
$$

两个有限长序列$x_1(n)$与$x_2(n)$的长度分别为L_1和L_2，左端起始位置分别为k_1和k_2，则两序列卷积后的序列长度和左端起始位置分别为L_1+L_2-1, k_1+k_2

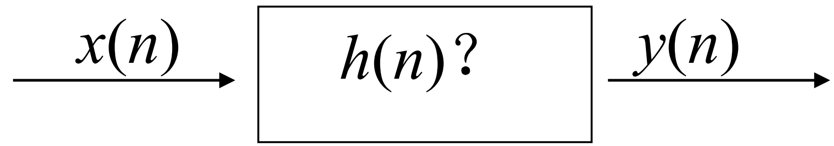
§2.5单位样值响应,卷积和反卷积

三. 反卷积

1.两种反卷积



信号检测



系统辨识

2.求反卷积的一般表达式

$h(n)=h(n)u(n)$, $x(n)=x(n)u(n)$

$$y(n)=\sum_{m=0}^{n}x(m)h(n-m)$$

§ 2.5单位样值响应,卷积和反卷积

①信号检测

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ h(1) & h(0) & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ h(n) & h(n-1) & h(n-2) & \cdots & h(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(n) \end{bmatrix}$$

$$x(0) = y(0) / h(0)$$

$$x(1) = [y(1) - x(0)h(1)] / h(0)$$

$$x(2) = [y(2) - x(0)h(2) - x(1)h(1)] / h(0)$$

$$\cdots\cdots$$

$$x(n) = [y(n) - \sum_{m=0}^{n-1} x(m)h(n-m)] / h(0)$$

§ 2.5单位样值响应,卷积和反卷积

② 系统辨识

$$y(n)=\sum_{m=0}^{n}h(m)x(n-m)$$

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ x(1) & x(0) & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ x(n) & x(n-1) & x(n-2) & \cdots & x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(n) \end{bmatrix}$$

$$h(0)=y(0)/x(0)$$

$$h(1)=[y(1)-h(0)x(1)]/x(0)$$

$$h(2)=[y(2)-h(0)x(2)-h(1)x(1)]/x(0)$$

$$\cdots\cdots$$

$$h(n)=[y(n)-\sum_{m=0}^{n-1}h(m)x(n-m)]/x(0)$$

§ 2.5单位样值响应,卷积和反卷积

例7: $x(n)=\delta(n)+\frac{1}{2}\delta(n-1)$, $y(n)=(\frac{1}{2})^n u(n)$,求$h(n)$

解: $h(0)=y(0)/x(0)=1$

$$h(1)=[y(1)-h(0)x(1)]/x(0)=(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})/1=0$$

$$h(2)=[y(2)-h(0)x(2)-h(1)x(1)]/x(0)=\frac{1}{4}$$

$$h(3)=0$$

$$h(4)=\frac{1}{16}$$

$$h(n)=\begin{cases}0 & n=1,3,5,\cdots\cdots \\ (\frac{1}{2})^n & n=0,2,4,6,\cdots\cdots\end{cases}$$