哈工大　2011 年　秋季学期

概率论与数理统计 试题

一、填空题（每小题 3 分，共 5 小题，满分 15 分）

1. 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $1/9$，A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，则 $P(A)=$________.

2. 设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}1/2, & 0<x<1, \\ 1/4, & 1<x<3, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 则 $Y=1-2X$ 的概率密度

$f_Y(y)=$______________.

3. 设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立，且 X_1 服从区间 $(0,6)$ 上的均匀分布，X_2 服从正态分布 $N(0,4)$，X_3 服从参数为 3 的泊松分布，则 $Y=X_1-2X_2+3X_3$ 的方差为________.

4. 若用机器装罐头，已知罐头重量 $X\sim N(\mu,0.02^2)$，则随机抽取 25 个进行测量，得样本均值 $\bar{x}=1.05\text{kg}$，则总体期望 μ 的置信水平为 95% 的置信区间为____________.

5. 设二维随机变量 (X,Y) 服从区域 $G=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$ 上的均匀分布，令 $Z=\min(X,Y)$，则 $P(Z\le 1/2)=$________.

二、选择题（每小题 3 分，共 5 小题，满分 15 分）

（每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项的字母填在题后的括号内）

1. 已知二维随机变量 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)$，　而 $F_X(x),F_Y(y)$ 分别为 (X,Y) 关于 X 和 Y 的边缘分布函数，则 $P(X>x_0,Y>y_0)$ 可表示为

（A）$F(x_0,y_0)$.　　（B）$1-F(x_0,y_0)$.

（C）$1-F_X(x_0)-F_Y(y_0)+F(x_0,y_0)$.　　（D）$[1-F_X(x_0)][1-F_Y(y_0)]$.　【　　】

2. 设总体 X 服从参数为 λ 的指数分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则

（A）$E\overline{X}=\lambda,\ D\overline{X}=\dfrac{\lambda}{n}$.　　（B）$E\overline{X}=\dfrac{1}{\lambda}$，$D\overline{X}=\dfrac{1}{n\lambda^2}$.

（C）$E\overline{X}=\dfrac{\lambda}{n},\ D\overline{X}=\dfrac{\lambda}{n^2}$.　　（D）$E\overline{X}=\lambda,\ D\overline{X}=\dfrac{1}{n\lambda}$.　【　　】

3. 下列函数中能作为分布函数的是

（A） $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 1/3, & -1\le x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$　　（B） $F(x)=\begin{cases}0\ , & x<0,\\ \sin x, & 0\le x<\pi,\\ 1\ , & x\ge\pi.\end{cases}$

（C） $F(x)=\begin{cases}0\ , & x<0,\\ (x+2)/5, & 0\le x<2,\\ 1\ , & x\ge 2.\end{cases}$　　（D） $F(x)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2\pi}\arctan x$.　【　　】

4. 设二维随机变量 (X,Y) 服从区域 $D=\{(x,y)\mid x+y\ge 1, 0<x<1, 0<y<1\}$ 上的均匀分布，则根据切比晓夫不等式有 $P(|X+Y-4/3|\ge 2)\le$

（A） $\dfrac{1}{4}$.　（B） $\dfrac{1}{36}$.　（C） $\dfrac{1}{48}$.　（D） $\dfrac{1}{72}$.　【　　】

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本， $\bar{X}$ 为样本均值，则下列结论正确的是

（A） $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1)$.　（B） $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1)$.

（C） $\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1)$.　（D） $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n)$.　【　　】

三、（8 分）设水杯成箱出售，每箱 12 个，每箱中含 0 个，1 个，2 个残次品的概率分别为 0.7，0.19，0.11，某人欲购一箱，售货员随机取一箱，然后再从中任取 3 只查看，若无残次品，则购买此箱；否则，拒绝购买。求（1）此人购买一箱的概率；（2）在此人购买一箱的条件下，确无残次品的概率。

四、（8 分）设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\ 0<y<2(1-x),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

求 $Z=X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

五、（8 分）设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}x\mathrm{e}^{-y}, & 0<x<y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求（1） $Z=X+Y$ 的概率密度；（2） $N=\min(X,Y)$ 的概率密度；(3) EZ 和 EN .

六、（12 分）设总体 X 的分布函数为 $F(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}1-(\alpha/x)^{\beta}, & x>\alpha, \\ 0, & x\le\alpha.\end{cases}$ 其中参数 $\alpha>0$，$\beta>1$，$X_1,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本。

（1）当 $\alpha=1$ 时，求未知参数 β 的矩估计和最大似然估计；

（2）当 $\beta=2$ 时，求未知参数 α 的最大似然估计并讨论它的无偏性。

七、（4 分）设 X 为取正整数值的离散型随机变量，证明：X 是服从参数为 p 的几何分布的充要条件是 X 具有无记忆性，即 $P(X=k+n \mid X>k)$ 与 k 无关（$k,\ n$ 为任意正整数）。

2011年概率期末答案

一、填空题：（15分）

1. $\frac{2}{3}$ **2.** （3）$\begin{cases}\frac{1}{4}, & -1<y<1\\ \frac{1}{8}, & -5<y<-1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ **3.** $DY=46$. **4.** $(1.042,\ 1.058)$. **5.** $\frac{5}{8}$

二、选择题：（15分）

1C 2B 3C 4D 5A

三、**解**：（1）设$A=$ "此人买下一箱"，再设A_i ="取到了有i只残次品箱子"，$i=1,2,3$，

则由全概率公式有

$$P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(A_i)P(A|A_i)=0.7\times 1+0.19\times\frac{C_{11}^3}{C_{12}^3}+0.11\times\frac{C_{10}^3}{C_{12}^3}=0.9275$$ 5分

（2）$P(A_0|A)=\dfrac{P(A_0)P(A|A_0)}{P(A)}=\dfrac{0.7\times 1}{0.9275}\approx 0.776$ 3分

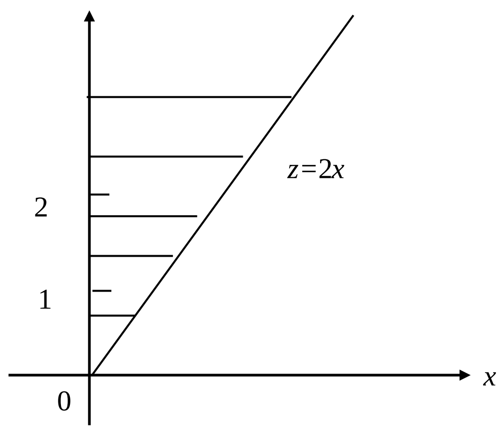
四、**解**：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,x-z)dx$ 2分

若 $f(x,x-z)>0$ 必有$\begin{cases}0<x<1\\ 0<x-z<2-2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<x<1\\ z<x\\ z>3x-2\end{cases}$ 3分

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{z+2}{3}, & -2<z<0\\ \frac{2(1-z)}{3}, & 0\le z<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

3分

五、**解**：1．（1）（1）Z pdf 为：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$



使 $f(x,z-x)$ 不为 0 区域为：$0<x<z-x \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ z<2x \end{cases}$

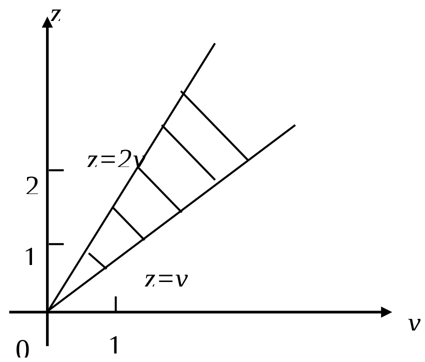
当 $z\le 0$ 时 $f_Z(z)=0$

当 $z>0$ 时 $f_Z(z)=\int_0^{z/2} xe^{-(z-x)}dx = e^{-z}\int_0^{z/2} xe^{x}dx$

$$=e^{-z}\left[xe^{x}\Big|_0^{z/2}-e^{x}\Big|_0^{z/2}\right]=e^{-z}\left[\frac{z}{2}\cdot e^{+\frac{z}{2}}+1-e^{\frac{z}{2}}\right]=e^{-z}+\frac{z}{2}e^{-\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}}$$

$$\therefore f_Z(z)=\begin{cases} e^{-z}+(\frac{z}{2}-1)e^{-\frac{z}{2}}, & z>0 \\ 0, & z\le 0 \end{cases}$$

or 另解：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy$　　不为 0 区域：$0<z-y<y$ $\begin{cases} z>y \\ z<2y \end{cases}$



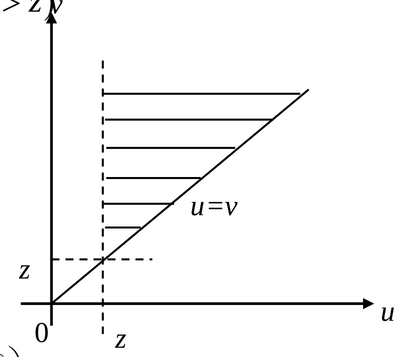
$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ (\frac{z}{2}-1)e^{-\frac{z}{2}}+e^{-z}, & z>0\end{cases}$$ 3 分

（2）令 $N之d\cdot f\ \ F_N(z)\quad F_N(z)=P(\min(X,Y)\le z)$

当 $z\le 0$时，$F_N(z)=0$

当 $z>0$时

$F_N(z)=1-P(\min(X,Y)>z)=1-P(X>z,Y>z)$



$=1-P(x,y)\in D \quad D=\left\{(u,v)\middle|\begin{matrix}u>z,v>z\\ 0<u<v\end{matrix}\right\}$

$=1-\int_z^{+\infty}du\int_u^{+\infty}ue^{-V}dv$

$=1-\int_z^{+\infty}u\left(-e^{-V}\Big|_u^{+\infty}\right)du=1-\int_z^{+\infty}ue^{-u}du$

$=1-\left(-ue^{-u}\Big|_z^{+\infty}+\int_z^{+\infty}e^{-u}du\right)=1-\left(ze^{-z}-e^{-u}\Big|_u^{\infty}\right)$

$=1-(z+1)e^{-z}$

$\therefore\ f_N(z)=F_N^{'}(z)=\begin{cases}ze^{-z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$

$$f_N(z)=\begin{cases}0 &, z\le 0\\ ze^{-z} &, z>0\end{cases}$$ 3 分

（3） $f_X(x)=\begin{cases}0 &, x\le 0\\ xe^{-x}, & x>0\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}0 &, y\le 0\\ \frac{1}{2}y^2e^{-y}, & y>0\end{cases}$

$EZ=E(X+Y)=EX+EY=2+\frac{3}{2}\times 2=5$，$EN=\int_0^{+\infty}z\cdot ze^{-z}dz=2$

2 分

六、解: 设 $r\cdot v$ 的 $d\cdot f$ 为：$F(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{\alpha}{x}\right)^{\beta}, x>\alpha, & x>\alpha \\ 0, & x\le\alpha\end{cases}$ 其中参数 $\alpha>0,\beta>1$，

设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本。（Ⅰ）当 $\alpha=1$ 时，求未参 β 矩估计和极大似然估计；（Ⅱ）当 $\beta=2$ 时，求未参 α 的最大似然估计

解：（Ⅰ）（1） $\alpha=1$ 时 $F(x)=\begin{cases}1-x^{-\beta-1}, & x>1 \\ 0, & x\le 1\end{cases}$ $\qquad f'(x)=\begin{cases}\beta x^{-\beta-1}, & x>1 \\ 0, & 其它\end{cases}$

$$EX=\left\{\int_1^{+\infty}\beta x^{-\beta}dx=\frac{\beta}{1-\beta}x^{1-\beta}\right|_1^{+\infty}=\frac{\beta}{\beta-1}$$

$\therefore \beta=EX/EX-1$ 于是 β 矩估计为 $\hat{\beta}=\bar{x}/\bar{x}-1$ 3 分

（2） $\alpha=1$ 时似然函数 $L(x_1,\cdots,x_n;\beta)=\prod\limits_{i=1}^{n} f(x_i;\beta)=\begin{cases}\beta^n(x_1\cdots x_n)^{-(\beta+1)}, & x_i>1 \\ 0, & 其它\end{cases}$

$LnL=nLn\beta-(\beta+1)Lnx_i\cdots x_n$，令 $\dfrac{2LnL}{2\beta}=0=\dfrac{n}{\beta}-\sum\limits_{i=1}^{n}Lnx_i \qquad \beta=\dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Lnx_i}$

$\therefore \beta$ 似然估计为：$\hat{\beta}=n\Big/\sum\limits_{i=1}^{n}Lnx_i$ 3 分

（Ⅱ）当 $\beta=2$ 时 $\qquad F(x,\alpha)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{\alpha}{x}\right)^2, & x>\alpha \\ 0, & x\le\alpha\end{cases}$ ，

$$f(x,\alpha)=F'(x,\alpha)=\begin{cases}\dfrac{2\alpha^2}{x^3}, & x>\alpha \\ 0, & x\le\alpha\end{cases}$$

似然函数：$L(\alpha)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i;\alpha)=\begin{cases}\dfrac{2^n\alpha^{2n}}{(x_i\cdots x_n)^3}, & xi>\alpha \\ 0, & 其它\end{cases}$

$$=\begin{cases}\dfrac{2^n\alpha^{2n}}{(x_i\cdots x_n)^3}, & x_{(n)}\ge\cdots\ge x_{(1)}>\alpha \\ 0, & 其它\end{cases}$$

由定义知：α 的似然估计为 $\hat{\alpha}=x_{(1)}$ 3 分

(3)已知 $\hat{\alpha}=x_{(1)}=Z$ 的分布函数为 $F_Z(z)$

令 $Z=\overset{\wedge}{\alpha}=x_{(1)}$ 之 $d\cdot fF_Z(z)$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=1-P(Z>z)=1-P(\min(X_1,\cdots,X_n)>z)$$

$$=1-P(X_1>z,\cdots,X_n>z)\ \overset{\text{独立同}}{\underset{\text{分布}}{===}}\ 1-P[P(X_i>z)]^n$$

$$=1-[1-F(z)]^n=\begin{cases}0, & z\le\alpha\\ 1-\left(1-(1-(\dfrac{\alpha}{z})^2)\right)^n, & z>\alpha\end{cases}=\begin{cases}0, & z\le\alpha\\ 1-\left(\dfrac{\alpha}{z}\right)^{2n}, & z>\alpha\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}2n\times\alpha^{2n}(\dfrac{1}{z})^{2n+1}, z>\alpha\\ 0, \quad 其它\end{cases}$$

$EZ=\int_\alpha^\infty zf_Z(z)dz=\dfrac{2n}{2n-1}\alpha\ne\alpha, X_{(1)}$不是$\alpha$的无偏估计，但$EZ\to\alpha(n\to\infty)$

$\therefore x_{(1)}$为α的渐进无偏估计。 3 分

七、解：

“$\Rightarrow$” $\because X$ 是服从参数为 p 的几何分布，则对任意正整数k,n有：

$\therefore$

$$P(X=k+n|X>k)=\frac{P(X=k+n,X>k)}{P(X>k)}$$

$$=\frac{P(X=n+k)}{P(X>k)}=\frac{p(1-p)^{n+k-1}}{\sum\limits_{m=k+1}^{\infty}p(1-p)^{m-1}}=\frac{(1-p)^{n+k-1}}{\dfrac{(1-p)^k}{1-(1-p)}}=p(1-p)^{n-1}$$

$$=P(X=n),n=1,2,\cdots$$

与 k 无关。即几何分布具有无记忆性。 2 分

“$\Leftarrow$”对任意正整数 k,n 有：$P(X=k+n|X>k)$ 与 k 无关，

不妨令 $P(X=k+1|X>k)=p$，$q_k=P(X>k),k=0,1,2,\cdots$

易 知 $q_0=1$ ， $p_k=P(X=k)$ ， 所 以 $P(X=k+1|X>k)=\dfrac{p_{k+1}}{q_k}=p$ ，

$p_{k+1}=q_k-q_{k+1}$，于是 $\dfrac{q_{k+1}}{q_k}=1-p=q$，$q_{k+1}=qq_k=\cdots=q^{k+1}q_0=q^{k+1}$

$p_k=q^{k-1}p=P(X=k),k=1,2,3,\cdots$ 2 分