注意：此题目供同学复习课堂内容，和期末考试没有直接关联

习题 1

1.求解递归方程 T(n) = T(5n/6) + n

2.证明或否证明

$$f(n) + o(f(n)) = \theta(f(n))$$

3. 证明：设 k 是任意常数正整数，则 $log^k n = o(n)$

4. 证明：$O(f(x)) + O(g(x)) = O(max(f(x), g(x)))$

5. 求解递归方程 $T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + 1$

6. 对于平面上的两个点 p1=(x1, y1)和 p2=(x2,y2)，如果 x1 $\leq$ x2 且 y1 $\leq$ y2，则 p2 支配 p1，给定平面上的 n 个点，请设计算法求其中没有被任何其他点支配的点。

7. 如果一个数组A[1…n]中某个元素的数量超过其元素数量的一半，称其包含主元素，假设比较两个元素大小的时间不是常数但判定两个元素是否相等的时间是常数，要求对于给定数组A，设计算法判定其是否有主元素，如果有，找到该元素。

(1) 设计时间复杂性为O(nlogn)的算法完成该任务。

(2) 设计时间复杂性为O(n)的算法完成该任务。

8. 证明：在有 n 个数的序列中找出最大的数至少需要 n-1 次比较

9. 设计一个对 7 个元素进行排序的方法，保证其平均比较次数最少，要求证明这个结论

10. a1, a2, …, an 是{1, 2, …, n}的一个随机排列，等可能第位 n!中可能排列中的任意一个，当对列表 a1, a2, . . . , an 排序时，元素 ai 从它当前位置到达排序位置必须一定|ai-i|的距离，求元素必须移动的期望总距离 $E[\Sigma_{i=1}^{n} |a_i - i|]$

11. 设计一个分治算法，在一个 2 维平面上求 n 个点中距离最近的两个点，要求时间复杂性是 o(n^2)，请写出算法伪代码并分析时间复杂性.

12. Hadamard矩阵H_0, H_1, H_2…递归定义如下:

H_0是1×1的矩阵[1];

对于k>0, H_k是$2^k\times2^k$的矩阵$\begin{bmatrix} H_{k-1} & H_{k-1} \\ H_{k-1} & -H_{k-1} \end{bmatrix}$,

设v是一个长度为2^k的列向量，设计一个时间复杂性为O(nlogn)的算法计算矩阵-向量乘法H_kv(设单个数字的加法和乘法都在单位时间内完成)。

注意：此题目供同学复习课堂内容，和期末考试没有直接关联

习题 2

1. T1 和 T2 是两棵有序树，其中每个结点都有一个标签，考虑树上的三种操作，删除一个子树、插入一个子树和更改一个结点的标签，请设计一个算法，求得从 T1 变化到 T2 所需要的最少操作数，要求写出递推方程，程序伪代码并分析时间复杂性。

2. 给定三个字符串 A, B 和 C，设计一个多项式时间动态规划算法，求出它们的最长公共子序列，要求写出递归方程，算法伪代码并分析算法复杂性

3. 考虑字符串变换操作，增加一个字符，删除一个字符以及修改一个字符，设增加字符操作的代价为 i, 删除字符操作代价为 d, 修改字符的代价为 m，给定两个字符串 S1 和 S2，设计一个动态规划算法，求得从 S1 变换到 S2 代价最小的变换序列，要求写出递推方程，程序伪代码并分析算法复杂性。

4. 将一根木棒折成若干份，每折一次的代价是当前这段木棒的长度, 总代价是折这根木棒直到满足要求所需要的所有操作的代价。例如，将一根长度为10的木棒折成四段，长度分别为2, 2, 3, 3，如果先折成长度为2和8的两段，再将长度为8的折成长度为2和6的两段，最后将长度为6的折成长度为3的两段，这些操作的代价是10+8+6=24；如果先折成长度为4和6的两段，在分别将长度为4的折成长度为2的两段、长度为6的折成长度为3的两段，则这些操作的代价是10+4+6=20，比上一种方案更好一些。

该问题的输入是木棒的长度 L 和一些整数 c1,…,cn, 要求将木棒折成长度为 c1, …, cn 的 n 段且操作代价最小，请设计动态规划算法解决该问题。

5. 满足递归式 $F(n)=F(n-1)+F(n-2)$和初始值 $F(0)=F(1)=1$ 的数列称为斐波那契数列。考虑如何计算该数列的第 n 项 $F(n)$。（1）说明根据递归式直接完成计算，将有子问题重复求解；（2）说明该问题具有优化子结构；（3）写出求解 $F(n)$ 的动态规划算法，并分析算法的时间复杂性。

6. 输入是具有 n 个数的向量 x，输出时输入向量的任何连续子向量的最大和，要求写出递归方程、伪代码并分析时间和空间复杂度。

7. 令 $I1, ..., In$ 是 n 个区间，其中任一区间 $Ii=(ai,bi)$，假设这些区间按照 bi 从小到大排序，每一个区间有一个权重 vi.找一个互不相交区间的集合，使得这些区间的权重之和最大，例如 $I1 = (1,2), v1=0.9$; $I2 = (2,3), v2=0.5; I3 = (1,4), v3=4; I4 = (4,5), v4=2$，解是$\{I3, I4\}$。

给出解决问题 P2 的动态规划算法，要求写出递归方程和伪代码，并分析算法时间空间复杂性。

8. 在一个圆形操场的四周摆放着 n 堆石子，现要将石子有次序地合并成一堆。规定每次只能选择相邻的两堆石子合并成新的一堆，并将新一堆石子数记为该次合并的得分。试设计一个动态规划算法，计算出将 n 堆石子合并成一堆的最小得分和最大得分，要求列出递归方程，写出算法的伪代码并分析算法的时间空间复杂性。

9. 给定两个字符串 s1, s2，其上的操作包括增加一个字符、删除一个字符、修改一个字符和交换两个相邻的字符，其中增加和删除一个字符和交换相邻字符的代价均为 1,将字符 a 修改为字符 b 的代价记作 Ca,b，写出一个动态规划算法求出从 s1 变化为 s2 代价最小的变化序列，要求写出递推方程和伪代码并分析时间复杂性。

10. 设有 n 种不同面值的硬币，面值分别为 c1, c2, …., cn 分钱, 求用最少个数硬币来找 K 分钱的策略。要求写出递归方程、伪代码并分析时间和空间复杂度。

11. 给定两个字符串$x=x_1x_2\ldots x_n$和$y=y_1y_2\ldots y_m$, 其长度为k的公共子串定义为：

x[i,…,i+k-1]=y[j, …, j+k-1]

令k_{max}为x和y的最长公共子串，设计时间复杂性为O(mn)的算法求k_{max}。

12. 考虑编辑距离的一种变形，其允许在字符串后无代价地插入无限多个字符，该编辑距离描述为:

ed'(A, B)=min{ed(A, C)|C是B的前缀}, 其中函数ed()是普通的编辑距离函数。根据要求设计算法，要求算法的时间复杂性都是O(|A||B|)

(1) 设计算法，对于给定的字符串A和B，计算ed'(A, B)；

(2) 设计算法，对于给定的字符串A,B和整数k，判定是否B存在某个后缀B’，满足ed’(A, B’)≤k。

13. 我们考虑将数轴上的 n 个点聚成 k 类的问题。
输入：n 个从小到大的不同实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 表示 n 个不同点，一个参数 $k\leq n$.
任务：将 n 个点划分成 k 个不相交的非空集合 $S_1, \ldots, S_k$ 满足$\cup_{i=1}^{k} S_i=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$，$S_i$ 中所有点在 S_{i+1} 中所有点左边，$1\leq i<k$，也就是说对于任意 $x\in S_i$, $z\in S_{i+1}$, $y<z$.
目标：最小化$\sum_{i=1}^{k} cost(S_i)$,其中 cost(S_i)=(max(S_i)-min(S_i))^2. max(S_i)是 S_i 中的最小元素，min(S_i)是 S_i 中的最大元素。
例如，如果 S_i={xj}，cost(S_i)=0，如果 $S_i=\{x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+t}\}$, x_j,$<x_{j+1}<\ldots< x_{j+t}$，那么 cost(S_i)=$(x_{j+t}-x_j)^2$.
设计时间复杂度为 $O(n^2k)$的动态规划算法，找到最优聚类。要求写出伪代码、递归方程并分析算法的时间复杂度。

例如，考虑将 4 个元素的集合{1,5,8,10}聚为两个类，有三种可能:

1. S_1={1}, S_2={5,8,10}，总代价是 $0^2+5^2=25$
2. S_1={1,5}, S_2={8,10}，总代价是 $4^2+2^2=20$
3. S_1={1,5,8}, S_2={10}，总代价是 $7^2+0^2=49$

所以，算法的解是最优解 S_1={1,5}, S_2={8,10}。

14. 输入一个正整数集合 $S=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$和一个正整数 M,设计算法判定是否存在 S 的子集合 S'，使得 S'中整数之和为 M。要求写出算法伪代码。

注意：此题目供同学复习课堂内容，和期末考试没有直接关联

习题 3

1. 设有 n 个物品，第 i 个物品的价值是 vi、重量是 wi, 假设物品可以任意分割，给定一个背包，其能容纳最大重量为 C，求该背包能容纳物品的最大价值。要求写出伪代码并分析算法正确性和复杂性。

2. 有 6 种硬币，面值是 1 分, 2 分, 5 分, 1 角，5 角，1 元，给定一个钱数 n，求出一个硬币组合，要求面值总和为 n 且硬币个数最少，假设每种硬币个数无限。要求写出伪代码并分析算法正确性和时间复杂性。

3. 存放于磁带上文件需要顺序访问。故假设磁带上依次存储了 n 个长度分别是 $L[1],\ldots,L[n]$ 的文件，则访问第 k 个文件的代价为 $\sum_{j=1}^{k} L[j]$。现给定 n 个文件的长度 $L[1],\ldots,L[n]$，并假设每个文件被访问的概率相等，试设计一个算法输出这 n 个文件在磁带上的存储顺序使得平均访问代价最小。。答案要求包含以下内容：（1）证明问题具有贪心选择性；（2）证明问题具有优化子结构；（3）给出算法并分析算法的时间复杂度。

4. 设有 n 个正整数，将它们连接成一排，组成一个最大的多位整数。

例如：n=3 时，3 个整数 13，312，343，连成的最大整数为 34331213。

又如：n=4 时，4 个整数 7，13，4，246，连成的最大整数为 7424613。

输入是 n 个正整数，输出是这 n 个正整数连成的最大多位整数，要求用贪心法求解该问题。答案要求包含以下内容：（1）证明问题具有贪心选择性；（2）证明问题具有优化子结构；（3）写出算法伪代码并分析算法的时间复杂度。

5. 设 x1, x2, …., xn 是实数轴上的 n 个点，若用单位长度的闭区间覆盖这些点，至少需要多少单位长度闭区间？

6. 考虑下述最小生成树算法，初始时，G 中的每个顶点被视为一个单结点的树，不选择任何边，在每一步，为每棵树选择一条最小权的边 e，是的 e 只有一个顶点在 T 中，如果必要的话，出去所选边的备份，当只得到一棵树或者所有边都被选中了，那么终止算法。证明算法的正确性并且求出算法的最大步数。

7. G=(V, E)是一个具有 n 个顶点 m 条边的连通图，且可以假设边的代价为正且各不相同，设，定义 T 的瓶颈边是 T 中代价最大的边，G 的一个生成树 T 是一棵最小瓶颈生成树，如果不存在 G 的生成树 T’是的它具有代价更小的瓶颈边。问:(1)G 的每棵最小瓶颈树一定是 G 的一棵生成树吗？证明或者给出反例;(2) G 的每棵生成树都是 G 的最小瓶颈树吗？证明或者给出反例。

8.　给定 n 个自然数 d1, d2, …, dn, 设计算法，在多项式时间确定是否存在一个无向图 G，使它的结点度数准确地就是 d1, d2, …, dn， 要求 G 中在任意两个结点之间至多有一条边，且不存在一个结点到自身的边。

9. 考虑一种特殊的 0-1 背包问题，有 n 个物品，每个物品价值和重量都相等，背包能容纳的最大重量是 C, 回答下列问题:

若物品的重量(价值)分别是 1, 2, …, 2^n, 证明该 0-1 背包问题可以用贪心法求解并写出该贪心法。

请写出一个物品重量(价值)序列，使得上述贪心法无法得到最优解。

10. 考虑下述“逆贪心”算法，输入是连通有权无向图 G,用邻接表描述

```
ReverseGreedyMST(G):
  sort the edges E of G by weight
  for i ← 1 to |E|
      e ← ith heaviest edge in E
      if G \ e is connected
          remove e from G
```

(1). 该算法的最坏运行时间是多少？在什么情况下发生?

(2). 证明这个算法可以找到 G 的最小生成树。

11. 给定一个城市集合，一些城市之间由高速公路连接，这些城市和城市之间的高速公路构成了一个无向图 G = (V, E)，每条边 e=(u, v)∈E 表示一条城市 u 到 v 的高速公路，e 上的权重 l_e 表示该高速公路的长度。一辆车需要从城市 s 到达城市 t，但该车的油箱存油最多能走 L 公里，每个城市有一个加油站，但是城市之间没有加油站，因此，只有当 $l_e<L$ 的时候，才能走 e 对应的高速公路。回答下列问题:

(1) 设计一个时间复杂性 O(E)的算法,判定是否这辆车能够从城市 s 走到城市 t。

(2) 如果准备买一辆新车，需要知道保证车从城市 s 成功走到城市 t 最少要用多大的油箱，请设计时间复杂性为 O((|V | + |E|) log |V |)的算法解决该问题。

12. 要为将即将到来的哈尔滨世界博览会设计和生产 *n* 个不同的展品，每一个项目首先用 CAD 软件设计，然后送到外面加工厂加工，第 *i* 个展品的设计时间为 d_i，加工时间为 f_i. 加工厂能力很强，可以同时加工 *n* 个展品，所以对于每件展品，只要设计结束就可以立刻开始加工。但是，只有一位设计师，所以需要确定产品设计的顺序，以最快时间完成所有 *n* 件展品的设计和加工。

比如，完成了第一件展品的设计，可以将其交给加工厂，然后立刻开始第二件展品的加工。当完成第二件展品的设计时，可以将其交给加工厂而不需要考虑是否第一件展品已经加工完成。

设计多项式贪心算法求解此问题，分析时间复杂度，并证明其正确性。

注意：此题目供同学复习课堂内容，和期末考试没有直接关联

习题四

1. 设计搜索算法求解最大团问题，输入是一个图，输出是这个图最大的全连通子图

2. 设计搜索算法求解最大独立子集合问题，输入一个图，输入这个图的最大顶点集合，满足该集合中任意两个顶点之间都不存在边

3. 设计搜索算法求解有向图图的强连通分量问题，输入一个图，输出这个图的所有强连通分量

4. 设计搜索算法求解子图匹配问题，输入:图 G 和图 P，输出:图 G 是否包含和 P 同构的子图

5. 设计搜索算法求解 0-1 背包问题，即给定一个容量为 C 的背包和 n 个物品，其中每个物品 i 的重量为 wi, 价格为 vi，要求物品的重量之和小于 C，且价格之和最大

6. 证明 KMP 算法的正确性

7. 扩展 Rabin-karp 算法，设计一个矩阵匹配算法，即输入矩阵 A 和矩阵 B，找到矩阵 A 中和矩阵 B 匹配的子阵。

8. 给定一棵树 T，在每条边上有一个标签，该标签包含一个或多个字符，给定一个模式 P，T 中子路径的标签定义为该路径上所有边上标签依次相连得到的字符串，问题是找到所有从根出发路径的子路径，其标签和 P 匹配。要求运行时间和树中所有标签的字符数与 P 长度之和相等。

9. 给出一个例子，令 Robin-karp 算法的时间复杂度为 O(mn)其中 m 是模式的长度，n 是字符串长度，要说明例子并证明这个时间复杂度。

10. 在某些特殊情况下，可以采用如下广度优先搜索方法来寻找图中两点 u 和 v 间最短路径:从 u 出发进行广度优先搜索，当第一次搜索到 v 时，则将当前 u,v 之间路径输出; 请写出这种方法输出是 u 到 v 之间最短路径的条件，并且用一个例子说明为什么违背了该条件则这种方法不能求出最短路径。

11. 令 T 为字母表∑上长度为 n 的字符串，设计算法，求出字母表∑上最短的非 T 子串的字符串，要求时间复杂度为 O(n).

12. 设计一个求边上有非负权重的 DAG(有向无环图)中最长路径(即该路径中边的权重之和最大)的算法，要求时间复杂性是 O(|V|+|E|)。

13. 有 n 个超市 $g_1, \ldots, g_n$ 正在搞赠送活动，超市 g_i 赠品的价值为 v_i, 从超市 g_i 到 g_j 的交通费用是 d_{ij},从家到超市 g_i 和超市 g_i 到家的交通费分别是 d_{0i} 和 d_{i0}，设每个超市最多去一次且每次最多领取一个赠品，请设计算法确定一条从家里出发最后回到家里的路线，使得获得赠品的价格之和减去交通费用之和最大。

14. 一位历史学家想发现一些历史人物生活的时间。研究对象是 n 个人 $P_1, P_2, \ldots, P_n$。经过研究，发现了 m 个关于这 n 个人相关关联的史实，每一个史实都有下面两种形式之一：

(1) 人物 P_i 在 P_j 出生之前死亡

(2) P_i 和 P_j 生活的时间有交集

因为历史记录并不总是可信的，有可能一些史实是错误的。设计时间复杂度为 $O(n+m)$的算法检测这些史实是否是相容的，也就是说是否对于每个人都可以确定一个出生和去世的时间，使得所有史实都满足。要求写出算法伪代码。

Exercise 1. (12)

（编程）利用树搜索解决八魔方问题，分别使用深度优先搜索、广度优先搜索、爬山法搜索和最佳优先方法搜索策略判定下图所示初始格局能否最终到达目标格局，分别输出四种解法使用的时间

初始格局

2	3	
1	8	5
7	4	6

目标格局

1	2	3
8		4
7	6	5

Sample Output:
可达
Breadth-First: XXms
Depth-First: XXms
Hill Climbing: XXms
Best-First Search: XXms
不可达
Breadth-First: XXms
Depth-First: XXms
Hill Climbing: XXms
Best-First Search: XXms

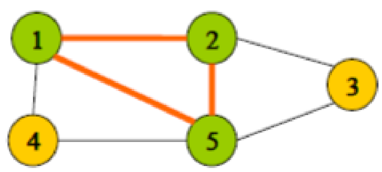
Exercise 2. (8)

八皇后问题是一个以国际象棋为背景的问题：在 8×8 的国际象棋棋盘上放置八个皇后，任何一个皇后都不能直接吃掉其他的皇后，也就是任两个皇后都不能处于同一条横行、纵行或斜线上。
1. 使用深度优先的方法找到八皇后问题所有解，写出伪代码
2. 分析算法复杂度，提出改进方法

Exercise 3. (8)

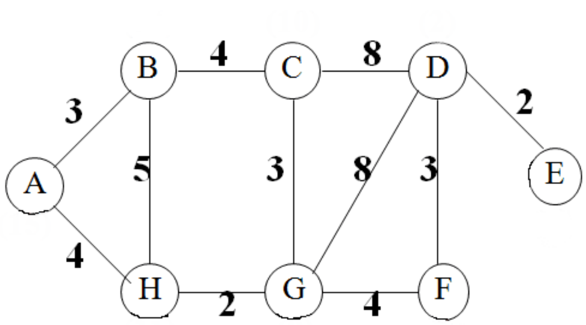
给定无向图 G=(V, E)，其中 V 是非空集合，称为顶点集；
E 是 V 中元素构成的无序二元组的集合，称为边集，无向图中的边均是顶点的无序对，无序对常用圆括号“( )”表示。
团：
如果 $U \subseteq V$，且对任意两个顶点 $u\ v \in U$ 有 $(u, v) \in E$，则称 U 是 G 的完全子图。
G 的完全子图 U 是 G 的团当且仅当 U 不包含在 G 的更大的完全子图中。
G 的最大团是指 G 中所含顶点数最多的团。

独立集:
如果 $U \subseteq V$ 且对任意 $u\ v \in U$ 有 $(u,v) \notin E$，则称 U 是 G 的空子图。
G 的空子图 U 是 G 的独立集当且仅当 U 不包含在 G 的更大的空子图中。
G 的最大独立集是 G 中所含顶点数最多的独立集。
最大独立集与最大团:
对于任一无向图 $G = (V, E)$，其补图 $G' = (V', E')$ 定义为：$V' = V$，且 $(u,v) \in E'$ 当且仅当 $(u,v) \notin E$。
如果 U 是 G 的完全子图，则它也是 G' 的空子图，反之亦然。因此，G 的团与 G' 的独立集之间存在一一对应的关系。特殊地，U 是 G 的最大团当且仅当 U 是 G' 的最大独立集。



1. 使用深度优先的方法找到上图最大团，写出伪代码
2. 在深度遍历算法的基础上给出进一步改进的方法

Exercise 4. (8)
下图中有 A、B、C、D、E、F、G、H 8 个结点（A 为起点、E 为终点）
节点间的连线为相同直线，上面的数字代表线路的移动耗费值
任务：利用 A 星算法计算出移动耗费值最短路线



1. 手工写出 A* 算法找到最短路的过程
2. 写出算法伪代码