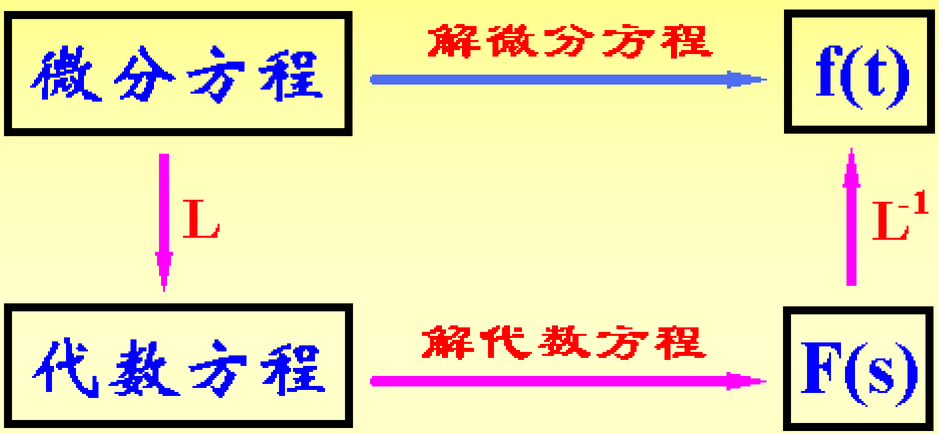
拉普拉斯变换的引入——线性定常微分方程求解

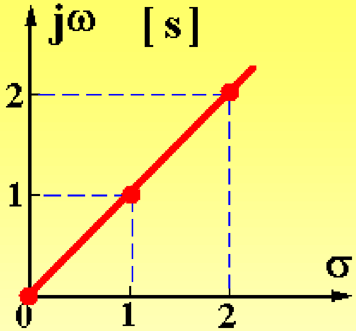


微分方程求解方法：粉色路径解法 优于 蓝色路径解法

(解代数方程 显然比 解微分方程 容易)

复习拉普拉斯变换有关内容(1)

1 复数有关概念



（1）复数、复函数

复数 $s=\sigma+j\omega$

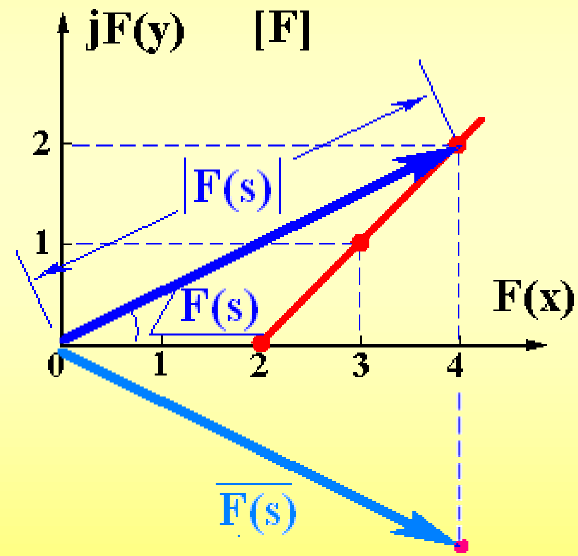
复函数 $F(s)=F_x(s)+jF_y(s)$

例1 $F(s)=s+2=\sigma+2+j\omega$

（2）模、相角

模 $|F(s)|=\sqrt{F_x^2+F_y^2}$

相角 $\angle F(s)=\arctan\dfrac{F_y}{F_x}$



（3）复数的共轭 $\overline{F(s)}=F_x-jF_y$

（4）解析 若F(s)在 s 点的各阶导数都存在，则F(s)在 s 点解析。

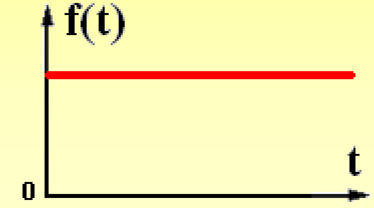
复习拉普拉斯变换有关内容(2)

2 拉氏变换的定义

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\cdot e^{-st}dt \qquad \begin{cases} F(s) & \text{像} \\ f(t) & \text{原像} \end{cases}$$

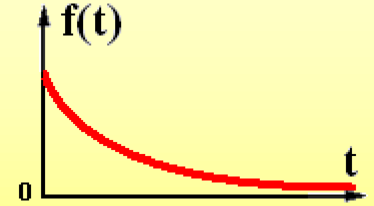
3 常见函数的拉氏变换

（1）阶跃函数 $f(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$



$$L[1(t)] = \int_0^{\infty} 1\cdot e^{-st}dt = \frac{-1}{s}\left[e^{-st}\right]_0^{\infty} = \frac{-1}{s}(0-1) = \frac{1}{s}$$

（2）指数函数 $f(t) = e^{-at}$

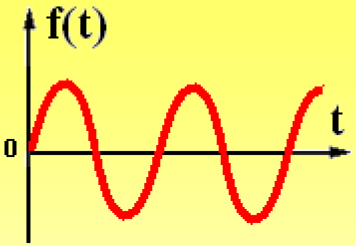


$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-at}\cdot e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t}dt$$

$$= \frac{-1}{s+a}\left[e^{-(s+a)t}\right]_0^{\infty} = \frac{-1}{s+a}(0-1) = \frac{1}{s+a}$$

复习拉普拉斯变换有关内容(3)

（3）正弦函数 $f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \sin\omega t & t\geq 0\end{cases}$



$$L[f(t)]=\int_0^{\infty}\sin\omega t\cdot e^{-st}dt=\int_0^{\infty}\frac{1}{2j}\left[e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}\right]\cdot e^{-st}dt$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{1}{2j}\left[e^{-(s-j\omega)t}-e^{-(s+j\omega)t}\right]dt$$

$$=\frac{1}{2j}\left[\frac{-1}{s-j\omega}e^{-(s-j\omega)t}\Big|_0^{\infty}-\frac{-1}{s+j\omega}e^{-(s+j\omega)t}\Big|_0^{\infty}\right]$$

$$=\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right]=\frac{1}{2j}\cdot\frac{2j\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

复习拉普拉斯变换有关内容(4)

4 拉氏变换的几个重要定理

（1）线性性质 $L[a\,f_1(t)\pm b\,f_2(t)]=a\,F_1(s)\pm b\,F_2(s)$

（2）微分定理 $L[f'(t)]=s\cdot F(s)-f(0)$

证明：$左=\int_0^\infty f'(t)\cdot e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{-st}df(t)=[e^{-st}f(t)]_0^\infty-\int_0^\infty f(t)de^{-st}$

$$=[0\text{-}f(0)]+s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=sF(s)-f(0)=右$$

$$[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$$

0初条件下有： $L[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)$

复习拉普拉斯变换有关内容(5)

例2 求 $L[\delta(t)]=?$

解. $\delta(t)=1'(t)$

$$L[\delta(t)]=L[1'(t)]=s\cdot\frac{1}{s}-1(0^-)=1-0=1$$

例3 求 $L[\cos(\omega t)]=?$

解. $\cos\omega t=\frac{1}{\omega}[\sin'\omega t]$

$$L[\cos\omega t]=\frac{1}{\omega}L[\sin'\omega t]=\frac{1}{\omega}\cdot s\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

复习拉普拉斯变换有关内容 (6)

（3）积分定理 $L\left[\int f(t)dt\right]=\frac{1}{s}\cdot F(s)+\frac{1}{s}f^{(-1)}(0)$

零初始条件下有：$L\left[\int f(t)dt\right]=\frac{1}{s}\cdot F(s)$

进一步有：

$$L\left[\underbrace{\iint\cdots\int}_{n\text{个}} f(t)dt^n\right]=\frac{1}{s^n}F(s)+\frac{1}{s^n}f^{(-1)}(0)+\frac{1}{s^{n-1}}f^{(-2)}(0)+\cdots+\frac{1}{s}f^{(-n)}(0)$$

例4 求 $L[t]=?$ $\quad t=\int 1(t)dt$

解. $L[t]=L\left[\int 1(t)dt\right]=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{s}t\Big|_{t=0}=\frac{1}{s^2}$

例5 求 $L\left[\frac{t^2}{2}\right]=?$ $\quad \frac{t^2}{2}=\int t\,dt$

解. $L\left[t^2/2\right]=L\left[\int t\,dt\right]=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_{t=0}=\frac{1}{s^3}$

复习拉普拉斯变换有关内容(7)

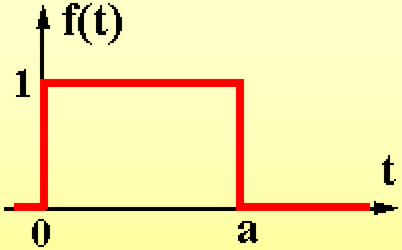
（4）实位移定理 $L[f(t-\tau_0)] = e^{-\tau_0 \cdot s} \cdot F(s)$

证明: $左 = \int_0^{\infty} f(t-\tau_0) \cdot e^{-t \cdot s} dt$

令 $t-\tau_0 = \tau$

$$= \int_{-\tau_0}^{\infty} f(\tau) \cdot e^{-s(\tau+\tau_0)} d\tau = e^{-\tau_0 s} \int_{-\tau_0}^{\infty} f(\tau) \cdot e^{-\tau s} d\tau = 右$$

例6 $f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 < t < a \\ 0 & t > a \end{cases}$，求F(s)



解. $f(t) = 1(t) - 1(t-a)$

$$L[f(t)] = L[1(t) - 1(t-a)] = \frac{1}{s} - e^{-as} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1-e^{-as}}{s}$$

复习拉普拉斯变换有关内容 (8)

（5）复位移定理 $L\left[e^{A\cdot t}f(t)\right]=F(s-A)$

证明：$左=\int_0^{\infty}e^{At}f(t)\cdot e^{-t\cdot s}dt=\int_0^{\infty}f(t)\cdot e^{-(s-A)\cdot t}dt$

$\Big\downarrow$ 令 $s-A=\hat{s}$

$=\int_0^{\infty}f(t)\cdot e^{-\hat{s}\cdot t}dt=F(\hat{s})=F(s-A)=右$

例7 $L\left[e^{at}\right]=L\left[1(t)\cdot e^{at}\right]=\left.\dfrac{1}{\hat{s}}\right|_{\hat{s}\to s-a}=\dfrac{1}{s-a}$

例8 $L\left[e^{-3t}\cdot\cos 5t\right]=\left.\dfrac{\hat{s}}{\hat{s}^2+5^2}\right|_{\hat{s}\to s+3}=\dfrac{s+3}{(s+3)^2+5^2}$

例9 $L\left[e^{-2t}\cos(5t-\dfrac{\pi}{3})\right]=L\left\{e^{-2t}\cos\left[5(t-\dfrac{\pi}{15})\right]\right\}$

$=\left\{e^{-\frac{\pi}{15}\hat{s}}\dfrac{\hat{s}}{\hat{s}^2+5^2}\right\}_{\hat{s}\to s+2}=e^{-\frac{\pi}{15}(s+2)}\cdot\dfrac{s+2}{(s+2)^2+5^2}$

复习拉普拉斯变换有关内容(9)

（6）初值定理 $\lim\limits_{t\to 0} f(t)=\lim\limits_{s\to\infty} s\cdot F(s)$

证明：由微分定理 $\int_0^{\infty}\frac{df(t)}{dt}\cdot e^{-st}dt=s\cdot F(s)-f(0)$

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{df(t)}{dt}\cdot e^{-st}dt=\lim_{s\to\infty}\left[s\cdot F(s)-f(0)\right]$$

$$左=\int_{0_+}^{\infty}\frac{df(t)}{dt}\cdot\lim_{s\to\infty}e^{-st}dt=0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{s\to\infty}\left[s\cdot F(s)-f(0_+)\right]=0$$

$$f(0_+)=\lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{s\to\infty} s\cdot F(s)$$

例10 $\begin{cases} f(t)=t \\ F(s)=\dfrac{1}{s^2} \end{cases}$ $\quad f(0)=\lim\limits_{s\to\infty} s\cdot F(s)=\lim\limits_{s\to\infty} s\cdot\dfrac{1}{s^2}=0$

复习拉普拉斯变换有关内容（10）

（7）终值定理 $\boxed{\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=\lim\limits_{s\to 0} s\cdot F(s)}$ （终值确实存在时）

证明：由微分定理 $\int_0^{\infty}\dfrac{df(t)}{dt}\cdot e^{-st}dt=s\cdot F(s)-f(0)$

$$\lim_{s\to 0}\int_0^{\infty}\frac{df(t)}{dt}\cdot e^{-st}dt=\lim_{s\to 0}\left[s\cdot F(s)-f(0)\right]$$

$$左=\int_0^{\infty}\frac{df(t)}{dt}\cdot\lim_{s\to 0}e^{-st}dt=\int_0^{\infty}df(t)=\lim_{t\to\infty}\int_0^{t}df(t)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left[f(t)-f(0)\right]=右=\lim_{s\to 0}\left[s\cdot F(s)-f(0)\right]$$

例11 $F(s)=\dfrac{1}{s(s+a)(s+b)}$ $\qquad f(\infty)=\lim\limits_{s\to 0}s\dfrac{1}{s(s+a)(s+b)}=\dfrac{1}{ab}$

例12 $F(s)=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ $\qquad f(\infty)=\sin\omega t\big|_{t\to\infty}\neq\lim\limits_{s\to 0}s\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}=0$

复习拉普拉斯变换有关内容 (11)

用拉氏变换方法解微分方程

系统微分方程

$$\begin{cases} y''(t)+a_1\cdot y'(t)+a_2\cdot y(t)=1(t) \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$$

L变换 $$(s^2+a_1s+a_2)\cdot Y(s)=\frac{1}{s}$$

$$Y(s)=\frac{1}{s(s^2+a_1s+a_2)}$$

L^{-1}变换 $$y(t)=L^{-1}\left[Y(s)\right]$$

小结

1 拉氏变换的定义 $F(s)=\int_0^{\infty} f(t)\cdot e^{-ts}dt$

2 常见函数L变换

	$f(t)$	$F(s)$
（1）单位脉冲	$\delta(t)$	1
（2）单位阶跃	$1(t)$	$1/s$
（3）单位斜坡	t	$1/s^2$
（4）单位加速度	$t^2/2$	$1/s^3$
（5）指数函数	e^{-at}	$1/(s+a)$
（6）正弦函数	$\sin\omega t$	$\omega/(s^2+\omega^2)$
（7）余弦函数	$\cos\omega t$	$s/(s^2+\omega^2)$

小结

3 L变换重要定理

（1）线性性质 $L[a\,f_1(t) \pm b\,f_2(t)] = a\,F_1(s) \pm b\,F_2(s)$

（2）微分定理 $L[f'(t)] = s \cdot F(s) - f(0)$

（3）积分定理 $L\left[\int f(t)dt\right] = \frac{1}{s} \cdot F(s) + \frac{1}{s} f^{(-1)}(0)$

（4）实位移定理 $L[f(t-\tau)] = e^{-\tau \cdot s} \cdot F(s)$

（5）复位移定理 $L\left[e^{A \cdot t} f(t)\right] = F(s-A)$

（6）初值定理 $\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} s \cdot F(s)$

（7）终值定理 $\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot F(s)$