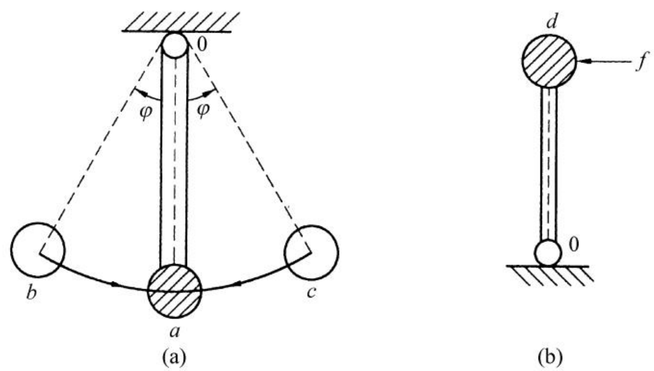
3.5 控制系统的稳定性

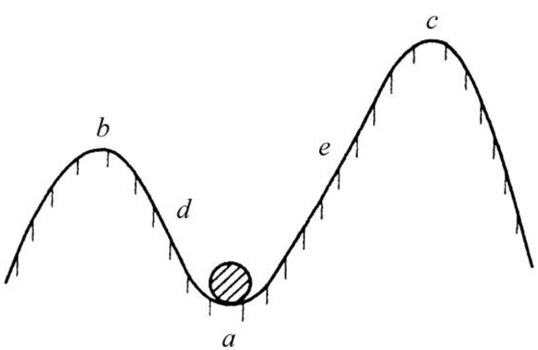
3.5.1 稳定的概念

力学系统中，外力为零时，位移保持不变的位置称平衡位置。平衡位置的稳定性取决于外力为零时，系统能否从偏离平衡位置处自行返回到原平衡位置。



- 悬挂的摆，垂直位置是稳定平衡位置
- 倒立的摆，垂直位置是不稳定平衡位置
- 控制系统中所有的输入信号为零，而系统输出信号保持不变的点（位置）称为平衡点（位置），取平衡点时的输出信号为零。

控制系统所有输入信号为零时，在非零初始条件作用下，如果系统的输出信号随时间的推移而趋于零（即系统能够自行返回到原平衡点），则称系统是稳定的。否则不稳。



3.5.2 线性定常系统稳定的充分必要条件

$$c^{(n)}(t)+a_1c^{(n-1)}(t)+a_2c^{(n-2)}(t)+\cdots+a_{(n-1)}\dot{c}(t)+a_nc(t)$$

$$=b_0r^{(n)}(t)+b_1r^{(n-1)}(t)+b_2r^{(n-2)}(t)+\cdots+b_{n-1}\dot{r}(t)+b_nr(t);\ r(t)=0,c(t)\text{不变}\Rightarrow c(t)=0$$

$$C(s)=\frac{b_0s^n+b_1s^{n-1}+\cdots+b^{n-1}s+b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a^{n-1}s+a^n}R(s)+\frac{N_0(s)}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a^{n-1}s+a^n}$$

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{b_0s^n+b_1s^{n-1}+\cdots+b^{n-1}s+b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a^{n-1}s+a^n}\qquad C_0(s)=\frac{N_0(s)}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a^{n-1}s+a^n}$$

$$c_0(t):\mathrm{e}^{\sigma t},t^i\mathrm{e}^{\sigma t},\mathrm{e}^{\sigma t}\sin(\omega t+\phi),\mathrm{e}^{\sigma t}t^i\sin(\omega t+\phi_{\mathrm{i+1}})$$

- 线性定常系统稳定的充分必要条件： $\lim_{t\to\infty}c_0(t)=0$
- 即：系统闭环极点（特征根）全部具有负实部，全部分布在[s]平面左半部。

- 推论与说明
  - 1.线性系统的稳定性是本身固有特性，与外界输入信号无关。
  - 2.稳定的系统，单位冲激响应及输出信号中的瞬态分量都趋于零。
  - 3.实际物理系统不稳定时，变量往往形成大幅值的等幅振荡，或趋于最大值。
  - 4.有实部为零（位于虚轴上）的极点，其余极点都具有负实部，称临界稳定。工程上临界稳定为不稳定。

3.5.3 劳思稳定判据

- 对方程的系数做简单计算，可确定正实部根的个数，判定系统稳定性。

系统特征方程：

$$D(s)=a_0s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n=0$$

$(a_0>0)$

- 稳定的必要条件：特征方程不缺项，所有系数均为正值。
- 劳思表

$$\begin{array}{llllll}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & & & \\
s^2 & e_1 & e_2 & & & \\
s^1 & f_1 & & & & \\
s^0 & g_1 & & & &
\end{array}$$

• 劳思稳定判据

• 劳思表

$$
\begin{array}{llllll}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & & & \\
s^2 & e_1 & e_2 & & & \\
s^1 & f_1 & & & & \\
s^0 & a_n & & & &
\end{array}
$$

其中 b_1,b_2,b_3 等系数按下列公式计算

$$b_1=\frac{a_1a_2-a_0a_3}{a_1};\ b_2=\frac{a_1a_4-a_0a_5}{a_1};\ b_3=\frac{a_1a_6-a_0a_7}{a_1};\ \cdots$$

$$c_1=\frac{b_1a_3-a_1b_2}{b_1};\quad c_2=\frac{b_1a_5-a_1b_3}{b_1};\quad c_3=\frac{b_1a_7-a_1b_4}{b_1};\cdots$$

$$d_1=\frac{c_1b_2-b_1c_2}{c_1};\quad d_2=\frac{c_1b_3-b_1c_3}{c_1};\ \cdots$$

这种过程进行到n+1行为止。第n+1行第一列为a_n。

可以用一个正数乘以一行的全部元素。

• 系统稳定的充要条件是：劳思表第一列各项元素均为正数。

• 方程中实部为正数的根的个数是第一列元素符号改变次数。

- 例 3-5-1 根据特征方程判断稳定性。

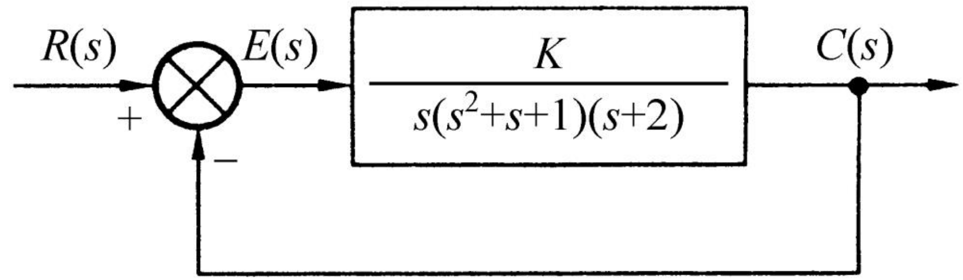
$$D(s)=s^4+2s^3+3s^2+4s+5=0$$

- 解：列劳思表

$$\begin{array}{llll} s^4 & 1 & 3 & 5 \\ s^3 & 2 & 4 & \\ s^2 & 1 & 5 & \\ s^1 & -6 & & \\ s^0 & 5 & & \end{array}$$

第一列元素符号改变两次，有两个正实部根，系统不稳定。

- 例 3-3-2 已知系统框图，确定使系统稳定的K的取值范围。



- 解　闭环传递函数和特征方程为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s^2+s+1)(s+2)+K}$$

$$D(s) = s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

$$\begin{array}{llll} s^4 & 1 & 3 & K \\ s^3 & 3 & 2 & \\ s^2 & \frac{7}{3} & K & \\ s^1 & 2-\frac{9}{7}K & & \\ s^0 & K & & \end{array}$$

$$\begin{cases} K > 0 \\ 2 - \frac{9}{7}K > 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 0 < K < \frac{14}{9}$$

- 特殊情况
- 1.劳思表任一行中第一个元素为零，其余元素不全为零。

列劳思表时用一个小正数代替零元素继续列表。

  - 例如系统的特征方程为

$$D(s)=s^4+2s^3+3s^2+6s+1=0$$

$$\begin{array}{llll}
s^4 & 1 & 3 & 1 \\
s^3 & 2 & 6 & \\
s^2 & 0\rightarrow\varepsilon & 1 & \\
s^1 & \dfrac{6\varepsilon-2}{\varepsilon}\rightarrow-\infty & & \\
s^0 & 1 & &
\end{array}$$

第一列元素符号改变两次，有两个正实部根，系统不稳定。

- 2.劳思表任一行中所有元素均为零。
- 此时方程中有一对大小相等、符号相反的实根，或一对纯虚根，或对称于s平面原点的共轭复根。
- 列表时先用全零行的上一行构成辅助方程，它的根就是原方程的特殊根。再将辅助方程求导，用求导后的方程代替全零行。

例如系统的特征方程为

$$D(s)=s^3+2s^2+s+2=0$$

劳思表为：

s^3	1	1	
s^2	2	2	$\rightarrow$ 辅助方程$2s^2+2=0$
s^1	4	0	$\rightarrow$ 辅助方程求导后的系数
s^0	2		

- 劳思表第一列元素符号相同，故系统不含正实部的根，而含一对纯虚根，可由辅 助方程解出，为 $\pm j$ 。

- 例3-5-3 已知系统的特征方程为

$$D(s)=s^5+2s^4+3s^3+6s^2-4s-8=0$$

根据辅助方程求特征根。

- 解　劳思表为

$$\begin{array}{llll}
s^5 & 1 & 3 & -4 \\
s^4 & 2 & 6 & -8 \rightarrow \text{辅助方程} 2s^4+6s^2-8=0 \\
s^3 & 8 & 12 & 0 \rightarrow \text{辅助方程求导后的系数} \\
s^2 & 3 & -8 & \\
s^1 & 33.3 & 0 & \\
s^0 & -8 & &
\end{array}$$

第一列元素符号改变一次，有一个正实部根，可根据辅助方程

$$2s^4+6s^2-8=(2s^2-2)(s^2+4)=0$$

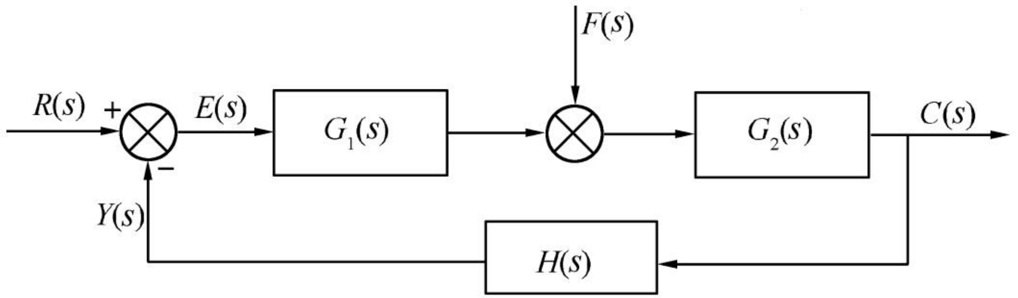
解得　$s=\pm 1$; $s=\pm\mathrm{j}2$

3.6 控制系统的稳态误差
3.6.1 稳态误差的基本概念

重点！

- **1.误差 $e_1(t), E_1(s)$**
- 设 $c_r(t)$为被控量的希望值
- 误差则是被控量的希望值与实际值之差：

$$e_1(t) = c_r(t) - c(t)$$

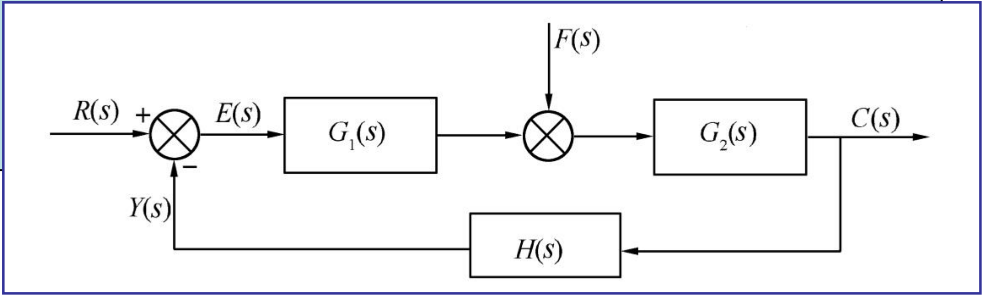


- **2.稳态误差 $e_{1ss}(t)$**
- 稳态误差：误差信号的**稳态分量——仍然是函数**。
- 由参考输入信号$r(t)$和扰动信号$f(t)$引起的稳态误差，它们与系统的结构和参数、信号的函数形式（阶跃、斜坡或加速度）以及信号进入系统的位置有关。这些误差又称原理性误差。

- **3.** $c_r(t)$与$r(t)$之间关系　　重点！
- 偏差信号$e(t)=0$时的被控量的值$c(t)$就是希望值$c_r(t)$。

令$E(s)=0$则$C(s)=C_r(s)$，$\Rightarrow$ $R(s)-H(s)C_r(s)=0$，$\Rightarrow$

$$C_r(s)=\frac{R(s)}{H(s)},\ \Rightarrow\ c_r(t)=\frac{1}{H(s)}r(t)$$



- **4.偏差与误差之间关系**

$$E_1(S)=C_r(s)-C(s)=\frac{R(s)}{H(s)}-C(s)\ ,\ \Rightarrow\ E(S)=R(s)-H(s)C(s)$$

$$\Rightarrow\ E_1(s)=\frac{1}{H(s)}E(s),\ \Rightarrow\ e_1(t)=\frac{1}{H(s)}e(t),\quad【H(s)为常数】$$

- $H(s)=1$,(稳态)偏差信号就是(稳态)误差信号；否则，先求**稳态偏差(偏差信号的稳态分量)**，再求稳态误差。
- $R(s)$和$F(s)$都存在，用叠加原理求总的偏差。

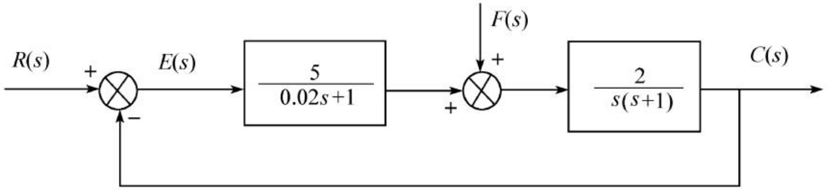
3.6.2 利用终值定理求稳态误差

- （通常只考虑）**稳态误差的终值** $e_{1ss}(\infty)$
- 若 $e_{1ss}(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty}e_{1ss}(t)$ 存在，或 $sE_1(s)$ 的全部极点（原点除外）具有负实部，则

$$e_{1ss}(\infty)=\lim_{t\to\infty}e_{1ss}(t)=\lim_{t\to\infty}e_1(t)=\lim_{s\to 0}sE_1(s)$$

$$e_{ss}(\infty)=\lim_{t\to\infty}e_{ss}(t)=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)$$

- 例3-6-1 $r(t)=t,\ f(t)=-1(t)$，求稳态误差终值。
- 解 单位负反馈，误差就是偏差。
- **【求取稳态误差终值或稳态偏差终值之前，要先判断稳定性】**



$$E_R(s)=\frac{1}{1+\frac{5}{0.02s+1}\cdot\frac{2}{s(s+1)}}R(s)=\frac{s(0.02s+1)(s+1)}{s(0.02s+1)(s+1)+10}R(s)$$

$$E_F(s)=\frac{-\frac{2}{s(s+1)}}{1+\frac{5}{0.02s+1}\cdot\frac{2}{s(s+1)}}F(s)=\frac{-2(0.02s+1)}{s(0.02s+1)(s+1)+10}F(s)$$

$R(s)=\frac{1}{s^2}$， $F(s)=-\frac{1}{s}$ ， $E(s)=E_R(s)+E_F(s)$ ，

$$sE(s)=sE_R(s)+sE_F(s)\quad =s\frac{s(0.02s+1)(s+1)}{s(0.02s+1)(s+1)+10}\cdot\frac{1}{s^2}+s\cdot\frac{-2(0.02s+1)}{s(0.02s+1)(s+1)+10}\left(-\frac{1}{s}\right)$$

$$=\frac{(0.02s+1)(s+1)}{s(0.02s+1)(s+1)+10}+\frac{2(0.02s+1)}{s(0.02s+1)(s+1)+10}$$

经劳思判稳（略）之后，求取$e_{ss}(\infty)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\frac{1}{10}+\frac{2}{10}=0.3$

3.6.3 参考输入的稳态误差 与 系统的型别

- 系统的开环传递函数和偏差的闭环传递函数为：

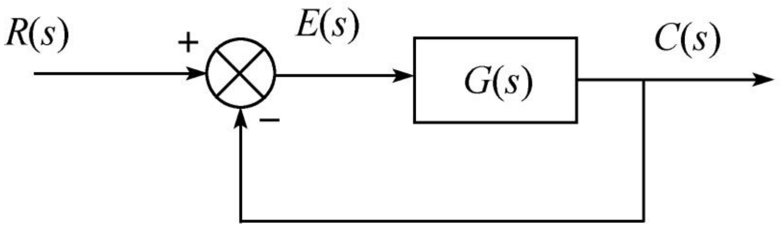
——v 型系统

$$G(s)H(s)=\frac{KN(s)}{s^{v}D(s)},\quad N(0)=D(0)=1.\qquad \Phi_e(s)=\frac{1}{1+G(s)H(s)}=\frac{s^{v}D(s)}{s^{v}D(s)+KN(s)}$$

- 以下推导仅针对：单位负反馈系统

$$E(s)=\frac{1}{1+G(s)}R(s)$$

$$\Rightarrow\quad sE(s)=s\frac{1}{1+G(s)}R(s)$$



- 1.单位阶跃输入作用下的稳态误差

$$r(t)=1(t)\text{，}R(s)=\frac{1}{s}\quad\Rightarrow\quad sE(s)=s\frac{1}{1+G(s)}\frac{1}{s}=\frac{1}{1+G(s)}$$

$$e_{ss}(\infty)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0}G(s)}=\frac{1}{1+K_p}$$

- **稳态位置误差系数**： $K_p=\lim\limits_{s\to 0}G(s)=\begin{cases}K & v=0\\ \infty & v\geq 1\end{cases}$

$$\Rightarrow\quad e_{ss}(\infty)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+K}=\text{常数} & v=0\\ 0 & v\geq 1\end{cases}$$

- 0型系统称为有差系统。

- 2.单位斜坡输入作用下的稳态误差

$$r(t)=t\,,\quad R(s)=\frac{1}{s^2}\quad\Rightarrow\quad sE(s)=s\frac{1}{1+G(s)}\frac{1}{s^2}=\frac{1}{s(1+G(s))}=\frac{1}{s+sG(s)}$$

$$e_{ss}(\infty)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}sG(s)}=\frac{1}{K_v}$$

- **稳态速度误差系数**:

$$K_v=\lim_{s\to 0}sG(s)=\begin{cases}0 & v=0\\ K & v=1\\ \infty & v\geq 2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad \mathrm{e}_{ss}(\infty)=\begin{cases}\infty & v=0\\ \dfrac{1}{K}=\text{常数} & v=1\\ 0 & v\geq 2\end{cases}$$

- 3.单位加速度输入作用下的稳态误差

$$r(t)=\frac{t^2}{2},\quad R(s)=\frac{1}{s^3}\quad\Rightarrow\quad sE(s)=s\frac{1}{1+G(s)}\frac{1}{s^3}=\frac{1}{s^2(1+G(s))}=\frac{1}{s^2+s^2G(s)}$$

$$e_{ss}(\infty)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}s^2G(s)}=\frac{1}{K_a}$$

- **稳态加速度误差系数**：

$$K_a=\lim_{s\to 0}s^2G(s)=\begin{cases}0 & v=0,1\\ K & v=2\\ \infty & v\geq 3\end{cases}$$

- 减小或消除参考输入信号的稳态误差的方法：提高系统开环放大系数和型别数。

$$\Rightarrow\quad e_{ss}(\infty)=\begin{cases}\infty & v=0,1\\ \dfrac{1}{K}=\text{常数} & v=2\\ 0 & v\geq 3\end{cases}$$

- 表3-6-1 参考输入的稳态偏差终值（单位负反馈则$e_{ss}(\infty)$等于稳态误差终值，终值可省略）

$e_{ss}(\infty)$ $r(t)$ 型别	$1(t)$	t	$\frac{1}{2}t^2$
0	$\frac{1}{1+K_p}=\frac{1}{1+K}$	∞	∞
1	0	$\frac{1}{K_v}=\frac{1}{K}$	∞
2	0	0	$\frac{1}{K_a}=\frac{1}{K}$

- 例3-6-2 单位负反馈系统的开环传递函数 $G(s)=\frac{1}{Ts}$，求输入 $r(t)=t$ 时的稳态误差终值 $e_{1ss}(\infty)$ 。
- 解 1型单位负反馈稳定系统。

$$K_v=\lim_{s\to 0} sG(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{Ts}=\frac{1}{T},\quad e_{1ss}(\infty)=e_{ss}(\infty)=\frac{1}{K_v}=T$$

- 例3-6-3 单位负反馈系统的开环传递函数 $G(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$ ，求输入 $r(t)=t$ 时的稳态误差终值 $e_{1ss}(\infty)$ 。
- 解 1型单位负反馈稳定系统。

$$K_v=\lim_{s\to 0} sG(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}=\frac{\omega_n}{2\zeta}\qquad e_{1ss}(\infty)=e_{ss}(\infty)=\frac{1}{K_v}=\frac{2\zeta}{\omega_n}$$

- 例3-6-4 单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{10}{(0.1s+1)(0.5s+1)}$$

求$r(t)=1(t)$，$r(t)=t$ 时的稳态误差 $e_{ss}(\infty)$ 。

- 解 该系统是稳定的，系统为零型系统。

$$K_P=\lim_{s\to 0}G(s)=10$$

当$r(t)=1(t)$时， $e_{ss}(\infty)=\dfrac{1}{1+K_P}=\dfrac{1}{1+10}=0.091$

当$r(t)=t$时， $e_{ss}(\infty)=\infty$

- 例3-6-5 单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{5}{s(s+1)(s+2)}$$

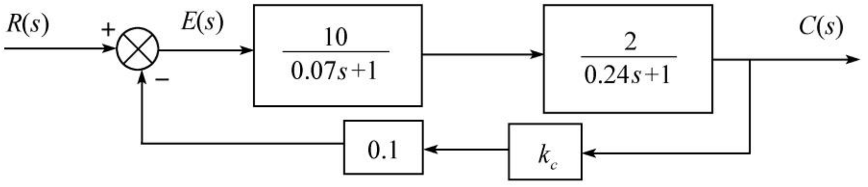
分别求出 $r(t)=1(t),10t,3t^2$ 时的稳态误差 终值 $e_{ss}(\infty)$ 。

- 解 用劳思稳定判据可知闭环系统是稳定的。
- 1）这是1型系统，当$r(t)=1(t)$时,$e_{ss}(\infty)=0$
- 2） $K_V=\lim\limits_{s\to 0}sG(s)=\lim\limits_{s\to 0}s\dfrac{5}{s(s+1)(s+2)}=2.5$

  当$r(t)=10t$时,$e_{ss}=10\times\dfrac{1}{K_V}=10\times\dfrac{1}{2.5}=4$

- 3）这是1型系统， 当$r(t)=3t^2$时,$e_{ss}(\infty)=\infty$

- 例3-6-6 调速系统输出信号为$c(t)$r/min（转/分）。$k_c = 0.05V/(\mathrm{r/min})$。求$r(t)$=1($t$)V时的稳态误差。



解 系统开环传递函数为

$$G(s)=\frac{10}{0.07s+1}\times\frac{2}{0.24s+1}\times 0.1\times 0.05=\frac{0.1}{(0.07s+1)(0.24s+1)}$$

系统是0型稳定系统，$K_P=\lim\limits_{s\to 0}G(s)=0.1$

当$r(t)=1(t)$时， $e_{ss}(\infty)=\dfrac{1}{1+K_P}=\dfrac{1}{1+0.1}=\dfrac{1}{1.1}$

反馈通路传递函数 $H=0.1\times 0.05=0.005$

$$e_{1ss}(\infty)=\frac{e_{ss}(\infty)}{H}=\frac{1}{0.005\times 1.1}=181.8\,\mathrm{r/min}$$

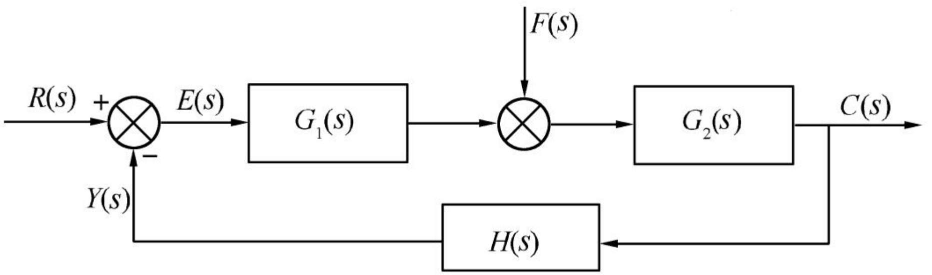
3.6.4 扰动信号的稳态误差

- 偏差信号*E*（*s*）对扰动信号*F*（*s*）的闭环传递函数为

$$\Phi_{EF}(s)=\frac{E(s)}{F(s)}=\frac{-G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}=\frac{-G_2(s)H(s)}{1+G(s)H(s)}$$

设 $G_1(s)=\dfrac{K_1N_1(s)}{s^{\nu_1}D_1(s)}$, $G_2(s)=\dfrac{K_2N_2(s)}{s^{\nu_2}D_2(s)}$

$$N_1(0)=N_2(0)=D_1(0)=D_2(0)=1$$

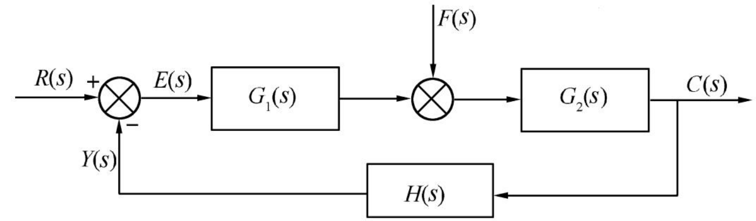


H(s)是常数

$$\Phi_{EF}(s)=\frac{E(s)}{F(s)}=\frac{-K_2s^{\upsilon_1}N_2(s)D_1(s)H}{s^{\upsilon_1+\upsilon_2}D_1(s)D_2(s)+K_1K_2N_1(s)N_2(s)H}$$

- 提高 K_1和υ_1 (偏差信号和扰动信号之间的前向通路的放大系数和积分环节个数）可以减小扰动信号引起的误差。

- 例 3-6-7 设



$$G_1(s)=\frac{K_1}{T_1s+1},\quad G_2(s)=\frac{K_2}{T_2s+1},\quad H(s)=1$$

若 $f(t)=1(t)$，求扰动信号引起的稳态误差终值 $e_{1ssf}(\infty)$。

- 解　由扰动信号引起的偏差信号为 $E_F(s)$。$F(s)=\frac{1}{s}$

$$E_F(s)=\frac{-G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}F(s)=\frac{-K_2(T_1s+1)}{(T_1s+1)(T_2s+1)+K_1K_2}\cdot\frac{1}{s}$$

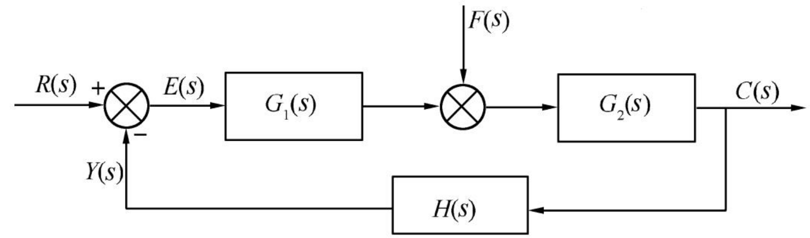
此二阶系统是单位负反馈的稳定系统，稳态误差为

$$e_{1ssf}(\infty)=e_{ssf}(\infty)=\lim_{s\to 0}s\cdot E_F(s)=-\frac{K_2}{1+K_1K_2}$$

- 提高 K_1 可以减小系统的稳态误差。

3.6.5 动态误差系数法

- 用动态误差系数法求稳态误差的关键：
  将偏差传递函数展开成s的幂级数。



- $\Phi_E(s)=E_R/R(s)$ 在s=0的邻域内
  展开成泰勒级数，

$$\Phi_E(s)=\frac{E_R(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}=\Phi_E(0)+\dot{\Phi}_E(0)s+\frac{1}{2!}\ddot{\Phi}_E(0)s^2+\cdots+\frac{1}{l!}\Phi_E^l(0)s^l+\cdots$$

$$\Phi_E^l(0)=\left.\frac{\mathrm{d}^l\,\Phi_E(s)}{\mathrm{d}\,s^l}\right|_{s=0}$$

$$E_R(s)=\Phi_E(0)R(s)+\dot{\Phi}_E(0)sR(s)+\frac{1}{2!}\ddot{\Phi}_E(0)s^2R(s)+\cdots+\frac{1}{l!}\Phi_E^l(0)s^lR(s)+\cdots$$

$$e_{ssr}(t)=c_0r(t)+c_1\dot{r}(t)+c_2\ddot{r}(t)+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}c_ir^{(i)}(t)$$

$$c_i=\frac{1}{i!}\Phi_E^{(i)}(0)\qquad i=0,1,2,\cdots$$

- 系数 c_i 称为动态误差系数，用除法求。

- 例3-6-8 单位负反馈系统的开环传递函数

$$G(s)=\frac{10}{(0.1\mathrm{s}+1)(0.5\mathrm{s}+1)}$$

分别求出输入信号r(t)=1(t),t时的稳态误差的时间函数。

解　单位负反馈系统，偏差就是误差。

$$\Phi_E(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G(s)}=\frac{(0.1s+1)(0.5s+1)}{(0.1s+1)(0.5s+1)+10}=\frac{1+0.6s+0.05s^2}{11+0.6s+0.05s^2}$$

$$=\frac{20+12s+s^2}{220+12s+s^2}=0.091+0.05s+\cdots$$

$$E(s)=0.091R(s)+0.05sR(s)+\cdots\ \Rightarrow\ e_{ss}(t)=0.091r(t)+0.05\dot{r}(t)+\cdots$$

$$r(t)=1(t),\dot{r}(t)=0\ \Rightarrow\ e_{ss}(t)=0.091$$

$$r(t)=t,\dot{r}(t)=1,\ddot{r}(t)=0,\cdots\ \Rightarrow\ e_{ss}(t)=0.091t+0.05.$$

- 例3-6-9 单位负反馈系统的开环传递函数

$$G(s)=\frac{5}{\mathrm{s}(\mathrm{s}+1)(\mathrm{s}+2)}$$

输入信号 $r(t)=4+6t+3t^2$，求稳态误差的时间函数 $e_{ss}(t)$。

- 解　单位负反馈系统，偏差就是误差。

$$\Phi_E(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G(s)}=\frac{s(s+1)(s+2)}{s(s+1)(s+2)+5}=\frac{2s+3s^2+s^3}{5+2s+3s^2+s^3}$$

$$=0.4s+0.44s^2\cdots$$

$$E(s)=0.4sR(s)+0.44s^2R(s)+\cdots\Rightarrow e_{ss}(t)=0.4\dot{r}(t)+0.44\ddot{r}(t)+\cdots$$

$$r(t)=4+6t+3t^2,\dot{r}(t)=6+6t,\ddot{r}(t)=6,\dddot{r}(t)=0,\cdots$$

$$\Rightarrow\ e_{ss}(t)=0.4(6+6t)+0.44\times6=5.04+2.4t$$