信号分解

信号
- 直流分量+交流分量
- 偶分量+奇分量
- 实部分量+虚部分量
- 脉冲分量
- 正交分量

分解结果是唯一的

信号分解

信号的直流分量 $f_{DC}(t)=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$ → 信号的均值

信号的交流分量 $f_{AC}(t)=f(t)-f_{DC}(t)$

信号的偶分量 $f_e(t)=Ev[f(t)]=\frac{f(t)+f(-t)}{2}$

信号的奇分量 $f_o(t)=Od[f(t)]=\frac{f(t)-f(-t)}{2}$

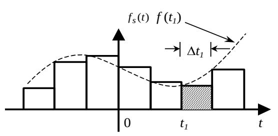
信号的实部分量 $f_r(t)=\mathrm{Re}[f(t)]=\frac{1}{2}\left(f(t)+f^*(t)\right)$

信号的虚部分量 $f_i(t)=\mathrm{Im}[f(t)]=\frac{1}{2j}\left(f(t)-f^*(t)\right)$

信号分解

信号的脉冲分量分解

信号可以近似表示为一组矩形脉冲的和的形式。



信号分解后，t_1 处宽度为Δt_1 的矩形脉冲可以表示为

$$f_{t_1}(t)=f(t_1)[u(t-t_1)-u(t-t_1-\Delta t_1)]$$

于是原始函数可以表示为：

$$f(t)\approx\sum_{t_1=-\infty}^{\infty} f_{t_1}(t)$$

信号分解

正交函数：

如果在区间 (t_1, t_2) 上，函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 互不含有对方的分量，则称 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 在 (t_1, t_2) 上**正交**。

函数正交的充要条件是它们的内积为0 $\langle f_1, f_2\rangle=0$

函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 在 (t_1,t_2) 上的内积：

$$\langle f_1, f_2\rangle=\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)\, f_2(t)dt$$

任一函数 $f(t)$在(t_1,t_2)上可表示为正交函数集内函数的线性组合。

$$f(t)\approx\sum_{n=1}^{N} c_n g_n(t)$$

正交分量的系数

信号分解

信号正交分解的作用：

1. 方便处理　　　例如：旋转

2. 便于抽取特性

3. 数据压缩

信号分解

正交变换方法：

1. 傅立叶变换 **Fourier Transform**
2. 离散余弦变换 **Discrete Cosine Transform**
3. 沃尔希-哈德玛变换 **Walsh-Hadamard Transform**
4. 斜变换 **Slant Transform**
5. 哈尔变换 **Haar Transform**
6. 离散小波变换 **Discrete Wavelet Transform**
7. 离散K-L变换 **Discrete Karhunen-Leave Transform**
8. 奇异值分解SVD变换 **Singular-Value Decomposition**
9. **Z变换**

傅里叶变换

傅立叶变换

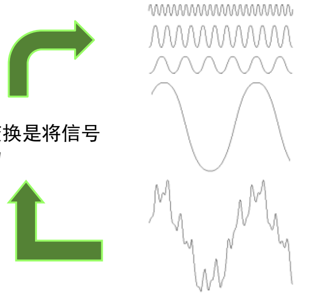
——线性系统分析中有力工具

傅氏变换在很多领域中应用很广泛，这是因为

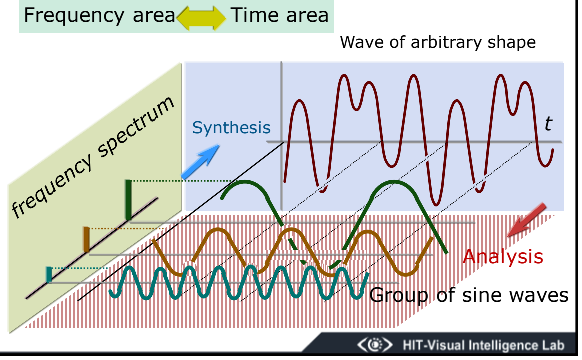
- 依靠它，建立起了非常完善的线性系统理论
  ——通信及控制论的基础
- 它被移植到光学中，形成光学信息处理的基础
  ——傅氏光学
- 在图像、语音信号处理领域，
  傅氏变换和线性系统理论是进行信号恢复和重构的重要手段。

信号分解

傅氏变换是将信号分解为



傅里叶变换



傅里叶变换

一. 一维傅立叶变换

令 $f(x)$ 为实变量 x 的连续函数，$f(x)$ 的傅立叶变换定义如下式，并记为 $\Im$ 。

$$\Im\{f(x)\}=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}dx=F(u) \quad \text{其中 } j^2=-1$$

傅立叶的反变换（the inverse Fourier’s transform）定义为下式：

$$\Im^{-1}\{F(u)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}F(u)e^{j2\pi ux}du=f(x)$$

——傅立叶变换对（the Fourier transform pair）

傅里叶变换

一. 一维傅立叶变换

另一种形式

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

关系 $\omega=2\pi u, \qquad t=x$

傅里叶变换

$f(x)\rightarrow F(u)$

实 复

$$F(u)=R(u)+jI(u)$$

$$=|F(u)|e^{j\phi(u)} \text{——指数形式}$$

模：$|F(u)|=\sqrt{R^2(u)+I^2(u)}$

也称幅度函数，傅立叶谱，频谱

相角：$\phi(u)=tan^{-1}[I(u)/R(u)]$

傅里叶变换

$f(x)$ 的能量谱$E(u)$ 为：

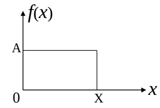
$$E(u)=|F(u)|^2=R^2(u)+I^2(u)$$

又称功率谱 $P_f(u)$(Power spectrum)

$$P_f(u)=\Im\{R_f(\tau)\}=\Im\{f(t)*f(-t)\}$$
$$=F(u)F(-u)$$
$$=|F(u)|^2$$

傅里叶变换

例1. 简单函数$f(x)$如图所示:



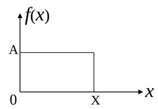
由欧拉公式(Eular relation)可知

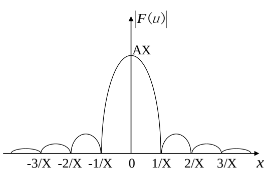
$$e^{-j2\pi ux}=\cos(2\pi ux)-j\sin(2\pi ux)$$
$$e^{j2\pi ux}=\cos(2\pi ux)+j\sin(2\pi ux)$$

$$F(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}dx$$
$$=\int_0^X Ae^{-j2\pi ux}dx$$
$$=\frac{-A}{j2\pi u}[e^{-j2\pi ux}]_0^X$$
$$=\frac{-A}{j2\pi u}[e^{-j2\pi uX}-1]$$
$$=\frac{-A}{j2\pi u}[e^{-j\pi uX}-e^{j\pi uX}]e^{-j\pi uX}$$
$$=\frac{-A}{j2\pi u}[-2j\sin(\pi uX)]e^{-j\pi uX}$$
$$=\frac{A}{\pi u}\sin(\pi uX)e^{-j\pi uX}$$
$$|F(u)|=\frac{A}{\pi u}|\sin(\pi uX)|=AX\frac{\sin(\pi uX)}{\pi uX}$$

傅里叶变换

例1. 简单函数$f(x)$如图所示:





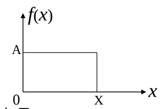
由欧拉公式(Eular relation)可知

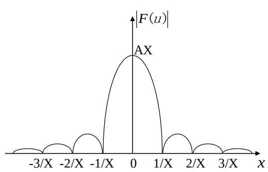
$$e^{-j2\pi ux}=\cos(2\pi ux)-j\sin(2\pi ux)$$
$$e^{j2\pi ux}=\cos(2\pi ux)+j\sin(2\pi ux)$$

$$|F(u)|=\frac{A}{\pi u}|\sin(\pi uX)|=AX\frac{\sin(\pi uX)}{\pi uX}$$

傅里叶变换

例1. 简单函数$f(x)$如图所示:





如果

$$f(x)=e^{-\pi x^2}$$

则

$$F(u)=e^{-\pi u^2}$$

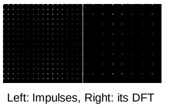
高斯函数的傅立叶变换依然是高斯函数

傅里叶变换

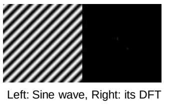
常用函数的傅立叶变换

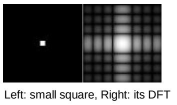
函数	$f(t)$	$F(s)$
高斯	$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi s^2}$
矩形脉冲	$\Pi(t)$	$\frac{\sin(\pi s)}{\pi s}$
三角脉冲	$\Lambda(t)$	$\frac{\sin^2(\pi s)}{\pi s^2}$
冲激	$\delta(t)$	1
单位阶越	$u(t)$	$\frac{1}{2}[\delta(s)-\frac{j}{\pi s}]$
余弦	$\cos(2\pi ft)$	$\frac{1}{2}[\delta(s+f)+\delta(s-f)]$
正弦	$\sin(2\pi ft)$	$j\frac{1}{2}[\delta(s+f)-\delta(s-f)]$
复指数	$e^{j2\pi ft}$	$\delta(s-f)$

傅里叶变换


Left: Impulses, Right: its DFT


Left: Gaussian, Right: its DFT


Left: Sine wave, Right: its DFT


Left: small square, Right: its DFT

傅里叶变换

二. 双变量函数$f(x,y)$的FT (二维FT)

- 一维连续的**FT**可以很容易推广到二维连续的**FT**。

$$\Im\{f(x,y)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy = F(u,v)$$

$$\Im^{-1}\{F(u,v)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)e^{j2\pi(ux+vy)}dxdy = f(x,y)$$

其中 u,v 是频率变量.

$F(x,y)$的傅立叶谱: $|F(u,v)|=\sqrt{R^2(u,v)+I^2(u,v)}$

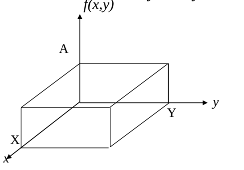
相位$\phi(u,v)$ $\phi(u,v)=\tan^{-1}[I(u,v)/R(u,v)]$

能量谱$E(u,v)$: $E(u,v)=R^2(u,v)+I^2(u,v)$

傅里叶变换

例2 给定二维函数 $f(x,y)$ 如下:

$$f(x,y)=\begin{cases} A & \text{当 } 0\le x\le X\text{时},\ 0\le y\le Y\text{时} \\ 0 & \text{当 } x>X; x<0\text{时},\ y>Y; y<0\text{时} \end{cases}$$



傅里叶变换

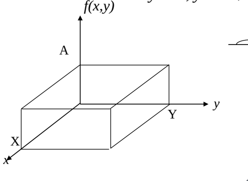
$$\begin{aligned} F(u,v) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy \\ &= A\int_0^X e^{-j2\pi ux}dx\int_0^Y e^{-j2\pi vy}dy \\ &= A[\frac{e^{-j2\pi ux}}{-j2\pi u}]_0^X[\frac{e^{-j2\pi vy}}{-j2\pi v}]_0^Y \\ &= \frac{A}{-j2\pi u}[e^{-j2\pi uX}-1]\cdot\frac{A}{-j2\pi v}[e^{-j2\pi vY}-1] \\ &= AXY[\frac{\sin(\pi ux)\cdot e^{-j\pi uX}}{\pi uX}][\frac{\sin(\pi vy)\cdot e^{-j\pi vY}}{\pi vY}] \end{aligned}$$

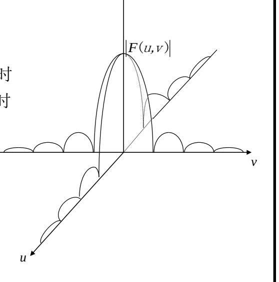
傅立叶谱: $|F(u,v)|= AXY\,|\frac{\sin(\pi uX)}{\pi uX}|\cdot|\frac{\sin(\pi vY)}{\pi vY}|$

傅里叶变换

例2 给定二维函数 $f(x,y)$ 如下:

$$f(x,y)=\begin{cases} A & \text{当 } 0\le x\le X\text{时},\ 0\le y\le Y\text{时} \\ 0 & \text{当 } x>X; x<0\text{时},\ y>Y; y<0\text{时} \end{cases}$$



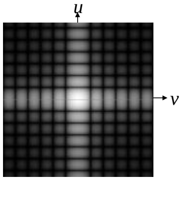


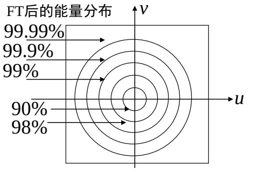
傅里叶变换

三. FT的性质

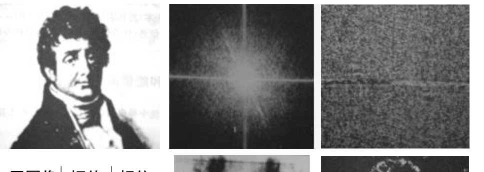
1. 振幅谱图(亮度正比于$|F(u,v)|$的幅度）
2. 能量

一般灰度图像，能量分布在整幅图上，**FT**后能量都集中在原点。另有 $F(0,0)=\bar{f}(x,y)$ 。

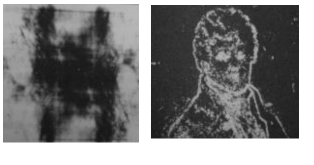




傅里叶变换



原图像	幅值谱图	相位谱图
	幅值谱图重构图像	相位谱图重构图像



傅里叶变换

3. 对称性 **symmetry properties**

(1)奇偶性

$$\text{函数} f_e(x)\text{偶函数} \Leftrightarrow f_e(x)=f_e(-x)$$

$$\text{函数} f_o(x)\text{奇函数} \Leftrightarrow f_o(x)=-f_o(-x)$$

函数非奇非偶，则可拆成奇、偶两部分:

$$f_e(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)] \qquad f_o(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

$$f(x)=f_e(x)+f_o(x)$$

傅里叶变换

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(2\pi ux)dx - j\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(2\pi ux)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_e(x)\cos(2\pi ux)dx + \int_{-\infty}^{\infty} f_o(x)\cos(2\pi ux)dx \\ &\quad - j\int_{-\infty}^{\infty} f_e(x)\sin(2\pi ux)dx - j\int_{-\infty}^{\infty} f_o(x)\sin(2\pi ux)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_e(x)\cos(2\pi ux)dx - j\int_{-\infty}^{\infty} f_o(x)\sin(2\pi ux)dx \\ &= F_e(u) - jF_o(u) \end{aligned}$$

傅氏变换的对称性列表:

a)偶分量函数在变换中产生偶分量函数;

b)奇分量函数在变换中产生奇分量函数;

c)奇分量函数在变换中引入系数-*j*;

d)偶分量函数在变换中不引入系数.

傅里叶变换

(2)虚实分量

一个复函数可表示为：

实部的偶部和奇部，虚部的偶部和奇部

傅氏变换:

a)实偶部产生一个实偶部分;

b)实奇部产生一个虚奇部分;

c)虚偶部产生一个虚偶部分;

d)虚奇部产生一个实奇部分。

通常，我们的图像是实变量函数，因此其傅氏变换为实偶部和虚奇部。因此，它具有共轭对称性。

$F(u)=F^*(-u)$ 其中*表示复共轭

傅里叶变换

4. 加法原理 **the addition theorem**

假设两个傅式变换如下:

$$\Im\{f(x)\}=F(u) \qquad \Im\{g(x)\}=G(u)$$

$$\begin{aligned} \Im\{f(x)+g(x)\} &= \int_{-\infty}^{\infty}[f(x)+g(x)]e^{-j2\pi ux}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}dx + \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-j2\pi ux}dx \\ &= F(u)+G(u) \end{aligned}$$

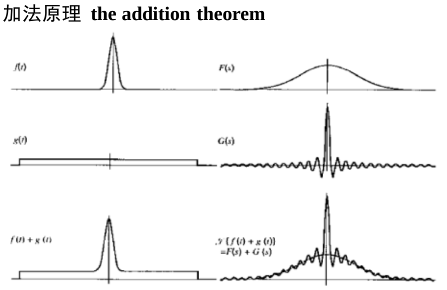
说明：(1)空域或时域中的加法，在频域中也是加法。

(2)从加法原理可得 $\Im\{cf(x)\}=cF(u)$

其中*c*是一个比例常量(rational constant)

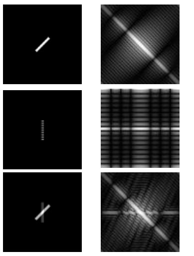
傅里叶变换

4. 加法原理 **the addition theorem**



傅里叶变换

4. 加法原理 **the addition theorem**



傅里叶变换

5. 平移原理 **the shift theorem**

$$\Im\{f(x-a)\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)e^{-j2\pi ux}dx$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)e^{-j2\pi u(x-a)}e^{-j2\pi ua}dx$$

令 $s=x-a$ 则 $ds=dx$

$$\Im\{f(x-a)\}=e^{-j2\pi ua}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-j2\pi us}ds=e^{-j2\pi ua}F(u)$$

如果 $a=0$，则系数为单位1。

结论：函数的平移不改变其傅氏变换后的模值(幅值)
只改变其实部和虚部间的能量分布。

傅里叶变换

6.卷积定理 **the convolution theorem**

一维卷积定义:

$$f*g=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx=A$$

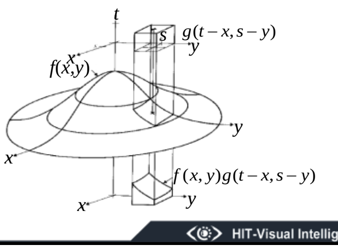
卷积满足 $\begin{cases}\text{交换律}\\ \text{对加法的分配律}\\ \text{结合律}\end{cases}$

傅里叶变换

6.卷积定理 **the convolution theorem**

二维卷积定义：

$$\underset{\text{体积}}{\underset{\uparrow}{h(t,s)}}=f*g=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)g(t-x,s-y)dxdy$$



傅里叶变换

6.卷积定理 **the convolution theorem**

卷积定理

$$\Im\{f(x)*g(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx\cdot e^{-j2\pi ut}dt$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)\cdot e^{-j2\pi ut}dtdx$$
$$\overset{\text{平移原理}}{=}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}G(u)dx$$
$$=F(u)G(u)$$
$$\Im^{-1}\{F(u)G(u)\}=f(t)*g(t)$$

傅里叶变换

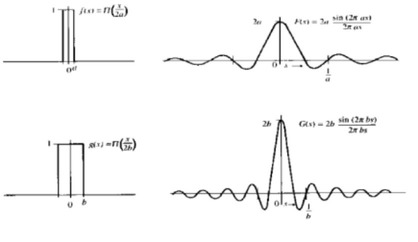
7. 相似性原理 **the similarity theorem**

$$\Im\{f(ax)\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-j2\pi ux}dx$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-j2\pi uax/a}dx$$
$$=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-j2\pi(\frac{u}{a})(ax)}d(ax)$$
$$=\frac{1}{|a|}F(\frac{u}{a})$$

——展缩性质

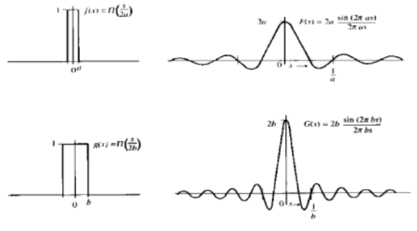
傅里叶变换

7. 相似性原理 **the similarity theorem**



傅里叶变换

7. 相似性原理 **the similarity theorem**



傅里叶变换

8. **the Rayleigh's theorem**

能量函数的定义为 $energy = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$

Rayleigh's原理：$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2 du$

能量守衡：说明变换函数与原函数有相同的能量。

证明：$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f^*(x) dx$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f^*(x) e^{-j2\pi ux} dx \quad (u=0)$$

$$\Im^{-1}\{f(x)f^*(x)\} = F(u) * F^*(-u) \quad (u=0)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(s)F^*(s-u)ds \quad (u=0)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(s)F^*(s)ds \quad (u=0)$$

傅里叶变换

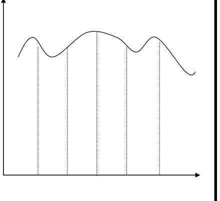
二维傅立叶变换的性质

性质	空域	频域
加法定理	$f(x,y)+g(x,y)$	$F(u,v)+G(u,v)$
相似性定理	$f(ax,by)$	$\frac{1}{\lvert ab\rvert}F\left(\frac{u}{a},\frac{v}{b}\right)$
位移定理	$f(x-a,y-b)$	$e^{-j2\pi(au+bv)}F(u,v)$
卷积定理	$f(x,y)*g(x,y)$	$F(u,v)G(u,v)$
可分离乘积	$f(x)g(y)$	$F(u)G(v)$
微分	$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y)$	$(j2\pi u)^m(j2\pi v)^n F(u,v)$
旋转	$f(x\cos\theta+y\sin\theta,-x\sin\theta+y\cos\theta)$	$F(u\cos\theta+v\sin\theta,-u\sin\theta+v\cos\theta)$
拉普拉斯	$\nabla^2 f(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y)$	$-4\pi^2(u^2+v^2)F(u,v)$
Rayleigh 定理	$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\lvert f(x,y)\rvert^2 dxdy$	$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\lvert F(u,v)\rvert^2 dudv$

傅里叶变换

- 四. 离散的傅立叶变换 **Discrete FT**

假设：取N个相同间隔 Δx 单位的抽样方法，将连续函数 $f(x)$离散化为一个序列：



$\{f(x_0), f(x_0+\Delta x), f(x_0+2\Delta x), \cdots, f(x_0+(N-1)\Delta x)\}$

则有 $f(x_i) = f(x_0 + i\Delta x)$

其中$x_0 = 0, x = 0,1,2,\cdots,N-1$

$\rightarrow \{f(0), f(1), f(2), \cdots, f(N-1)\}$

傅里叶变换

一维离散的傅立叶变换时：

$$F(u) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f(i) e^{-j2\pi ui/N} \quad 其中\ u = 0,1,2,\cdots,N-1$$

$$f(i) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{j2\pi ui/N} \quad 其中\ i = 0,1,2,\cdots,N-1$$

傅氏级数展开：

$$F_n = F(n\Delta u) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-j2\pi(n\Delta ux)} dx \quad 其中T是周期，\Delta u = \frac{1}{T}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F(n\Delta u) e^{j2\pi(n\Delta ux)} \Delta u = \frac{1}{T}\sum_{n=0}^{\infty} F_n e^{j2\pi(\frac{n}{T}x)}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi\frac{n}{T}x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi\frac{n}{T}x)$$

$$其中 a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(2\pi\frac{n}{T}x)dx, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(2\pi\frac{n}{T}x)dx$$

傅里叶变换

二维离散的傅立叶变换：

设 x 轴取样N点，间隔为Δx

设 y 轴取样N点，间隔为Δy

$$f(i,j) = f(i\Delta x, j\Delta y)$$

其中 $\begin{cases} i = 0,1,2,\cdots,M-1 \\ j = 0,1,2,\cdots,N-1 \end{cases}$

同理 $F(u,v) = F(u\Delta u, v\Delta v)$

其中 $\begin{cases} u = 0,1,2,\cdots,M-1 \\ v = 0,1,2,\cdots,N-1 \end{cases}$

傅里叶变换

于是，傅氏变换对：

$$F(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

其中 $\begin{cases}u=0,1,2,\cdots,M-1\\ v=0,1,2,\cdots,N-1\end{cases}$

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

其中 $\begin{cases}x=0,1,2,\cdots,M-1\\ y=0,1,2,\cdots,N-1\end{cases}$

傅里叶变换

二维离散傅氏变换的性质：

1. 可分离性

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}e^{-j2\pi ux/N}\cdot\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi vy/N}$$

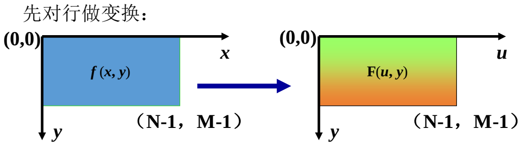
其中 $u,v=0,1,2,\cdots,N-1$

$$f(x,y)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}e^{j2\pi ux/N}\cdot\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{j2\pi vy/N}$$

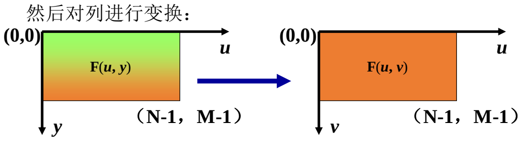
其中 $x,y=0,1,2,\cdots,N-1$

傅里叶变换

先对行做变换：

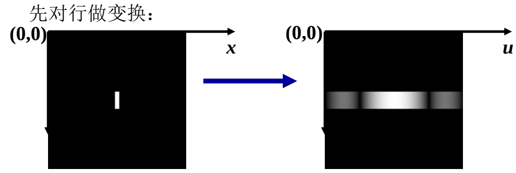


然后对列进行变换：

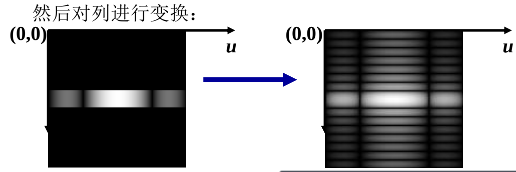


傅里叶变换

先对行做变换：



然后对列进行变换：



傅里叶变换

说明：这种可分离性的主要优点是可把二维FT分成两部，而变为一维FT处理。

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}F(x,v)e^{-j2\pi ux/N}$$

$$F(x,v)=N\cdot[\frac{1}{N}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi vy/N}]$$

- 2. 线性性质

$$\Im\{af(x,y)+bg(x,y)\}=a\Im\{f(x,y)\}+b\Im\{g(x,y)\}$$

其中 a, b 为常数。

傅里叶变换

3. 比例性

$$\Im\{af(x,y)\}=a\Im\{f(x,y)\}=aF(u,v)$$

$$\Im\{f(ax,by)\}=\frac{1}{|ab|}F(\frac{u}{a},\frac{v}{b})$$

4. 周期性

离散傅氏变换及其逆变换有周期性，以N为周期重复。

$F(u)=F(u+N)$ ——一维形式

傅里叶变换

10. Parseval定理

——能量保持定理

连续的二维情形:

$$\int\int_{-\infty}^{\infty} | f(x,y)|^2 dxdy = \int\int_{-\infty}^{\infty} | F(u,v)|^2 dudv$$

离散的二维情形:

$$\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f^2(x,y) = \frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} | F(u,v)|^2$$

傅里叶变换

- 11. 相关

1.一维连续自相关 **autocorrelation function**

$$R_f(\tau) = f(x) * f(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f(x+\tau) dx$$

自卷积 **self-convolution**

$$f(x) * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f(\tau - x) dx$$

2.一维连续协相关 **cross-correlation function**

$$R_{fg}(\tau) = f(x) * g(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(\tau + x) dx$$

3.二维连续协相关函数定义

$$R_{fg}(m,n) = \int\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) g(x+m, y+n) dxdy$$

傅里叶变换

- 五. 快速傅立叶变换 **Fast FT**

——用共轭性质将逆离散傅立叶变换(IDFT)
变为其共轭数的正离散傅立叶变换

共轭性质:

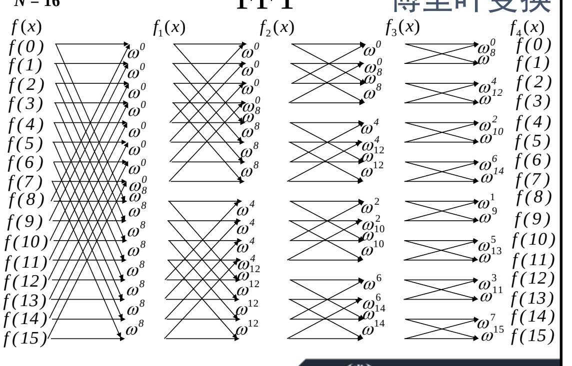
$(A+B)^* = A^* + B^*$ 和数的共轭 = 共轭数的和

$(A \cdot B)^* = A^* \cdot B^*$ 乘积的共轭 = 共轭数的积

$x = x^*$ 当x为实数时

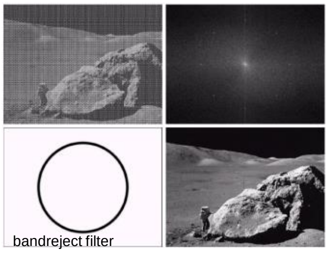
傅里叶变换

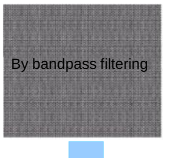
FFT



傅里叶变换

傅里叶变换应用举例——图像去燥

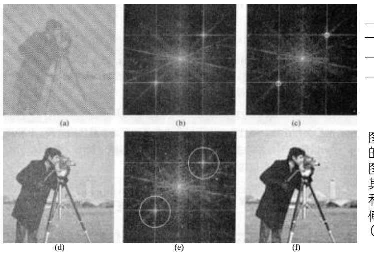




Help understanding noise pattern

傅里叶变换

傅里叶变换应用举例——图像去燥



傅立叶变换

函数	$f(t)$	$F(s)$
余弦	$\cos(2\pi ft)$	$\frac{1}{2}[\delta(s+f)+\delta(s-f)]$
正弦	$\sin(2\pi ft)$	$j\frac{1}{2}[\delta(s+f)-\delta(s-f)]$

图(a)为一幅受正弦干扰模式覆盖的图像。
图(b)是(a)的傅立叶频谱幅度图，其上有一对较明显的脉冲白点。
利用带阻滤波器除掉亮点。然后取傅立叶反变换，就可得到图(d)和(f)所示的恢复效果。

Z变换

- 引入z变换的主要原因是傅里叶变换不是对所有序列都收敛，能有一个包括更广泛信号的傅里叶变换的推广形式的有用的。
- z变换把描述离散系统的差分方程，变换成代数方程，使其求解过程得到简化。这一作用类似连续时间系统的拉普拉斯变换。
- 离散时间信号的z变换和连续时间信号的拉普拉斯变换是相互对应的。

Z变换

- z变换的定义

任意序列 $x(n)$ 的离散时间傅里叶变换（$DTFT$）可以表示为：

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$$

其反变换为

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

据此，序列$x(n)$的z变换 $X(z)$ 定义为：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

Z变换

双边 Z 变换：$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$

单边 Z 变换又分右边序列和左边序列：

右边序列：$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$

左边序列：$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{0}x(n)z^{-n}$

常用函数的傅立叶变换

函数	$f(t)$	$F(s)$
高斯	$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi s^2}$
矩形脉冲	$\Pi(t)$	$\frac{\sin(\pi s)}{\pi s}$
三角脉冲	$\Lambda(t)$	$\frac{\sin^2(\pi s)}{\pi s^2}$
冲激	$\delta(t)$	1
单位阶越	$u(t)$	$\frac{1}{2}[\delta(s)-\frac{j}{\pi s}]$
余弦	$\cos(2\pi ft)$	$\frac{1}{2}[\delta(s+f)+\delta(s-f)]$
正弦	$\sin(2\pi ft)$	$j\frac{1}{2}[\delta(s+f)-\delta(s-f)]$
复指数	$e^{j2\pi ft}$	$\delta(s-f)$

Z变换

典型序列的Z变换

1）离散冲激信号：$\delta(n)$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(n)z^{-n}=1$$

2）阶跃信号：$u(n)$

$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}$，采用等比序列求和公式

Z变换

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}u(n)z^{-n}=\left.\frac{[1-(\frac{1}{z})^N]}{1-\frac{1}{Z}}\right|_{N\to\infty}=\left.\frac{z[1-(\frac{1}{z})^N]}{z-1}\right|_{N\to\infty},$$

等比无穷序列要收敛，要求后项与前项的比值的模必须小于 1，即要求$|z|>1$，有：

$$X(z)=\frac{z}{z-1}$$

Z变换

3) 斜线信号：$x(n)=nu(n)$，

根据：$\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}=\frac{1}{1-1/z}$，$|z|>1$（前面阶跃信号 Z 变换的结果）

将等式两边分别对 z^{-1} 求导：

$\sum_{n=0}^{\infty} nz^{-(n-1)}=\frac{1}{(1-1/z)^2}$，即

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n}=\frac{1}{(1-1/z)^2\cdot z}=\frac{z}{(z-1)^2}$$

Z变换

4）指数序列：$x(n)=a^n u(n)$，

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}=\left.\frac{1-(a/z)^N}{1-a/z}\right|_{N\to\infty}=\frac{z}{z-a}$$

为保证收敛要求：$|z|>|a|$

Z变换

Z变换的收敛域

- 傅里叶变换的幂级数不是对所有序列都收敛，也就是说该无穷项之和可能不总是有限的。同样，z变换也不是对所有序列或对全部z值都收敛。
- 对给定的序列，使z变换收敛的那些z值就称为**z变换的收敛域**，缩写ROC.

Z变换

傅里叶变换的一致收敛要求序列是绝对可和的，那么z变换收敛的收敛条件为：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)r^{-n}\right|<\infty$$

由于序列乘以实指数 r^{-n}，有可能傅里叶变换不存在时，z变换收敛。如阶跃序列 $x(n)=u(n)$ 不是绝对可和的，因此它的傅里叶变换不收敛。然而 $x(n)r^{-n}$ 在 $r>1$ 时是绝对可和的，这表明阶跃序列 $x(n)=u(n)$ 的z变换在收敛域$|z|>1$内存在。

Z变换

1、线性

若 $x(n)$ 的 Z 变换为 $X(z)$，$y(n)$ 的 Z 变换为 $Y(z)$，

则：

$a\cdot x(n)+b\cdot y(n)$ 的 Z 变换为 $a\cdot X(z)+b\cdot Y(z)$

Z变换

2、时移

若 $x(n)$ 的 Z 变换为 $X(z)$

则：

$x(n-m)$ 的 Z 变换为 $z^{-m}\cdot X(z)$

Z变换

3、Z域微分

若 $x(n)$ 的 Z 变换为 $X(z)$

则：

$nx(n)$ 的 Z 变换为 $-z\dfrac{d[X(z)]}{dz}$

Z变换

4、初值定理

若 $x(n)$ 的 Z 变换为 $X(z)$

则：

$x(0)=\lim\limits_{z\to\infty}X(z)$

Z变换

5、终值定理

若 $x(n)$ 的 Z 变换为 $X(z)$

则：

$\lim\limits_{n\to\infty}x(n)=\lim\limits_{z\to 1}[(z-1)X(z)]$

Z变换

逆Z变换

1、长除法

例：求 $X(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2}$ 的逆变换 $x(n)$

做长除有：

$X(z)=z^{-1}+2z^{-2}+\cdots+nz^{-n}$

所以有：$x(n)=nu(n)$

可见，长除法是将 Z 变换分解成一个累加序列然后总结规律。

2、部分分式展开法

这一方法同拉氏反变换中的方法基本相同

例：求 $X(z)=\dfrac{z^2}{z^2-1.5z+0.5}$ 的逆变换 $x(n)$

$X(z)=\dfrac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}=\dfrac{2z}{z-1}-\dfrac{z}{z-0.5}$

所以有：$x(n)=(2-0.5^n)u(n)$

Z变换

F变换应用——消除匀速直线运动模糊

例：设平面匀速运动景物图像 $f(x,y)$，采集时间是 T，并设 $x_0(t)$ 和 $y_0(t)$ 分别是景物在 x 方向和 y 方向的运动分量，由于运动造成的模糊图像为 $g(x,y)$，其它因素忽略，包括噪声，则：

Z变换

Z变换应用——消除匀速直线运动模糊

在曝光时间 T 内，像素点 0 接受的不只是 $f(0)$ 的信息，而是 N 个采样点的信息在此位置上的叠加。

$$g(0)=f(0)+f(1)+\cdots+f(N-2)+f(N-1)$$

考虑到每个采样点在CCD像素上的曝光量的贡献，上式可写为

$$g(0)=\frac{1}{N}[f(0)+f(1)+\cdots+f(N-2)+f(N-1)]$$

而在CCD像素点1上接受的信息

$$g(1)=\frac{1}{N}[f(1)+f(2)+\cdots+f(N-2)+f(N-1)+f(N)]$$

对在CCD上任意一个像素点 n 来说，

$$g(n)=\frac{1}{N}[f(n)+f(n+1)+\cdots+f(n+N-2)+f(n+N-1)]$$

Z变换

Z变换应用——消除匀速直线运动模糊

对上式进行Z变换，则有

$$G(z)=\frac{1}{N}[F(z)+F(z)z+F(z)z^2+\cdots+F(z)z^{N-1}]$$

$G(z),F(z)$ 分别是 $g(n),f(n)$ 的 Z变换。

$$G(z)=\frac{1}{N}F(z)[1+z+z^2+\cdots+z^{N-1}]$$

由卷积定理得

$$H(z)=\frac{G(z)}{F(z)}=\frac{1}{N}[1+z+z^2+\cdots+z^{N-1}]=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{n-1}z^i$$

$$=\frac{1}{N}\cdot\frac{1-z^N}{1-z}$$

Z变换

Z变换应用——消除匀速直线运动模糊

$$\frac{G(z)}{F(z)}=\frac{1}{N}\cdot\frac{1-z^N}{1-z}$$

$$(1-z)\cdot G(z)=\frac{1}{N}\cdot F(z)\cdot(1-z^N)$$

$$G(z)-zG(z)=\frac{1}{N}\cdot[F(z)-z^N F(z)]$$

对方程两边分别进行反 Z变换，则有

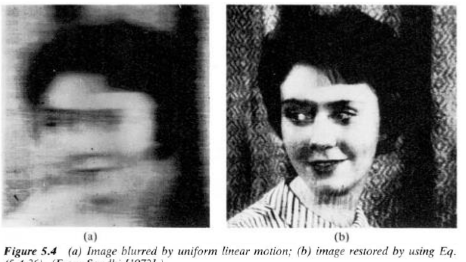
$$g(n)-g(n+1)=\frac{1}{N}\cdot[f(n)-f(n+N)]$$

$$f(n)=Ng(n)-Ng(n+1)+f(n+N)$$

Z变换

Z变换应用——消除匀速直线运动模糊

$$f(x,y)\approx A-\frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{j=0}^{k}g'[x-ma+(k-j)a,y]+\sum_{j=0}^{m}g'(x-ja,y)\quad(5.4\text{-}36)$$



(a) (b)

Figure 5.4 (a) Image blurred by uniform linear motion; (b) image restored by using Eq. (5.4-36). (From Sondhi [1972].)

视听觉信号处理

Visual-Audio Signal Processing