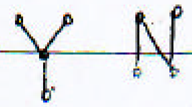
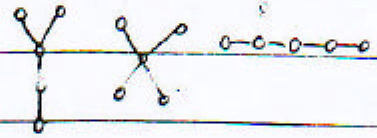
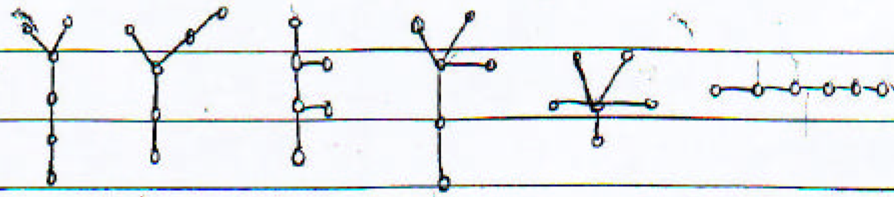
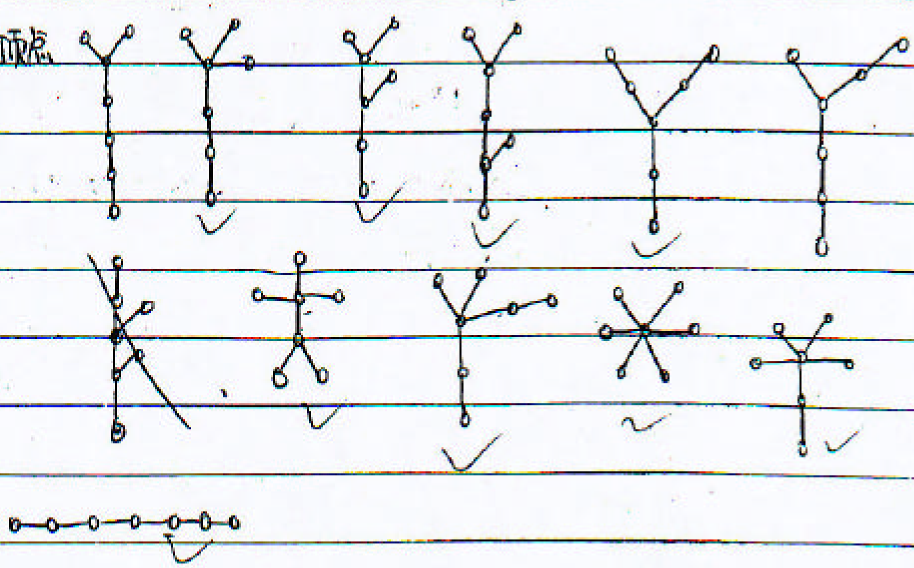
P243 习题7.1

1. 4顶点树  5顶点树 

6顶点 

7顶点 

2. 证明非平凡树是偶图

证明: 由偶图充分必要条件所有回路均为偶数长,

而非平凡树回路数长为零(即偶数)

∴非平凡树是偶图

3. 设 $a_1, a_2, \cdots a_p$ 是 p 个正整数, $p \geq 2$ 并且 $\sum_{1}^{p} a_p = 2(p-1)$。证明存在一棵有 p 顶点的树,

它各个顶点度为 $a_1, a_2 \cdots a_p$.

证明：由归纳证明法。当 $p=2$ 时，显然成立.

$p=3$ 时，$a_1+a_2=2$，则 $a_1=a_2=1$ 即

假设对 $p-1$ 成立，已知 $\sum_{i=1}^{p} a_i=2(p-1)$ 要证有树 p 其顶点为 $a_1, \cdots a_p$

$\because a_1, \cdots a_p$ 中必有一值为 1,（否则 $\sum_{i=1}^{p} a_i \geq 2p$）且定有 a_i 不小于 2,（否则 $\sum_{i=1}^{p} a_i=p$）

则不妨设 $a_1=1, a_2 \geq 2$

考虑 $a_2-1, a_3, \cdots a_p$ 于是 $a_2+a_3+\cdots a_p=\sum_{i=1}^{p} a_p-1-1=2p-4=2[(p-1)-1]$

由归纳对 $p-1$ 成立，有一树 其度分为 $a_2-1, a_3 \cdots a_p$. 特别设 $\deg v=a_2-1$

则 p' 外一点 u 连 uv 既得 即为树 p.

[证毕]

4 设 G 是一棵树且 $\Delta(G) \geq k$，证明 k 中至少有 k 个度为 1 顶点.

证明：设 m 个顶点具有 $\Delta(G)$，设 x 个度为 1 顶点 则其余 $p-m-k$ 个顶点度至少为 2

$$\therefore \sum \deg u \geq m \Delta(G)+x \cdot 1+2(p-m-k)$$

$$= mk+x+2(p-m-k).$$

又由 $\sum \deg u=2q$

$$\therefore \underset{=2p-2}{2q} \geq mk+x+2p-2m-2k$$

变形 $x \geq m(k-2)+2 \geq k-2+2=k$

$\therefore$ 至少有 k 个度为 1 顶点

5. 令 G 一个有 p 顶点，k 个支森林，证明 G 有 $p-k$ 条边.

证明 由 G 有 k 个支 则设 m_i 为每个树的顶点数 $\sum_{i=1}^{k} m_i=p$.

在每个树中 $q_i=m_i-1$

$$\therefore q=\sum_{i=1}^{k} q_i=\sum_{i=1}^{k}(m_i-1)=\sum_{i=1}^{k} m_i-k=p-k.$$

[证毕]

(设T是一个k+1顶点树，证明：如果图G最小度 $\delta(G)\geq k$，则G有一同构于T子图。（题设 $\Delta(G)\geq k$ 不成立）)

证明：施归纳 $k=0$时，T是平凡树，显然结论成立。

假设对 $k\geq 0$正确，往证对$k+1$也成立。已知T是$(k+1)+1$个顶点树，$\delta(G)\geq k+1$。

设 $\deg v=\delta(G)\geq k+1$，从G中去掉一条与v关联的边得到G_1，$\delta(G_1)\geq k$，去掉T的一个叶子得到T_1——有$k+1$个顶点，由归纳假设有子图 G'同构于T_1。

从而G有子图同构于T。

7. 解 $q=\dfrac{2n\cdot 1+3n\cdot 2+n\cdot 3}{2}=5.5n$

$p=q+1=5.5n+1=6n \Rightarrow n=2.$

8. 一棵树T有n_2个度为2顶点，…n_k个度为k顶点，则T有多少个度为1顶点？

解 设有n_1个度为1顶点。

$p=n_2+n_3+\cdots+n_k+n_1$

$q=(n_1+2n_2+3n_3+\cdots+kn_k)/2$.

又 $p=q+1 \Rightarrow n_1+\sum_{i=2}^{k}n_i=\dfrac{n_1+\sum_{i=2}^{k}in_i}{2}$

$\therefore n_1=\sum_{i=2}^{k}in_k-2\sum_{i=2}^{k}n_i$.

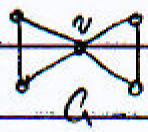
5. 设v是图G的一个顶点，证明：v是G的割点当且仅当存在邻接v的两个不同顶点u和w，使得v在u和w间的每一条路上。

证明：充分性。v是G的割点，则V\{v}的一个划分{U,W}，取u∈U，w∈W，且u,w与v相邻接，则v在u、w间每一条路上。

必要性。若~~v在u、w~~ 顶点u、w与v相邻接，且v在u,w的每一条路上，若v不是割点，则G−v中一定连通，因而u,w至少有一条路，且v不在其上，故而产生矛盾。因此v是割点。

9. 有割点的连通图是否一定不是欧拉图？是否一定不是哈密顿图？有桥的连通图是否一定不是欧拉图和哈密顿图？

解：(1) 有割点的连通图可以是欧拉图。如图：



v是割点，但图G却是欧拉图。

(2) 一定不是哈密顿图。否则，存在一个哈密顿圈，包含所有顶点，当去掉v点时，图仍连通，故哈密顿图中不可能有割点。

(3) 一定不是欧拉图。因为一个欧拉图是一个生成闭迹，去掉任意一边，该图仍连通。故不存在桥。

也不可能是哈密顿图。否则，存在一个划分{U,W}，设u∈U，w∈W，桥x连接u，w的每一条边上，则从u到v的路无法构成一个圈，因此不存在哈密顿圈。

习题7.3

1. p个顶点的欧拉图，最多有多少个割点？

至多有 $p-2$ 个顶点。

2. 证明：恰有两个顶点不是割点的连通图是一条路。

证：假设恰有两个顶点不是割点的割点的连通图 G 不是一条路，不妨设 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 是图 G 中最长路，剩余顶点为 $u_1,u_2,\cdots,u_m$，则 v_1,v_n 一定不是割点，否则 $u_1,\cdots,u_m$ 中一定有与 v_1 或 v_n 相邻接的点，则 $v_1\cdots v_n$ 不是最长路。由于 G 是连通的，$u_1\cdots u_m$ 一定与 $v_1\cdots,v_n$ 最长路相连，故而至少有一顶点不是割点，矛盾。因此 G 是路。

3. 证明：有一条桥的三次图中至少有10个顶点。

证：设三次图有 p 个顶点，q 条边，则 $p=\frac{2}{3}q$。当 $q=3$ 时，$p=2$ 显然不成立；$q=6$ 时，$p=4$，这图是一完全图，不可能有桥；$q=9$，$p=6$，若图中有桥，去掉桥形成两个支，每个支必有3个点，但最多有3条边，即 $3+3+1=7<9$，故 $p\neq 6$；$q=12$ 时，$p=8$，去掉桥的两支各有4个顶点，不可能出现3个度为3，1个度为2的情况，$\therefore p\neq$

因此 $p\geq 10$。

4. 设 v 是图 G 的一个割点，证明 v 不是 G 的补图 G^c 的割点。

证：反证法，假设 v 是 G^c 的割点。因 v 是 G 的割点，故存在 $V\setminus\{v\}$ 的一个二划分 $\{U,W\}$，使得 $u_1\in U$，w_1 v 在联结 u 和 w 的每条路上。又 v 是 G^c 的割点，对于二划分 $\{U,W\}$，$u_1\in U$，$w_1\in W$，v 也在 u,w 的每条路上，但这显然不可能。故 v 不是 G^c 的割点。

仅供参考