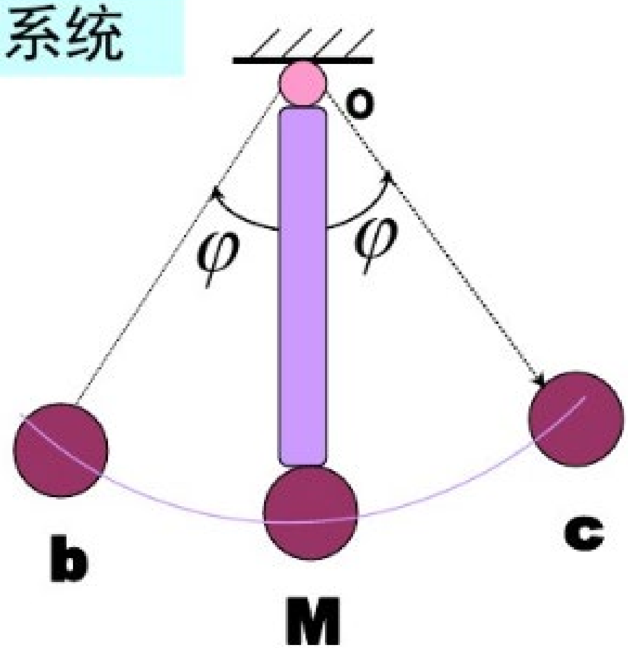
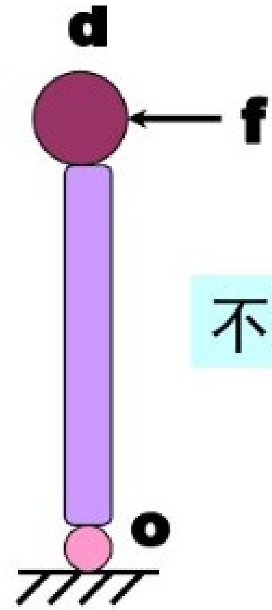
系统稳定性分析

一个系统受到扰动，偏离了原来的平衡状态，而当扰动取消后，这个系统又能够逐渐恢复到原来的状态，则称系统是稳定的。否则，称这个系统是不稳定的。

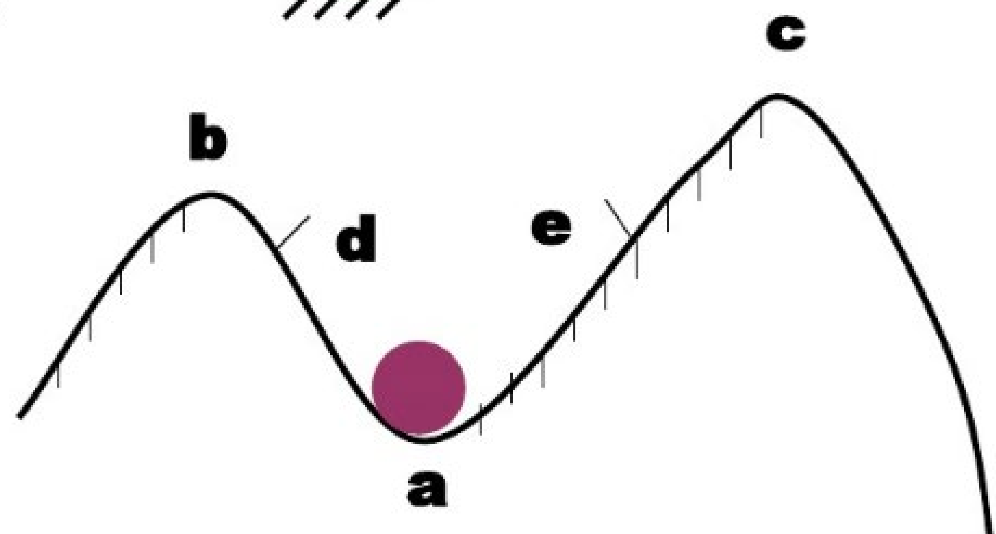
稳定系统





不稳定系统

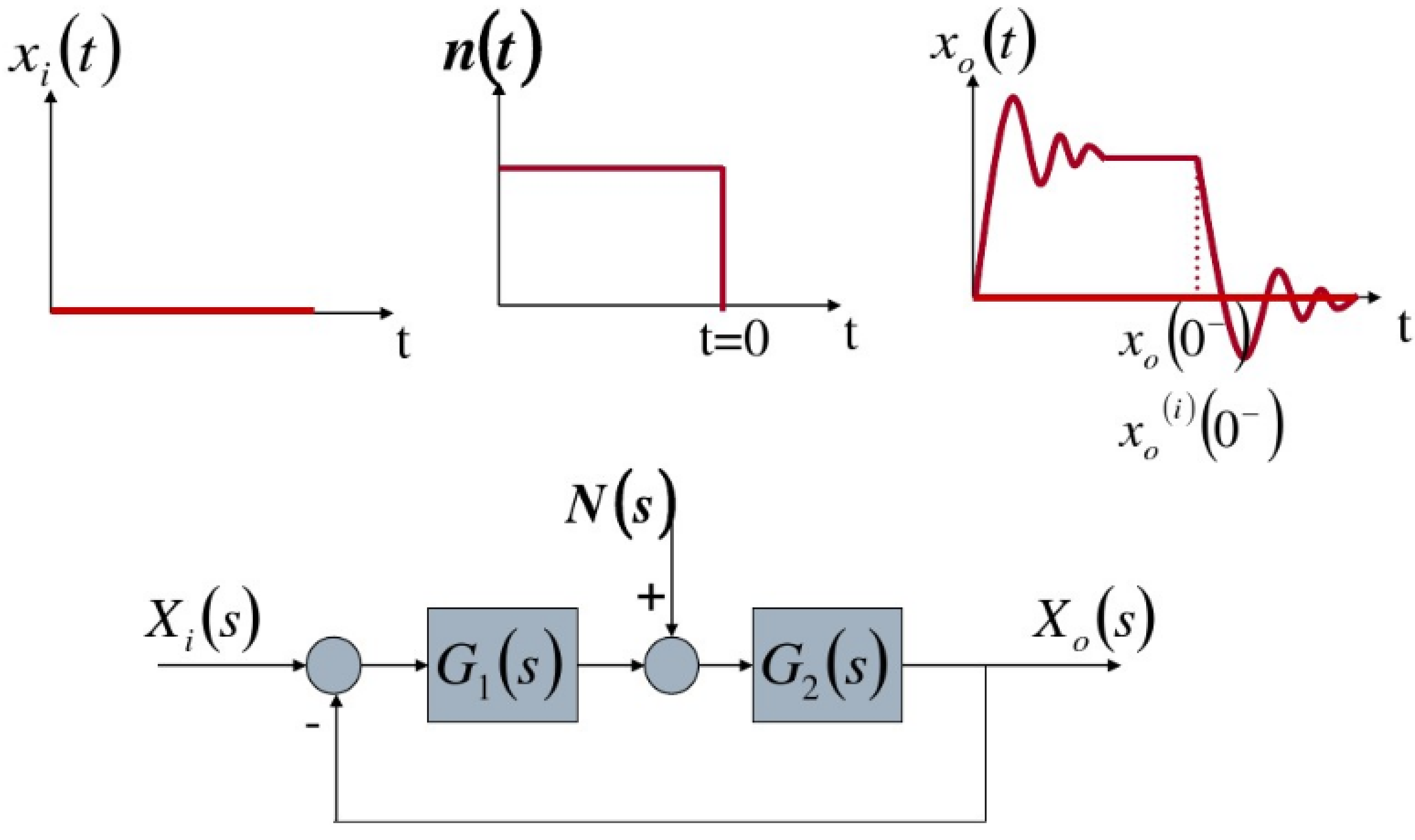
条件稳定系统



稳定性反映在干扰消失后的过渡过程的性质上。这样，在干扰消失的时刻，系统与平衡状态的偏差可以看作是系统的初始偏差。因此，控制系统的稳定性也可以这样定义：

若控制系统在任何足够小的初始偏差作用下，其过渡过程随着时间的推移，逐渐衰减并趋于零，具有恢复原平衡状态的性能，则称该系统稳定。否则，称该系统不稳定。

系统稳定的充要条件



根据稳定性定义，如果系统稳定，当t趋向无穷大时，齐次方程的解趋于0.

$$x_0(t)=\sum_{i=1}^{k} D_i e^{\lambda_i t}+\sum_{j=k+1}^{n} e^{\delta_j t}(E_j\cos\omega_j t+F_j\sin\omega_j t)$$

系统稳定的充分必要条件是

$$\lambda_i<0 \qquad \delta_j<0$$

λ_i，δ_j对应闭环系统传递函数 特征根的实部，因此对于线性定常系统 ，若系统所有特征根的 实部均为负值，则零输入响 应最终衰减到零，这样 的系统是稳定的。

反之，若特征根中有一个或多个根具有正实部，则零输入响应将随时间的推移而发散，这样的系统就不稳定。

可见，系统稳定与否与系统的传递函数的分母=0构成的方程式$1+G(s)H(s)=0$即

$$D(s)= a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

的根在复平面的分布有关，将其命名为系统闭环特征方程式。

控制系统稳定的充分必要条件是：

系统闭环特征方程式的根全部具有负实部。

或闭环传递函数的极点全部具有负实部（位于左半s平面）。

稳定性是控制系统自身的固有特性，它取决于系统本身的结构和参数，而与输入无关；控制理论所讨论的稳定性都是指自由振荡下的稳定性，即讨论输入为零，系统仅存在初始偏差时的稳定性，即讨论自由振荡是收敛的还是发散的。

为避开对特征方程的直接求解，就只好讨论特征根的分布，看其是否全部具有负实部，并以此来判断系统的稳定性。这就产生了一系列稳定判据。

劳斯(Routh)判据

假若劳斯阵列表中第一列系数均为正数，则该系统是稳定的，即特征方程所有的根均位于根平面的左半平面。假若第一列系数有负数，则第一列系数符号的改变次数等于在右半平面上根的个数

系统特征方程为：

$$D(s)=a_0s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n=0$$

稳定的必要条件：

$a_i > 0 \quad (i = 0,1,2\ldots,n)$

稳定的充分条件：

劳斯阵列中第一列所有项>0

$$D(s)=a_0s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n=0$$

$$\begin{array}{l|lllll}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
s^{n-1} & \boxed{a_1} & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
s^{n-2} & \boxed{b_1} & b_2 & b_3 & \cdots & \\
s^{n-3} & \boxed{c_1} & c_2 & c_3 & \cdots & \\
\vdots & & & & & \\
s^2 & & & & & \\
s^1 & & & & & \\
s^0 & & & & &
\end{array}$$

$$b_1=\frac{a_1a_2-a_0a_3}{a_1}$$

$$b_2=\frac{a_1a_4-a_0a_5}{a_1}$$

$$b_3=\frac{a_1a_6-a_0a_7}{a_1}$$

$\cdots$

$$c_1=\frac{b_1a_3-a_1b_2}{b_1}$$

$$c_2=\frac{b_1a_5-a_1b_3}{b_1}$$

$\cdots$

一直计算到最后一行算完为止。然后判断阵列中第一列系数的符号，若全部>0, 则系统稳定；否则，第一列系数符号改变的次数，就为特征方程在右半s平面的根数。

例1、系统特征方程为：

$$D(s)=s^4+2s^3+3s^2+4s+3=0$$ 判断系统稳定性

解：满足必要条件

s^4	1	3	3
s^3	2	4	0
s^2	1	3	
s^1	-2		
s^0	3		

劳斯阵列第一列符号改变2次，$D(s)$有2个右根，$\therefore$ 系统不稳定。

劳斯判据的两种特殊情况：

1、某一行第一个元素为零，而其余各元素均不为零、或部分不为零；

2、某一行所有元素均为零。

1、某一行第一个元素为零

例3: $D(s)=s^4+3s^3+s^2+3s+1=0$ 判断系统稳定性

s^4	1	1	1
s^3	3	3	
s^2	ε $\cancel{0}$	1	
s^1	$\dfrac{3\varepsilon-3}{\varepsilon}$		
s^0	1		

第一列系数符号改变两次，系统有两个右根，所以，系统不稳定。

例4: $D(s)=s^3+2s^2+s+2=0$ 判断系统稳定性

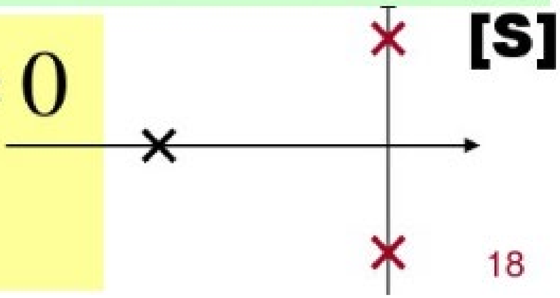
s^3	1	1
s^2	2	2
s^1	ε $\cancel{0}$	
s^0	2	

第一列系数符号无改变，故系统没有正实部的根。

s^1行为0，表明系统有一对共轭虚根，所以，系统临界稳定。

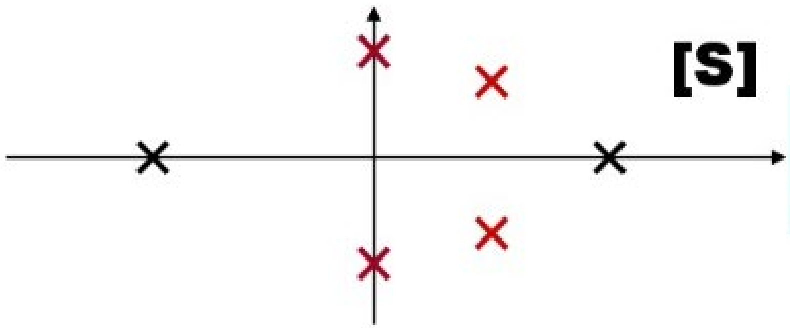
$$s^3+2s^2+s+2=(s^2+1)(s+2)=0$$

$$s=\pm j, s=-2$$



2、某一行所有元素均为零

表明在 **S** 平面内存在大小相等但位置径向相反的根，即存在两个大小相等、符号相反的实根和（或）一对共轭虚根。



显然，这些根的数目一定是偶数。

由该行的上一行元素来解决：

（**1**）构成辅助多项式，并求导，用其系数代替全为零的行；

（**2**）构成辅助方程，并解出这些大小相等但位置径向相反的特征根。

例5：$D(s)=s^6+2s^5+8s^4+12s^3+20s^2+16s+16=0$

s^6	1	8	20	16
s^5	2	12	16	
s^4	$\cancel{2}$ 1	$\cancel{12}$ 6	$\cancel{16}$ 8	
s^3	$\cancel{0}$ 4	$\cancel{0}$ 12		
s^2	3	8		
s^1	$4/3$			
s^0	8			

辅助多项式

s^4+6s^2+8

求导：$4s^3+12s$

辅助方程

$s^4+6s^2+8=0$

$(s^2+2)(s^2+4)=0$

$s_{1.2}=\pm j\sqrt{2}$

$s_{3.4}=\pm j2$

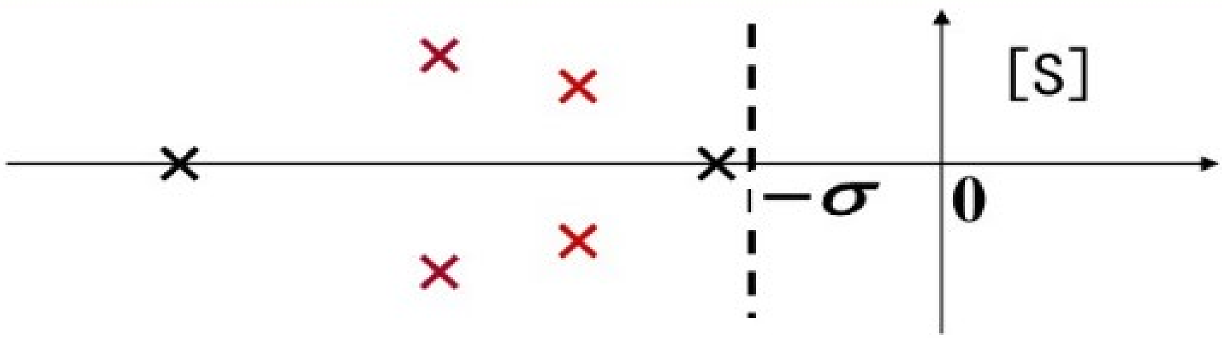
系统临界稳定

第一列符号全为正，说明系统无右根，但有共轭虚根，可由辅助方程解出。

控制系统的相对稳定性

一、利用劳斯判据看系统相对稳定性

如果系统闭环特征根均 在s左半平面，且和虚轴有一段距离，则系 统有一定的稳定裕量。



向左平移虚轴 σ，令$z=s-(-\sigma)$，即将$s=z-\sigma$代入系统特征式，得到 z的方程式，再应用劳斯判据，即可 求出距离虚轴 σ以右是否有根。

例5－19 $\dfrac{X_o(s)}{X_i(s)} = \dfrac{10000(0.3s+1)}{s^4+10s^3+35s^2+50s+24}$

判断系统在 s平面的 -1右边有没有闭环特征根

解：令$z = s-(-1)$，

即$s = z-1$代入系统特征式，得

$$(z-1)^4+10(z-1)^3+35(z-1)^2+50(z-1)+24=0$$

即 $$z^4+6z^3+11z^2+6z=0$$

（1）不满足系统稳定的必要条件：

特征方程中各项系数>0

即 Z^0系数为0，说明系统特征根

并不都在z平面（s=-1）左侧

（2）列劳斯表

Z^4	1	11	0
Z^3	6	6	
Z^2	10	0	
Z^1	6		
Z^0	0		

劳斯判据第一列未变号，说明z（s=-1）右半面无根），但最后元素为0，说明有共轭虚根或零根：令 $z = j\omega$ ，代入特征方程：

$$(j\omega)^4 + 6(j\omega)^3 + 11(j\omega)^2 + 6(j\omega) = 0$$

解出：$\omega = 0$

即有零根 $z = 0$ 即 $s = -1$