离散时间系统

- 离散时间信号与系统
- Z变换
- 常系数差分方程的求解
- 单位样值响应、卷积、反卷积

§ 2.1 离散时间信号与系统

一、引言

1. 离散时间系统的研究历史

①17世纪经典数值分析技术---奠定了数学基础

②20世纪40和50年代抽样数据控制系统研究得到了重大发展

③60年代以后计算机发展、FFT算法、超大数模集成电路

④20世纪末期数字信号处理技术继续发展、应用日益广泛

§2.1 离散时间信号与系统

2．离散时间系统与连续时间系统的对比

	离散	连续
数学模型	差分方程	微分方程
时域求解方法	卷积和	卷积
变换域	Z变换、傅氏、离散正交系统函数	傅氏、拉氏、系统函数
	精度高、可靠性好、 重量体积小、便于大规模集成	无此优点
	一维、二维系统	注重一维
	利用可编程元件技术、 存储器设备灵活通用	无此优点
	工作频率不能太高	工作频率可以很高

§2.1 离散时间信号与系统

3．物联网-----连续、离散“混合系统”

①充分数字化的通信系统

②可看成一台带有天线的超级计算机

③通用化、模块化、兼容性、灵活性好

④显示了数字化技术的特征，也证明了连续系统的必要性

§ 2.1 离散时间信号与系统

二、离散时间信号-----序列

1．离散时间信号的定义及其表示方法

①定义：只在某些离散瞬时给出函数值，时间上不连续的序列，离散时间间隔是均匀的

②$x(nT)$：T为时间间隔，nT称为时间宗量,一般记为 $x(n)$ $\{x(n)\}$

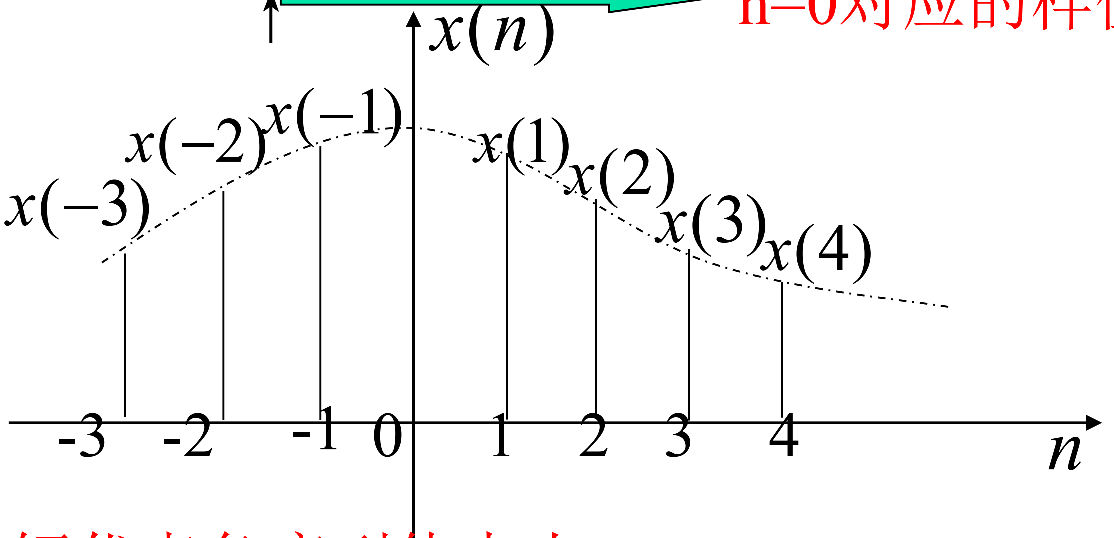
③闭式表达式；逐个列出；波形(图解)表示

§ 2.1 离散时间信号与系统

例1． ① $x(n)=2n+3$

② $x(n)=\{3,5,7,9,\underset{\uparrow}{21},63,41\}$ n=0对应的样值

③



*线段长短代表各序列值大小

*横轴只在n=整数时才有意义

§ 2.1 离散时间信号与系统

2．离散时间信号的运算

①相加 $z(n)=x(n)+y(n)$ $\quad \{1,3,\underset{\uparrow}{5},7\}+\{\underset{\uparrow}{2},4,6,8\}=\{1,3,\underset{\uparrow}{7},11,6,8\}$

②相乘 $z(n)=x(n)y(n)$ $\quad \{1,3,\underset{\uparrow}{5},7\}\times\{\underset{\uparrow}{2},4,6,8\}=\{\underset{\uparrow}{10},28\}$

③延时 $x(n)\xrightarrow{\text{右移}m}x(n-m)$

$x(n)\xrightarrow{\text{左移}m}x(n+m)$ $\quad (m>0)$

④反褶 $x(n)\rightarrow x(-n)$

⑤压缩 $x(n)\rightarrow x(an)$ $\quad a$为正整数

⑥扩展 $x(n)\rightarrow x(n/a)$ $\quad a$为正整数

（⑤⑥）去除某些点或补足零

§ 2.1 离散时间信号与系统

例2 $x(n) = \{\underset{\uparrow}{0},1,2,3,4,5,6\}$ 求$x(2n)$与$x(n/2)$

解：$x(2n) = \{\underset{\uparrow}{0},2,4,6\}$ 去除某些点

$x(n/2) = \{\underset{\uparrow}{0},0,1,0,2,0,3,0,4,0,5,0,6\}$ 补上零值

§ 2.1 离散时间信号与系统

⑦差分　（对应微分运算）

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$ 前向差分

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$$ 后向差分

⑧累加运算　（对应积分运算）

$$z(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$$ 条件收敛

⑨序列能量

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$$

§ 2.1 离散时间信号与系统

例3：①已知 $x(n)=\{2,5,\underset{\uparrow}{7},11,8,6,3\}$ 求 $\Delta x(n),\nabla x(n),\sum\limits_{k=-\infty}^{n}x(k),E$

②已知 $x(n)=(1/2)^n$ 求 $\Delta x(n),\nabla x(n),\sum\limits_{k=-\infty}^{n}x(k),E$

解：①$\Delta x(n)=x(n+1)-x(n)=\{2,3,2,\underset{\uparrow}{4},-3,-2,-3,-3\}$

$\nabla x(n)=x(n)-x(n-1)=\{2,3,\underset{\uparrow}{2},4,-3,-2,-3,-3\}$

$\sum\limits_{k=-\infty}^{n}x(k)=\{2,7,\underset{\uparrow}{14},25,33,39,42,\cdots,42,\cdots\}$

$E=4+25+49+121+64+36+9=308$

② $\Delta x(n)=(1/2)^{n+1}-(1/2)^n=-(1/2)^{n+1}$

$\nabla x(n)=(1/2)^n-(1/2)^{n-1}=-(1/2)^n$

$\sum\limits_{k=-\infty}^{n}x(k)$,E无穷大

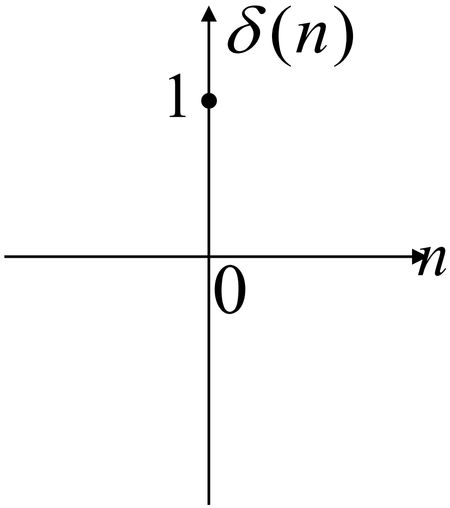
§ 2.1 离散时间信号与系统

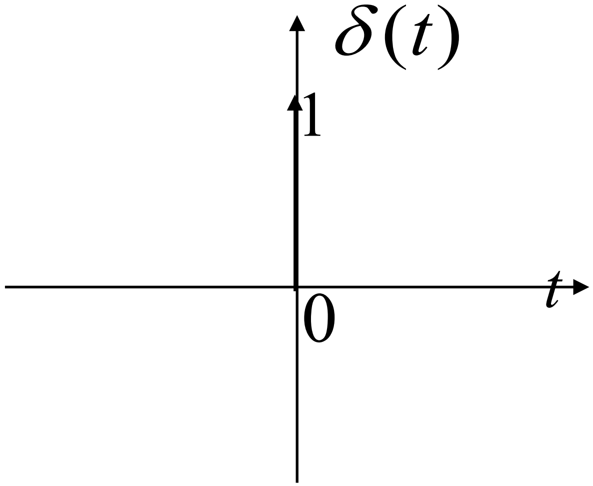
3．典型序列

①单位样值信号

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}\xrightarrow{\text{比较}}\delta(t)\quad\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1\\ \delta(t)=0,t\neq 0\end{cases}$$

t=0时 $\delta(t)=\infty$

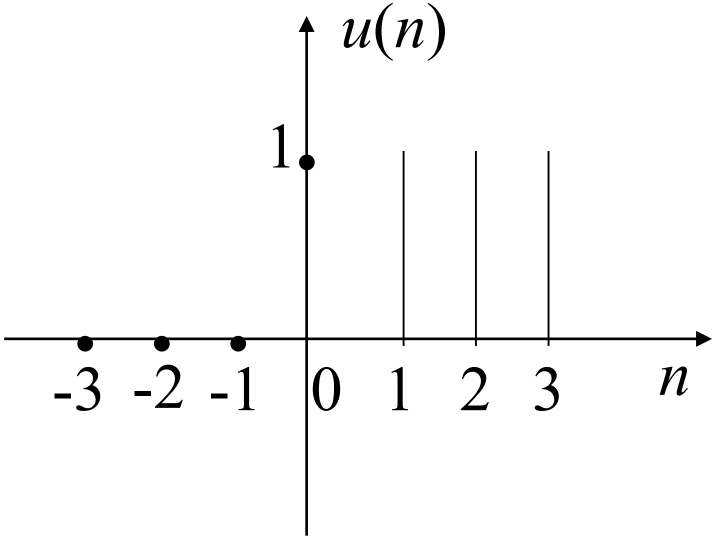


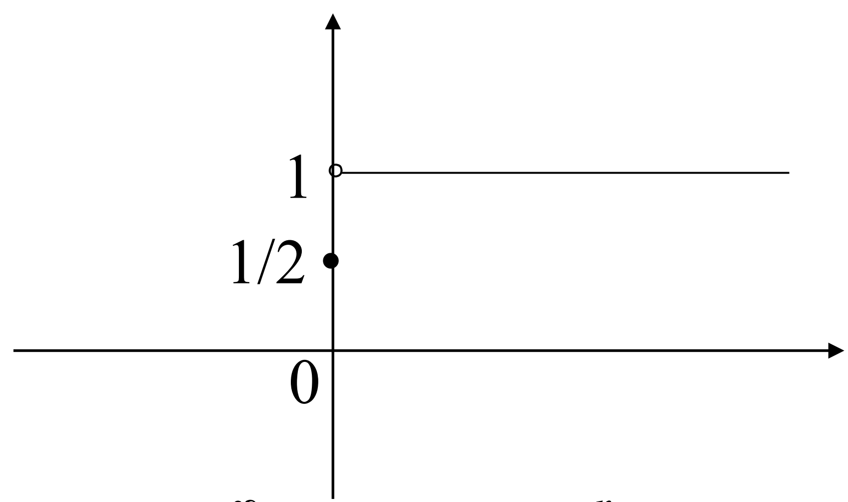


§ 2.1 离散时间信号与系统

②单位阶跃信号

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}\xrightarrow{\text{比较}}u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 1/2\ \text{或不定义} & t=0\\ 0 & t<0\end{cases}$$





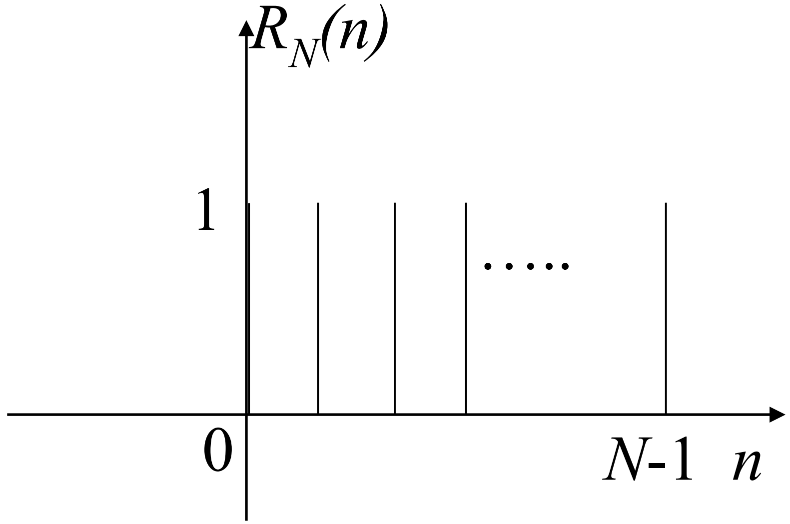
$$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$$

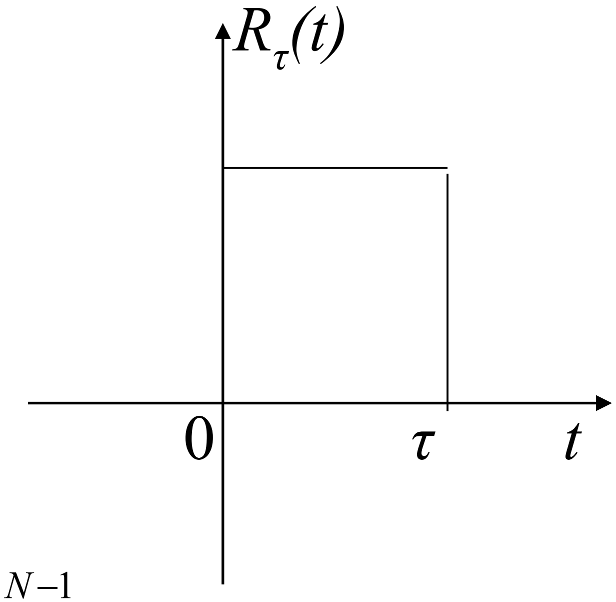
$$u(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k)$$

§ 2.1 离散时间信号与系统

③矩形序列

$$R_N(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\ 0 & n<0,n\ge N\end{cases} \xrightarrow{\text{比较}} R_\tau(t)$$



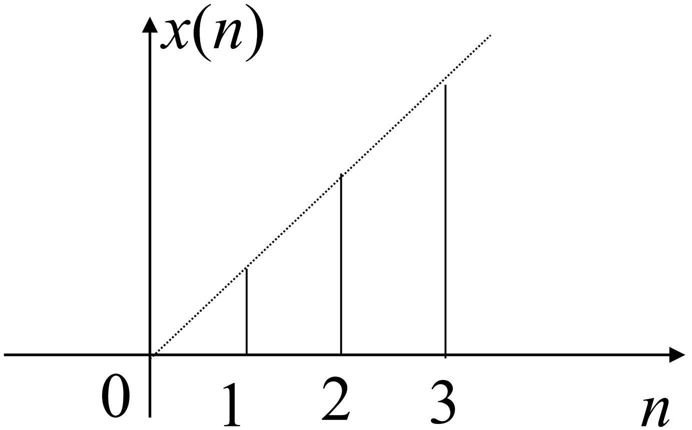


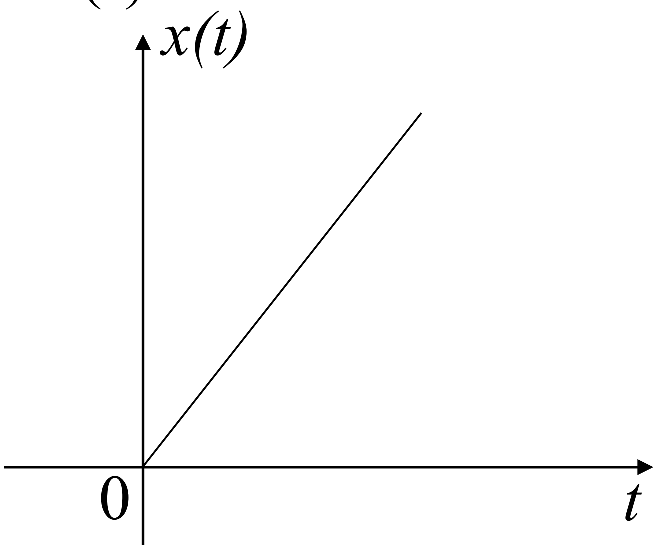
$$R_N(n)=u(n)-u(n-N)=\sum_{k=0}^{N-1}\delta(n-k)$$

§ 2.1 离散时间信号与系统

④斜变序列

$$x(n) = nu(n) \xrightarrow{\text{比较}} x(t) = tu(t)$$





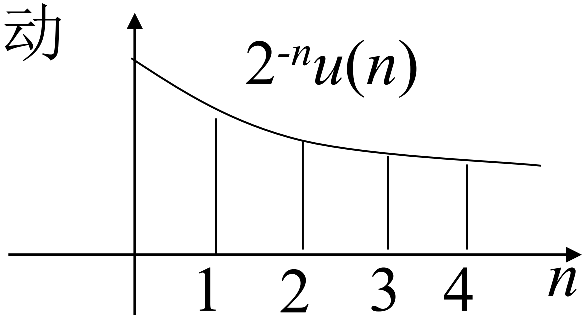
$$x(n) = n^2u(n), n^3u(n), \quad \ldots\ldots \quad n^ku(n)$$

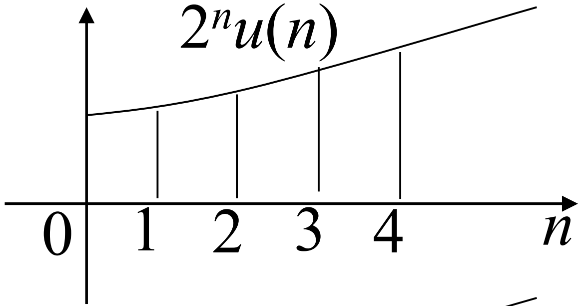
§ 2.1 离散时间信号与系统

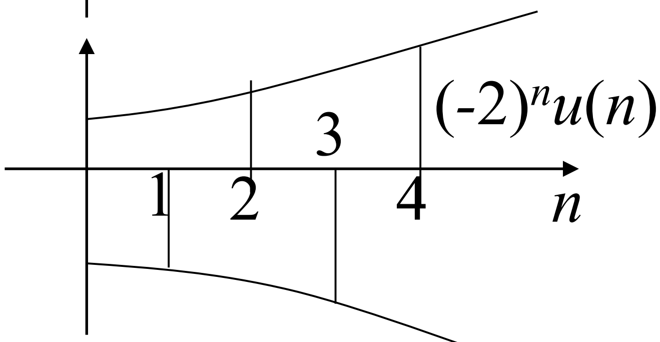
⑤指数序列 $x(n)=a^{n}u(n)$

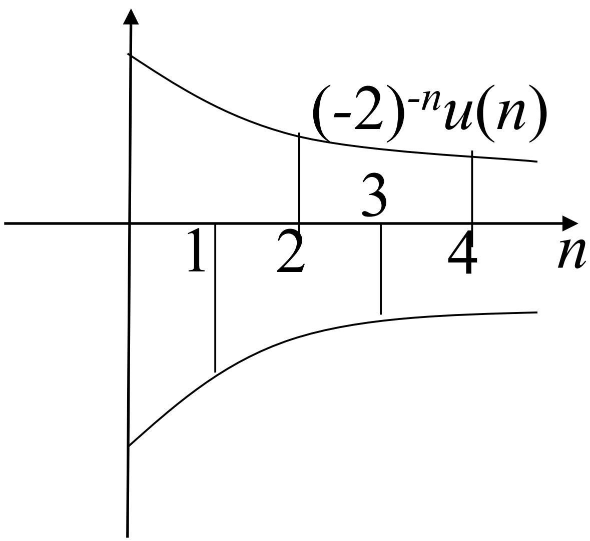
$|a|>1$序列发散， $|a|<1$序列收敛，

$a>0$序列取正， $a<0$序列正负摆动





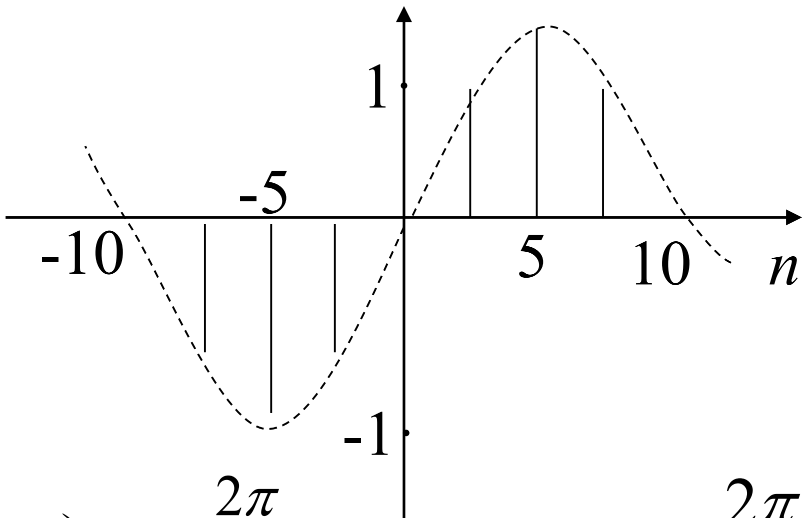




$x(n)=a^{-n}u(n)$

§2.1 离散时间信号与系统

⑥正弦信号 $x(n)=\sin n\omega_0$　余弦信号 $x(n)=\cos n\omega_0$



周期：1）若 $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 为正整数，$T=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$　$\omega_0=0.1\pi$　T=20

2）若 $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 为有理数，$T=k\bullet\dfrac{2\pi}{\omega_0}$，$k$为使$\dfrac{2\pi}{\omega_0}$为正整数的最小正整数

§ 2.1 离散时间信号与系统

例：$\sin(n \bullet \frac{4\pi}{3})$ $T = k \bullet \frac{2\pi}{4\pi/3} = \frac{3}{2} \bullet k$， k取2故T=3

3) 若$\frac{2\pi}{\omega_0}$为无理数，信号是非周期信号

例：$\sin 3n$ $T = \frac{2\pi}{3}$ 为无理数，所以是非周期信号

*正弦信号 $\xrightarrow{\text{抽样}}$ 正弦序列

$$f(t) = \sin \Omega_0 t \qquad x(n) = f(nT) = \sin(n\Omega_0 T)$$

$$\omega_0 = \Omega_0 T = \frac{\Omega_0}{f_s} \qquad \text{则 } x(n) = \sin(\omega_0 n)$$

ω_0 为离散频率，Ω_0 为连续域的正弦频率，f_s 为抽样频率

§2.1 离散时间信号与系统

⑦复指数序列

$$x(n)=e^{j\omega_0 n}=\cos(\omega_0 n)+j\sin(\omega_0 n)$$

极坐标表示

$$x(n)=|x(n)|e^{j\arg[x(n)]}=x_r+jx_i(n)$$

$|x(n)|=1$

$$\arg[x(n)]=\omega_0 n$$

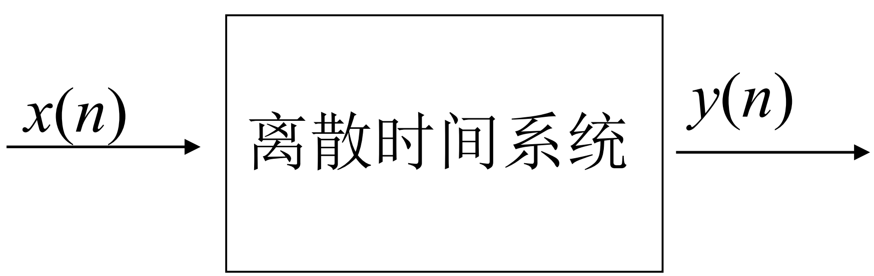
§ 2.1 离散时间信号与系统

4．离散时间信号的分解

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\bullet\delta(n-m)$$

三、离散时间系统

1．定义



§2.1 离散时间信号与系统

2．线性时不变离散时间系统

①线性：叠加性、均匀性

$$x_1(n) \longrightarrow \boxed{\text{系统}} \longrightarrow y_1(n)$$

$$x_2(n) \longrightarrow \boxed{\text{系统}} \longrightarrow y_2(n)$$

$$c_1x_1(n)+c_2x_2(n) \longrightarrow \boxed{\text{系统}} \longrightarrow c_1y_1(n)+c_2y_2(n)$$

② 时不变

$$x(n) \longrightarrow \boxed{\text{系统}} \longrightarrow y(n)$$

$$x(n\text{-}n_0) \longrightarrow \boxed{\text{系统}} \longrightarrow y(n\text{-}n_0)$$

§ 2.1 离散时间信号与系统

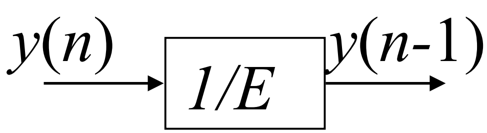
3. 离散时间系统的表示方法

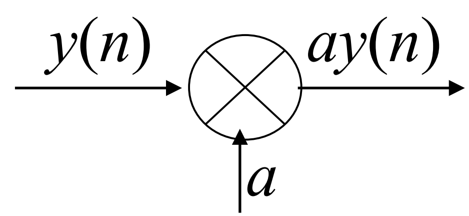
① 连续：微积分方程 $f(t), \dfrac{df(t)}{dt}, \dfrac{d^2 f(t)}{dt^2}, \cdots\cdots,$ 线性组合

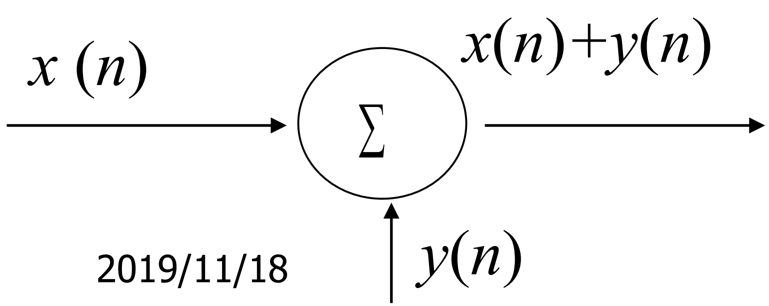
离散：差分方程 $x(n), x(n+1), x(n+2)\cdots\cdots x(n-1), x(n-2)\cdots$ 线性组合

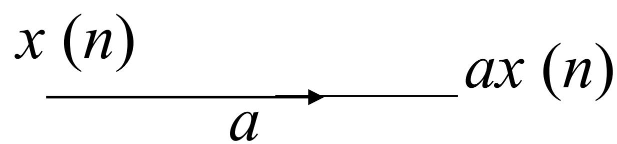
② 连续：微分（积分）、乘系数、相加三种基本运算

离散：延时（移位）、乘系数、相加三种基本运算



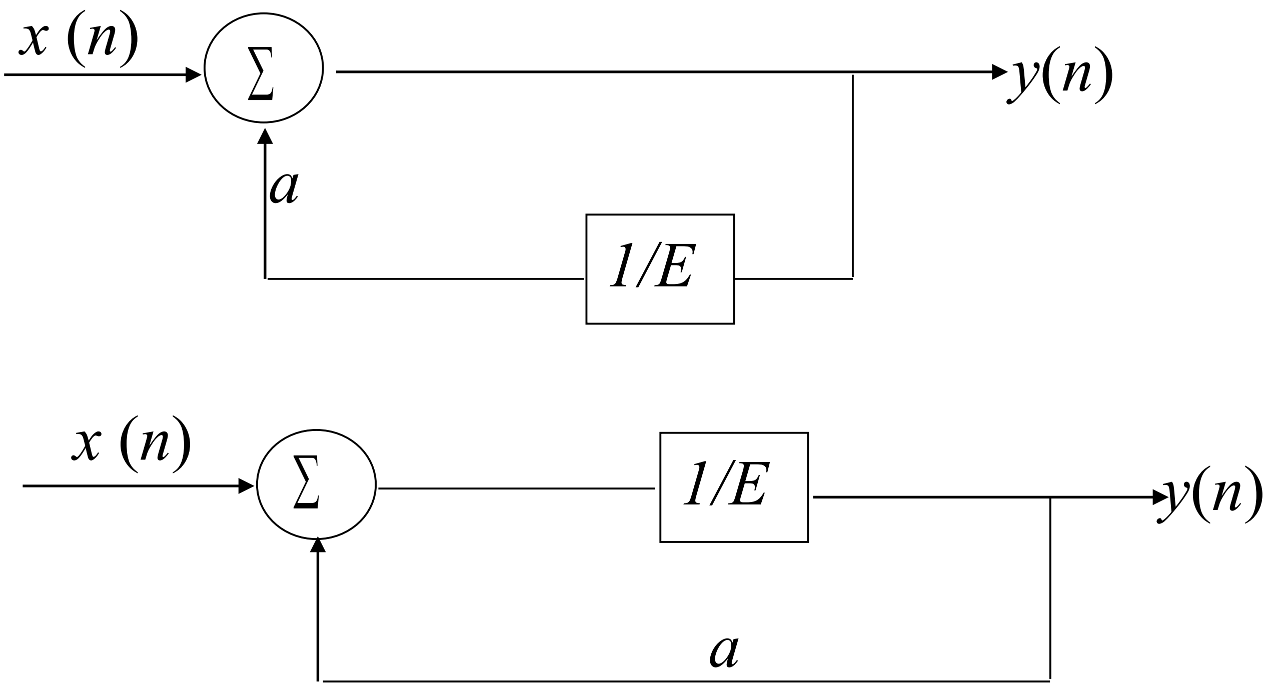






§ 2.1 离散时间信号与系统

例4：



§ 2.1 离散时间信号与系统

③N阶线性常系数差分方程一般形式

$$a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + a_N y(n-N) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_M x(n-M)$$

阶数等于未知序列变量序号的最高与最低值之差

后向差分形式（数值滤波器描述中常用）

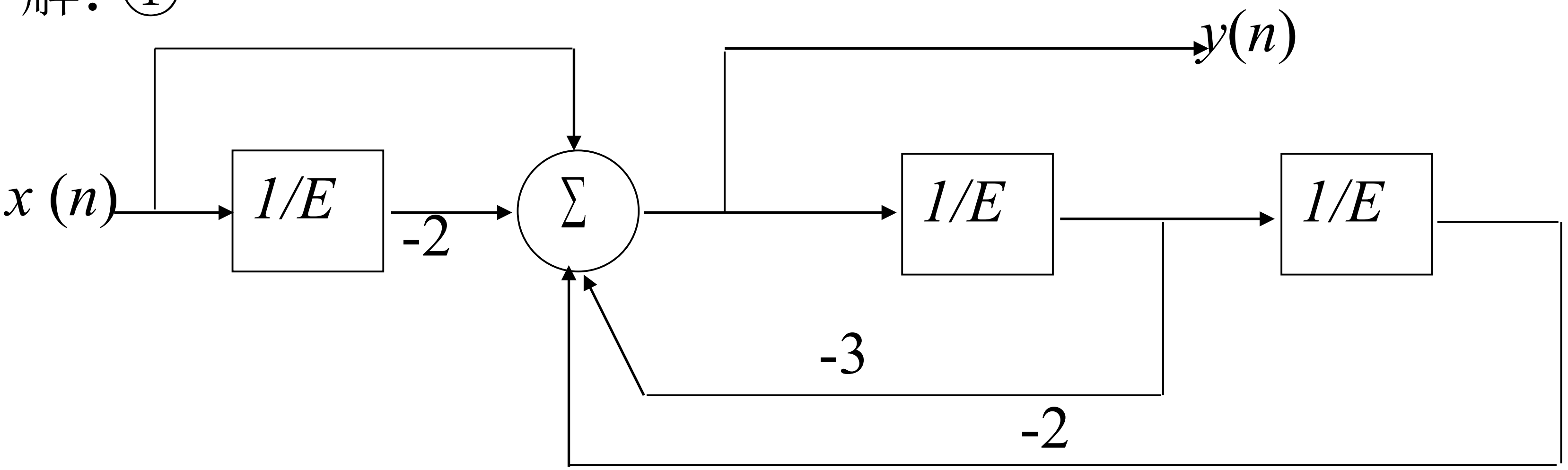
前向差分形式（在状态变量分析法中常用）

§ 2.1 离散时间信号与系统

例5：①

$$y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)-2x(n-1)$$

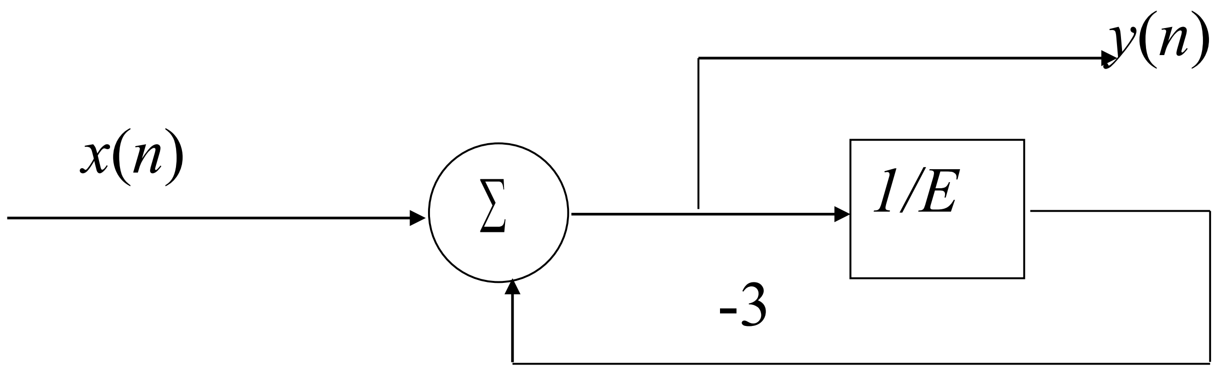
解：①



§ 2.1 离散时间信号与系统

例5：② $y(n)+3y(n-1)=x(n)$

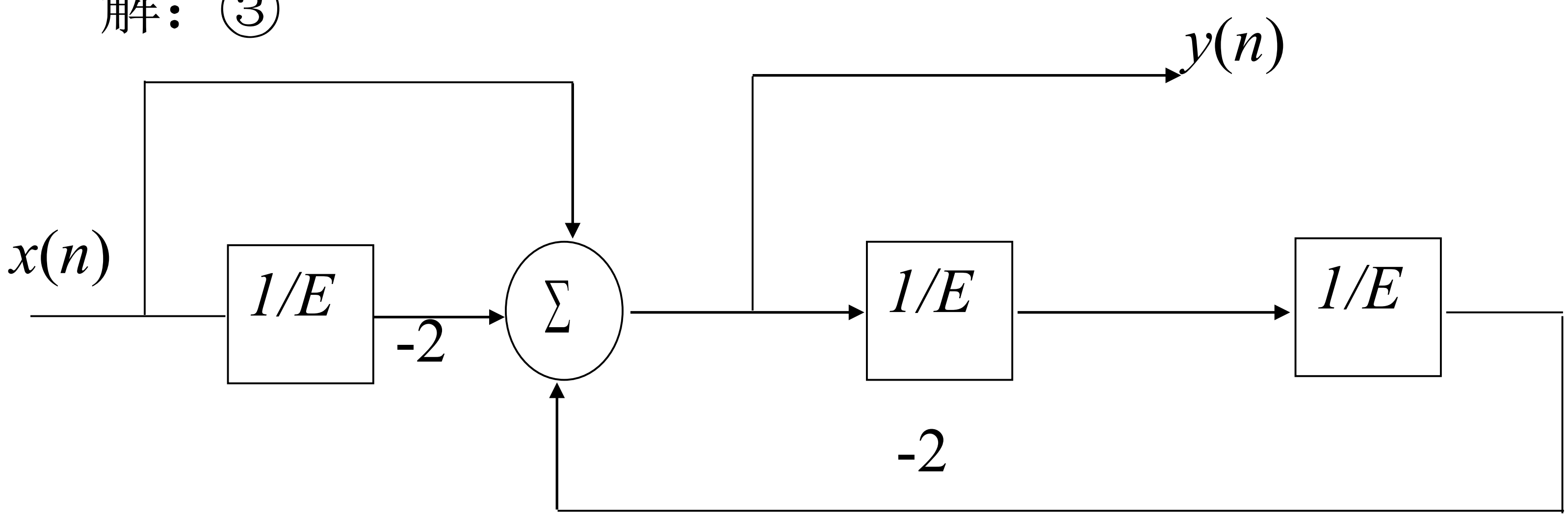
解： ②



§ 2.1 离散时间信号与系统

例5：③ $y(n)+2y(n-2)=x(n)-2x(n-1)$

解：③



§2.1 离散时间信号与系统

4. 微分方程⟶差分方程

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + Bx(t) \longrightarrow y(n+1) = ay(n) + bx(n)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{y[(n+1)T] - y(nT)}{T}$$

T应足够小

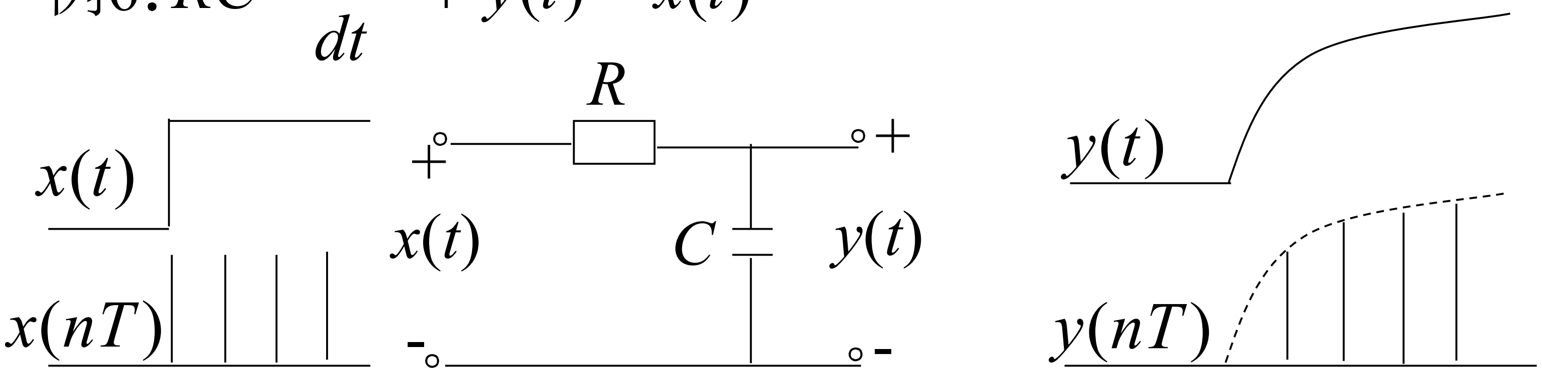
$$\Longrightarrow \frac{y[(n+1)T] - y(nT)}{T} \approx Ay(nT) + Bx(nT)$$

$$\Longrightarrow y[(n+1)T] \approx (1 + AT)y(nT) + BTx(nT)$$

$$y(n+1) \approx (\underbrace{1 + AT}_{a})y(n) + \underbrace{BT}_{b}x(n)$$

§ 2.1 离散时间信号与系统

例6: $RC\dfrac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$



$$\frac{RC}{T}[y(n+1)-y(n)]+y(n)\approx x(n)$$

$$\Longrightarrow y(n+1)\approx(1-\frac{T}{RC})y(n)+\frac{T}{RC}x(n)$$