第3章 一阶谓词逻辑演算系统

主要内容：

1）一阶谓词基本概念

2）自然语句的形式化

3）一阶谓词演算形式系统FC：组成、公理、推理规则、定理

4）一阶谓词形式系统的语义

5）FC的性质定理

§3.1 一阶谓词基本概念

引言：为什么要引入谓词?

命题逻辑中对客观命题（知识）的描述过于简单，体现不出研究个体的特性和共性，通过引入谓词来表达研究对象（个体）性质或研究对象之间的关系。

例1 描述哈工大学生：

1）张三是哈工大学生。

2）李四是哈工大学生。

例2 1）人终究会死的；

2）苏格拉底是人；

3）所以苏格拉底终究会死的。

例3 1）所有实数的平方都是非负的；

2）-3是一个实数；

3）所以-3的平方是非负的。

1. 谓词：表示研究对象（或个体）的性质或对象之间关系的词称为谓词。

常用大写字母表示。

一元谓词：仅含有一个变元的谓词。

n元谓词：含有n个变元的谓词。

例4 $P(x)$：x是有理数

$P(3)$：3是有理数

$G(x, y)$：实数x比实数y大。

2. 个体词：研究的对象，分为个体常元与个体变元。

常用字母表靠后的字母表示个体变元，靠前的字母表示个体常元。

如例4中的x为个体变元，3为个体常元。

3. 个体域（论域）：个体变元的取值范围。通常用D表示。

4. 函词： 用于描述从一个个体域到另一个个体域的映射。

注：同基本意义上的函数定义，作为谓词的一部分，常用小写字母或小写英文单词来表示。

例 P(x)：x是工程师

张三的父亲是工程师P(father(张三))

father(x):x的父亲

5. 量词：用于限制个体词的数量。

1）全称量词($\forall$):表任意的，从量上表示“所有的”。

例：$\forall x P(x)$：表示对任意的x均有性质或关系P

2）存在量词($\exists$):表存在的，从量上表示“至少有一个”。

例：$\exists x P(x)$:表示至少存在一个x具有性质或关系P。

全称量词与存在量词关系：

$$\forall xP = \neg \exists x \neg P$$

$$\exists xP = \neg \forall x \neg P$$

6. 约束变元与自由变元

1) 约束变元：受量词约束的个体变元.

例 $\forall x P(x), \quad \exists x Q(x)$

2) 自由变元：不受量词约束的个体变元.

例 $\forall x P(x) \vee Q(y)$

7. 项

1) 个体变元(常元)是项;

2) 若 f 是一个 n 元函词,

$t_1, t_2, \cdots, t_n$ 为项,

则 $f(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 是项.

3) 由1)2)有限次复合所产生的结果是项.

例 father(张三)

father(father(张三))

8. 合式公式

1) 原子谓词公式(不含联结词)是合式公式

2) 若 A为合式公式，则 $\neg A$也是合式公式

3) 若A, B为合式公式，且无变元 x在 A, B 中一个是约束的，而在另一个是自由的则 $A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B$ 均是.

4) 若 A为合式公式，而 x在A中为自由变元，则 $\exists xA, \forall xA$ 均是。

5) 由1)——4)有限次复合所形成的公式均为合式公式。

9. 辖域： 量词所约束的范围.

例：$\forall y[\exists x P(x, y)] \to Q(y)$

10. 易名规则：

$$\forall xP(x)=\forall yP(y),\ \exists xP(x)=\exists yP(y)$$

1) 待改名的变元在其辖域内的此变元应均改掉，其余不变.

2) 修改后的变元符不应该已在该量词的辖域内出现.

例

$$\neg R(x, y, z) \wedge \forall x Q(x, y) \to \exists y P(y)$$

则变元x，y既为自由变元又为约束变元，易混淆故改名：

$$\neg R(x, y, z) \wedge \forall v Q(v, y) \to \exists u P(u)$$

11. 可代入

设 υ 为A中的自由变元，且项 t 中不含A中的约束变元符（若有可换名），则称项 t 对 υ 是可代入的。

例 令 $A=\forall v_1 P(v_1,v_2)$

若项t中含有变元 v_1 且为自由的，则项t对变元 v_2 是不可代入的，反之则可以。

12. 代入

对公式A中的变元 υ 的所有自由出现都换为项t（必须是可代入的）。若A中无 υ 则 $A_t^{\upsilon} = A$

13.全称化

设 $\upsilon_1, \upsilon_2, \cdots, \upsilon_n$ 为公式A中的自由变元，则公式 $\forall \upsilon_{i_1} \forall \upsilon_{i_2} \cdots \forall \upsilon_{i_r} A$ 称为A的全称化。（$1 \le r \le n, 1 \le i_1, i_2, \cdots, i_r \le n$）

公式 $\forall \upsilon_1 \forall \upsilon_2 \cdots \forall \upsilon_n A$ 称为A的全称封闭式。