概率论与数理统计试题（2014 秋）

（注：需用到的标准正态分布表，$t-$分布表见第一页末尾处。）

一、填空题（每题 3 分，共计 15 分）

1. 设事件 A 与 B 相互独立，事件 B 与 C 互不相容，事件 A 与 C 不能同时发生，且 $P(A)=P(B)=0.5$，$P(C)=0.4$，则事件 A，B，C 中仅 C 发生或仅 C 不发生的概率为_________.

2．随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}1/2, & 0<x<1\\ 1/4, & 1<x<3\\ 0, & 其他\end{cases}$，则 $Y=1-3X$ 的概率密度 $f_Y(y)=$____________________.

3．随机变量 $X\sim P(\lambda), EX^2=20,$，则 $P(X\geq 2)=$_______________________.

4．已知一批零件长度 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 若σ未知，从中随机地抽取 9 个零件，得样本均值 $\bar{x}=30, s^2=16$，则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是____________________.

5．设 $X\sim U(0,1), Y$ 服从两点分布即 $P(X=0)=1/2, P(X=1)=1/2$，且 X, Y 独立，$Z=X+Y,$ 则 $Z^{1/2}$ 的数学期望为___________.

（$t_{0.025}(8)=2\cdot 3060,\ t_{0.05}(8)=1\cdot 8595,\ t_{0.05}(9)=1.8331,\ t_{0.025}(9)=2.2622$, $\Phi(1.96)=0.975$，$\Phi(1.645)=0.95$）

二、单项选择题（每题 3 分，共计 15 分）

1．设 A,B 为两个事件，$B\subset A$ 且 $0<P(B)<P(A)<1$，则必有 【　　】.

（A）$P(B\mid A)=1$．（B）$P(A\mid B)=1$．（C）$P(B\mid \bar{A})=1$．（D）$P(A\mid \bar{B})=1$．

2．（A）$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \sin x, & 0\leq x<\pi/2\\ 1, & x\geq \pi/2\end{cases}$ ．（B）$F(x)=\begin{cases}0, & x<-2\\ 1/2, -2\leq x<0\\ 2, x\geq 0\end{cases}$ ．

（C）$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \sin x, 0\leq x<\pi\\ 1, x\geq \pi\end{cases}$ ．　（D）$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x+1/3, 0\leq x\leq 1/2\\ 1, x>1/2\end{cases}$ ．

3．对于两个独立同分布的随机变量 X 和 Y，其方差 DX 存在，则下列叙述正确的是 【　　】

（A）$D(XY)=DX\cdot DY$．　（B）X 与 Y 协方差不为 0.

（C）$EX^2-(EX)^2=EY^2-(EY)^2$．　（D）$EX\neq EY$．

4．设随机变量 X 服从参数为 $B(8,\frac{1}{2})$ 的二项分布，$Y\sim N(2,4)$，且 $\rho_{XY}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，根据切比晓夫不等式有：$P(|X-2Y|\leq 4)\ \geq$ 【　　】

（A）$\frac{3}{8}$．　（B）$\frac{5}{8}$．　（C）$\frac{1}{4}$．　（D）$\frac{2}{9}$．

5. 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$的样本，$EX=\mu,\ DX=\sigma^2$，$\bar{X}$是样本均值，S^2是样本方差，S^{*2}为样本的二阶中心矩，则 【 】

（A）$\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$.　　（B）$\dfrac{(n-1)S^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.

（C）$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S^*}\sqrt{n} \sim t(n-1)$.　　（D）$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.

三、（9 分）假如在一段时间内到达哈尔滨某家乐福超市人数服从参数为μ的泊松分布，而进入该超市的每个顾客购买某黑龙江特产的概率为p，若各个顾客是否购买某黑龙江特产相互独立，求在一段时间内该超市恰好售出k份该黑龙江特产的概率（假如每个顾客至多购买一份某黑龙江特产）.

四、（9 分）已知X与Y独立的正态随机变量，且$X \sim N(1,4)$，$Y \sim N(3,9)$，$Z=2X+Y$求（1）Z的概率密度$f_z(z)$; (2) 计算期望$E|2X+Y-5|$和方差$D|2X+Y-5|$

五、（9 分）设 随机变量X的概率密度为　$f(x)=\begin{cases} x/8, & 0<x<4, \\ 0, & 其它 \end{cases}$

令随机变量$Y=\begin{cases} 3, & X \le 1, \\ X, & 1<X<3, \\ 1, & X \ge 3 \end{cases}$（1）求$Y$的分布函数； (2) 求概率$P(X \le Y)$.

六、（13 分）.设总体X的分布函数为$F(x;\theta)=\begin{cases} 1-e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x \ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$,而$\theta$是大于零的未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自总体$X$的简单随机样本.(1)求$EX$和$EX^2$；（2）求$\theta$的矩估计$\hat{\theta}_1$和极大似然估计$\hat{\theta}_2$；（3）试讨论$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$的无偏性。