**1．**设，（1）利用Newton迭代建立求的迭代公式；（2）讨论所建立公式的收敛性；(3)并求;(2)取初值计算根的近似值，要求迭代3次（结果保留5位小数）。

解：（1）设，则是的单实根

Newton迭代：



（2）迭代函数,则，



，迭代公式平方收敛于；

（3）



(4) 





**2．**设以为节点的Lagrange插值基函数，

证明： 

证明：对,令

则函数的次Lagrange插值多项式为



因时 ,于是插值余项为



得到 

故 

因时 ,于是插值余项为



得到 ,

故 

**3．**设常数 ，求出使得解方程组



的Jacobi和Gauss\_Seidel迭代法收敛的充分必要条件时的取值范围。

解： Jacobi迭代：

 

迭代矩阵的特征方程：



特征根：

谱半径： 时Jacobi迭代收敛. 故：

Gauss\_Seidel迭代：



迭代矩阵的特征方程：



特征根：

谱半径： 时Gauss\_Seidel迭代收敛

故：

**4．**用Doolittle三角分解法求解方程组  ；

解： Doolittle三三角分解：



，



求解得

求解得

**5．**已知一组实验数据如下：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|  | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 |

用二次多项式拟合这组数据，并求平方误差。

解： 取,得法方程：



解得：

最小二乘拟合曲线为：

平方误差为： 

**6．**试确定求积公式  的求积系数 ，使得其有尽可能高的代数精度，并确定代数精度？并用此公式计算积分（结果保留5位小数）。

解： 令 求积公式准确成立，有：



得： 

求积公式： 

令,则求积公式准确成立的，时求积公式不是准确成立的，

求积公式代数精度为3，是Gauss型的；



**7．**用插值法求一个二次多项式,使得它与在处相切，在处相交，并证明：

解： 即求二次Hermite插值，满足：



由设

再由，得：



解得： ，



误差为：





令

得：,

故 

**8．**用共轭梯度方法解方程组： 

（取初值 ）。

共轭梯度方法: 

解： 是对称正定阵；



















解为： 

**9．**应用改进Eulor方法：



解初值问题  时，问步长应如何选取方能保证方法的绝对稳定性？ 并在中选取数值稳定的步长计算的近似值.



解： 令,原初值问题等价为

将改进Eulor方法应用到方程上，有：

 其中

当 时，方法是绝对稳定的，

即 时方法是绝对稳定的；

故取 ，即，方法是绝对稳定的









**10．**求解常微分方程初值问题 的两步方法：



求出局部截断误差；

解： 

把局部截断误差在处Taylor展开：





 ,方法是二阶的；

**11．**在上给出函数的等距节点上函数值和一阶导数值，若用三次Hermite插值求的值，要使截断误差不超过，问至少要把所给的区间分多少份？

解： 把区间等分，分点,

在子区间上构造三次Hermite插值,误差为：











当时，

故 



**12．**初值问题 

用4阶经典Runge-kutta方法取步长计算的近似值（结果保留5位小数）.

解： 令,原初值问题等价为

将4阶经典Runge-Kutta方法公式



应用到方程上，有：

可得

，其中

取步长,







：