

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский университет ИТМО»  
(Университет ИТМО)

Международный научно-образовательный центр  
Физики наноструктур

Практическая работа № 1  
по дисциплине  
*«Имитационное моделирование робототехнических систем»*

по теме:  
Исследования методов интегрирования

Студент:  
*Группа № R4134с*

Д.С. Черных  
*И.О. Фамилия*

Предподаватель:  
*Инженер, младший научный сотрудник*

Е.А. Ракшин  
*И.О. Фамилия*

Санкт-Петербург 2025

**Цель работы:** исследовать три основных метода интегрирования, сравнить полученные результаты численных методов с аналитическим решением и сделать выводы.

**Оборудование и программные среды:** ПК.

**Задание:**

Сравнить численные методы интегрирования с аналитическим решением на базе обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) вида

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = d$$

**Ход работы**

Ниже приведены коэффициенты, заданные по индивидуальному заданию:

$$a = 2,04, \quad b = 5,78, \quad c = 2,96, \quad d = -6,17$$

Таким образом, в ходе работы будет рассматриваться следующее уравнение:

$$2,04\ddot{x} + 5,78\dot{x} + 2,96x = -6,17$$

Для решения неоднородного уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами найдем сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного.

Соответствующее однородное уравнение имеет вид:

$$2,04\ddot{x} + 5,78\dot{x} + 2,96x = 0$$

Таким образом, характеристическое уравнение:

$$2,04y^2 + 5,78y + 2,96 = 0$$

Вычислим дискриминант:

$$D = 5,78^2 - 4 * 2,04 * 2,96 = 9,2548$$

Поскольку дискриминант больше нуля уравнение имеет 2 действительных корня, которые вычисляются как:

$$y_1 = \frac{-5,78 - \sqrt{9,2548}}{2 * 2,04} \approx -2,1623$$

$$y_2 = \frac{-5,78 + \sqrt{9,2548}}{2 * 2,04} \approx -0,671$$

Далее необходимо подогнать частное решение неоднородного уравнения по виду правой части. Для этого заменяем  $v$  на  $t$ , а производные данного параметра приравниваем к нулю. Исходное уравнение примет вид:

$$2,96t = -6,17$$

Выразим  $t$  и получим:

$$v = \frac{-6,17}{2,96} = -2,0845$$

Таким образом общее решение неоднородного уравнения:

$$x = C_1 e^{-2,1623t} + C_2 e^{-0,671t} - 2,0845$$

Далее с помощью предложенного в методическом пособии программного кода, произведем расчёт изначального уравнения методами явного, неявного Эйлера, а также методом Рунге-Кутты 4-го порядка.

Поскольку исходное уравнение второго порядка, чтобы использовать интеграторы, перепишем его как систему двух уравнений первого порядка.

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x} \\ \ddot{x} = \frac{-6,17 - 5,78\dot{x} - 2,96x}{2,04} \end{cases}$$

Таким образом получим следующую функцию для вычисления исходного уравнения:

```
def pendulum_dynamics(x):
    """
    Pendulum dynamics: d²x/dt² = (d - b * x2 - c * x1) / a
    State vector x = [x, dx/dt]
    """
    # Коэффициенты
    a, b, c, d = 2.04, 5.78, 2.96, -6.17

    x1 = x[0]
    x2 = x[1]

    x1_dot = x2
    x2_dot = (d - b * x2 - c * x1) / a

    return np.array([x1_dot, x2_dot])
```

Используя приведённый код и уравнения интеграторов получим следующие графики (Рисунки 1, 2):

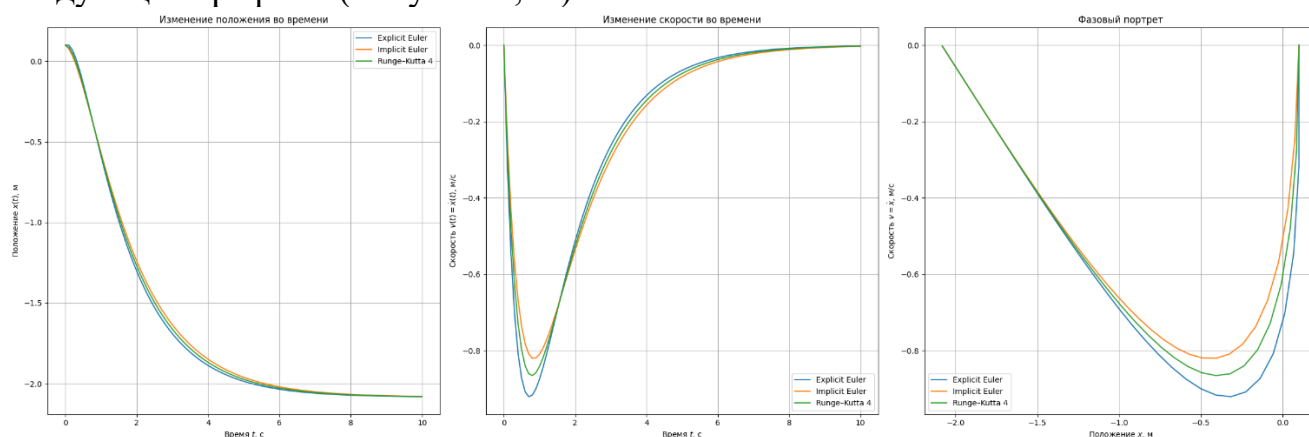


Рисунок 1 – Графики методов интеграции при шаге  $h=0,1$

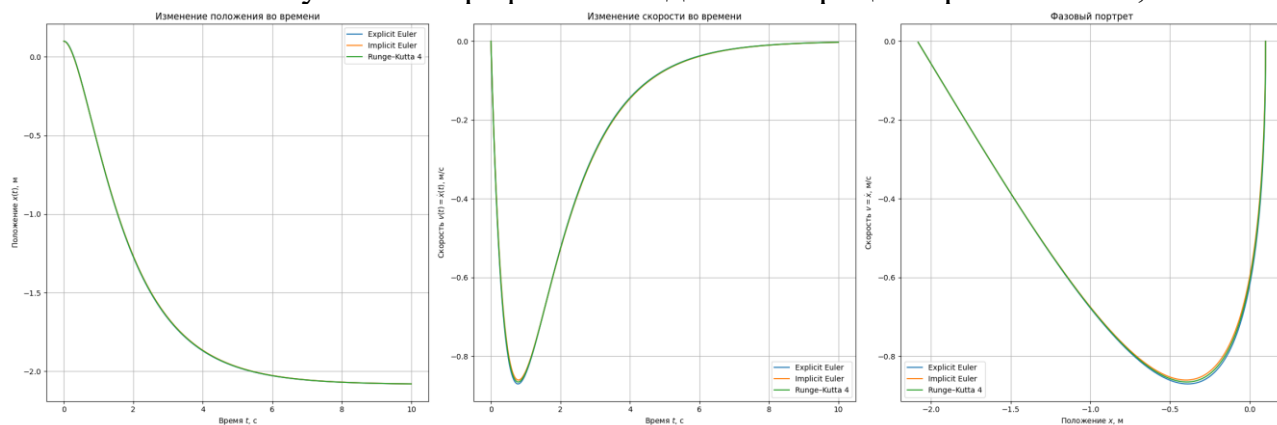


Рисунок 2 – Графики методов интеграции при шаге  $h=0,01$

Анализ графика зависимости положения от времени показывает, что все кривые монотонно убывают и асимптотически стремятся к одному и тому же стационарному значению. При этом кривые расположены близко друг к другу, а с уменьшением шага интегрирования их расхождение уменьшается. Метод явного Эйлера при большом шаге слегка отстаёт, что объясняется низкой точностью и линейным накоплением ошибки с шагом  $h$ . Метод неявного Эйлера наоборот за счёт наличия обратной связи затухает быстрее всех. В методе Рунге-Кутты ошибка пропорциональна шагу и поэтому при малом шаге практически незаметна.

Из графика изменения скорости во времени ясно видно, что система сначала быстро ускоряется в отрицательном направлении, а затем замедляется по мере приближения к равновесному состоянию. Явный метод Эйлера имеет значительное отклонение в области максимальной по модулю скорости, но с уменьшением шага отклонение от других графиков уменьшается. Таким образом получается, что метод явного Эйлера переоценивает скорость в областях больших ускорений, если шаг  $h$  недостаточно мал. Метод неявного Эйлера более стабилен, но наиболее точную оценку показывает метод Рунге-Кутты поскольку использует для расчета средневзвешенное значение ускорения на интервале.

На третьем графике представлен фазовый портрет системы. При шаге  $h=0,01$  все методы стабильны и достаточно точные. Траектории всех методов движутся к точке минимума скорости, а затем к точке равновесия. Поскольку фазовый портрет – это след движения в пространстве состояний. Любая ошибка в одной из переменных искажает его форму. Таким образом, ранее описанные отклонения повлияли на последний график. Метод явного Эйлера накапливает ошибку в обоих переменных, метод неявного Эйлера сглаживает колебания, а метод Рунге-Кутты сохраняет энергию и динамику системы наиболее приближаясь к реальной динамике системы. При увеличении шага метод Явного Эйлера может стать неустойчивым, метод неявного Эйлера останется устойчивым, но будет слишком приближен к равновесному состоянию, а метод Рунге-Кутты будет устойчив до определенного значения шага.

### **Вывод**

В ходе работы был проведен аналитический расчет ОДУ, произведен подсчет тремя числовыми методами интегрирования и произведен анализ полученных результатов.

Метод Рунге-Кутты является наиболее точными и сложным для вычисления, при малых шагах интегрирования ошибка практически незаметна.

Метод неявного Эйлера хорошо показывает себя в системе с большим шагом, давая при этом слегка завышенное демпфирование.

Метод явного Эйлера наиболее простой для вычислений, но дает значительные ошибки в областях быстрого изменения значений, приемлемый для малых шагов интегрирования.

Наиболее точным является метод Рунге-Кутты 4-го порядка, который практически совпадает с аналитическим решением.

Таким образом, метод Рунге-Кутты 4-го порядка наиболее правдоподобный и ближе всех к аналитическому решению.