Цель работы

1. Проанализировать файл Integrators.ipynb.
2. Решить в аналитическом виде ОДУ

$$a \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + c \cdot x = d,$$

где a, b, c, d – коэффициенты из таблицы.

3. Решить ОДУ численными методами, используя функции из Integrators.ipunb.
4. Сравнить результаты методов с аналитическим решением.

Методы численного интегрирования

В данной работе были использованы функции трех методов численного интегрирования, а именно: *явный метод Эйлера*, *неявный метод Эйлера*, *метод Рунге-Кутты*.

Явный метод Эйлера используется для приближённого численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) — то есть для нахождения приближённых значений функции, удовлетворяющей заданному дифференциальному уравнению и начальному условию.

Неявный метод Эйлера используется для численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), особенно жёстких систем, где явные методы неустойчивы или требуют крайне малого шага дискретизации.

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка используется для численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с высокой точностью. Он позволяет получать достаточно точные приближённые решения при умеренном шаге интегрирования за счёт четырёхкратного вычисления правой части уравнения на каждом шаге.

Аналитическое решение ОДУ второго порядка

Требуется аналитически решить обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка общего вида:

$$a \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + c \cdot x = d$$

Согласно данным из таблицы принимаем следующие значения: $a = -2.35$, $b = -0.38, c = 0.19, d = -7{,}44$. Подставив данные значения получим:

$$-2.35 \cdot \ddot{x} - 0.38 \cdot \dot{x} + 0.19 \cdot x = -7.44$$

После деления обеих частей на коэффициент a:

$$\ddot{x} + p \cdot \dot{x} + q \cdot x = s,$$

где $p = b/a = 0.1617, q = c/a = -0.08085, s = d/a = 3.166.$

1. Частное решение.

Поскольку правая часть уравнения постоянна, частное решение x_p также является постоянным.

Подставляя $\dot{x_p} = 0$ и $\ddot{x}_p = 0$:

$$c \cdot x_p = d \Rightarrow x_p = d/c = -39.16.$$

2. Однородное уравнение.

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение:

$$\ddot{x} + p \cdot \dot{x} + q \cdot x = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$r^2 + p \cdot r + q = 0.$$

Подставляем коэффициенты:

$$r^2 + 0.1617r - 0.08085 = 0.$$

Вычисляем дискриминант:

$$D = p^2 - 4q = 0.0261 + 0.3234 = 0.3495.$$

Так как $D > 0$, корни действительные и различны:

$$r_{1,2} = (-p \pm \sqrt{D})/2 = (-0.1617 \pm 0.5912)/2,$$

$$r_1 = 0.2147, r_2 = -0.3764.$$

3. Общее решение.

Для двух вещественных корней решение имеет вид:

$$x(t) = x_p + C_1 \cdot e^{r_1 t} + C_2 \cdot e^{r_2 t}.$$

Подставляем найденные значения:

$$x(t) = -39.16 + C_1 \cdot e^{0.2147t} + C_2 \cdot e^{-0.3764t}.$$

4. Определение постоянных C_1 и C_2

при начальных условиях $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$:

$$x(0) = x\_p + C_1 + C_2 = x_0,$$

$$\dot{x}(0) = r_1 C_1 + r_2 C_2 = v_0.$$

Если $x_0 = 0, v_0 = 0$:

$$C_1 + C_2 = 39.16,$$

$$0.2147 C_1 - 0.3764 C_2 = 0.$$

Решая систему:

$$C_1 = 25.24, C_2 = 13.92.$$

5. Окончательное аналитическое решение:

$$x(t) = -39.16 + 25.24 \cdot e^{0.2147t} + 13.92 \cdot e^{-0.3764t}.$$

Решение ОДУ второго порядка численными методами

В файле *Integrators.ipynb* функция *pendulum_dynamics* была заменена на функцию *ode_system*, реализующую систему первого порядка для уравнения (рис. 1). Также были добавлены функции аналитического решения координаты и её производной и вызовы трёх интеграторов для сравнения.

```python
a = -2.35
b = -0.38
c = 0.19
d = -7.44
x0_val = 0.0
v0_val = 0.0
Tf = 10.0
h = 0.01

def ode_system(x):
    x1 = x[0]
    x2 = x[1]
    dx1 = x2
    dx2 = (d - b * x2 - c *x1)/a
    return np.array([dx1, dx2])
```

Рисунок 1. функция *ode_system*

Реализация аналитического решения представлена на рисунке 2.

```python
p = b / a
q = c / a
s = d / a
x_p = d / c

D = p**2 - 4.0 * q

if D > 1e-12:

    r1 = (-p + np.sqrt(D)) / 2.0
    r2 = (-p - np.sqrt(D)) / 2.0

    A = np.array([[1.0, 1.0],
                  [r1,  r2]])
    b_ic = np.array([x0_val - x_p,
                     v0_val])
    C1, C2 = np.linalg.solve(A, b_ic)

    x_an = C1 * np.exp(r1 * t) + C2 * np.exp(r2 * t) + x_p

elif abs(D) <= 1e-12:

    r = -p / 2.0

    C1 = x0_val - x_p
    C2 = v0_val - r * C1

    x_an = (C1 + C2 * t) * np.exp(r * t) + x_p
```

Рисунок 2. Аналитическое решение

Далее будут представлены графики решений. На рисунке 3 будет представлена зависимость координаты $x(t)$ от времени, на рисунке 4 – зависимость скорости $\dot{x}(t)$ от времени, а на рисунке 5 графически изображен фазовый портрет данной системы.

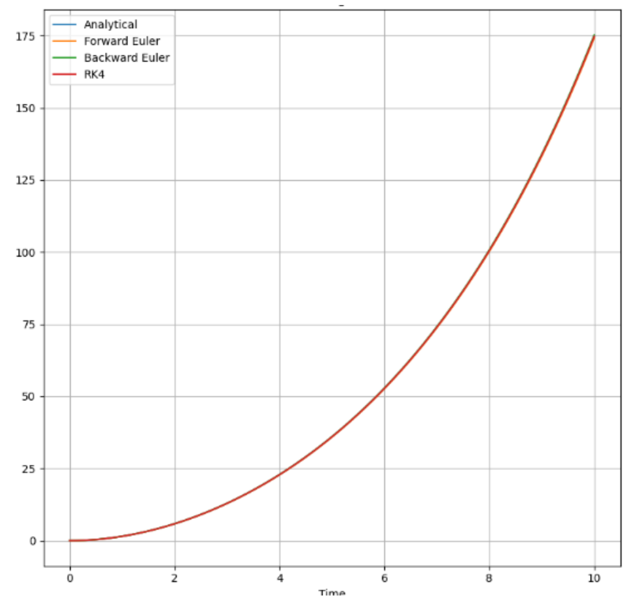

Рисунок 3. Зависимость координаты x(t) от времени

Из рисунка 3 видно, что аналитический метод больше всего совпадает с численным методом Рунге – Кутты.

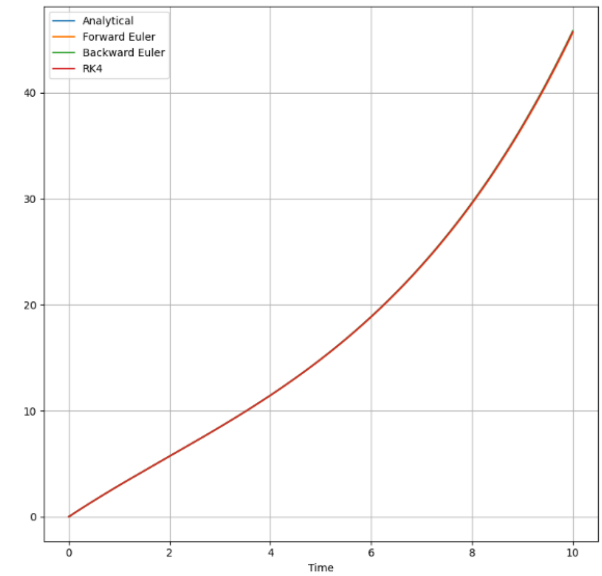

Рисунок 4. Зависимость скорости x’(t) от времени

Из рисунка 4 также видно, что аналитический метод больше всего совпадает с численным методом Рунге – Кутты.

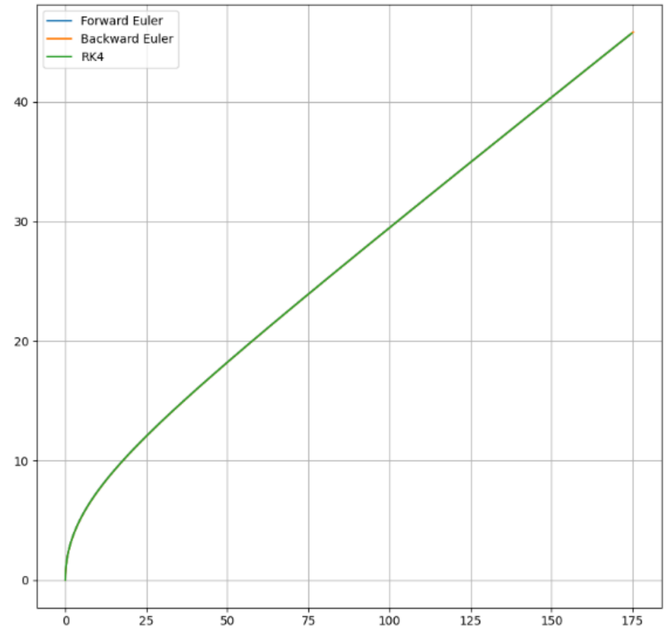

Рисунок 5. Фазовый портрет системы

Вывод

В ходе выполнения данной практической работы можно сделать вывод о том, что из приведенных выше методов численного интегрирования наибольшую точность имеет метод Рунге – Кутты, явный Эйлер менее точен и имеет свойство накапливать ошибку, а неявный более устойчив, но при данном шаге может давать более грубое приближение, чем RK4.