

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
**«Национальный исследовательский университет ИТМО»**

**Лабораторная работа №2**  
По дисциплине  
«Имитационное моделирование робототехнических систем»

**Выполнил:** студент группы Р4135с  
**Проверил:** ассистент

Белова К.Д.  
Ракшин Е.А.

Санкт-Петербург 2025

## Оглавление

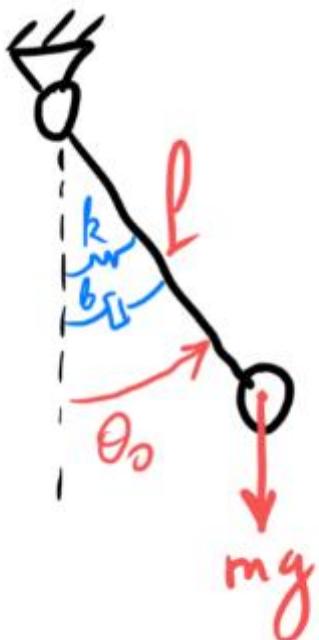
1.	Введение.....	3
2.	Исходные данные .....	3
3.	Составление дифференциального уравнения.....	3
3.1.	Метод Лагранжа .....	3
4.	Аналитическое решение .....	4
4.1.	Линеаризация для малых углов .....	4
5.	Численное решение.....	5
5.1.	Система уравнений для численного решения.....	5
5.2.	Метод Рунге-Кутты 4 порядка.....	5
5.3.	Явный метод Эйлера.....	5
5.4.	Неявный метод Эйлера .....	5
6.	Сравнительный анализ решений .....	5
6.1.	Параметры колебательной системы.....	5
6.2.	Визуальное сравнение решений .....	6
6.3.	Фазовые портреты системы .....	6
7.	Сравнение численных методов .....	7
7.1.	Результаты вычислений.....	7
7.2.	Анализ методов .....	7
7.3.	Устойчивость методов.....	7
8.	Выводы .....	8
9.	Заключение .....	8

## 1. Введение

В данном отчете проводится сравнительный анализ аналитического и численного решений для механической системы: маятник с горизонтальной пружиной и демпфером. Исследуется поведение системы с заданными параметрами и оценивается точность численных методов решения.

## 2. Исходные данные

Блок схема:



Вариант 1

Коэффициенты:

$$m, \text{kg} = 0.6$$

$$k, \text{N/m, Nm/rad} = 18$$

$$b, \text{N*s/m, Nm*s/rad} = 0.015$$

$$l, \text{m} = 1$$

$$\theta_0, \text{rad} = -0.2042098649$$

$$x_0, \text{m} = 0.56$$

## 3. Составление дифференциального уравнения

### 3.1. Метод Лагранжа

Для маятника с горизонтальной пружиной и демпфером.

Кинетическая энергия через угловую скорость:

$$K = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} * 0.6 * 1^2 \dot{\theta}^2 = 0.3 \dot{\theta}^2$$

Потенциальная энергия (пружина + гравитация):

$$P = mgl(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}k(l \sin\theta)^2$$

$$P = 0.6 * 9.8 * 1 * (1 - \cos\theta) + \frac{1}{2} * 18 * (1 * \sin\theta)^2$$

$$P = 5.88(1 - \cos\theta) + 9 \sin^2\theta$$

Диссипативная функция (демпфирование):

$$D = \frac{1}{2}b(l\dot{\theta} \cos\theta)^2 = \frac{1}{2} * 0.015 * (\dot{\theta} \cos\theta)^2 = 0.0075\dot{\theta}^2 \cos^2\theta$$

Уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{dD}{d\dot{\theta}}$$

Вычисляем производные:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} = 0.6\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0.6\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mlg \sin\theta + kl^2 \sin\theta \cos\theta = 5.88 \sin\theta + 18 \sin\theta \cos\theta$$

$$\frac{dD}{d\dot{\theta}} = bl^2\dot{\theta} \cos^2\theta = 0.015\dot{\theta} \cos^2\theta$$

Итоговое дифференциальное уравнение:

$$0.6\ddot{\theta} + 0.015\dot{\theta} \cos^2\theta + 5.88 \sin\theta + 18 \sin\theta \cos\theta = 0$$

Стандартная форма:

$$\ddot{\theta} + 0.025\dot{\theta} \cos^2\theta + 9.8 \sin\theta + 30 \sin\theta \cos\theta = 0$$

#### 4. Аналитическое решение

##### 4.1. Линеаризация для малых углов

Для малых углов ( $\sin\theta \approx \theta, \cos\theta \approx 1$ )

Упрощенное уравнение:

$$\ddot{\theta} + 0.025\dot{\theta} + (9.8 + 30)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + 0.025\dot{\theta} + 39.8\theta = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$r^2 + 0.025r + 39.8 = 0$$

Дискриминант:

$$D = (0.025)^2 - 4 * 1 * 39.8 = 0.000625 - 159.2 = -159.199375$$

Корни характеристического уравнения:

$$r_{1,2} = \frac{-0.025 \pm \sqrt{159.199375}}{2} = -0.0125 \pm i6.310$$

Общее решение (для малых углов):

$$\theta(t) = e^{-0.0125t}[C_1 \cos(6.310t) + C_2 \sin(6.310t)]$$

Определение постоянных интегрирования:

$$\theta(0) = C_1 = -0.2042$$

$$\dot{\theta}(0) = -0.0125C_1 + 6.310C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{0.0125 * 0.2042}{6.310} = 0.000404$$

Окончательное аналитическое решение (линеаризованное):

$$\theta(t) = e^{-0.0125t}[-0.2042 \cos(6.310t) + 0.000404 \sin(6.310t)]$$

## 5. Численное решение

### 5.1. Система уравнений для численного решения

$$\begin{cases} \dot{\theta} = w \\ \dot{w} = -0.025w \cos^2 \theta - 9.8 \sin \theta - 30 \sin \theta \cos \theta \end{cases}$$

### 5.2. Метод Рунге-Кутты 4 порядка

Формулы метода для системы:

$$\begin{aligned} k_1^\theta &= h * w_n \\ k_1^w &= h * f(\theta_n, w_n) \\ k_2^\theta &= h * (w_n + \frac{k_1^w}{2}) \\ k_2^w &= h * f(\theta_n + \frac{k_1^\theta}{2}, w_n + \frac{k_1^w}{2}) \\ k_3^\theta &= h * (w_n + \frac{k_2^w}{2}) \\ k_3^w &= h * f(\theta_n + \frac{k_2^\theta}{2}, w_n + \frac{k_2^w}{2}) \\ k_4^\theta &= h * (w_n + k_3^w) \\ k_4^w &= h * f(\theta_n + k_3^\theta, w_n + k_3^w) \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \frac{1}{6}(k_1^\theta + 2k_2^\theta + 2k_3^\theta + k_4^\theta) \\ w_{n+1} &= w_n + \frac{1}{6}(k_1^w + 2k_2^w + 2k_3^w + k_4^w) \end{aligned}$$

### 5.3. Явный метод Эйлера

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= \theta_n + h * w_n \\ w_{n+1} &= w_n + h * f(\theta_n, w_n) \end{aligned}$$

### 5.4. Неявный метод Эйлера

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= \theta_n + h * w_{n+1} \\ w_{n+1} &= w_n + h * f(\theta_{n+1}, w_{n+1}) \end{aligned}$$

## 6. Сравнительный анализ решений

### 6.1. Параметры колебательной системы

Собственная частота:  $w_n = \sqrt{39.8} = 6.310 \text{рад/с}$

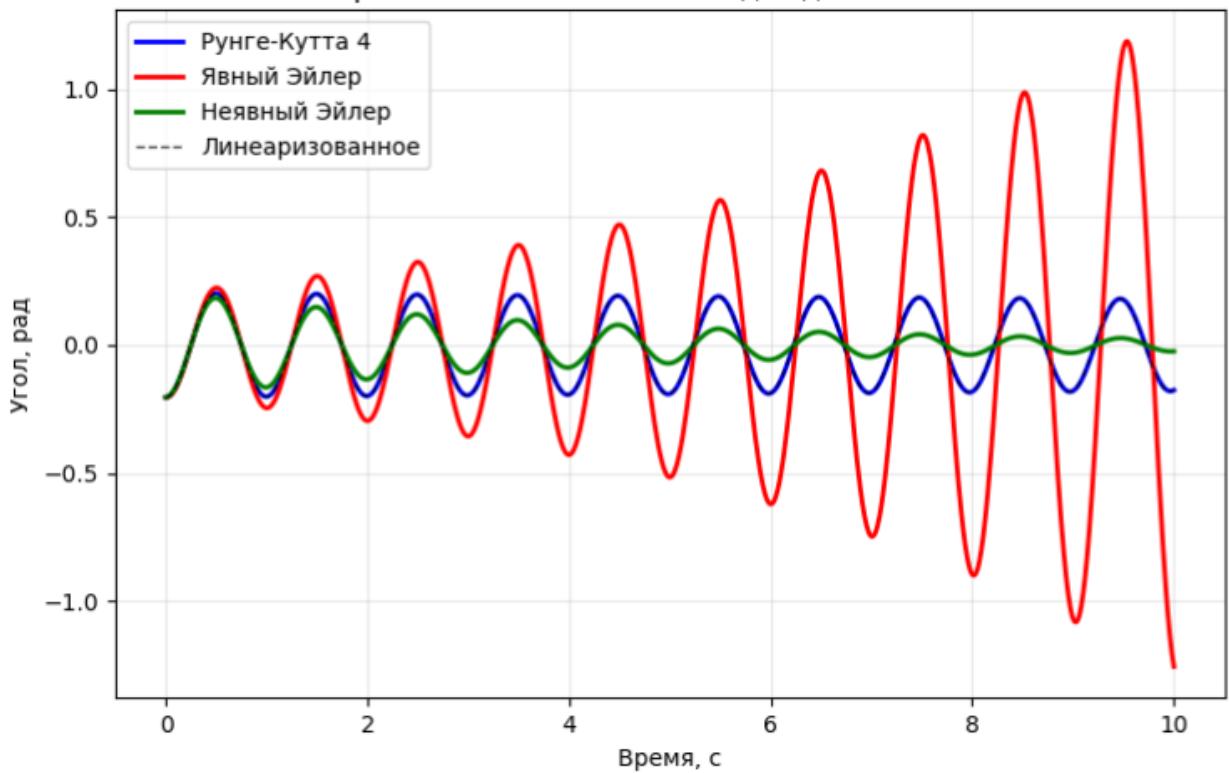
Коэффициент демпфирования:  $\zeta = \frac{0.025}{2*6.310} = 0.00198$

Частота затухающих колебаний:  $w_d = 6.310 \text{рад/с}$

$$\text{Период колебаний: } T = \frac{2\pi}{6.310} = 0.996\text{с}$$

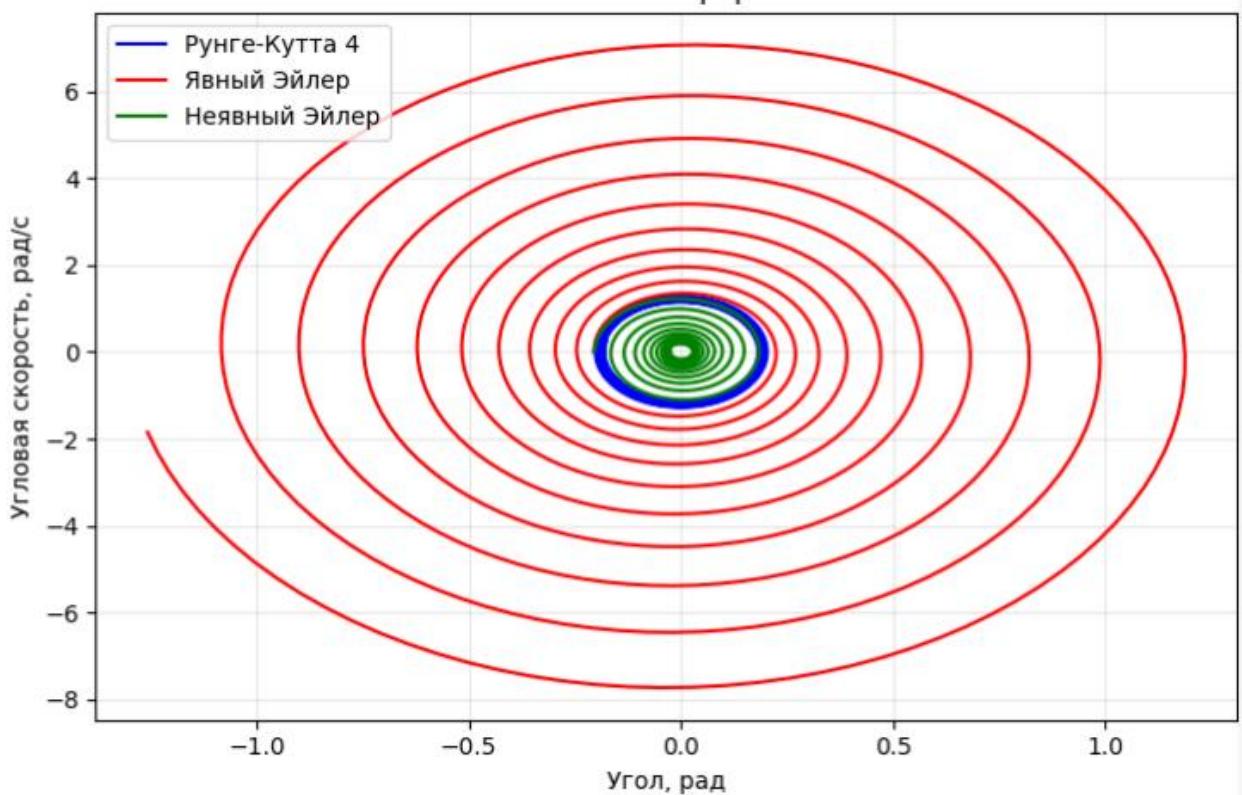
## 6.2. Визуальное сравнение решений

Сравнение численных методов для маятника



## 6.3. Фазовые портреты системы

Фазовые портреты



## 7. Сравнение численных методов

### 7.1. Результаты вычислений

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ (относительно линеаризованного решения):

Рунге-Кутта 4 порядка:

Максимальная погрешность: 6.31e-03 рад

Средняя погрешность: 2.22e-03 рад

Явный метод Эйлера:

Максимальная погрешность: 1.08e+00 рад

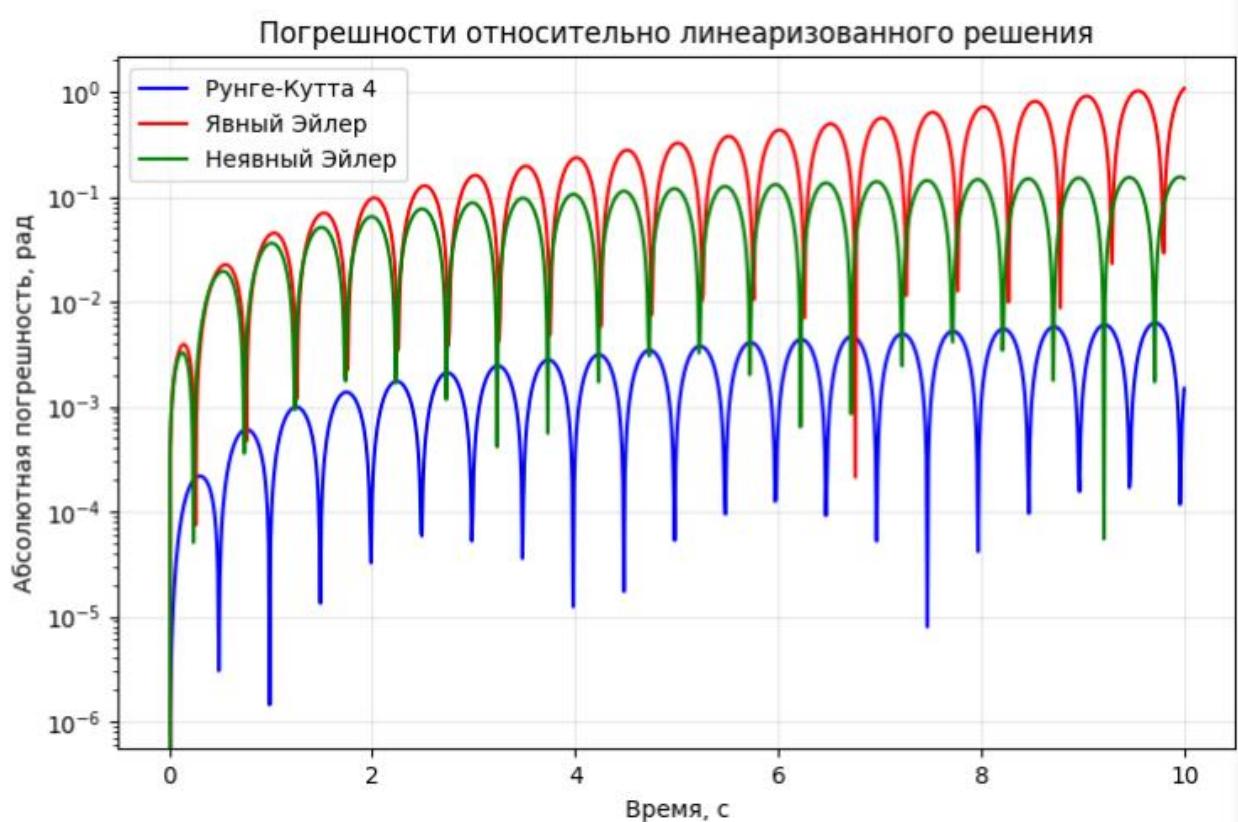
Средняя погрешность: 2.56e-01 рад

Неявный метод Эйлера:

Максимальная погрешность: 1.55e-01 рад

Средняя погрешность: 6.83e-02 рад

### 7.2. Анализ методов



Рунге-Кутта 4: Наиболее точный метод, хорошо сохраняет энергию системы, рекомендуется для точных расчетов

Явный Эйлер: Простая реализация, но низкая точность и условная устойчивость

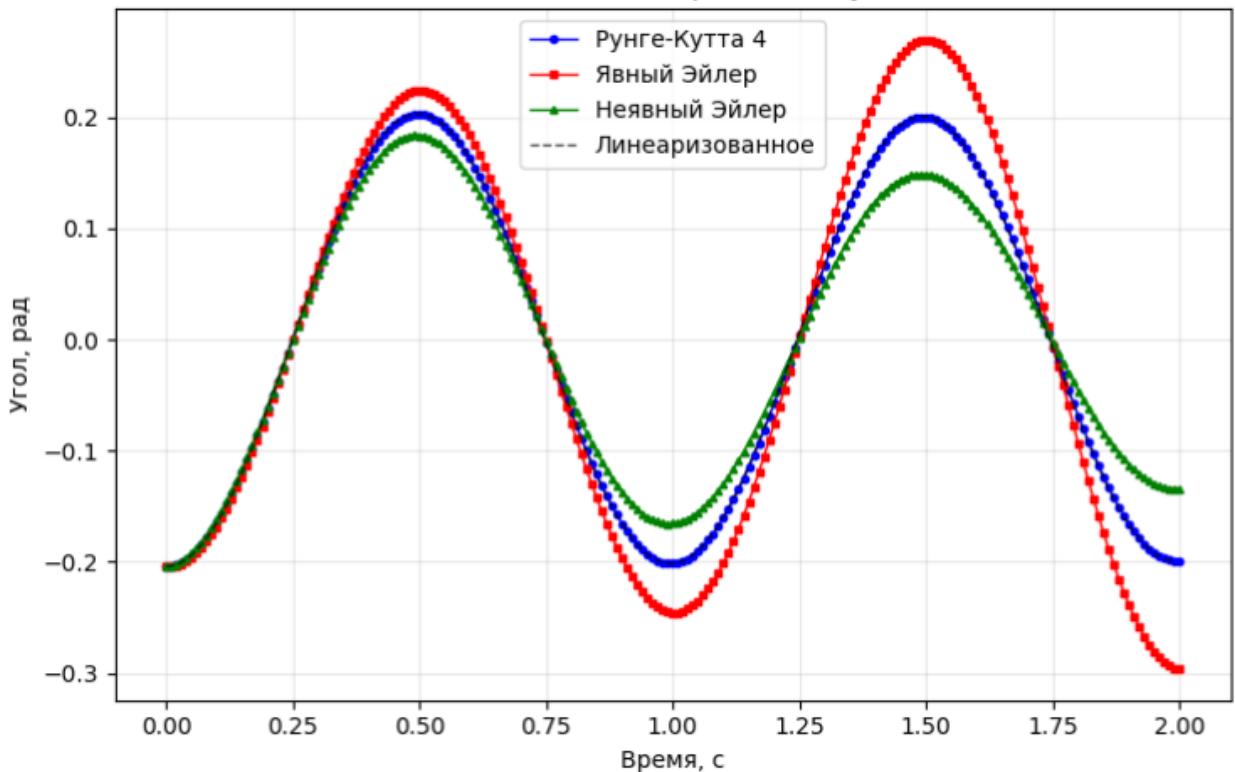
Неявный Эйлер: Безусловно устойчив, но вносит численное демпфирование

### 7.3. Устойчивость методов

Условие устойчивости для явного метода Эйлера:

$$h < \frac{2}{w_n} = \frac{2}{6.310} \approx 0.317\text{с}$$

Детальный вид (первые 2 секунды)



## 8. Выводы

Аналитическое решение существует только для линеаризованной системы и точно описывает поведение при малых углах

Метод Рунге-Кутты 4 порядка показал наивысшую точность и рекомендуется для точных расчетов нелинейной системы

Методы Эйлера имеют значительно большую погрешность, но проще в реализации

Неявный метод Эйлера обладает безусловной устойчивостью, что делает его предпочтительным для жестких систем

Все численные методы адекватно описывают качественное поведение системы, но для количественного анализа рекомендуется использовать методы высокого порядка точности

Система характеризуется очень слабым демпфированием ( $\zeta=0.00198$ ), что объясняет медленное затухание колебаний

## 9. Заключение

Система представляет собой слабодемпнованный маятник с дополнительной жесткостью от пружины. Начальный угол  $-11.7^\circ$  достаточно мал для применения линеаризации, но численные методы необходимы для точного решения нелинейного уравнения.