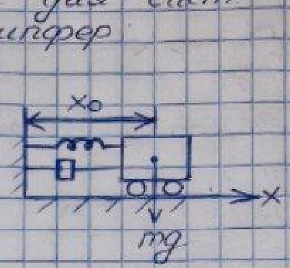
I. Вывод ур-я динамики для сист. масса - пружина - демпфер

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = Q$$



$$L(x, \dot{x}) = K(\dot{x}, x) - p(x)$$

$$K = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$

$$P = \cancel{mgx} + \frac{1}{2} kx^2$$

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (m\dot{x})' = \overset{0}{m'}\dot{x} + m\ddot{x}$$

Итог: $m\ddot{x} + kx = -b\dot{x}$

получили однород. дифф. ур-е второго порядка.

II. Решение ур-я: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$

$$0{,}2\ddot{x} + 0{,}015\dot{x} + 12{,}8x = 0$$

1. Характ. ур-е $0{,}2r^2 + 0{,}015r + 12{,}8 = 0$

$$D = 0{,}015^2 - 4 \cdot 0{,}2 \cdot 12{,}8 = 0{,}000225 - 10{,}24 = -10{,}239775$$

$$D < 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-0{,}015 \pm i\sqrt{-10{,}239775}}{2 \cdot 0{,}2}$$

$$r_{1,2} = \underbrace{-0{,}0375}_{\alpha} \pm i \cdot \underbrace{7{,}99991}_{\beta}$$

2. Общ. реш.

$$x(t) = e^{(-0{,}0375t)} \cdot (C_1 \cdot \cos(7{,}9991t) + C_2 \cdot \sin(7{,}99991t))$$

3. Находим константы $x_0 = 0{,}54$, $x_0' = 0$

$$x(0) = e^0 \cdot (C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \sin 0) = 0{,}54$$

$$1 \cdot (C_1 \cdot 1 + 0) = 0{,}54 \Rightarrow C_1 = 0{,}54$$

$$x'(t) = -0{,}0375 e^{-(0{,}0375t)} \cdot (C_1 \cdot \cos(7{,}9991t) + C_2 \sin(7{,}99991t)) +$$

$$+ e^{(-0{,}0375t)} \cdot (-C_1 \cdot 7{,}9991 \cdot \sin(7{,}9991t) +$$

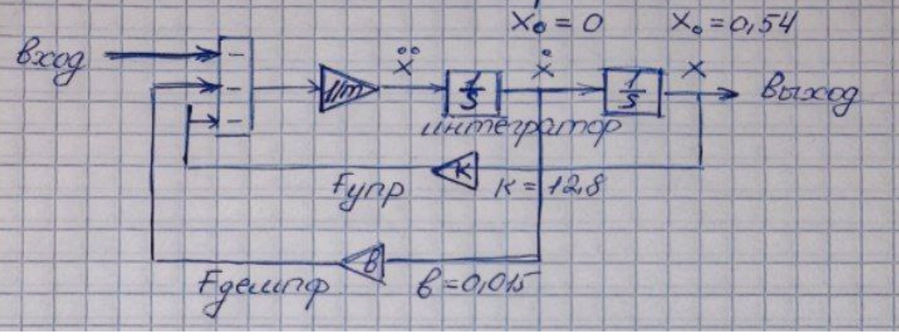
$$C_2 \cdot 7{,}9991 \cdot \cos(7{,}9991t))$$

$$x'(0) = -0{,}0375 \cdot C_1 + C_2 \cdot 7{,}99991 = 0$$

$$-0{,}0375 \cdot 0{,}54 + C_2 \cdot 7{,}99991 = 0 \Rightarrow C_2 = 0{,}00253$$

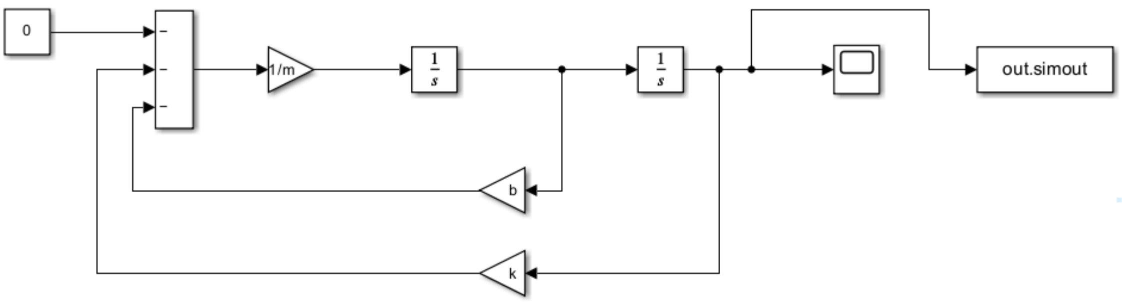
4. Итоговое ур-е:

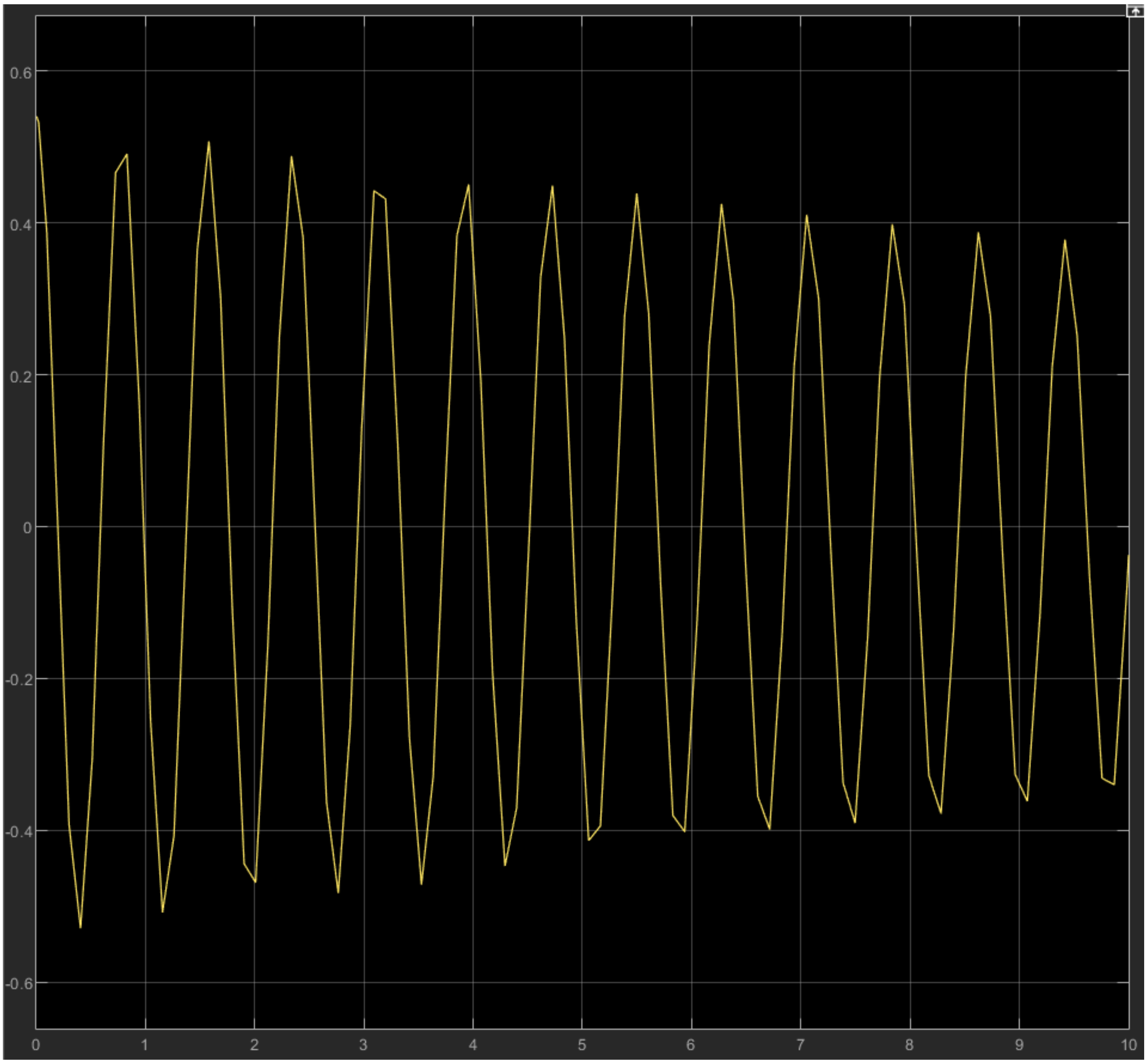
$$x(t) = e^{-0{,}0375t} \cdot (0{,}54 \cdot \cos(7{,}99991t) + 0{,}00253 \cdot \sin(7{,}99991t))$$



Вывод дифференциального уравнения для системы масса-пружина-демпфер.

Схема моделирования в Simulink





На графике видно затухающие колебания системы масса-пружина-демпфер, выведенной из состояния равновесия (x0 = 0.54) без внешнего воздействия.

Аналитическое решения однородного дифференциального уравнения, описывающего динамику системы масса-пружина-демпфер.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

m, k, c = 0.2, 12.8, 0.015
x0, v0 = 0.54, 0

alpha = c / (2 * m)
omega_d = np.sqrt(k/m - alpha**2)
A = x0
```

```
B = (v0 + alpha * x0) / omega_d

t = np.linspace(0, 10, 1000)
x = np.exp(-alpha * t) * (A * np.cos(omega_d * t) + B * np.sin(omega_d
* t))

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(t, x, 'b-', linewidth=2)
plt.grid(True)
plt.xlabel('Время, с')
plt.ylabel('Положение, м')
plt.title('x(t) = e^(-0.0375t)[0.54·cos(7.9999t) +
0.00253·sin(7.9999t)]')
plt.show()
```

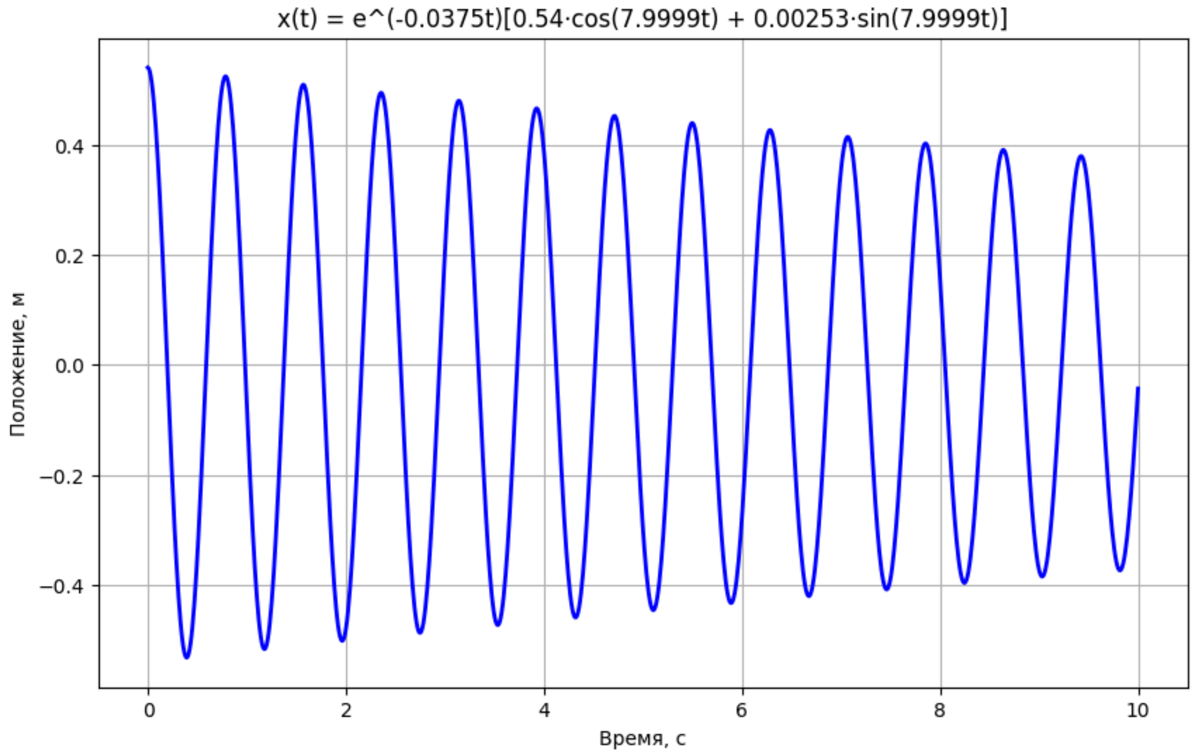


График аналитического решения

Выводы

В результате выполнения работы было составлено дифференциальное уравнение динамики системы масса-пружина-демпфер.

Уравнение динамики решалось двумя способами:

1. Аналитически “на бумаге” и при помощи Python. Была получена функция x(t) и построен график.

2. При помощи моделирования в Simulink. Был так же построен график, описывающий затухающие колебания системы, выведенной из положения равновесия без дальнейшего внешнего воздействия.

Аналитический и численный методы дали практически идентичные результаты. Модель модель может быть использована для прогнозирования поведения системы.