МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Международный научно-образовательный центр
Физики наноструктур

Практическая работа № 2
по дисциплине
«Имитационное моделирование робототехнических систем»

по теме:
Исследование метода Лагранжа

Студент: Д.С. Черных
Группа № R4134c *И.О. Фамилия*

Предподаватель: Е.А. Ракшин
Инженер, младший научный сотрудник *И.О. Фамилия*

Санкт-Петербург 2025

Цель работы: исследовать дифференциальное уравнение ОДУ, сравнить три основных метода интегрирования с аналитическим решением и сделать выводы.

Оборудование и программные среды: ПК.

Задание:

Составить и решить дифференциальное уравнение ОДУ для системы «масса-пружина-демпфер». Сравнить аналитическое решение с численными методами интегрирования.

Ход работы

Для составления уравнения Лагранжа требуется вычислить кинетическую и потенциальную энергии системы. Система «масса-пружина-демпфер» представляет собой подвесной маятник, который состоит из одного тела массы m, закрепленного на невесомом стержне длинной l, вращающегося вокруг неподвижной опоры. К стержню закреплена пружина жесткостью k и демпфер с коэффициентом вязкого трения b. Для данной одномерной системы обобщенной координатой является угол отклонения стержня от вертикали θ.

Ниже приведены параметры, заданные по индивидуальному заданию:

$$m = 0{,}4\ \text{кг}, \qquad k = 6{,}4\ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}}, \qquad b = 0{,}05\ \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{рад}}, \qquad l = 0{,}62\ \text{м},$$

$$\theta_0 = -0.20420986490732\ \text{рад}$$

Построим лагранжиан системы L как разность кинетической и потенциальной энергий, для этого найдем кинетическую энергию точки массы, движущейся по окружности радиуса l, как:

$$K(\dot{\theta}) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

Потенциальная энергия имеет две составляющие: гравитационную и упругую. Гравитационная составляющая вычисляется как:

$$P_{\text{грав}}(\theta) = mgh = mgl(1 - \cos\theta)$$

Упругая составляющая имеет вид:

$$P_{\text{упр}}(\theta) = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = \frac{1}{2}k(l\sin\theta)^2 = \frac{1}{2}kl^2\sin^2\theta$$

Но поскольку по заданию параметры угловые, то составляющая примет вид:

$$P_{\text{упр}}(\theta) = \frac{1}{2}k\sin^2\theta$$

Таким образом, полная потенциальная энергия равняется:

$$P(\theta) = mgl(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}k\sin^2\theta$$

Лагранжиан системы, исходя из выше сказанного, равен:

$$L(\theta, \dot{\theta}) = K(\theta, \dot{\theta}) - P(\theta) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \left(mgl(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}k\sin^2\theta\right)$$

Уравнение Лагранжа для механической системы с обобщенными координатами $\theta \in \mathbb{R}^m$ и лагранжианом имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = Q$$

где Q – внешняя обобщённая сила, действующая на систему. В нашем случае сила демпфирования:

$$Q = -b\dot{\theta}$$

Частные производные равняются:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta - k\sin\theta\cos\theta$$

Подставив частные производные в уравнение Лагранжа, получим:

$$ml^2\ddot{\theta} - (-mgl\sin\theta - k\sin\theta\cos\theta) = -b\dot{\theta}$$

Математическая модель системы имеет вид:

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta + k\sin\theta\cos\theta = -b\dot{\theta}$$

При переносе всего в левую часть:

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta + k\sin\theta\cos\theta + b\dot{\theta} = 0$$

Переходим к аналитическому решению данного уравнения. Подставим известные параметры и получим:

$$0{,}15376\ddot{\theta} + 2{,}43288\sin\theta + 6{,}4\sin\theta\cos\theta + 0{,}05\dot{\theta} = 0$$

Полученное уравнение представляет собой нелинейное ОДУ второго порядка. Поскольку в нем присутствуют тригонометрические функции, которые не сводиться к линейному уравнению в общем случае, а также член $0{,}05\dot{\theta}$, который нарушает консервативность системы, что исключает возможность использования интеграла энергии для понижения порядка уравнения. Ближайшее возможное аналитическое решение – это линеаризация в окрестности устойчивого равновесия.

При $|\theta|$, стремящегося к нулю можно использовать следующие приближенные значения:

$$\sin\theta \approx \theta, \qquad \cos\theta \approx 1, \qquad \sin\theta\cos\theta \approx \theta$$

При поставлении в исходное уравнение получим:

$$0{,}15376\ddot{\theta} + (2{,}43288 + 6{,}4)\theta + 0{,}05\dot{\theta} = 0$$

Приведем полученное уравнение к стандартной форме вида:

$$\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

То есть избавимся от коэффициента первого члена уравнения с помощью деления:

$$\ddot{\theta} + \frac{0{,}05}{0{,}15376}\dot{\theta} + \frac{8{,}83288}{0{,}15376}\theta = 0$$

После упрощения получим:

$$\ddot{\theta} + 0{,}3252\dot{\theta} + 57{,}4459\theta = 0$$

Поскольку $\beta < \omega_0$, колебания системы затухающие, а общее решение имеет вид:

$$\theta(t) = e^{-\beta t}\left(C_1\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2 t}\right) + C_2\sin\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2 t}\right)$$

Где:

$$\beta = \frac{0,3252}{2} = 0,1626$$

$$\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{57,4459 - 0,1626^2} = 7,57756$$

Подставив известные из задания параметры в данное уравнение, получим:

$$\theta(t) = e^{-0,1626t}(C_1 \cos 7,57756t + C_2 \sin 7,57756t)$$

Далее с помощью предложенного в методическом пособии программного кода, произведем расчёт изначального уравнения методами явного, неявного Эйлера, а также методом Рунге-Кутты 4-го порядка.

Поскольку исходное уравнение второго порядка, чтобы использовать интеграторы, перепишем его как систему двух уравнений первого порядка.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = \dot{\theta} \\ \dot{x}_2 = \ddot{\theta} = -\left(\dfrac{2,43288 \sin x_1 + 6,4 \sin x_1 \cos x_1 + 0,05 x_2}{0,15376}\right) \end{cases}$$

При упрощении коэффициентов получим:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = \dot{\theta} \\ \dot{x}_2 = \ddot{\theta} = -15,8226 \sin x_1 - 41,6233 \sin x_1 \cos x_1 - 0,3252 x_2 \end{cases}$$

Таким образом получим следующую функцию для вычисления исходного уравнения:

```
def pendulum_dynamics(x):
    # Параметры системы (из задания)
    m = 0.4          # кг
    l = 0.62         # м
    k = 6.4          # Н·м/рад (угловая жёсткость)
    b = 0.05         # Н·м·с/рад (угловая вязкость)
    g = 9.81         # м/с²
    theta = x[0]
    theta_dot = x[1]


    theta_ddot = -b / (m * l**2) * theta_dot - (m *g*l)  /  (m * l**2) * np.sin(theta) - k / (m * l**2) * np.sin(theta) * np.cos(theta)

    return np.array([theta_dot, theta_ddot])
```

Используя приведённый код, а также фрагменты приведенного в задании кода интеграторов, получим следующие графики (Рисунки 1, 2):

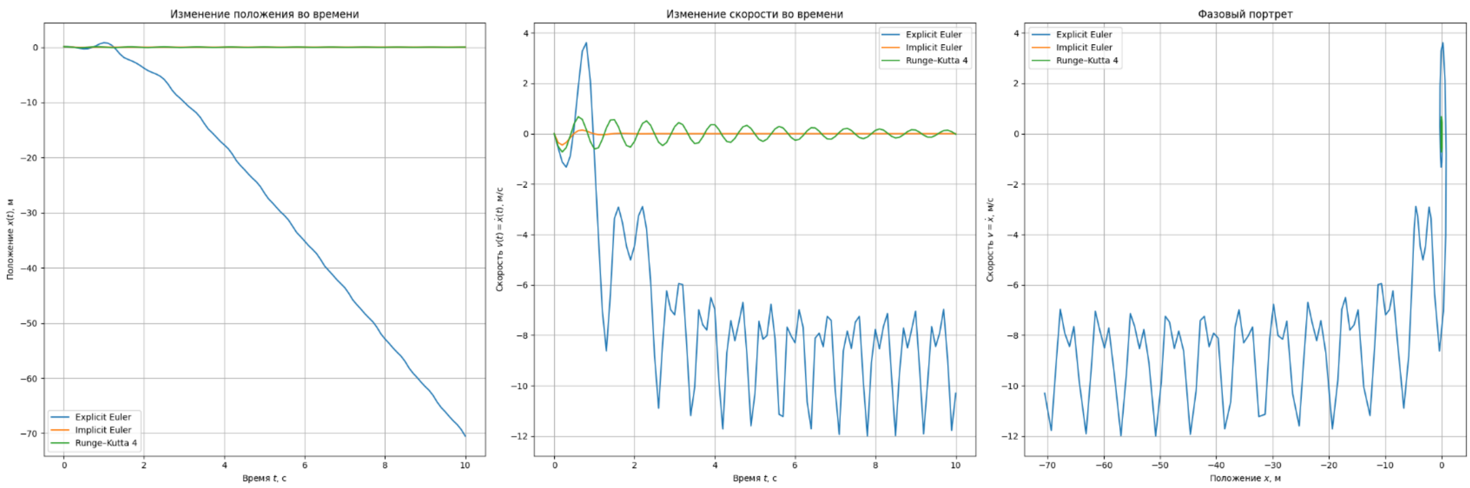

Рисунок 1 – Графики методов интеграции при шаге h=0,1

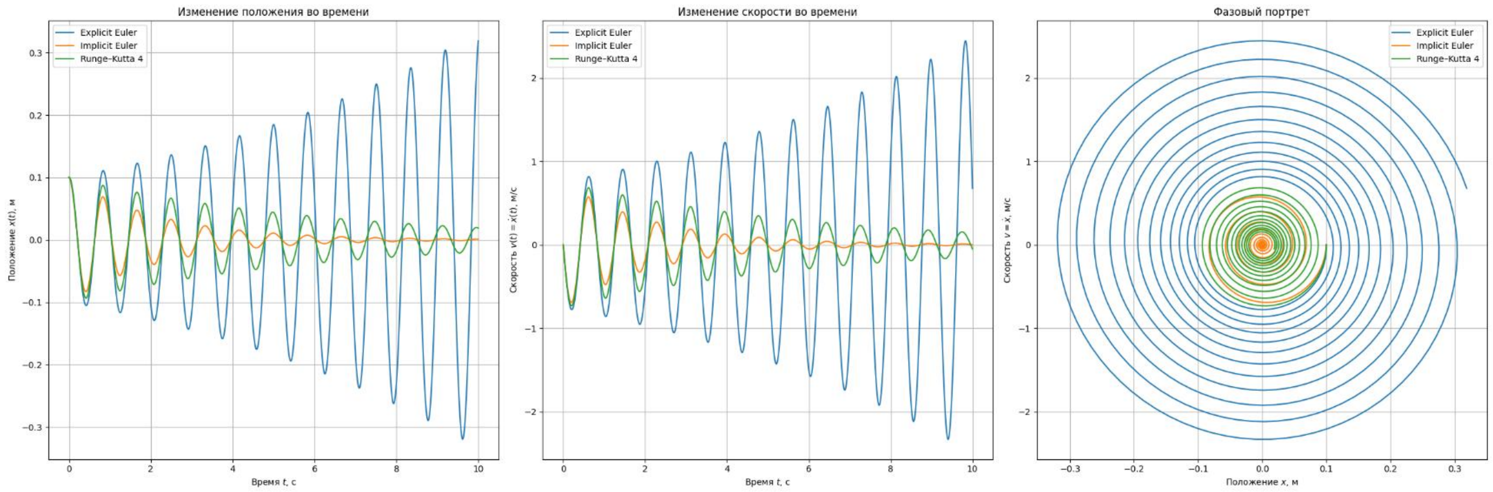

Рисунок 2 – Графики методов интеграции при шаге h=0,01

Анализ графика зависимости положения от времени показывает, что при большом шаге решение явного Эйлера нестабильно и расходится, что говорит о том, что метод с ним не применим. А при шаге h=0,01 колебания системы устойчиво затухающие. Метод неявного Эйлера в обоих случаях показал себя устойчивым, Рунге-Кутта 4 порядка, наиболее приближен аналитическому.

Вывод

В ходе работы был проведен аналитический расчет ОДУ, произведен подсчет тремя числовыми методами интегрирования и произведен анализ полученных результатов.

Метод Рунге-Кутты является наиболее точными и сложным для вычисления, при малых шагах интегрирования ошибка практически незаметна.

Метод неявного Эйлера остается устойчивым при больших шагах интегрирования

Метод явного Эйлера применим только с малым шагом, поскольку при большем выдает неустойчивые результаты.

Наиболее точным является метод Рунге-Кутты 4-го порядка, который практически совпадает с аналитическим решением.

Таким образом, метод Рунге-Кутты 4-го порядка наиболее правдоподобный и ближе всех к аналитическому решению.