Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет систем управления и робототехники

Отчет по практическому заданию № 1.

Вариант 61.

Выполнил студент:
Филиппов А.В. R4136c
Преподаватель:
Ракшин Е.А.

Санкт-Петербург

2025

1. Задание

• Аналитически решить ОДУ в виде:

$$a \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + c \cdot x = d,$$

где a, b, c, d – коэффициенты из таблицы согласно варианту

• Решить ОДУ с помощью трех интеграторов: явного/неявного методов Эйлера, Рунге-Кутты;

• Сравнить аналитическое решение и результаты методов.

2. Аналитическое решение

Заданные коэффициенты: a = 0.43; b = 9.75; c = 2.58; d = 3.99.

Уравнение в характеристическом виде:

$$0.43\lambda^2 + 9.75\lambda + 2.58 = 0$$

Дискриминант:

$$D = 9.75^2 - 4 \cdot 0.43 \cdot 2.58 = 90.6249$$

Корни:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} => \lambda_1 = -0.268;\ \lambda_2 = -22.407$$

Таким образом, решение однородной части:

$$x(t) = C_1 e^{-0.268t} + C_2 e^{-22.407t}$$

Частное решение:

$$\tilde{x} = \frac{d}{c} \approx 1.5465$$

Общее решение:

$$x(t) = C_1 e^{-0.268t} + C_2 e^{-22.407t} + 1.5465$$

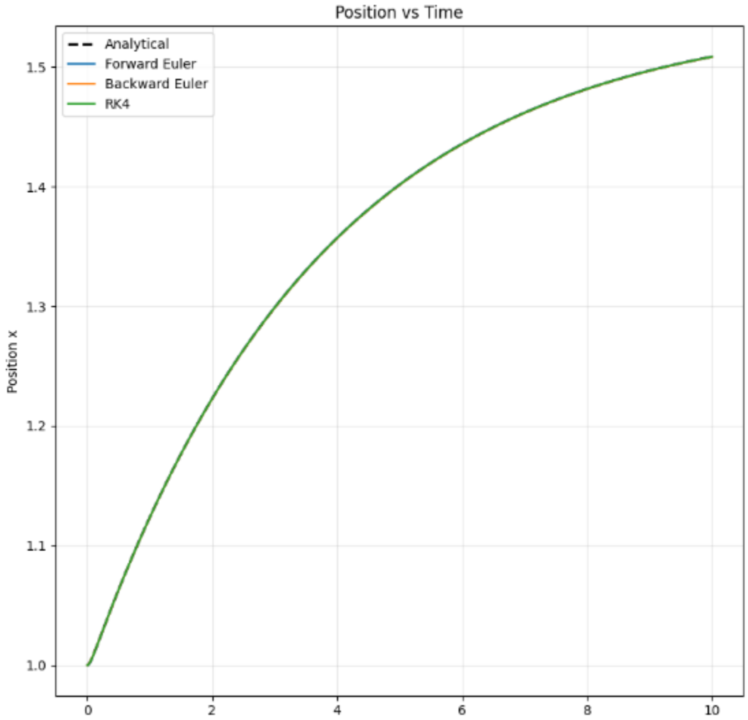
При начальных условиях $x(0) = 0.1;\ \dot{x}(0) = 0$

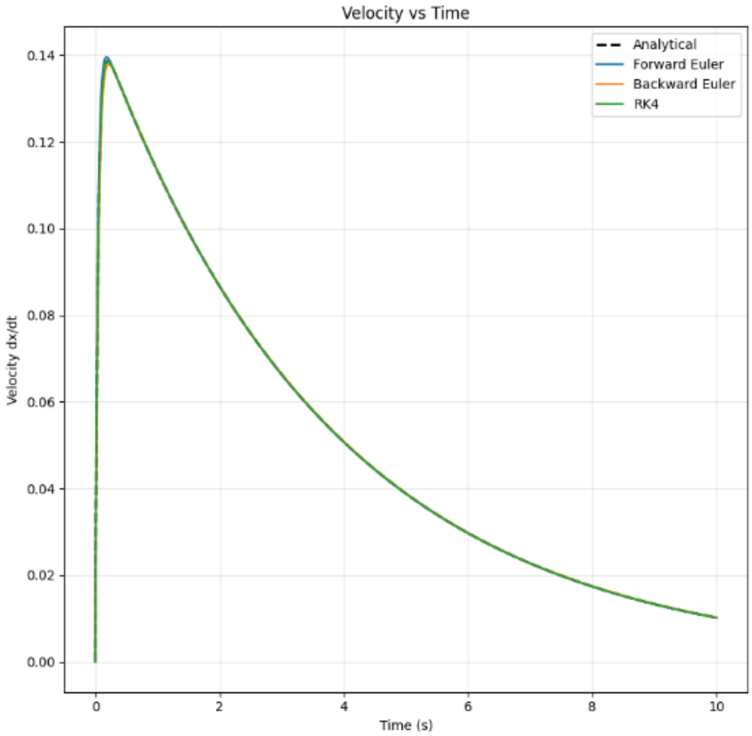
$$C_1 = 0.5590;\ C_2 = 0.0125$$

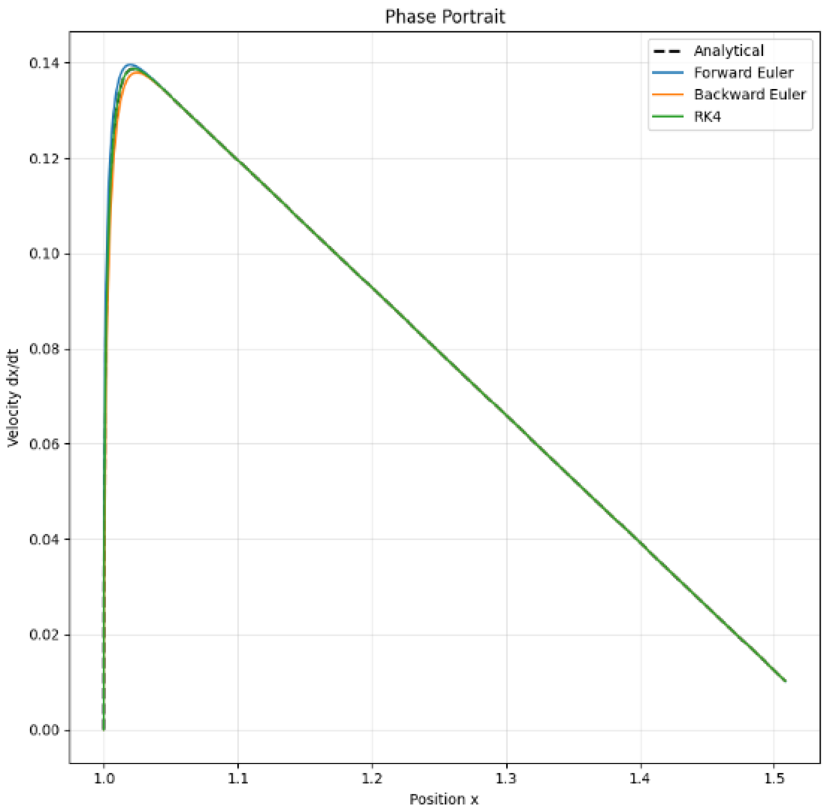
Тогда окончательное аналитическое решение:

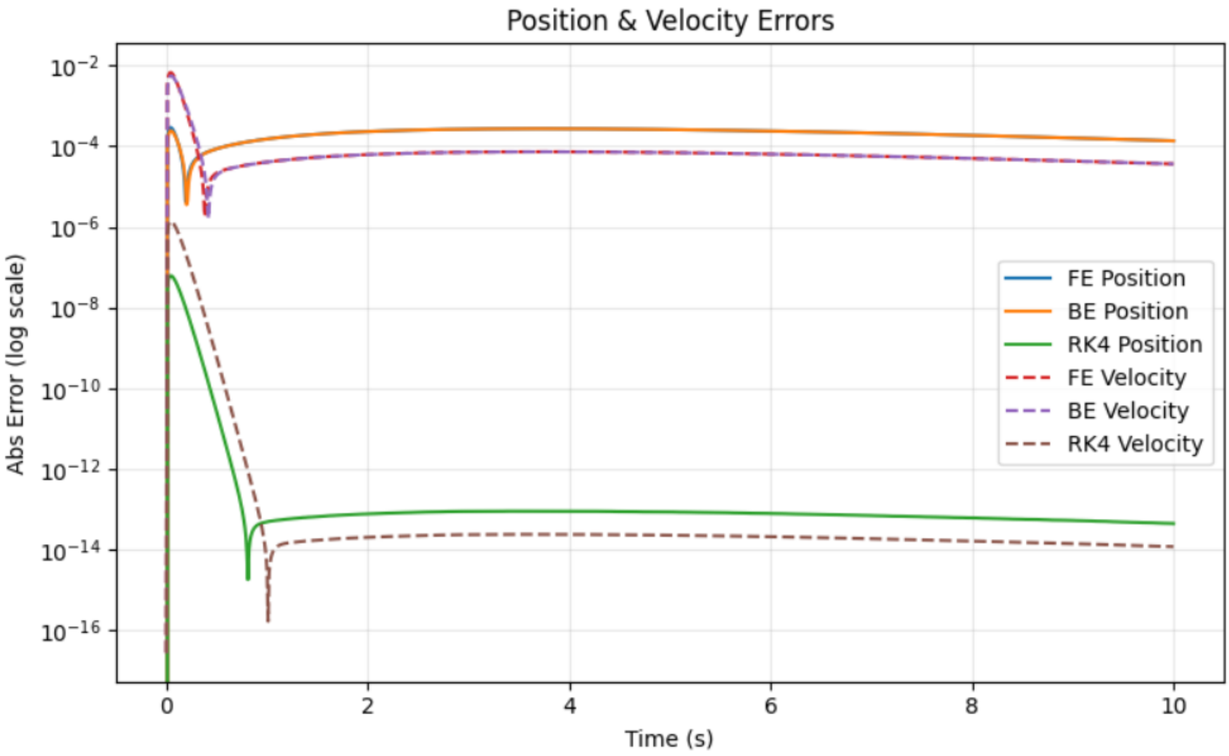
$$x(t) = 1.5465 - 0.5590e^{-0.268t} + 0.0125e^{-22.407t}$$

3. Результаты моделирования:









Error statistics (Position):
Forward Euler -> max: 2.935592e-04, mean: 2.090340e-04
Backward Euler -> max: 2.721331e-04, mean: 2.082836e-04
RK4 -> max: 6.124174e-08, mean: 7.434814e-10

Error statistics (Velocity):
Forward Euler -> max: 6.751726e-03, mean: 1.311915e-04
Backward Euler -> max: 5.584631e-03, mean: 1.254185e-04
RK4 -> max: 1.372222e-06, mean: 1.665752e-08

4. Вывод

По графикам видно, что все численные методы дают результаты, близкие к аналитическому решению.

Наиболее точным оказался метод Рунге–Кутты 4-го порядка (RK4) – его траектории практически совпадают с аналитическим решением как для положения, так и для скорости.

Согласно рассчитанным значениям ошибок, метод RK4 имеет минимальные значения максимальной и средней ошибки, порядка 10^{-8}.

Методы явного и неявного Эйлера также обеспечили корректное приближение, однако их ошибки заметно выше, порядка 10^{-4}. При этом разница между ними несущественна, оба метода показали сопоставимую точность.

В целом, все три метода верно описывают динамику системы, однако метод Рунге–Кутты 4-го порядка обеспечивает наилучшее совпадение с аналитическим решением.