In [1]:
```
import sympy
from sympy import linsolve, Matrix, S, Symbol, symbols, linear_eq_to_matrix, Eq, zeros
```

Занятие 5

Алгебра

Прямые и плоскости в пространстве. Уравнения прямых и плоскостей.

1. Общее уравнение плоскости:
$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
коэффициенты A, B и C являются координатами вектора нормали (он по определению перпендикулярен плоскости).
2. Пусть $A(x_0, y_0, z_0)$ - фиксированная точка на плоскости α, вектор $\bar{n}(n_x, n_y, n_z)$ - нормаль к плоскости α, тогда в векторнй форме уравнение плоскости α запишется в виде:
$$\bar{n} \cdot \overline{MA} = 0,$$
где $M(x, y, z)$ - произвольная точка на плоскости α, $\overline{MA}$ - вектор в плоскости α.
3. Пусть $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ и $\mathrm{C}(x_3, y_3, z_3)$ - три точки, определяющие плоскость, тогда уравнение плоскости можно записать в виде:
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$
4. Пусть в плоскости лежит точка $A(x_0, y_0, z_0)$ и плоскость параллельна векторам $a_1(x_1, y_1, z_1)$ и $a_2(x_2, y_2, z_2)$, тогда уравнение плоскости можно записать в виде:
$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$
Уравнение прямой в пространстве: Параметрические уравнения прямой:
$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}$$
в векторной форме:
$$X = A + t\bar{a}$$
X и A - радиус-векторы произвольной точки X и заданной точки A, лежащих на прямой с направляющим вектором $\bar{a}(a_1, a_2, a_3)$.

Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух плоскостей:
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Пример 1.

Пусть плоскость α задана общим уравнением
$$3x + 5y - 2z + 5 = 0.$$
Найти точку на плоскости, через которую проходит прямая, заданная уравнениями:
$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = -t \end{cases}$$
Решим СЛАУ:
$$\begin{cases} 3x + 5y - 2z + 5 = 0 \\ x = 1 + 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = -t \end{cases},$$
Введем ее в виде списка уравнений, и решим с помощью linsolve()

In [2]:
```
x, y, z, t = symbols('x y z t')
SLAE = [Eq(3*x + 5*y - 2*z + 5, 0), Eq(x, 1 + 3*t), Eq(y, -2 + 2*t), Eq(z, -t)]
res = linsolve(SLAE, x, y, z, t)
res
```

Out[2]: $\left\{\left(\frac{9}{7}, -\frac{38}{21}, -\frac{2}{21}, \frac{2}{21}\right)\right\}$

Выделим координаты x, y, z точки пересечения:

In [3]:
```
for element in res:
    point = element[:-1]
point
```

Out[3]: $\left(\frac{9}{7}, -\frac{38}{21}, -\frac{2}{21}\right)$

Пример 2.

Определить, пересекаются ли прямые в пространстве, если одна из них проходит через точки $A(1, 2, 3)$ и $B(-3, 5, 0)$, а вторая прямая проходит через начало координат перпендикулярно плоскости $5x - 2y + 3z - 1 = 0$.

Вначале найдем координаты направляющего вектора для прямой AB, для этого составим матрицы (векторы-столбцы) из координат точек A и B, затем вычтем один вектор-столбец из другого:

In [4]:
```
A = Matrix([1, 2, 3])
B = Matrix([-3, 5, 0])
a1 = B - A
a1
```

Out[4]: $\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$

Запишем уравнение прямой AB в векторной форме:

In [5]:
```
t1 = Symbol('t1')
AB = A + t1*a1
AB
```

Out[5]: $\begin{bmatrix} 1 - 4t_1 \\ 3t_1 + 2 \\ 3 - 3t_1 \end{bmatrix}$

Составим уравнение второй прямой, она проходит через точку $O(0, 0, 0)$, ее направляющим вектором является вектор нормали к плоскости $5x - 2y + 3z - 1 = 0$, т.е. $(5, -2, 3)$.

In [6]:
```
t2 = Symbol('t2')
a2 = Matrix([5, -2, 3])
OC = t2*a2
OC
```

Out[6]: $\begin{bmatrix} 5t_2 \\ -2t_2 \\ 3t_2 \end{bmatrix}$

Составим СЛАУ из уравнений двух этих прямых

In [7]:
```
SLAE1 = [Eq(AB[i] - OC[i], 0) for i in range(len(AB))]
display(*SLAE1)
```

$-4t_1 - 5t_2 + 1 = 0$

$3t_1 + 2t_2 + 2 = 0$

$-3t_1 - 3t_2 + 3 = 0$

In [8]:
```
linsolve(SLAE1, t1, t2)
```

Out[8]: $\emptyset$

СЛАУ несовместна, прямые не пересекаются.

Можно проверить совместность СЛАУ с помощью теоремы Кронекера-Капелли, для этого приведем СЛАУ к матричному виду с помощью linear_eq_to_matrix

In [9]:
```
A2, b2 = linear_eq_to_matrix(SLAE1, [t1, t2])
```

Составим расширенную матрицу СЛАУ

In [10]:
```
A2b2 = A2.row_join(b2)
display(A2b2)
```

$\begin{bmatrix} -4 & -5 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$

Сравним ранги матрицы левой части и расширенной матрицы

In [11]:
```
A2.rank() == A2b2.rank()
```

Out[11]: False

Вывод: СЛАУ несовместна, следовательно, прямые не пересекаются.

Пример 3.

Найти точку пересечения прямых в пространстве, если одна из них проходит через точки $A(-1, 2, 1)$ и $B(3, 5, 2)$, а вторая прямая проходит через точки $C(1, 3, 7)$ и $D(-3, 1/2, 1/2)$.

In [12]:
```
A = Matrix([-1, 2, 1])
B = Matrix([3, 5, 2])
a1 = B - A
AB = A + t1*a1
AB
```

Out[12]: $\begin{bmatrix} 4t_1 - 1 \\ 3t_1 + 2 \\ t_1 + 1 \end{bmatrix}$

In [13]:
```
C = Matrix([1, 3, 7])
D = Matrix([-3, S(1)/2, S(1)/2])
a2 = D - C
CD = C + t2*a2
CD
```

Out[13]: $\begin{bmatrix} 1 - 4t_2 \\ 3 - \frac{5t_2}{2} \\ 7 - \frac{13t_2}{2} \end{bmatrix}$

In [14]:
```
SLAE2 = [Eq(AB[i], CD[i]) for i in range(len(AB))]
display(*SLAE2)
```

$4t_1 - 1 = 1 - 4t_2$

$3t_1 + 2 = 3 - \frac{5t_2}{2}$

$t_1 + 1 = 7 - \frac{13t_2}{2}$

Решим систему:

In [15]:
```
A3, b3 = linear_eq_to_matrix(SLAE2, [t1, t2])
display(A3, b3)
A3b3 = A3.row_join(b3)
display(A3b3, A3.rank(), A3b3.rank())
```

$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & \frac{5}{2} \\ 1 & \frac{13}{2} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 3 & \frac{5}{2} & 1 \\ 1 & \frac{13}{2} & 6 \end{bmatrix}$

2

2

Вывод: СЛАУ совместна, найдем, при каких значениях параметров прямые пересекаются:

In [16]:
```
Set_t1_t2 = linsolve(SLAE2, t1, t2)
Set_t1_t2
```

Out[16]: $\left\{\left(-\frac{1}{2}, 1\right)\right\}$

Выделим значения параметров и подставим их в уравнения прямых в векторной форме, убедимся, что получается одна и та же точка

In [17]:
```
for element in Set_t1_t2:
    T1, T2 = element
K1 = A + T1*a1
K2 = C + T2*a2
display(K1, K2)
```

$\begin{bmatrix} -3 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -3 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Пример 4.

Найти точку пересечения прямой, проходящей через точку $A(-1, 0, 1)$ параллельно вектору $a(3, -2, 0)$ и плоскости $3x + 4y - z + 5 = 0$.

Составим канонические уравнения прямой и уравнение плоскости, обединим все уравнения в одну систему и решим ее с помощью linsolve, затем выделим значения переменных x, y, z.

In [18]:
```
x, y, z, t = symbols('x y z t')
X = Matrix([x, y, z])
A = Matrix([-1, 0, 1])
a = Matrix([3, -2, 0])
SLAE_AB = [Eq(X[i], A[i] + a[i]*t) for i in range(len(A))]
display(*SLAE_AB)
KMN = Eq(3*x + 4*y - z + 5, 0)
display(KMN)
SLAE_AB.append(KMN)
points = linsolve(SLAE_AB, x, y, z, t)
for item in points:
    display(item[:-1])
```

$x = 3t - 1$

$y = -2t$

$z = 1$

$3x + 4y - z + 5 = 0$

$(-4, 2, 1)$

Пример 5.

Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат, в которой лежит прямая, заданная уравнениями:
$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$$

Найдем две различные точки на прямой, придавая разные значения параметру t, например, 0 и 1. Затем составим уравнение плоскости, проходящей через 3 точки.

In [19]:
```
O = zeros(3, 1)
A = Matrix([3, 2, 5])
a = Matrix([2, -3, 2])
x, y, z, t = symbols('x y z t')
X = Matrix([x, y, z])
AB = A + t*a
M1 = AB.subs(t, 0)
M2 = AB.subs(t, 1)
Eq(Matrix([(P - M1).T for P in (X, M2, O)]).det(), 0)
```

Out[19]: $19x + 4y - 13z = 0$