Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Национальный исследовательский университет ИТМО»

(Университет ИТМО)

Дисциплина: Теория автоматического управления

Отчет
по лабораторной работе №9:
«Регуляторы с заданной степенью устойчивости»

Выполнил:

Самбрано Браво Рикардо Хосе,

студент гр. R33352

Преподаватель:

Пашенко Артем Витальевич,

фак. СУиР

Санкт-Петербург,

2024 г.

Содержание

Регуляторы с заданной степенью устойчивости

Задание 1. Возьмите матрицы A и B из таблицы 1 лабораторной работы №8 в соответствии с вашим вариантом и рассмотрите систему

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1}$$

Выполните следующие шаги и приведите в отчёте написанный вами программный код, результаты всех вычислений, схемы моделирования, графики и выводы:

1. Постройте схему моделирования системы $\dot{x} = Ax + Bu$ с регулятором

$$u = Kx \tag{2}$$

2. Задайтесь несколькими различными значениями желаемой степени устойчивости α замкнутой системы.

3. Для каждой из заданных степеней устойчивости α найдите какой-нибудь регулятор, её гарантирующий. Для поиска регулятора воспользуйтесь математическим аппаратом линейных матричных неравенств, не выбирайте собственные числа самостоятельно.

4. Найдите собственные числа матрицы $A + BK$ для каждой из найденных K.

5. Выберите какие-нибудь начальные условия и выполните моделирование работы найденных вами регуляторов.

6. Постройте сравнительные графики x(t) при различных выбранных значениях α, а также сравнительные графики u(t).

7. Сделайте выводы.

Решение задач:

Матрица A:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}_{4x4} \tag{3}$$

Матрица B:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}_{4x1} \tag{4}$$

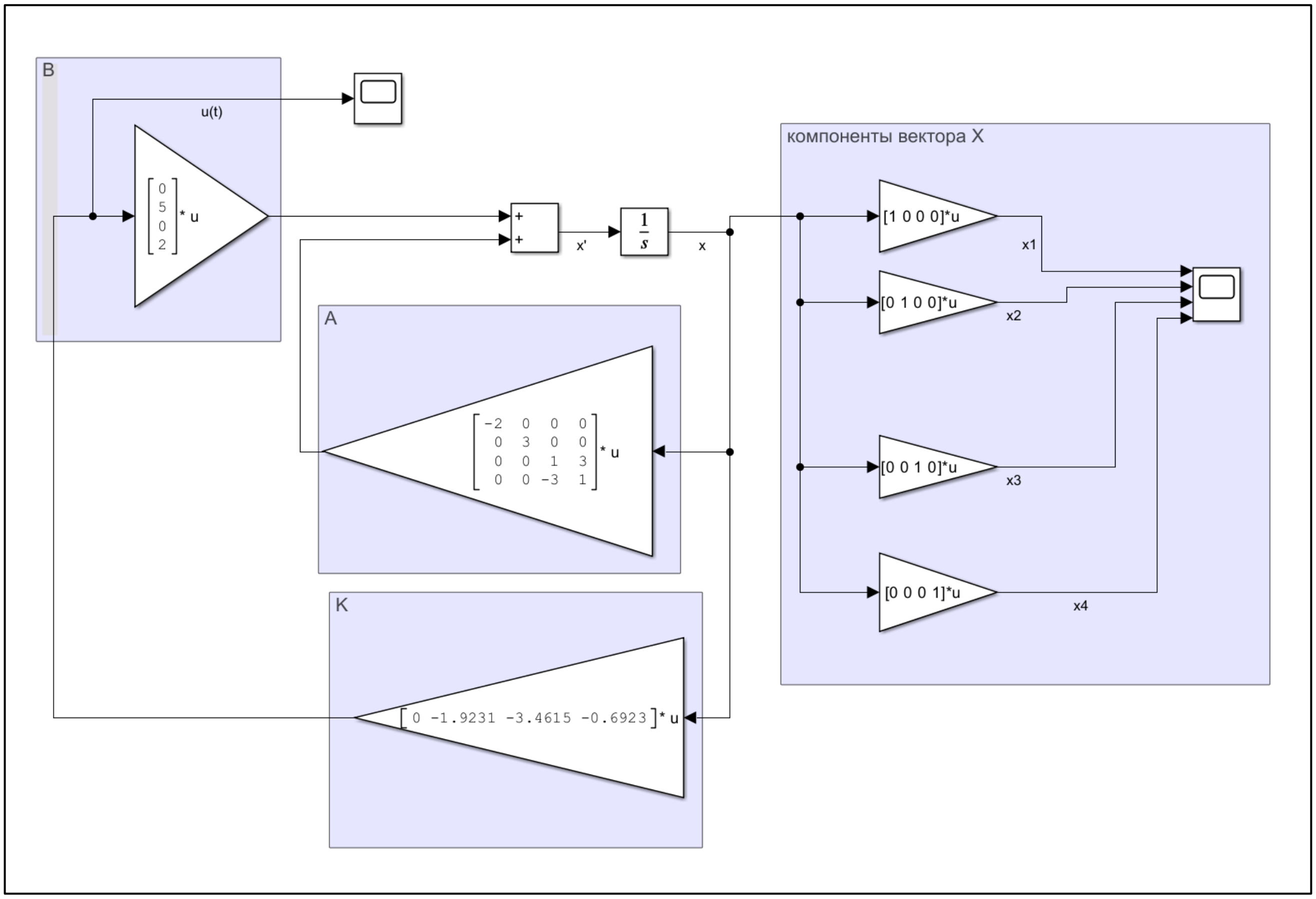

Figure 1 - Схема моделирования с регулятором u = Kx

Приступим к определению трех различных степеней устойчивости:

$$\alpha_1 = 0.5$$

$$\alpha_2 = 2$$

$$\alpha_3 = 0.001$$

Чтобы найти K, нам нужно решить следующее неравенство:

$$P(a + BK)^T + (A + BK)P + 2\alpha \mathrm{P} < 0 \tag{5}$$

$$PA^T + AP + 2\alpha \mathrm{P} + PK^T B^T + BKP < 0 \tag{6}$$

$$P > 0, \qquad PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY < 0 \tag{7}$$

Для этого мы можем использовать библиотеку Matlab CVX следующим образом:

```
% Define the new matrices A and B
A = [-2 0 0 0; 0 3 0 0; 0 0 1 3; 0 0 -3 1];
B = [0; 5; 0; 2];

cvx_begin sdp
    % Declare optimization variables
    variable P(4,4)
    variable Y(1,4)

    % Add constraints
    P > 0.0001 * eye(4);
    P*A' + A*P+2*a*P+Y'*B'+B*Y <= 0;

cvx_end

% Calculate controller gain K

K = Y*inv(P)

y = eig(A + (B*K));
disp('eigenvalues A+B*K')
disp(y);
```

Figure 2 - Код Matlab для решения неравенства

Полученные результаты:

$$K_1 = [0 \quad -3.9679 \quad -4.7069 \quad 3.7801] \text{ для } \alpha_1 = 0.5$$

$$K_2 = [0 \quad -8.7795 \quad -8.1256 \quad 13.5158] \text{ для } \alpha_2 = 2$$

$$K_3 = [0 \quad -2.6201 \quad -2.9576 \quad 1.5770] \text{для } \alpha_3 = 0.001$$

$$eigenValues\ (A + BK)_1 = \begin{Bmatrix} -2.278 + 4.1481\ i \\ -2.278 - 4.1481\ i \\ -2.7232 \\ -2 \end{Bmatrix} \tag{8}$$

$$eigenValues\ (A + BK)_2 = \begin{Bmatrix} -4.3569 + 6.2157\ i \\ -4.3569 - 6.2157\ i \\ -3.1521 \\ -2 \end{Bmatrix} \tag{9}$$

$$eigenValues\ (A+BK)_3 = \begin{Bmatrix} -1.1150\ +\ 3.5858\, i \\ -1.1150\ -\ 3.5858\, i \\ -2.7167 \\ -2 \end{Bmatrix} \tag{10}$$

Перейдем к заданию следующих начальных условий и построению соответствующих графиков:

$$x(0) = [1;\quad 1;\quad 1;\quad 1] \tag{11}$$

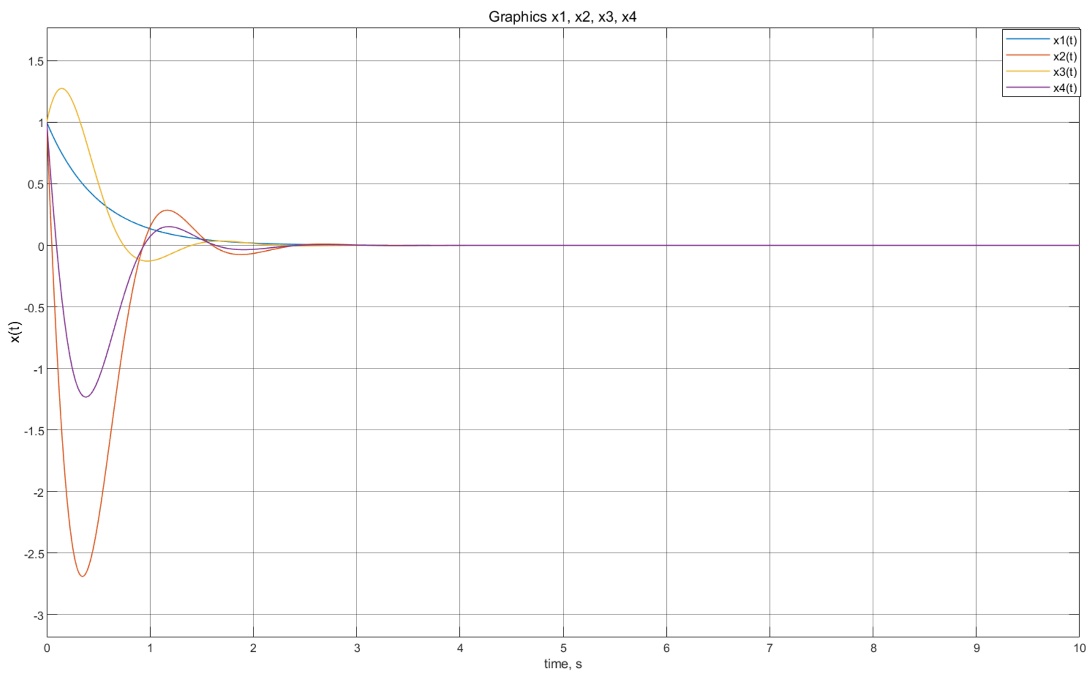

Figure 3 - Графики x1(t), x2(t), x3(t), x4(t) с K1.

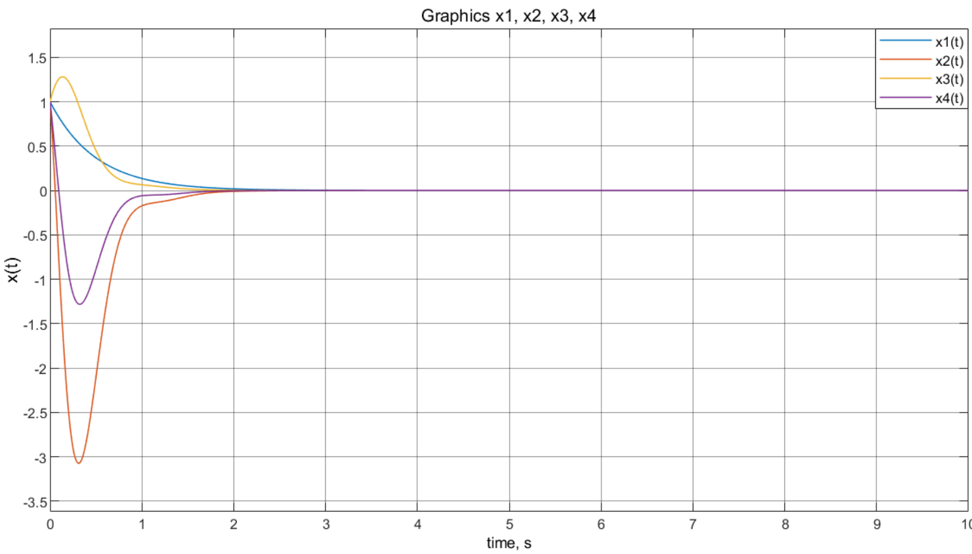

Figure 4 - Графики x1(t), x2(t), x3(t), x4(t) с K2.

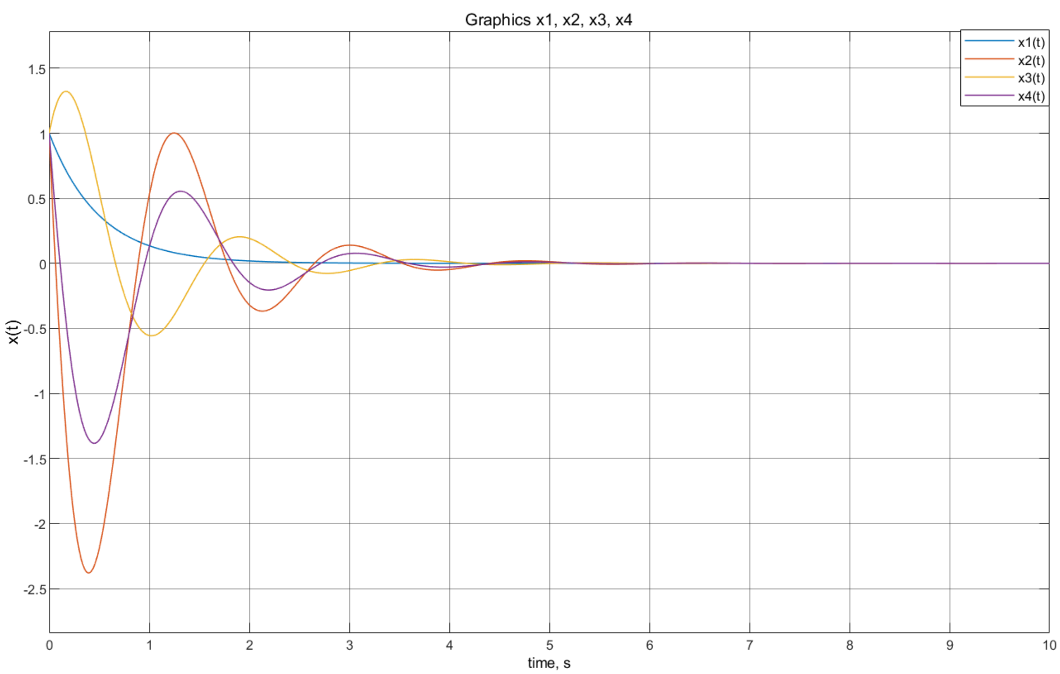

Figure 5 - Графики x1(t), x2(t), x3(t), x4(t) с K3.

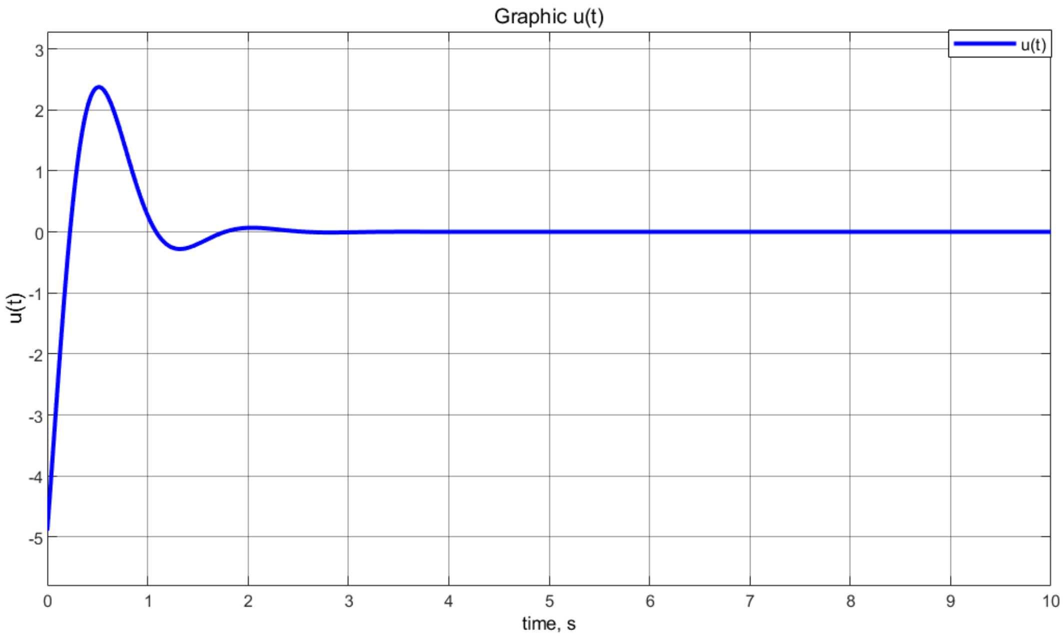

Figure 6 - График u(t) с K1.

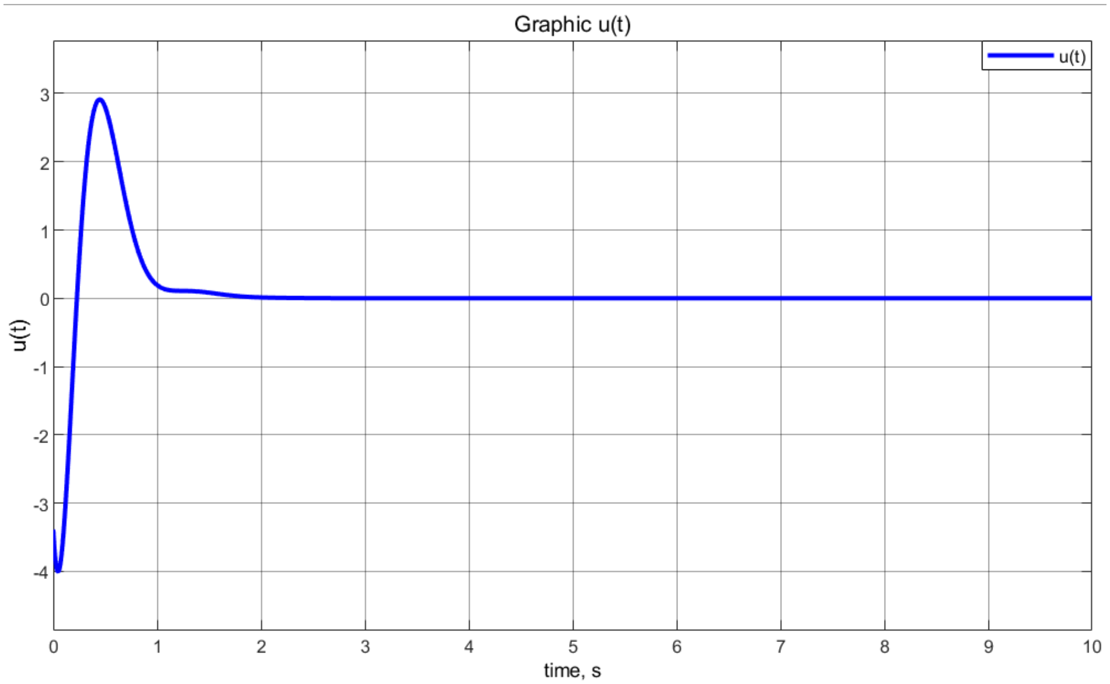

Figure 7 - График u(t) с K2.

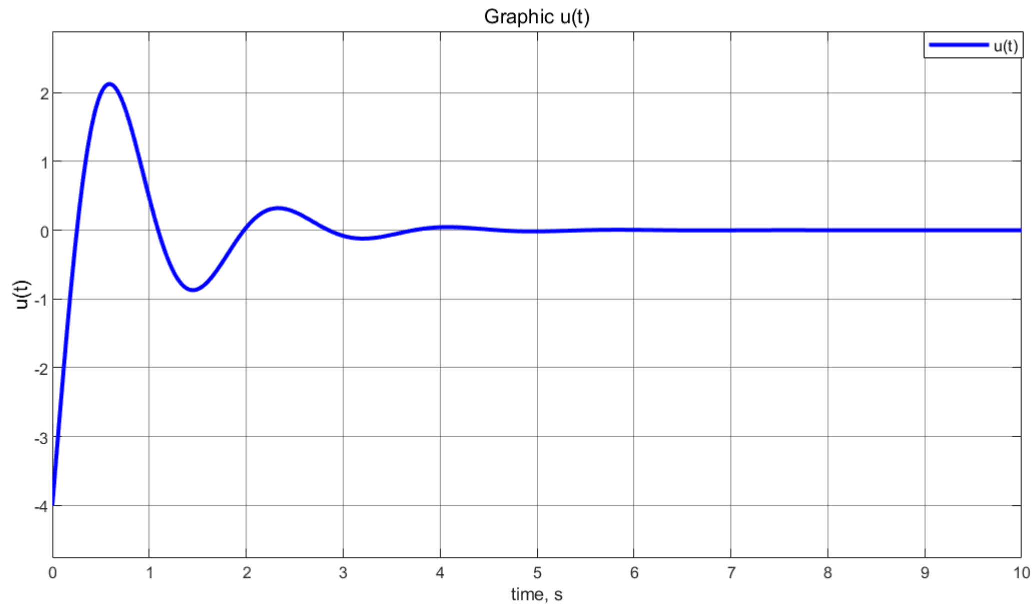

Figure 8 - График u(t) с K3.

После проведенных расчетов и анализа графиков можно сделать вывод, что чем быстрее переходный процесс, тем больше управления на это затрачено.

Задание 2. Частично повторите то, что вы сделали в предыдущем задании, добавив в этот раз ограничение на управление:

1. Зафиксируйте параметр α на каком-нибудь одном из выбранных ранее значений. Добавьте в процесс синтеза регулятора ограничение на величину управляющего воздействия. Проведите исследование зависимости влияния величины этого ограничения на собственные числа матрицы $A + BK$, а также на графики переходных процессов $x(t)$ и $u(t)$.

2. Для каждого из выбранных в задании 1 значений параметра α решите задачу минимизации величины управляющего воздействия. Найдите соответствующие собственные числа матрицы $A + BK$ и приведите графики переходных процессов.

3. Сделайте выводы.

Решение задач:

Для этого упражнения прежде всего примем степень устойчивости 0.5 с ограничением на управление $\mu = 15$

$$\alpha = 0.5$$

$$\mu = 15$$

Чтобы найти K, нам нужно решить следующее неравенство:

$$P > 0, \qquad PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY < 0 \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} P & x_0 \\ x_0^T & 1 \end{bmatrix} > 0, \qquad \begin{bmatrix} P & Y^T \\ Y & \mu^2 I \end{bmatrix} > 0 \tag{13}$$

Регулятор $K = YP^{-1}$ гарантирует $\|u(t)\| <= \mu$ и при $x(0) = x_0$

```
a = 0.5;

% Define the new matrices A and B
A = [-2 0 0 0; 0 3 0 0; 0 0 1 3; 0 0 -3 1];
B = [0; 5; 0; 2];
mu = 15;

cvx_begin sdp
    % Declare optimization variables
    variable P(4,4)
    variable Y(1,4)
    %variable mumu
    %minimize mumu

    % Add constraints
    P > 0.0001 * eye(4);
    P*A' + A*P+2*a*P+Y'*B'+B*Y <= 0;
    [P x0;
     x0' 1] > 0;
    [P Y';
     Y mu^2] > 0;

cvx_end

% Calculate controller gain K

K = Y*inv(P)

y = eig(A + (B*K));
disp('eigenvalues A+B*K')
disp(y);
```

Figure 9 - Код Matlab для решения неравенства

Полученные результаты:

$$K_1 = [0.0089 \quad -1.4485 \quad -1.7846 \quad 0.1313] \tag{14}$$

$$eigenValues\ (A + BK)_1 = \begin{Bmatrix} -0.6045\ +\ 3.4605\,i \\ -0.6045 -\ 3.4605i \\ -0.7709 \\ -2 \end{Bmatrix} \tag{15}$$

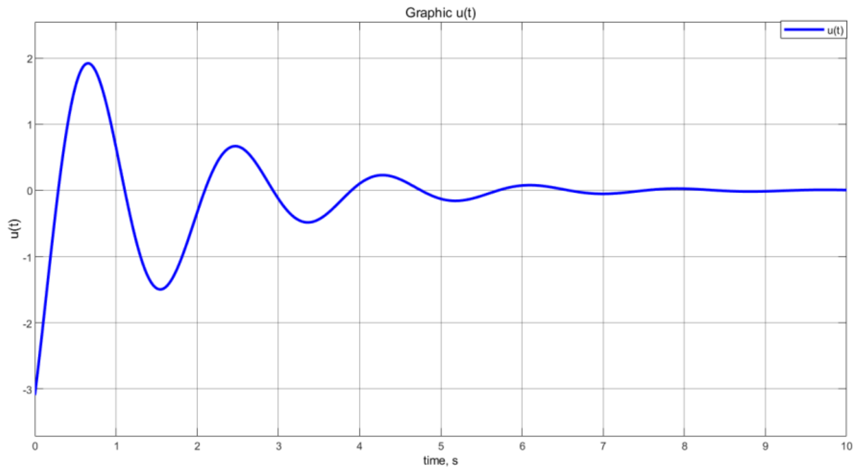

Figure 10 - График u(t)

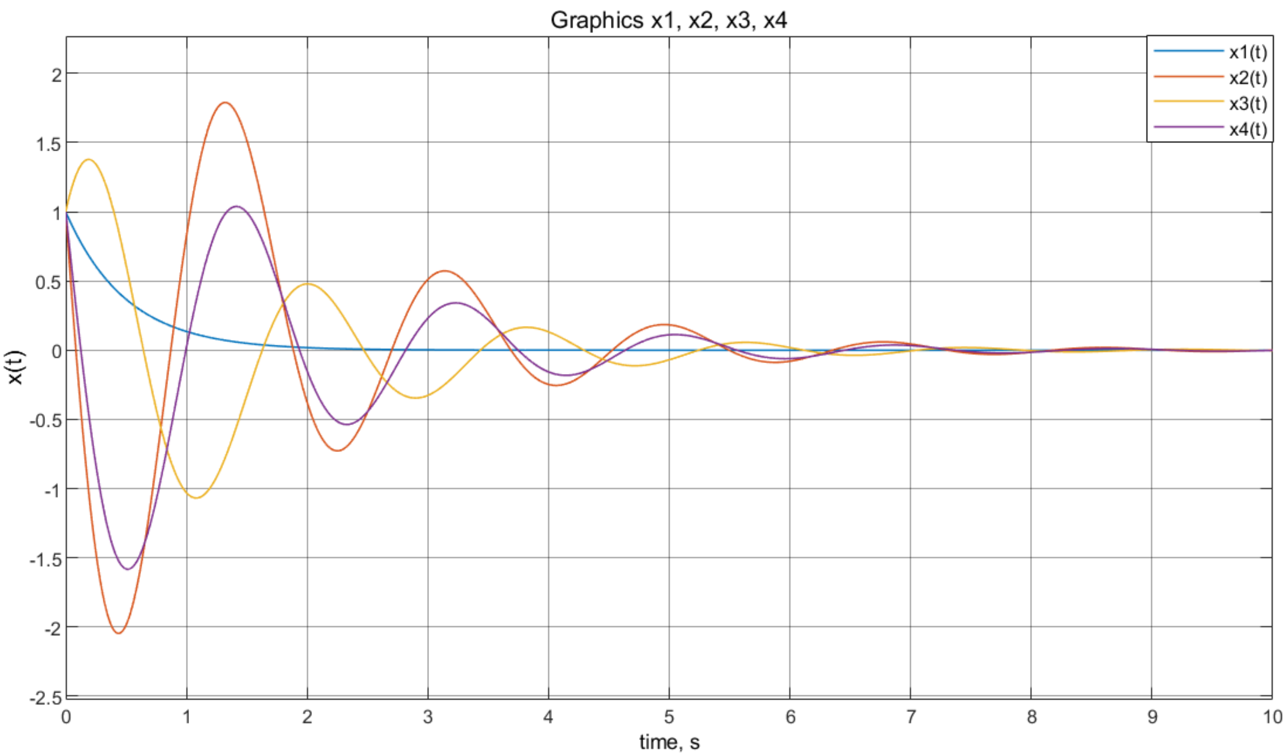

Figure 11 - Графики x1(t), x2(t), x3(t), x4(t)

Теперь что касается второго пункта, мы приступим к поиску наименьшего μ, который может гарантировать работу системы.

Нам нужно решить следующее неравенство, чтобы минимизировать γ:

При ограничениях:

$$P > 0, \qquad PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY < 0 \tag{16}$$

$$\begin{bmatrix} P & x_0 \\ x_0^T & 1 \end{bmatrix} > 0, \qquad \begin{bmatrix} P & Y^T \\ Y & \gamma I \end{bmatrix} > 0 \tag{17}$$

Регулятор $K = YP^{-1}$ гарантирует $\|u(t)\| <= \sqrt{\gamma} = \mu$ и при $x(0) = x_0$

```
a = 0.5;

% Define the new matrices A and B
A = [-2 0 0 0; 0 3 0 0; 0 0 1 3; 0 0 -3 1];
B = [0; 5; 0; 2];
%mu = 15;

cvx_begin sdp
    % Declare optimization variables
    variable P(4,4)
    variable Y(1,4)
    variable mumu
    minimize mumu

    % Add constraints
    P > 0.0001 * eye(4);
    P*A' + A*P+2*a*P+Y'*B'+B*Y <= 0;
    [P x0;
     x0' 1] > 0;
    [P Y';
     Y mumu] > 0;

cvx_end

% Calculate controller gain K

K = Y*inv(P)

y = eig(A + (B*K));
disp('eigenvalues A+B*K')
disp(y);
mu = sqrt(mumu)
```

Figure 12 - Код Matlab для решения неравенства

$$\alpha = 0.5$$

$$\mu = 9.5976 \tag{18}$$

$$K_1 = [0 \quad -1.2116 \quad -1.4808 \quad -0.2211] \tag{19}$$

$$eigenValues\ (A + BK)_1 = \begin{Bmatrix} -0.5000 + 3.2016i \\ -0.5000 - 3.2016i \\ -0.5002 \\ -2 \end{Bmatrix} \tag{20}$$

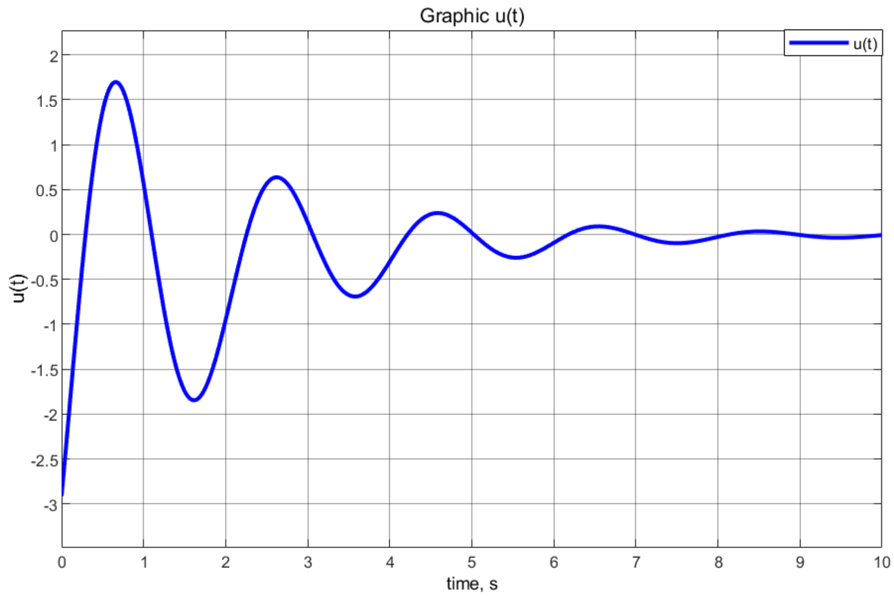

Figure 13 - График u(t)

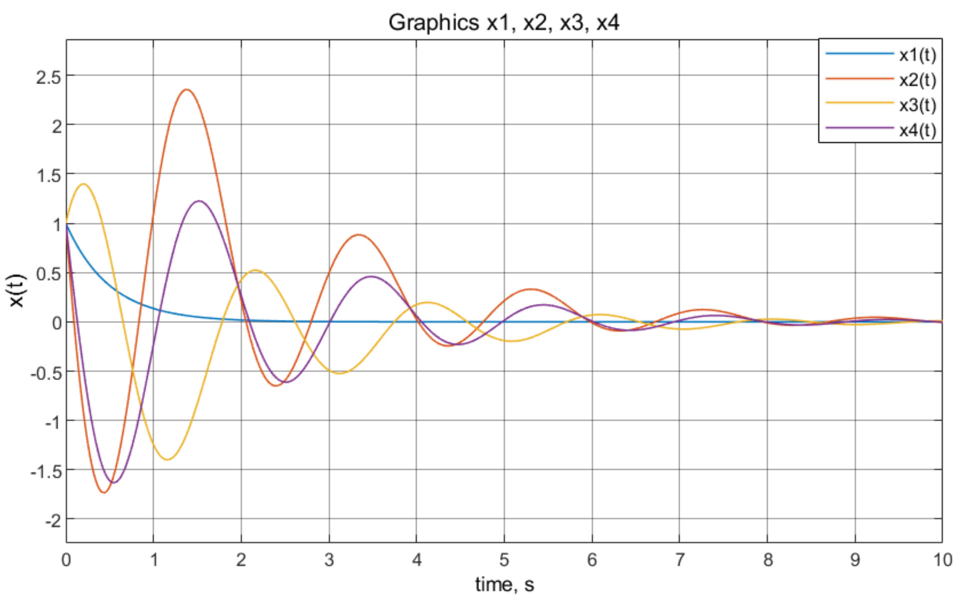

Figure 14 - Графики x1(t), x2(t), x3(t), x4(t)

$$\alpha = 2$$

$$\mu = 30.6970 \tag{21}$$

$$K_2 = [0 \quad -2.3078 \quad -3.6539 \quad 0.2694] \tag{22}$$

$$eigenValues\ (A+BK)_2 = \begin{Bmatrix} -2\ +\ 2.2362i \\ -2\ -\ 2.2362i \\ -2.0001 \\ -2 \end{Bmatrix} \tag{23}$$

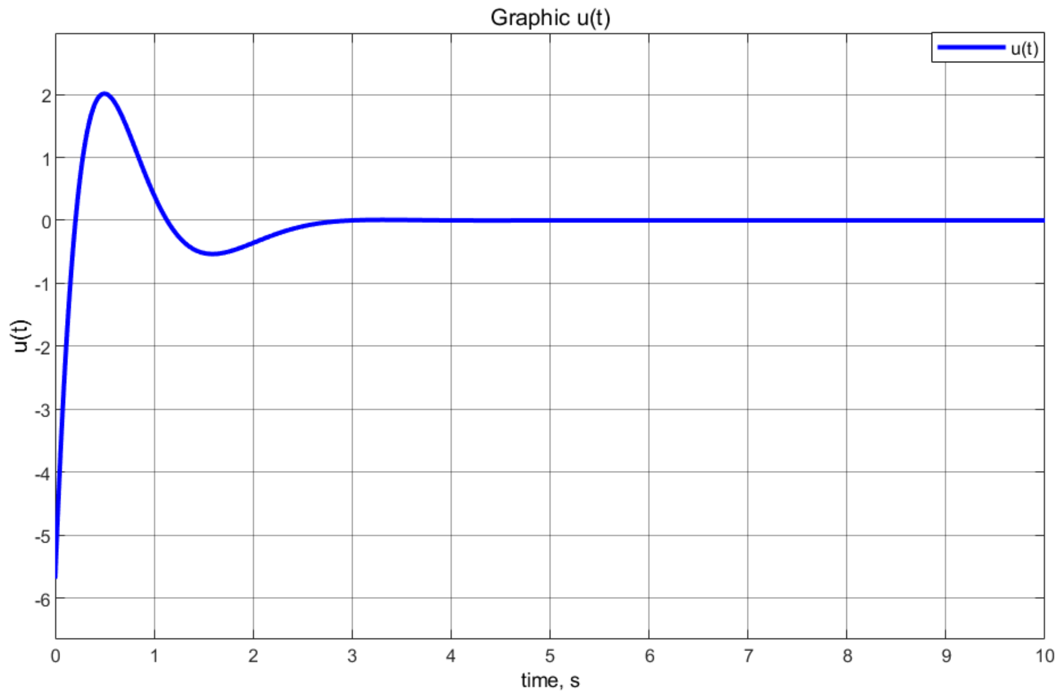

Figure 15 - График u(t)

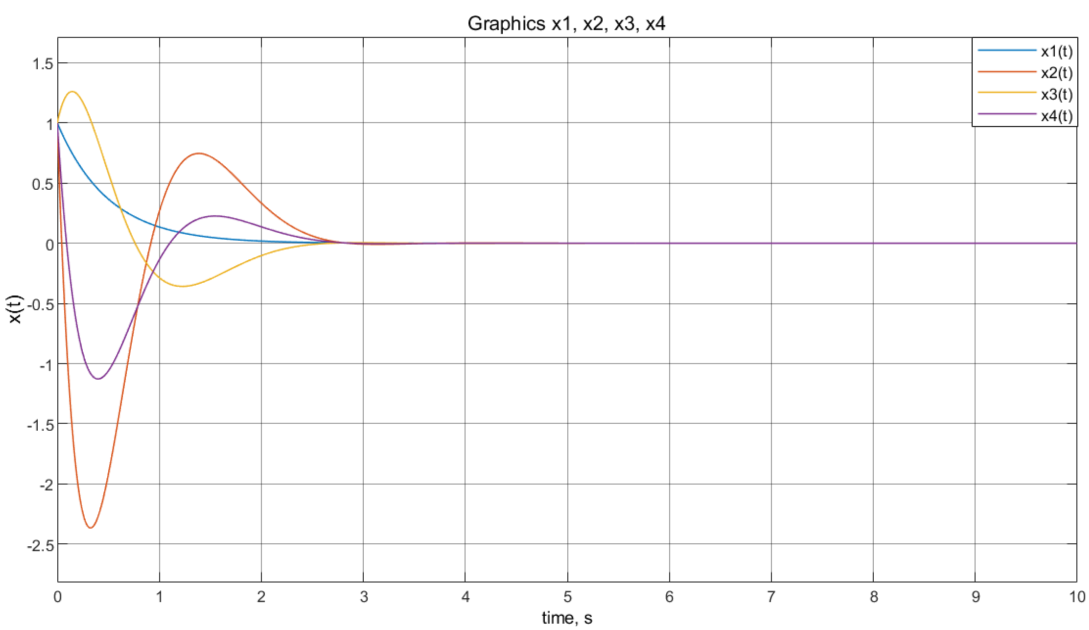

Figure 16 - Графики x1(t), x2(t), x3(t), x4(t)

$$\alpha = 0.001$$

$$\mu = 6.0742 \tag{24}$$

$$K_3 = [0 \quad -1.0326 \quad -1.0170 \quad -0.0971] \tag{25}$$

$$eigenValues\,(A + BK)_3 = \begin{Bmatrix} -0.0010 + 3.3165i \\ -0.0010 - 3.3165i \\ -0.3550 \\ -2 \end{Bmatrix} \tag{26}$$

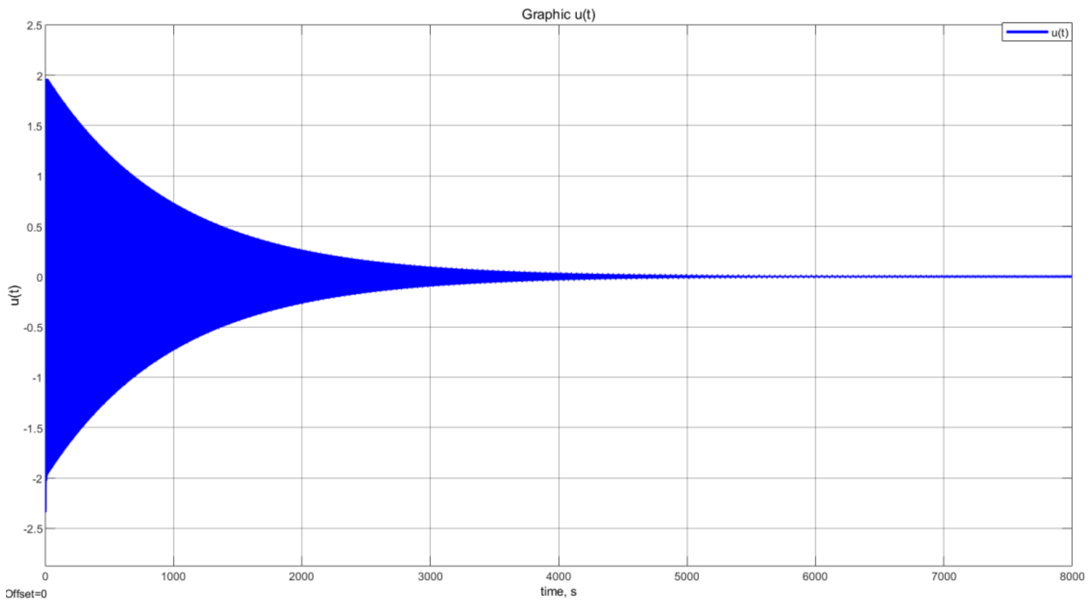

Figure 17 -График u(t)

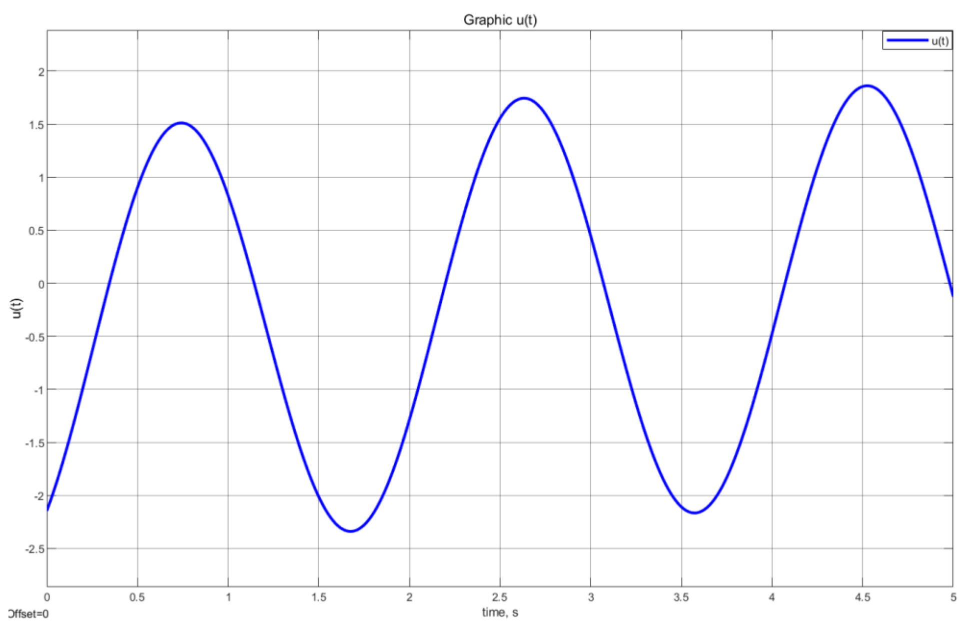

Figure 18 - График u(t) после увеличения

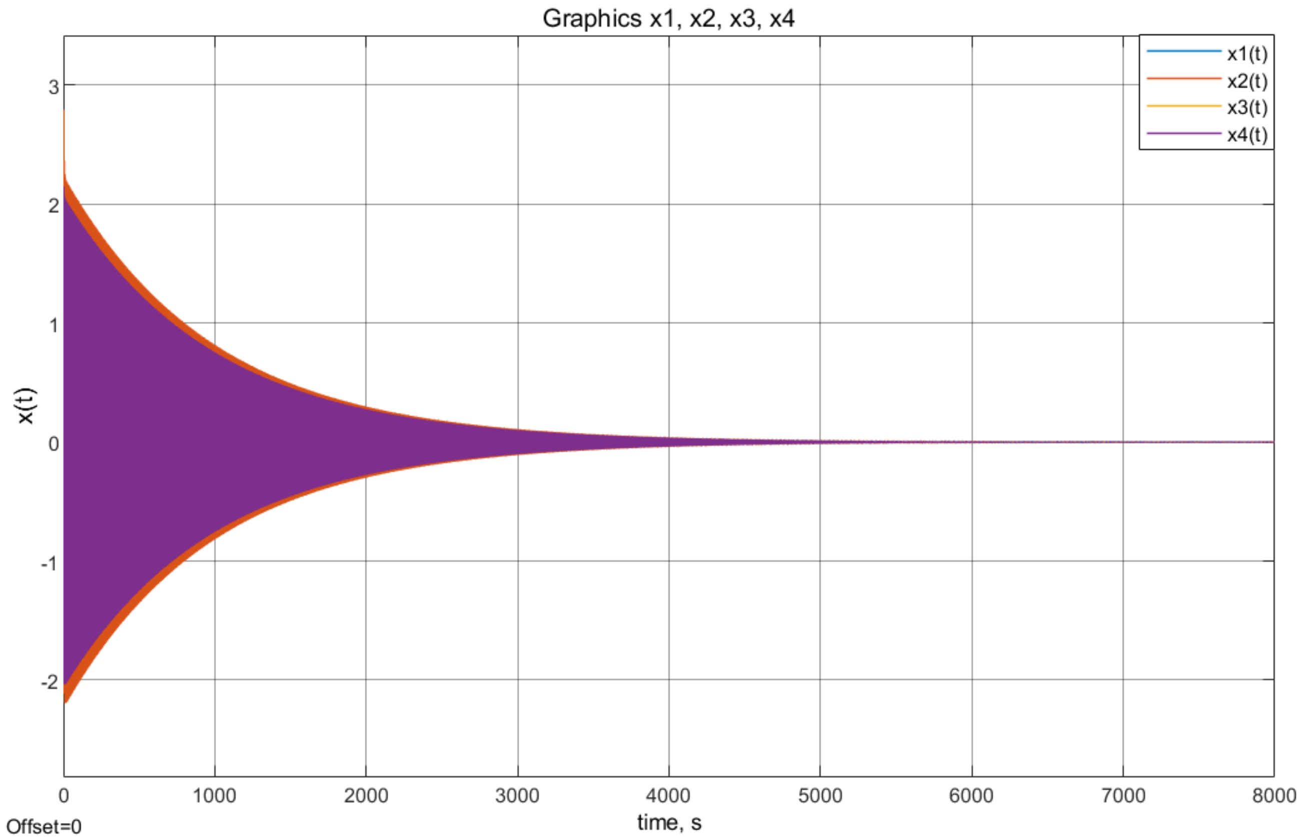

Figure 19 - Графики x1(t), x2(t), x3(t), x4(t)

Ограничения управления влияют на динамику системы и требуют баланса между стабильностью, производительностью и временем. Минимизация управляющих воздействий позволяет лучше контролировать перерегулирование системы.

Задание 3. Возьмите матрицы A и C из таблицы 2 лабораторной работы №8 в соответствии с вашим вариантом и рассмотрите систему:

$$\dot{x} = Ax, \qquad y = Cx \tag{27}$$

Выполните следующие шаги и приведите в отчёте написанный вами программный код, результаты всех вычислений, схемы моделирования, графики и выводы:

1. Постройте схему моделирования системы $\dot{x} = Ax, y = Cx$ с наблюдателем состояния

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y) \tag{28}$$

2. Задайтесь несколькими различными значениями желаемой степени устойчивости α динамики ошибки наблюдателя.

3. Для каждой из заданных степеней устойчивости α найдите какой-нибудь наблюдатель, её гарантирующий. Для поиска наблюдателя воспользуйтесь математическим аппаратом линейных матричных неравенств, не выбирайте собственные числа самостоятельно.

4. Найдите собственные числа матрицы $A + LC$ для каждой из найденных L.

5. Выберите какие-нибудь начальные условия и выполните моделирование работы найденных вами наблюдателей.

6. Постройте сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$, а также сравнительные графики ошибки наблюдателя при различных выбранных значениях α.

7. Сделайте выводы.

Решение задач:

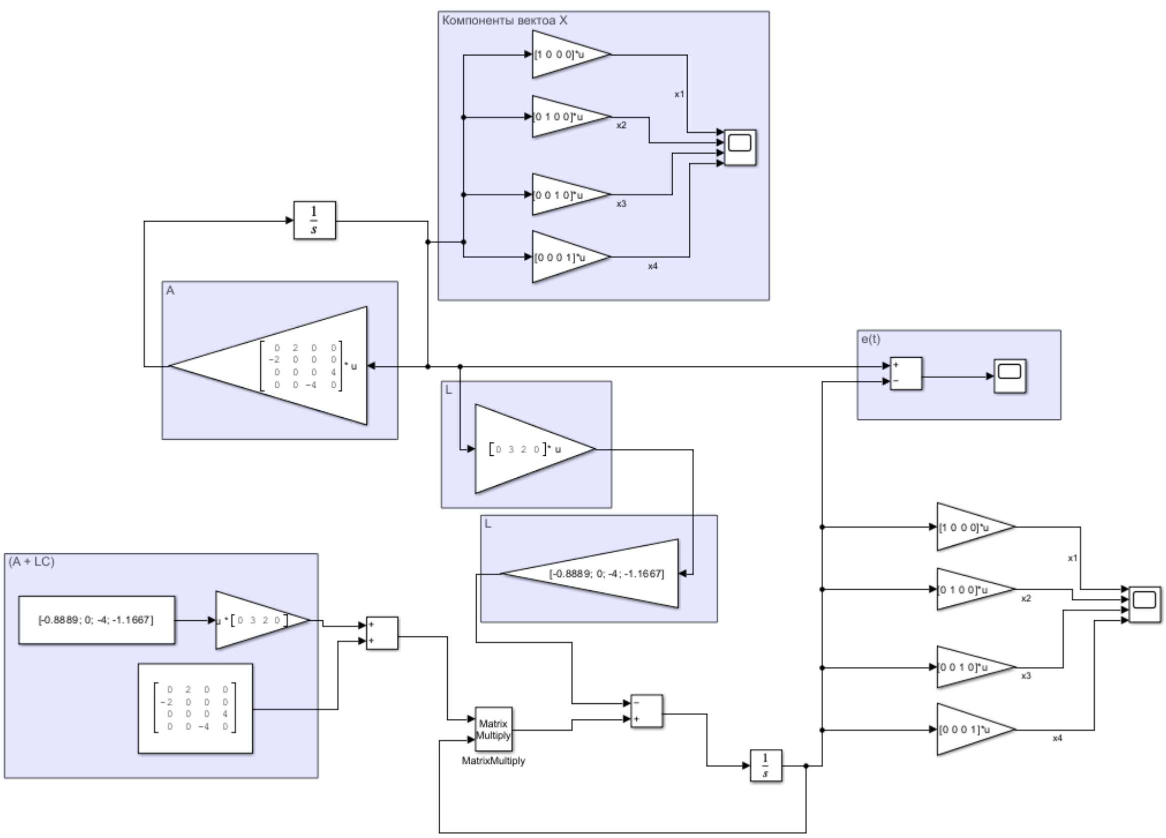

Figure 20 - Схема моделирования с наблюдателем

Матрица A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \tag{29}$$

Матрица C:

$$C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{30}$$

Неравенство, которое необходимо разрешить:

$$Q > 0, \qquad A^T Q + QA + 2\alpha Q + C^T Y^T + YC < 0 \tag{31}$$

Полученные результаты:

$$\alpha = 0.5$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0.1298 \\ -1.4585 \\ -0.4895 \\ -1.6087 \end{bmatrix} \tag{32}$$

$$eigenValues\ (A + LC)_1 = \begin{Bmatrix} -1.4437 + 2.0623i \\ -1.4437 - 2.0623i \\ -1.2336 + 4.3204i \\ -1.2336 - 4.3204i \end{Bmatrix} \tag{33}$$

```
a = 0.001;

% Define the new matrices A and B
A = [2 0 -4 2; 0 2 -2 4; -4 -2 2 0; 2 4 0 2];
C = [0 3 2 0];

cvx_begin sdp
    % Declare optimization variables
    variable Q(4,4)
    variable Y(4,1)

    % Add constraints
    Q > 0.0001 * eye(4);
    A'*Q+Q*A+2*a*Q+C'*Y'+Y*C <= 0;

cvx_end

% Calculate observer L
L = inv(Q) * Y

y = eig(A + (L*C));
disp('eigenvalues A+ L*C')
disp(y);
```

Figure 21 - Код Matlab для решения неравенства

Начальные условия для всех графиках:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$$

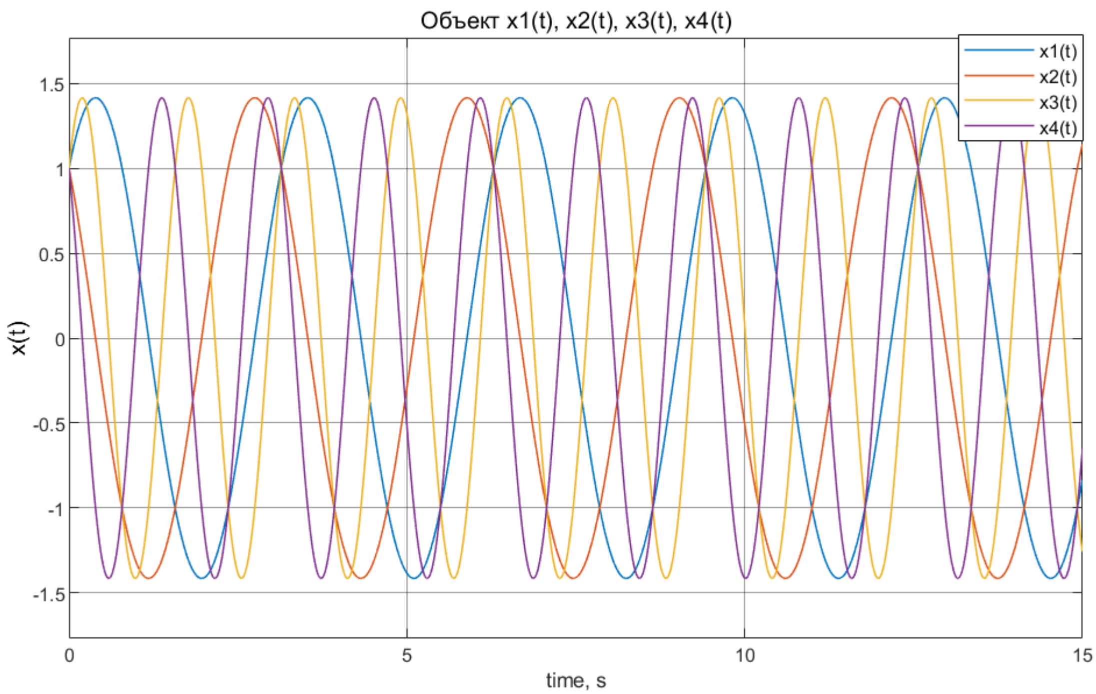

Figure 22 - Графики обьекта x1(t), x2(t), x3(t), x4(t)

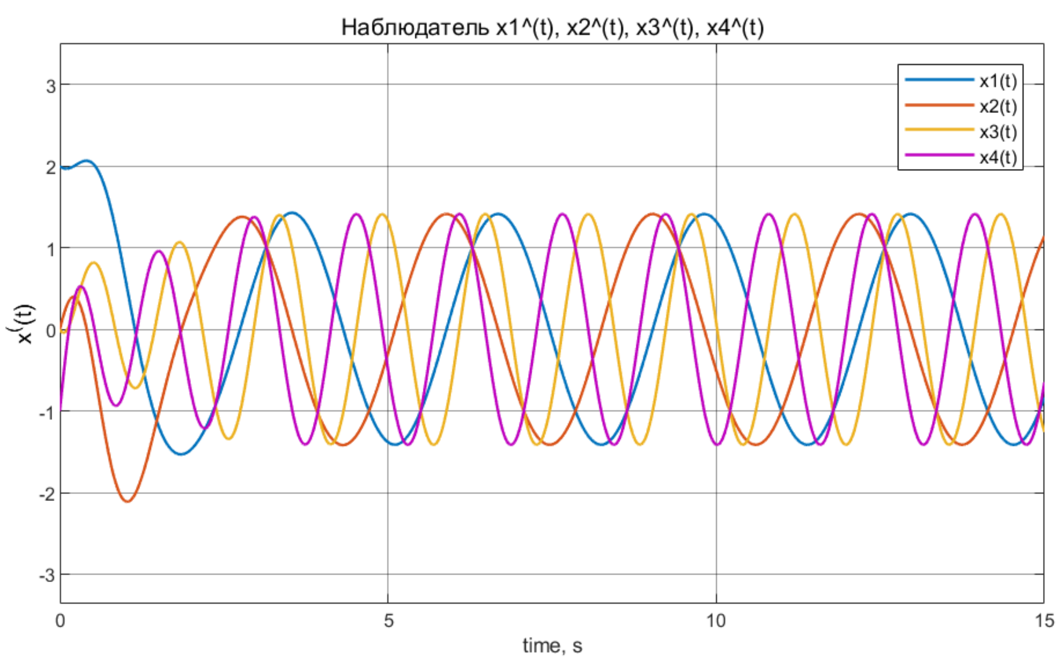

Figure 23 - Графики наблюдателей x^1(t), x^2(t), x^3(t), x^4(t)

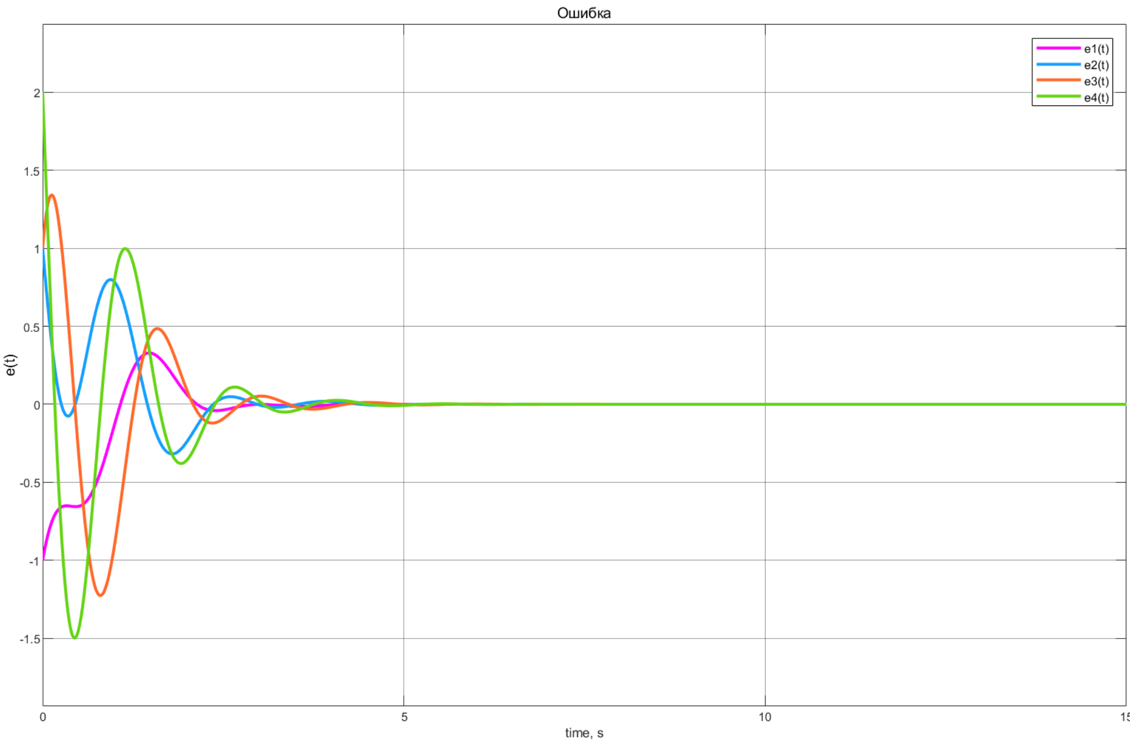

Figure 24 - Графики ошибок e(t)

Повторяем для второй степени устойчивости:

$$\alpha = 2$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 4.5773 \\ -11.7324 \\ 10.6231 \\ -10.1078 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$eigenValues\ (A + LC)_2 = \begin{Bmatrix} -4.3036\ +\ 7.2181i \\ -4.3036\ -\ 7.2181i \\ -2.6720\ +\ 2.1375i \\ -2.6720\ -\ 2.1375i \end{Bmatrix} \quad (35)$$

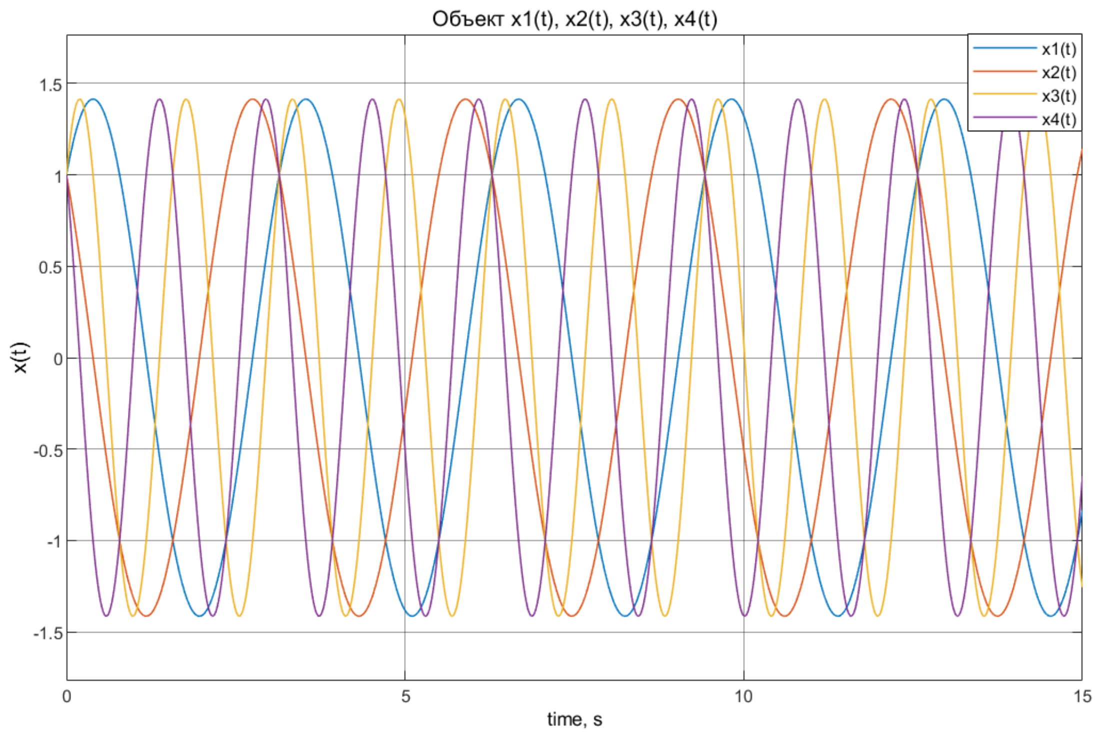

Figure 25 - Графики обьекта x1(t), x2(t), x3(t), x4(t)

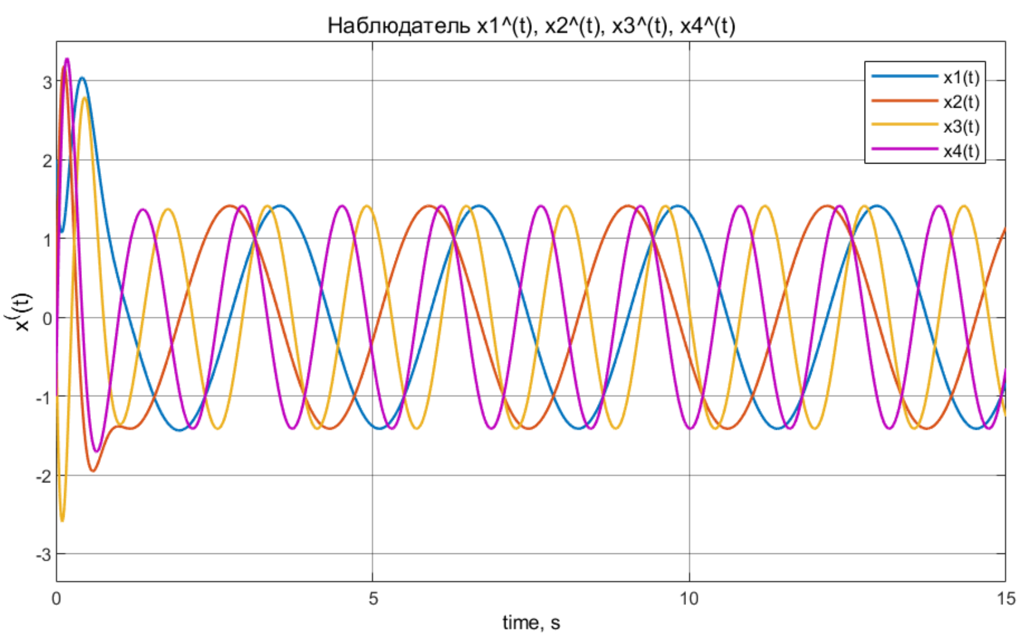

Figure 26 - Графики наблюдателей x^1(t), x^2(t), x^3(t), x^4(t)

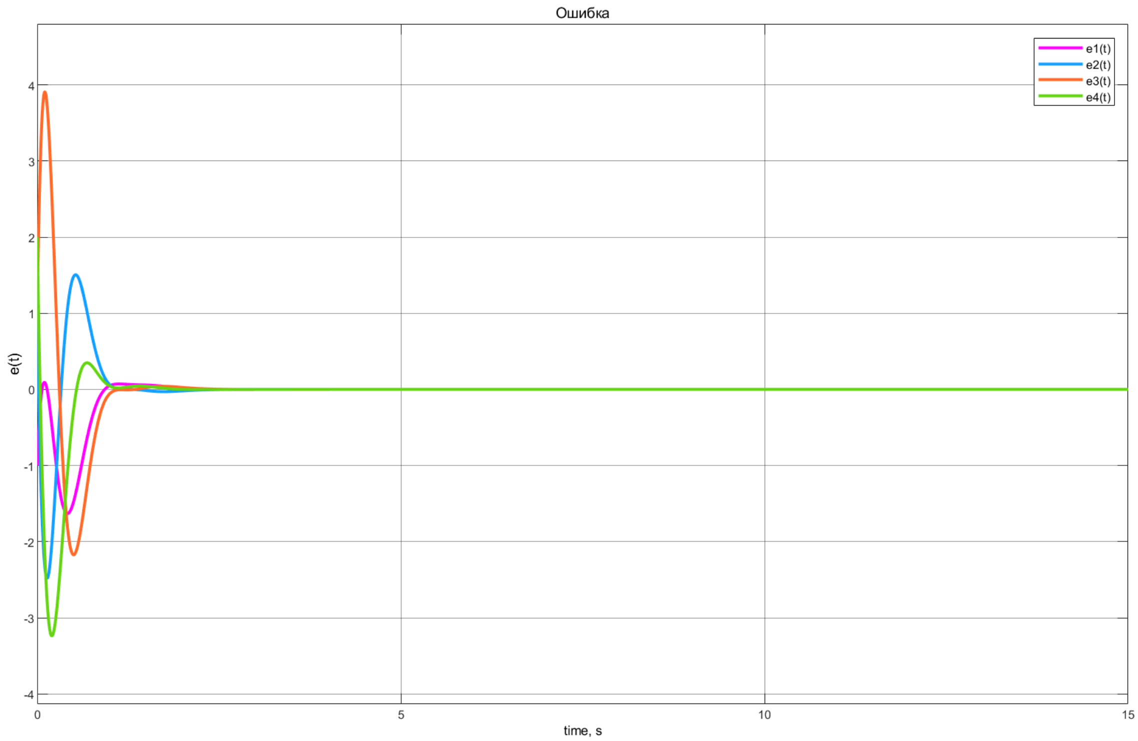

Figure 27 - Графики ошибок $e(t)$

Повторяем для третьей степени устойчивости:

$$\alpha = 0.001$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 0.0109 \\ -0.3343 \\ -0.3565 \\ -0.2005 \end{bmatrix} \tag{36}$$

$$eigenValues\ (A + LC)_3 = \begin{Bmatrix} -0.4667\ +\ 2.0187i \\ -0.4667\ -\ 2.0187i \\ -0.3912\ +\ 4.0612i \\ -0.3912\ -\ 4.0612i \end{Bmatrix} \tag{37}$$

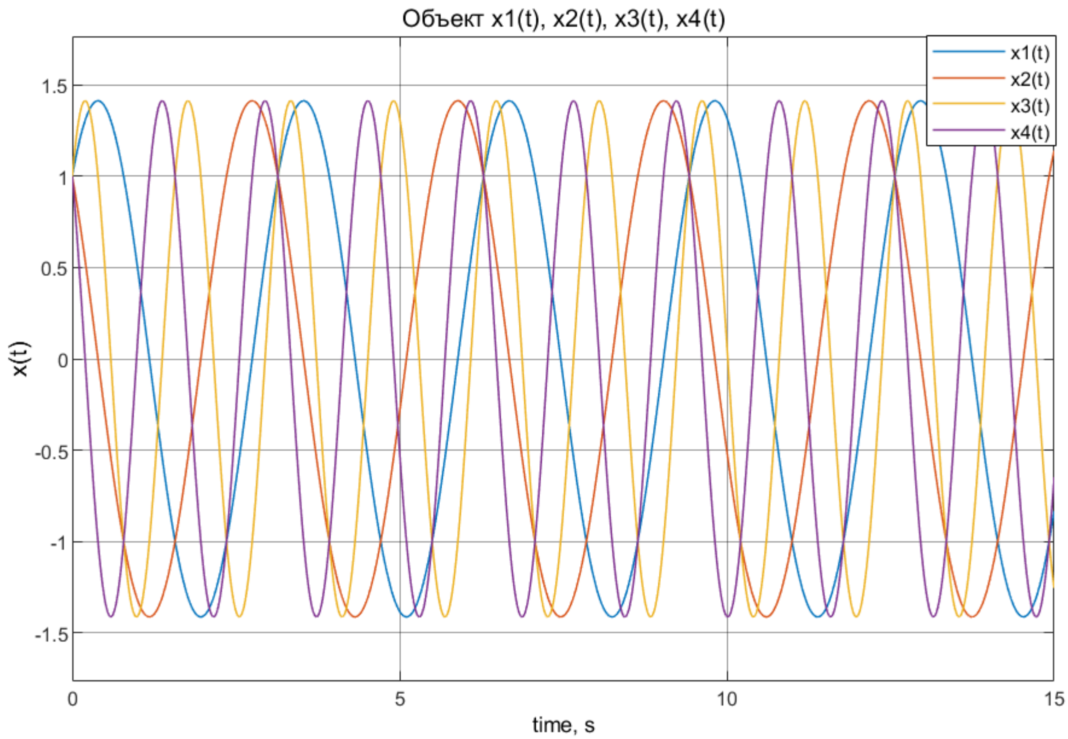

Figure 28 - Графики обьекта x1(t), x2(t), x3(t), x4(t)

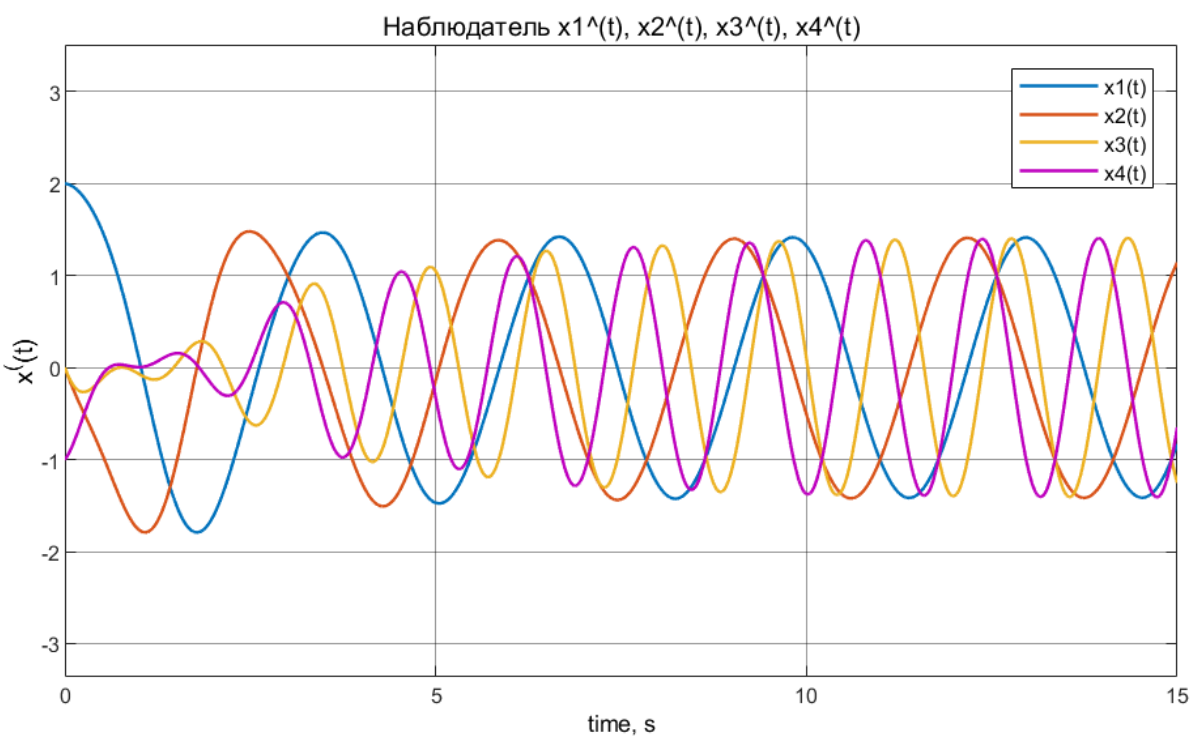

Figure 29 - Графики наблюдателей x^1(t), x^2(t), x^3(t), x^4(t)

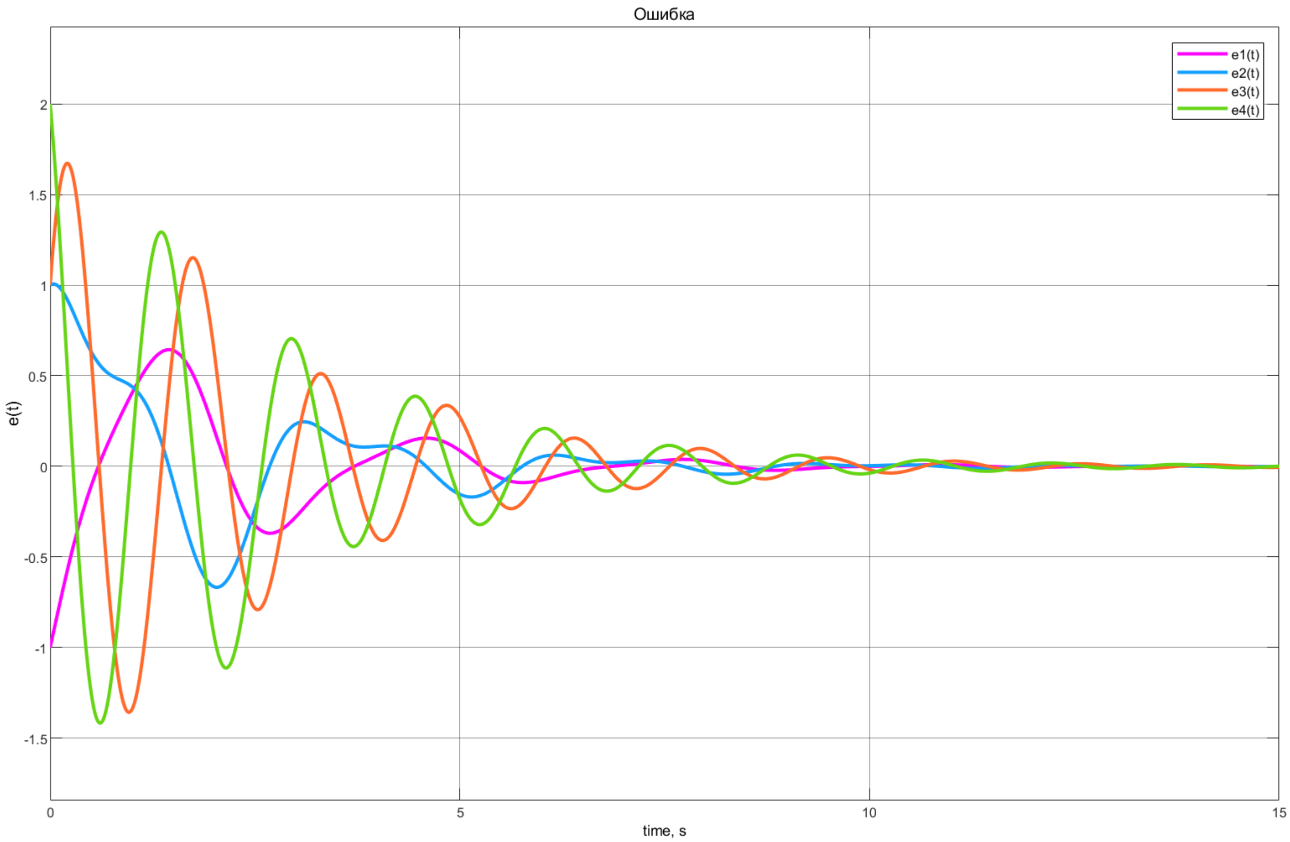

Figure 30 - Графики ошибок e(t)

Как мы смогли проанализировать, степень устойчивости существенно влияет на наблюдателя. При высокой степени устойчивости сходится быстро, но, с другой стороны, имеет большое перерегулирование, поэтому в некоторых ситуациях это может быть опасно. Когда степень стабильности низкая, перерегулирование также невелико, но, с другой стороны, время, необходимое для сходимости, намного больше.

Задание 4. Возьмите матрицы A, B, C из таблицы 3 лабораторной работы №8 в соответствии с вашим вариантом и рассмотрите систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx. \end{cases} \tag{38}$$

С помощью линейных матричных неравенств синтезируйте для этой системы наблюдатель и основанный на нём регулятор, которые будут гарантировать выбранную вами степень устойчивости системы. Исследуйте совместную работу регулятора и наблюдателя в зависимости от выбранных степеней устойчивости.

Исходные данные:

Матрица A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{39}$$

Матрица B:

$$B = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{40}$$

Матрица C:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{41}$$

Решение задач:

```
A = [2 0 -4 2; 0 2 -2 4; -4 -2 2 0; 2 4 0 2];
B = [8; 6; 4; 2];
C = [2 0 0 2; -1 1 1 1];
a = 0.5;

cvx_begin sdp
    % Declare optimization variables
    variable P(4,4)
    variable Q(4,4)
    variable Y_1(1,4)
    variable Y_2(4,2)

    % Add constraints
    P > 0.0001 * eye(4);
    Q > 0.0001 * eye(4);

    % Add Lyapunov inequalities
    P*A' + A*P + 2*a*P + Y_1'*B' + B*Y_1 <= 0;
    A'*Q + Q*A + 2*a*Q + C'*Y_2' + Y_2*C <= 0;

cvx_end


K = Y_1 * inv(P)
L = inv(Q) * Y_2


disp('eigenvalues A + B * K');
disp(eig(A + (B*K)));

y = eig(A + (L*C));
disp('eigenvalues A + L * C');
disp(y);
```

Figure 31 - Код Matlab для решения неравенства

Приступаем к расчету регулятора и наблюдателя системы:

$$\alpha = 0.5$$

$$K_1 = [-27.2682 \quad 10.6437 \quad 26.3432 \quad 9.2384]$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} -2.8030 & 2.0873 \\ -5.7924 & -2.0873 \\ 5.7924 & -2.0873 \\ -2.8030 & -2.0873 \end{bmatrix}$$

$$eigenValues\ (A + BK)_1 = \begin{Bmatrix} -9.5155 + 10.2657i \\ -9.5155 - 10.2657i \\ -1.7016 + 0.3864i \\ -1.7016 - 0.3864i \end{Bmatrix}$$

$$eigenValues\ (A + LC)_1 = \begin{Bmatrix} -1.6059 + 6.7270i \\ -1.6059 - 6.7270i \\ -4.3493 \\ -4.0000 \end{Bmatrix}$$

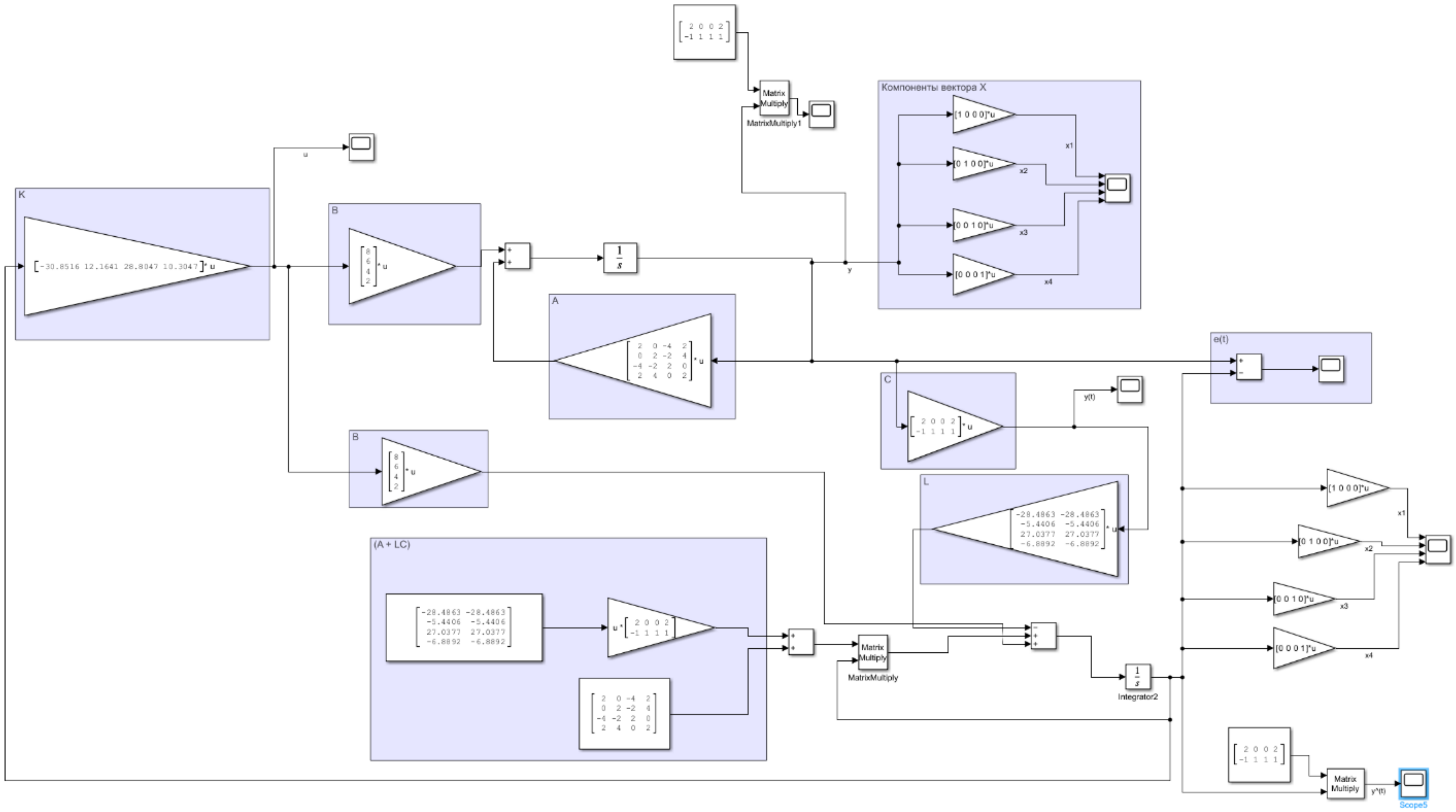

Figure 32 - Схема моделирования с регулятором и наблюдателем

Начальные условия для всех графиках:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$$

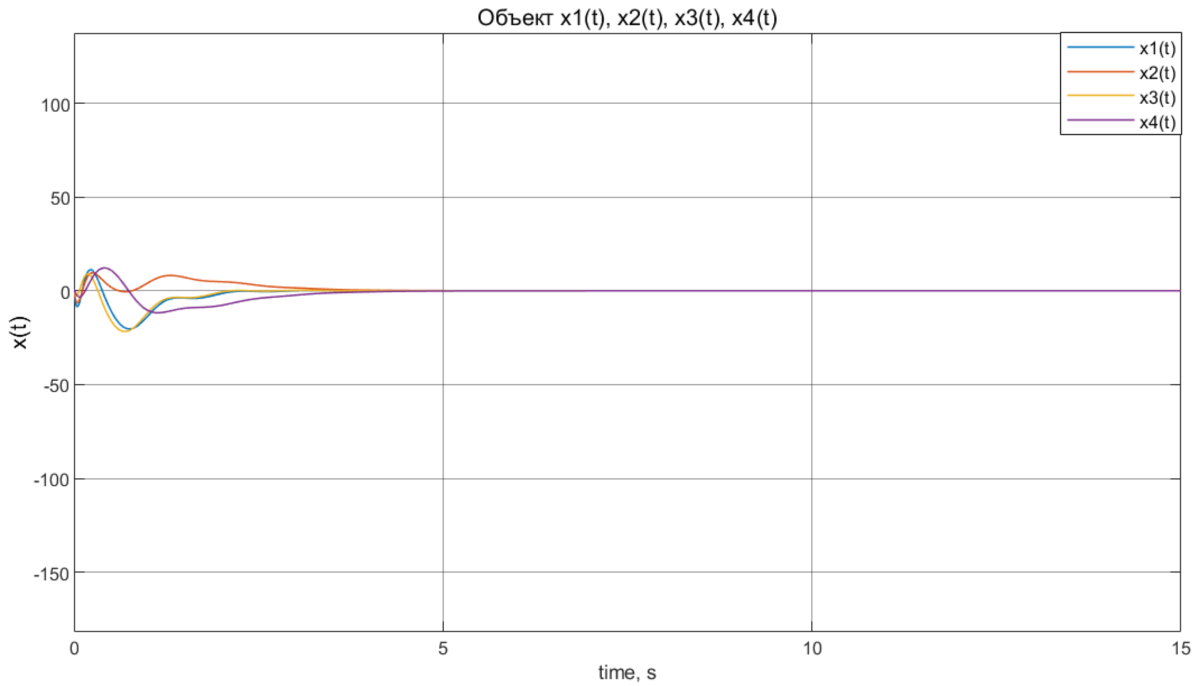

Figure 33 - Графика объекта x1(t), x2(t), x3(t), x4(t)

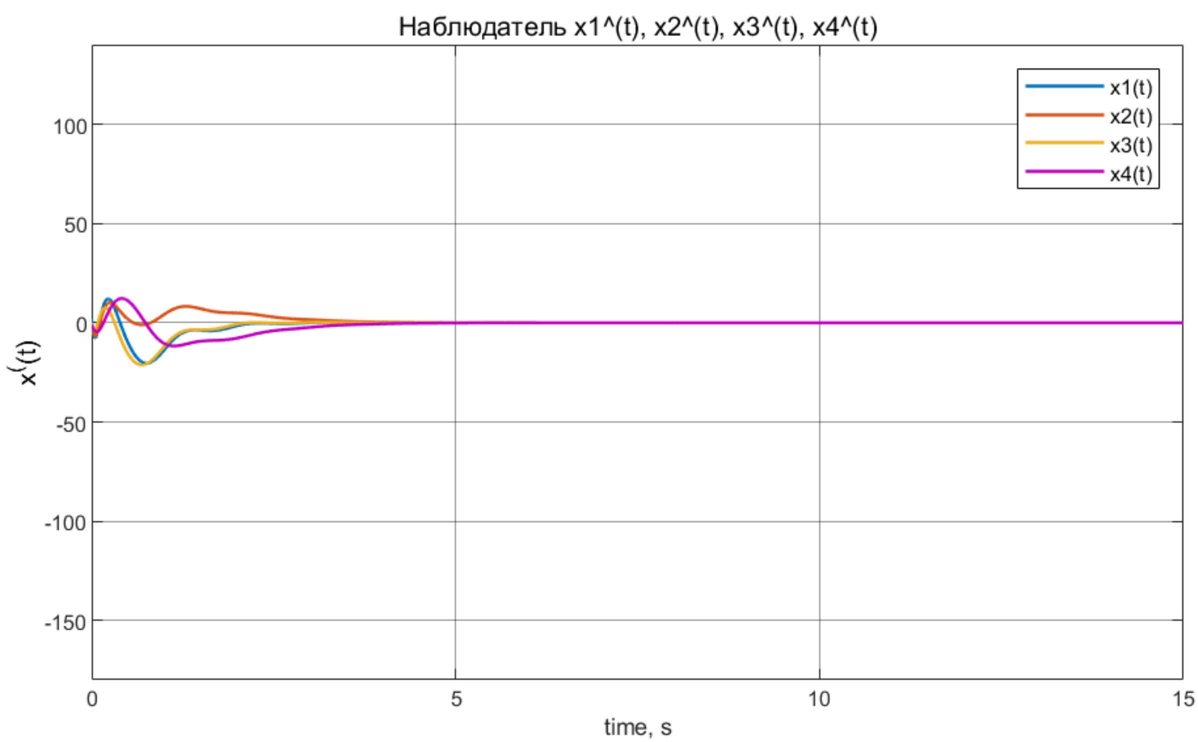

Figure 34 - Графики наблюдателей x^1(t), x^2(t), x^3(t), x^4(t)

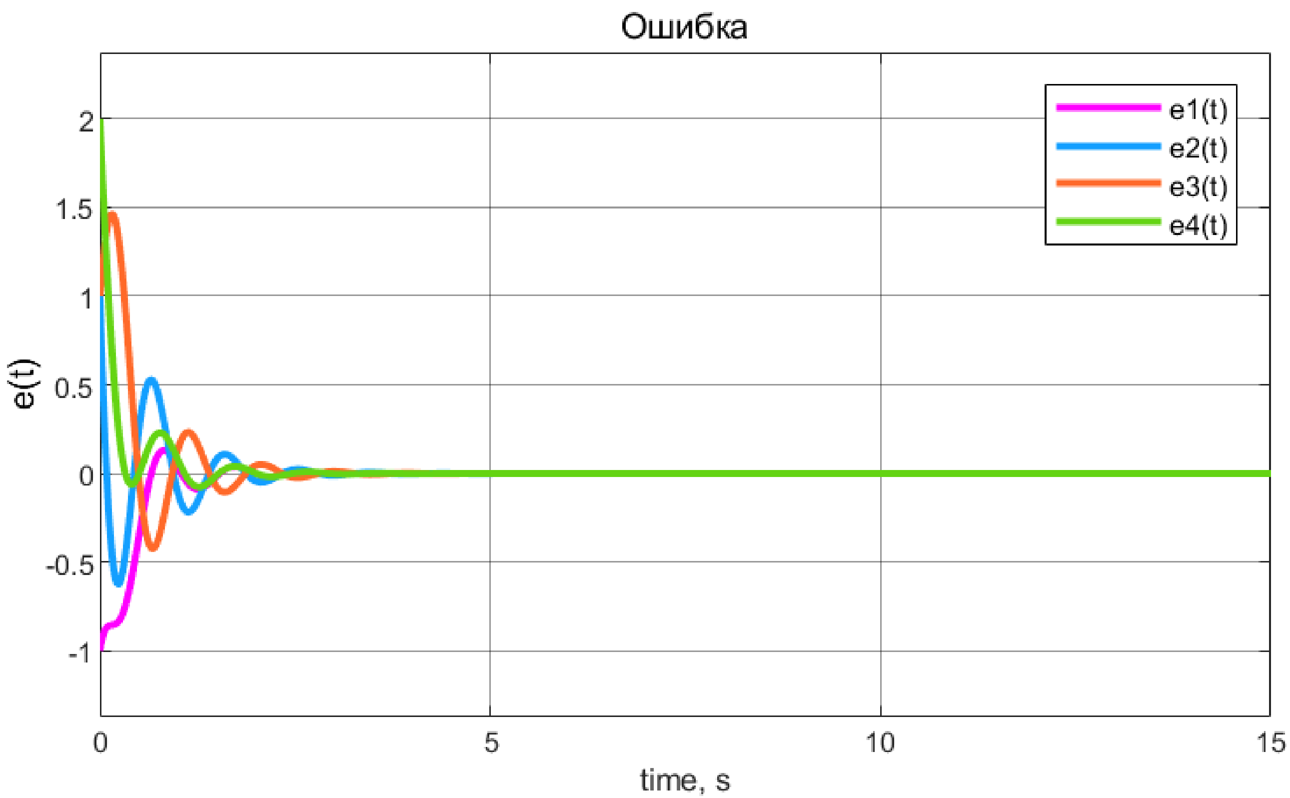

Figure 35 - Графики ошибок e(t)

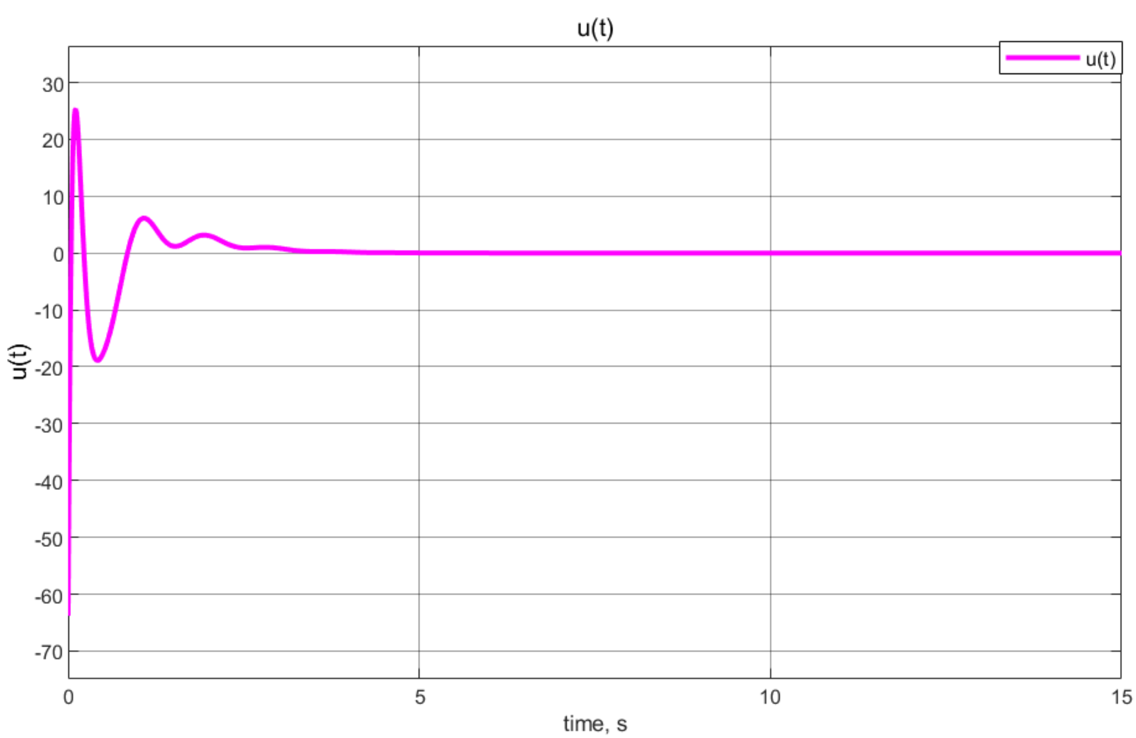

Figure 36 - График u(t)

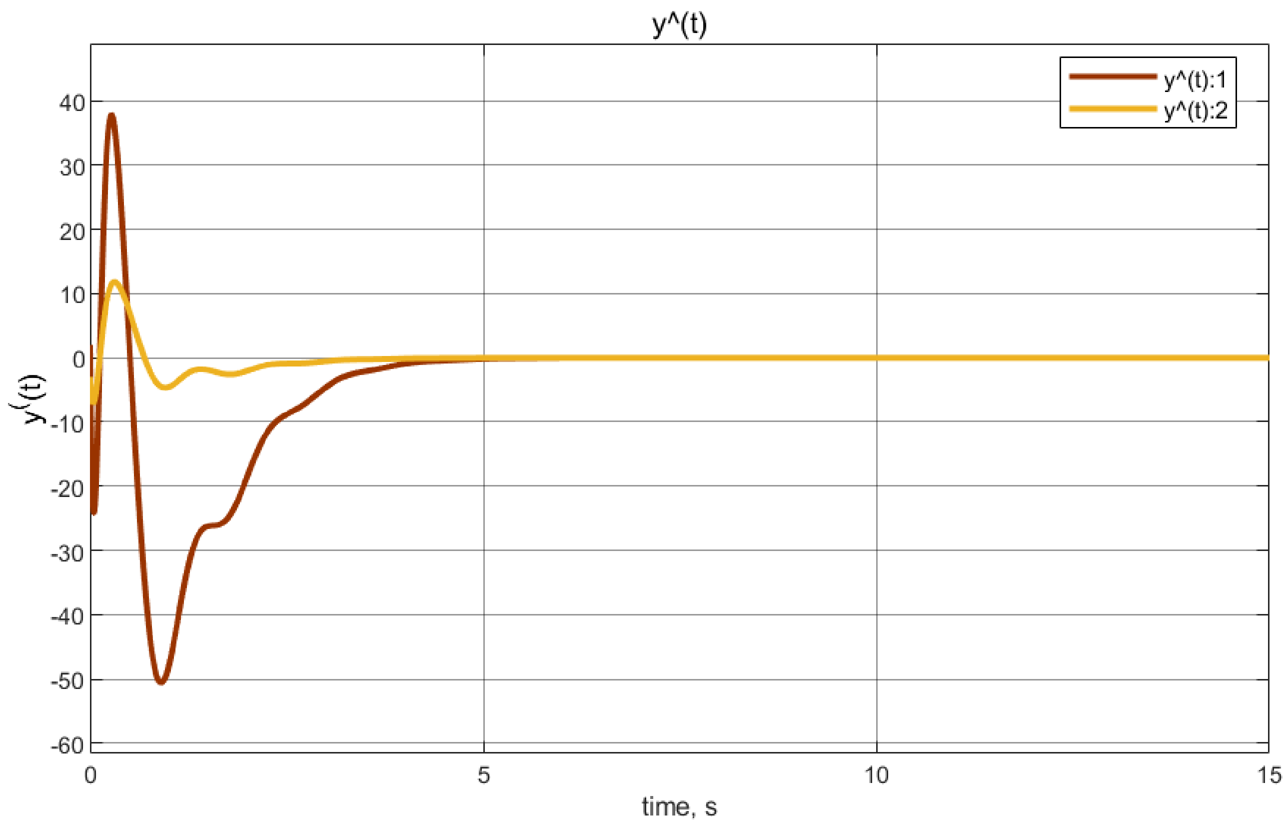

Figure 37 - График y ̂(t)

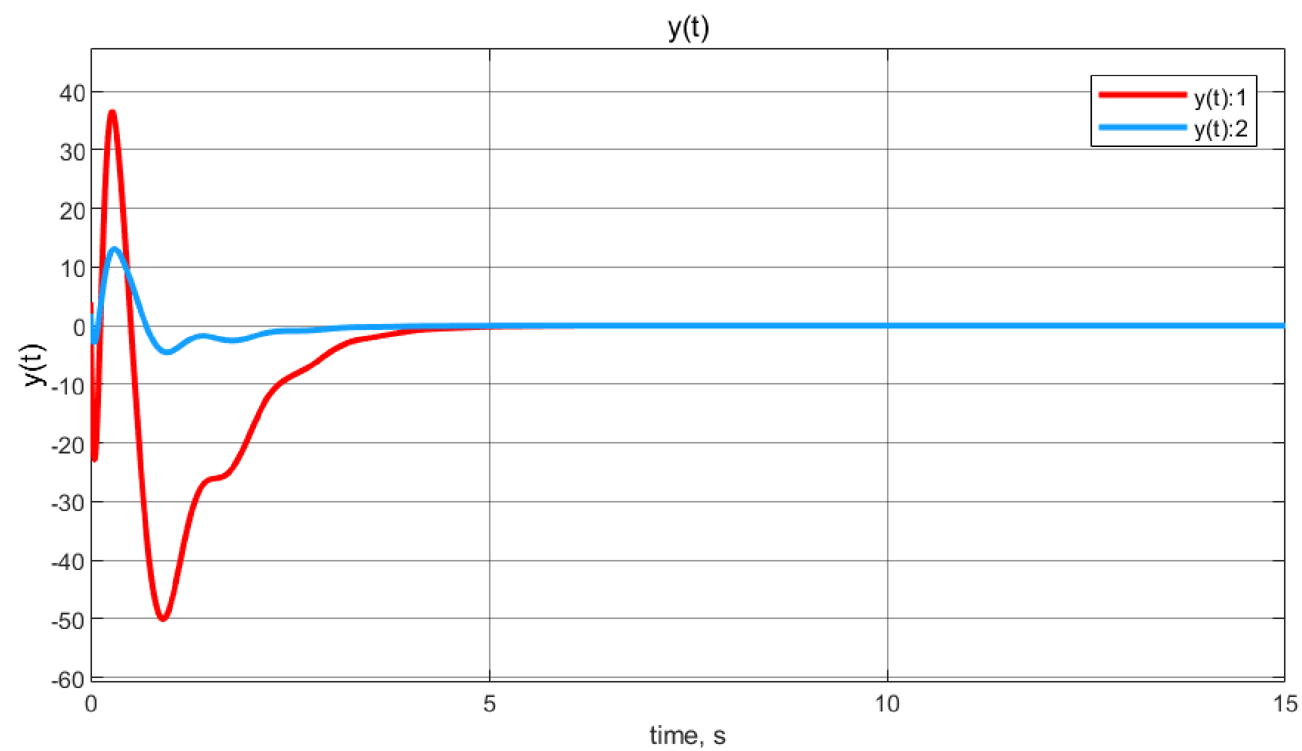

Figure 38 - График y(t)

Повторяем для второй степени устойчивости. В этом случае мы будем использовать более высокую степень стабильности, чтобы яснее увидеть, как это влияет на систему.:

$$\alpha = 8$$

$$K_2 = [-987.4423 \quad 736.1105 \quad 668.8750 \quad 370.1836]$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} -7.2659 & 3.8941 \\ -29.3282 & -3.3527 \\ 30.0479 & -3.3527 \\ -7.9856 & -3.8941 \end{bmatrix}$$

$$eigenValues\ (A + BK)_2 = \begin{Bmatrix} -19.3200 + 32.7792i \\ -19.3200 - 32.7792i \\ -10.1841 + 4.1620i \\ -10.1841 - 4.1620i \end{Bmatrix}$$

$$eigenValues\ (A + LC)_2 = \begin{Bmatrix} -11.2514 + 15.0467i \\ -11.2514 - 15.0467i \\ -10.4935 + 0.0000i \\ -4 \end{Bmatrix}$$

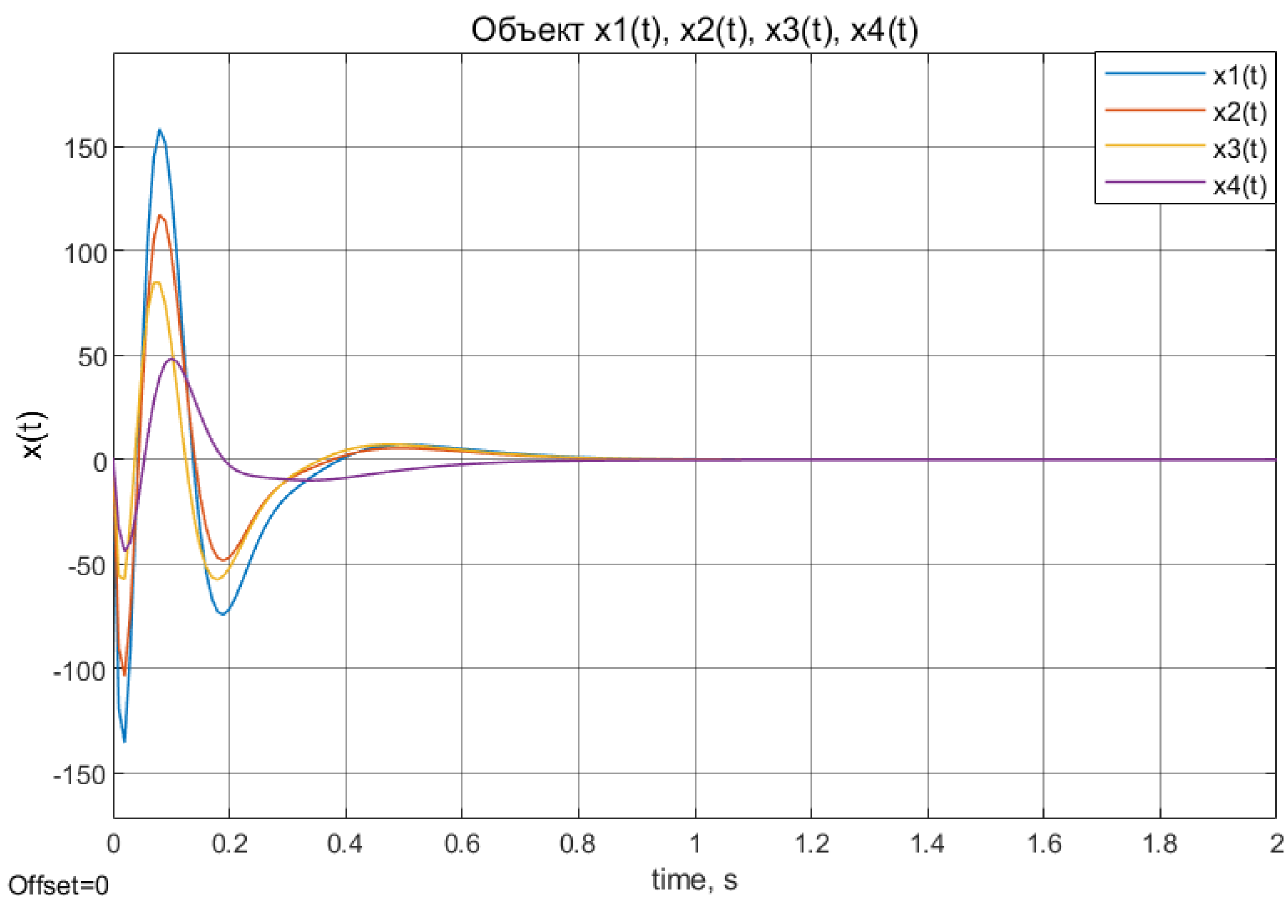

Figure 39 - Графика объекта x1(t), x2(t), x3(t), x4(t)

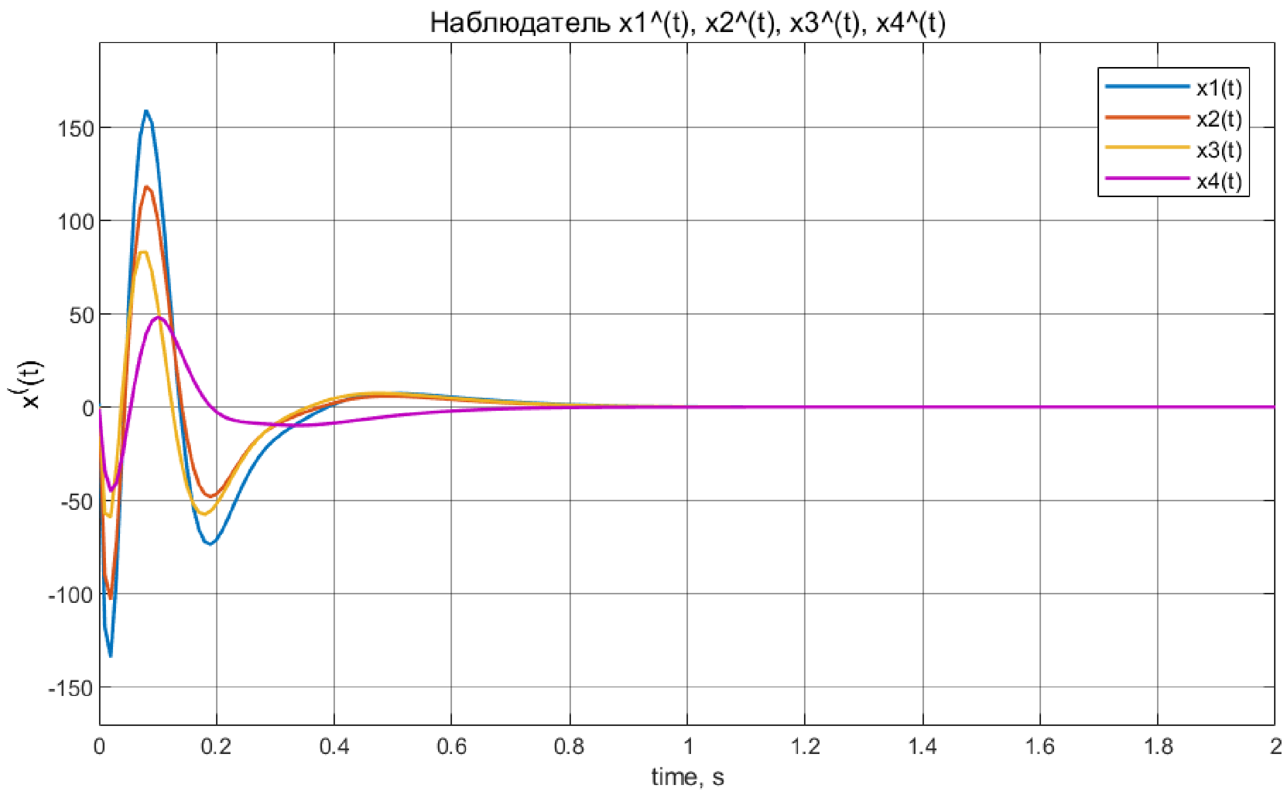

Figure 40 - Графики наблюдателей x^1(t), x^2(t), x^3(t), x^4(t)

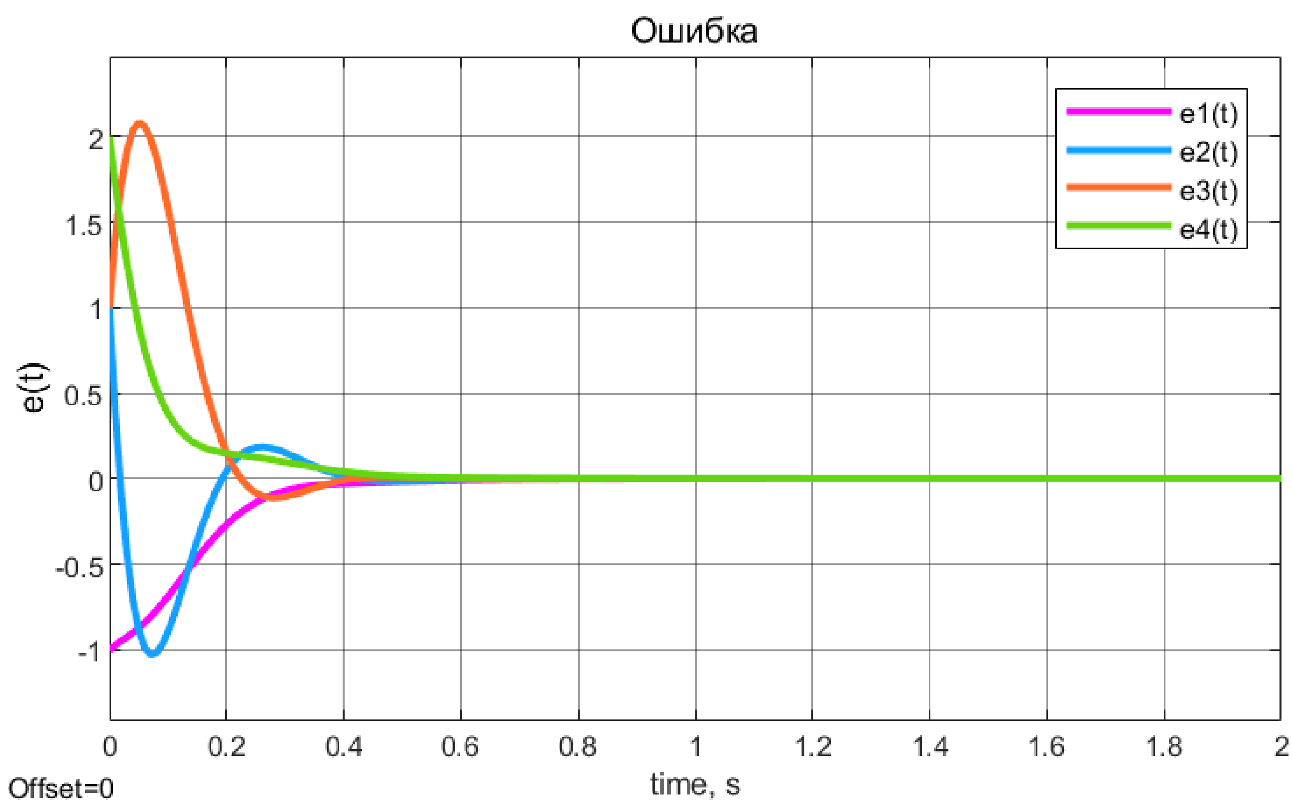

Figure 41 - Графики ошибок e(t)

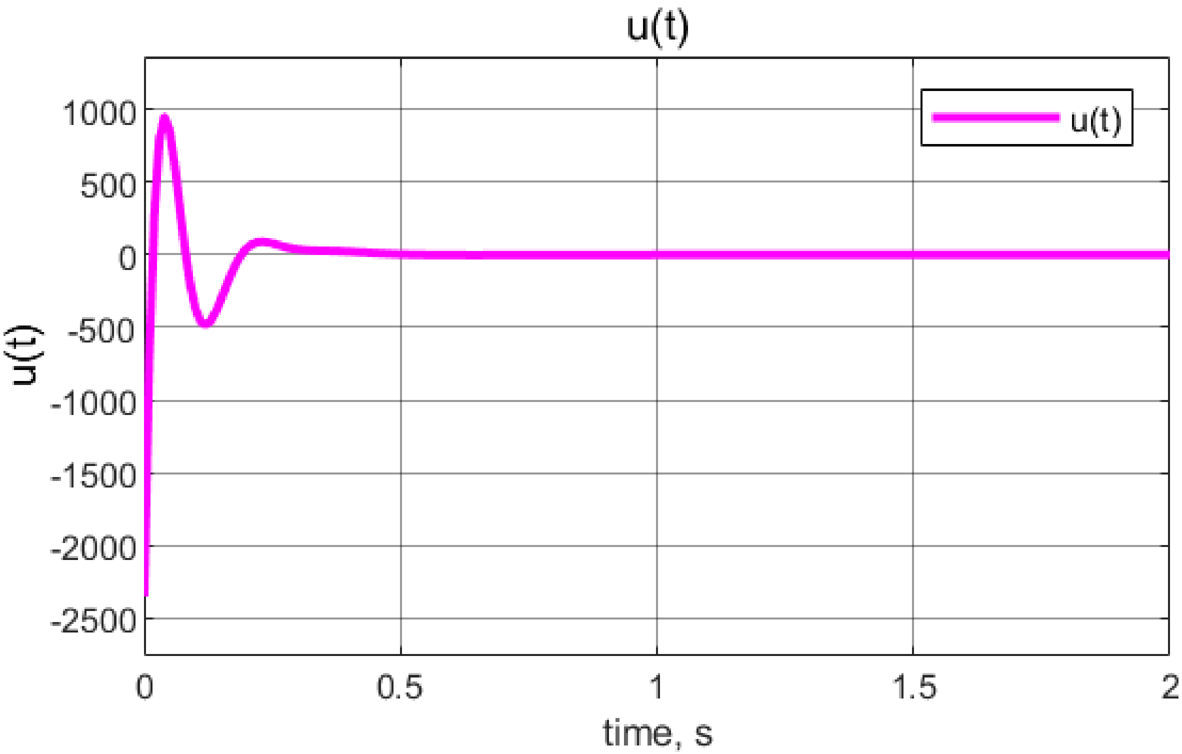

Figure 42 - График u(t)

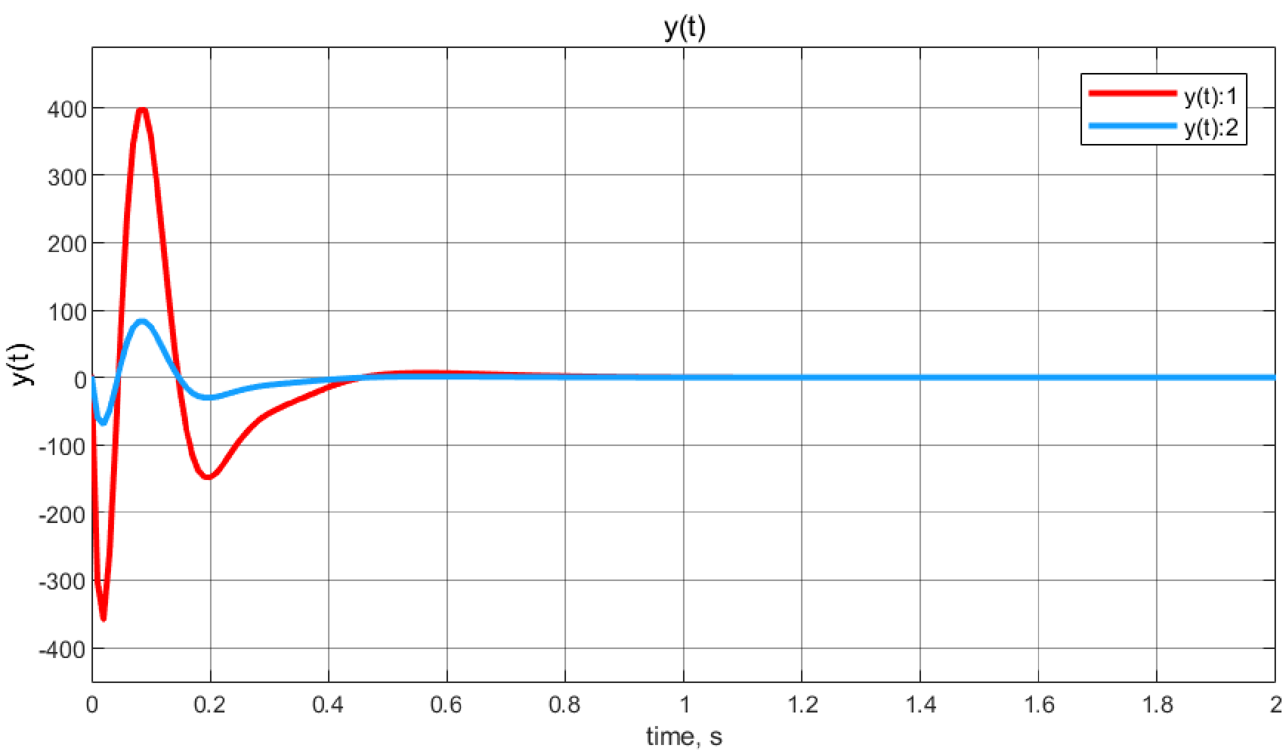

Figure 43 - График y(t)

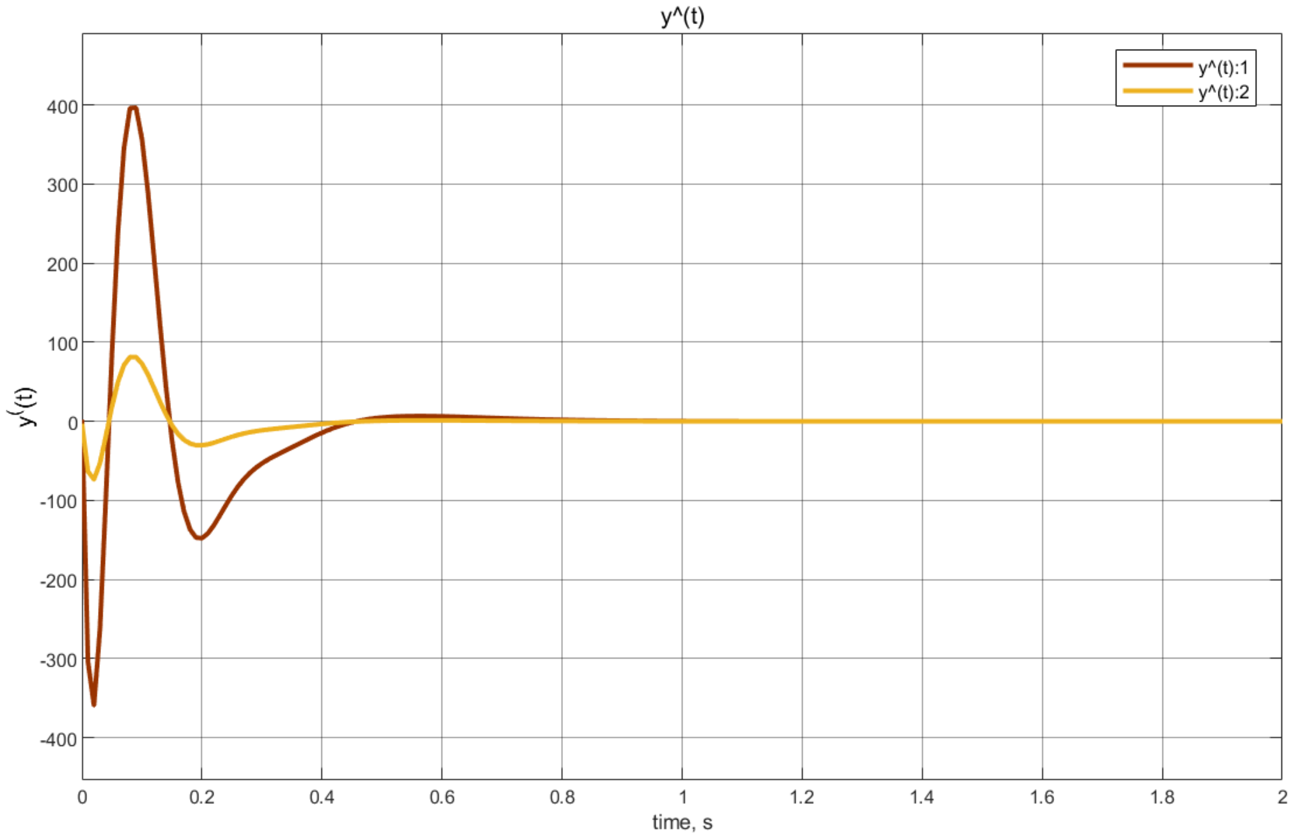

Figure 44 - График y^(t)

Повторяем для третьей степени устойчивости:

$$\alpha = 0.001$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -13.7848 & 4.3188 & 13.9467 & 3.7973 \end{bmatrix}$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} -2.4976 & 1.8257 \\ -5.0145 & -1.8257 \\ 5.0145 & -1.8257 \\ -2.4976 & -1.8257 \end{bmatrix}$$

$$eigenValues\ (A + BK)_3 = \begin{Bmatrix} -5.6503 + 10.1391i \\ -5.6503 - 10.1391i \\ -0.6827 + 0.0000i \\ -1.0012 + 0.0000i \end{Bmatrix}$$

$$eigenValues\ (A + LC)_3 = \begin{Bmatrix} -0.9952 + 6.2673i \\ -0.9952 - 6.2673i \\ -4.0000 + 0.0000i \\ -3.3029 + 0.0000i \end{Bmatrix}$$

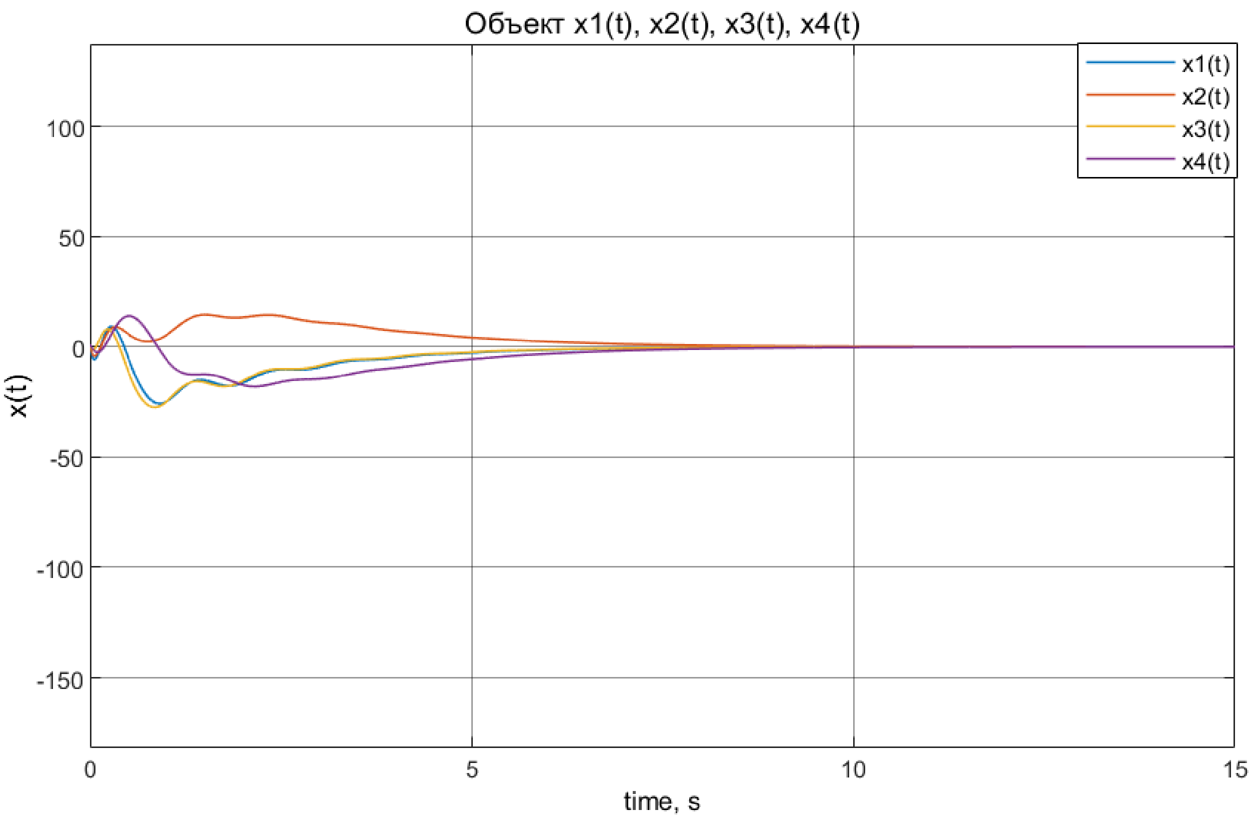

Figure 45 - Графика объекта x1(t), x2(t), x3(t), x4(t)

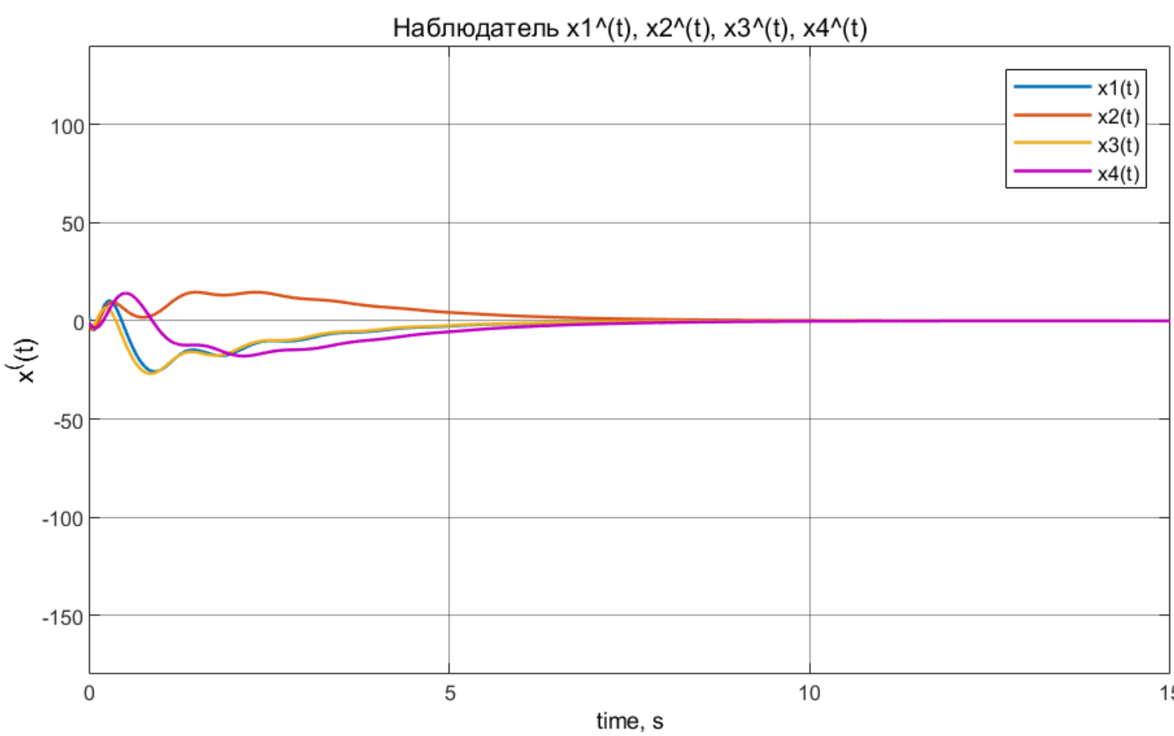

Figure 46 - Графики наблюдателей x^1(t), x^2(t), x^3(t), x^4(t)

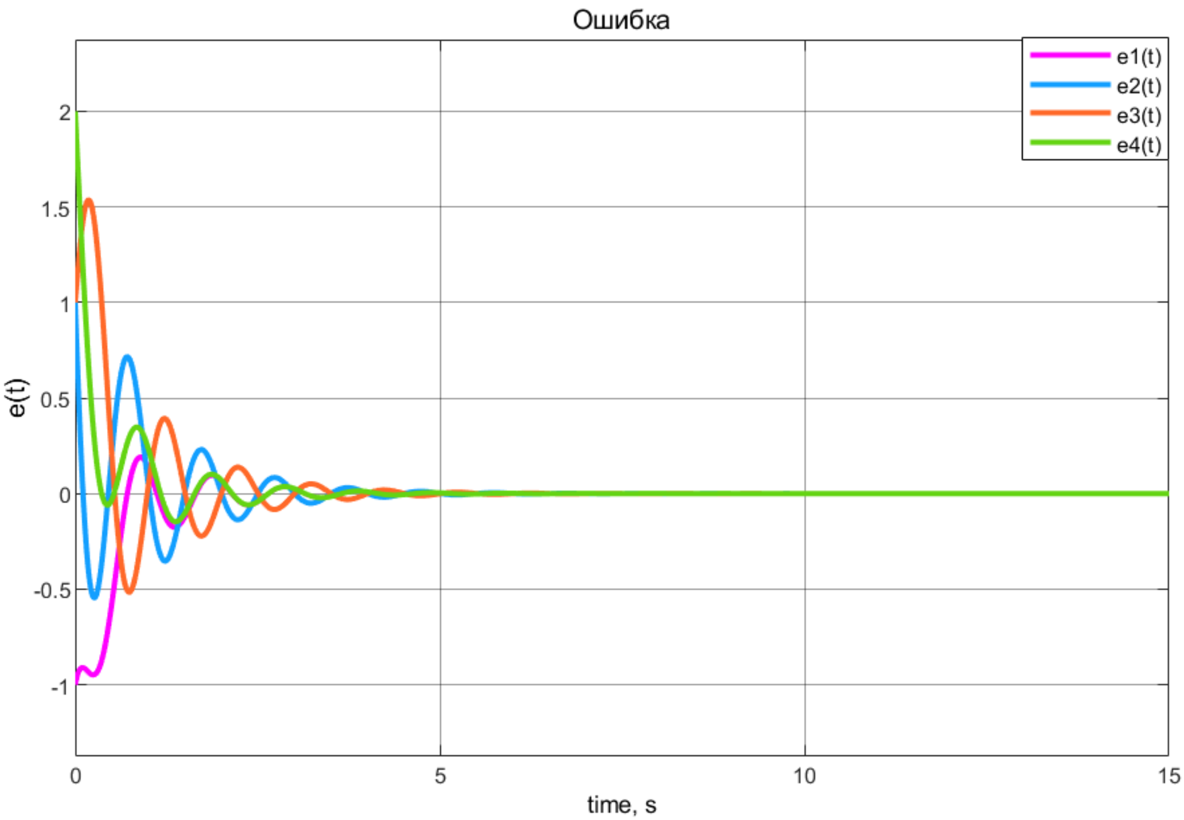

Figure 47 - Графики ошибок e(t)

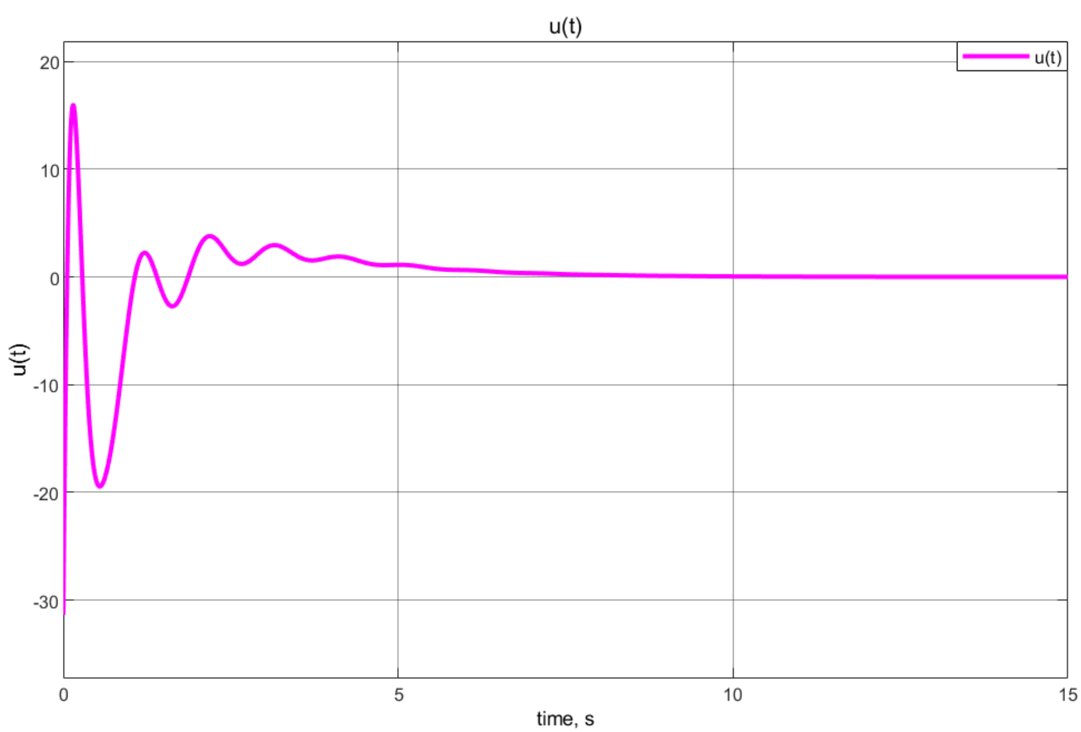

Figure 48 - График u(t)

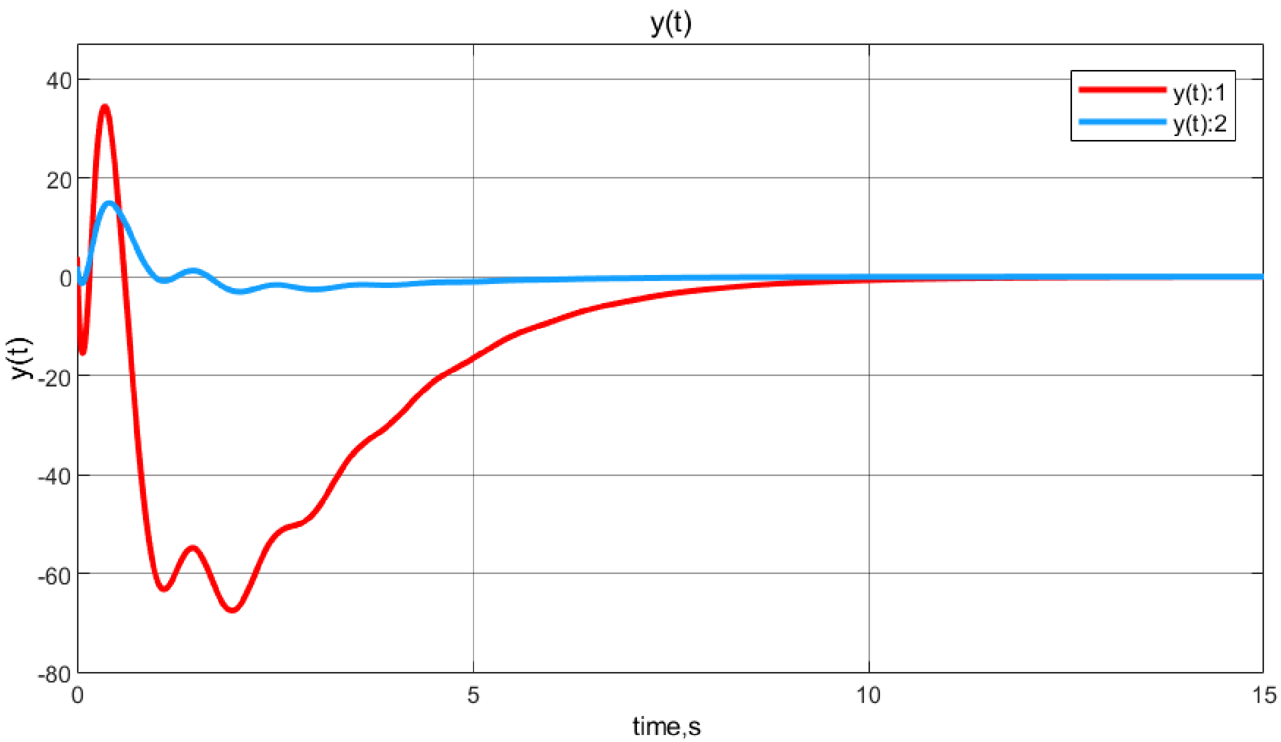

Figure 49 - График y(t)

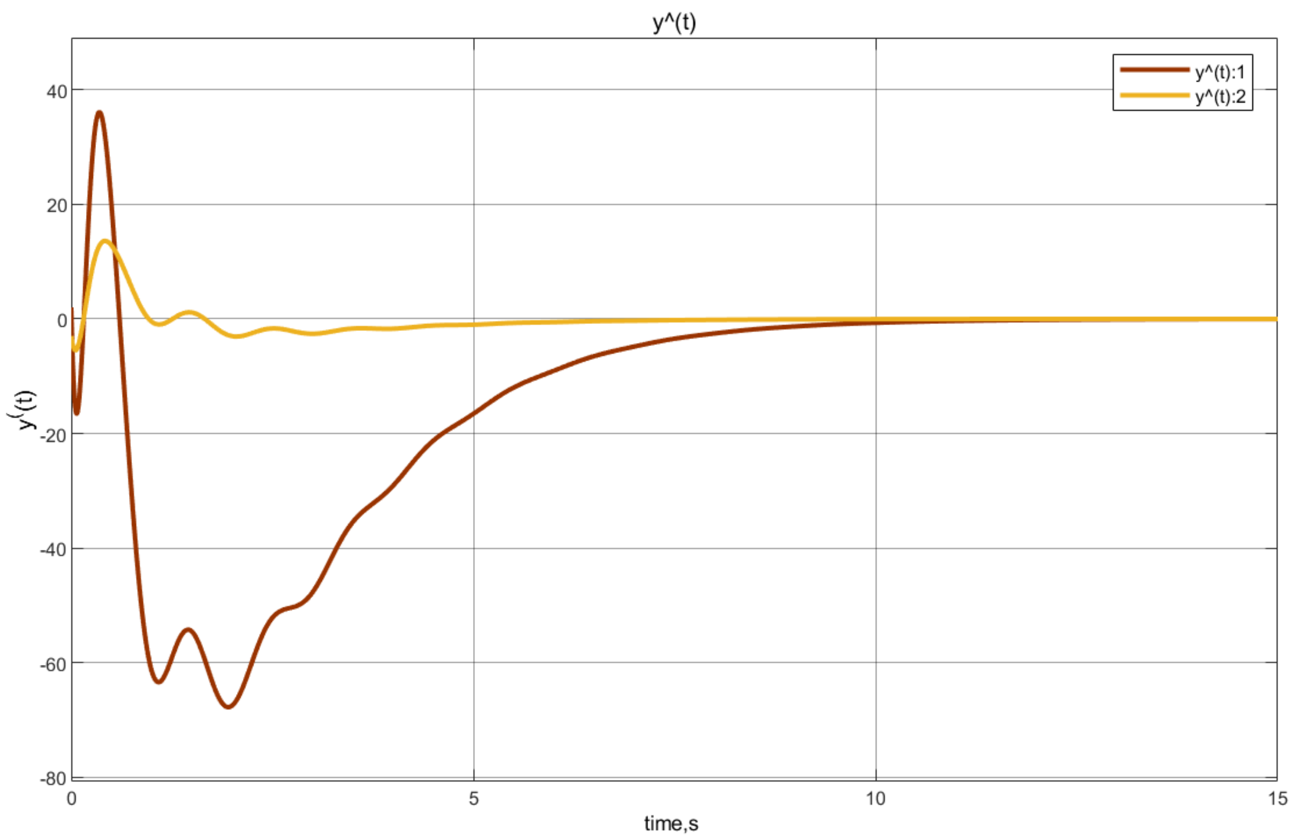

Figure 50 - График y^(t)

Заключение

После выполнения упражнения можно сделать вывод о том, что степень устойчивости оказывает влияние не только на саму систему, но и на наблюдателя. При более высокой степени устойчивости система быстрее сходится, но при этом наблюдается большее перерегулирование на всех графиках, что может быть опасным в некоторых ситуациях. Снижение степени устойчивости приводит к более медленной сходимости системы, но взамен перерегулирование становится очень малым.

Для расчета регулятора и наблюдателя использовались формулы, учитывающие неравенства Ляпунова:

$$P > 0, Y > 0$$

$$PA^T + AP + 2aP + Y_1^T B^T + BY_1 \leq 0;$$
$$A^T Q + QA + 2aQ + C^T Y_2^T + Y_2 C \leq 0;$$

$$Y = KP, \qquad Y = QL$$