ИТМО

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Национальный исследовательский университет ИТМО»

(Университет ИТМО)

Дисциплина: Теория автоматического управления

Отчет

по лабораторной работе №8:

«Модальные регуляторы и наблюдатели»

Выполнил:

Самбрано Браво Рикардо Хосе,

студент гр. R33352

Преподаватель:

Пашенко Артем Витальевич,

фак. СУиР

Санкт-Петербург,

2023 г.

Содержание

Модальные регуляторы и наблюдатели

Задание 1.

Возьмите матрицы A и B из таблицы 1 в соответствии с вашим вариантом и рассмотрите систему:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1}$$

Выполните следующие шаги и приведите в отчёте результаты всех вычислений, схемы моделирования, графики и выводы:

Исходные данные:

Матрица A:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Матрица B:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Желаемые спектры:

$$\{-2, -2, -2, -2\}$$

$$\{-2, -20, -200, -200\}$$

$$\{-2, -20, 3i, -3i\}$$

$$\{-2, -20, -4 + 3i, -4 - 3i\}$$

1. Найдите собственные числа матрицы A и определите управляемость каждого из них. Сделайте вывод об управляемости и стабилизируемости системы.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Поскольку это диагональная матрица, мы можем быстро узнать, что собственные значения матрицы A:

$$\lambda_1 = -2, \qquad \lambda_2 = 3, \qquad \lambda_3 = 1 - 3i, \qquad \lambda_4 = 1 + 3i \tag{4}$$

Переходим к проверке управляемости собственных значений:

$$rank\ [A - \lambda I\ \ B] = n \tag{5}$$

$$rank \begin{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{matrix} - \lambda I & \begin{matrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} \end{bmatrix} = n$$

$$rank\ [A + 2I\ \ B]\ = 3\ \neq n$$

$$rank\ [A - 3I\ \ B] = 4 = n$$

$$rank\ [A - [(1 - 3i)I]\ \ B] = 4 = n$$

$$rank\ [A - [(1 + 3i]\ \ B]\ = 4 = n$$

Можно сделать вывод о том, что собственное значение $\lambda_1 = -2$ не является управляемым, потому что его ранг равен 3. С другой стороны, система стабилизируема, поскольку другими векторами можно управлять.

2. Постройте схему моделирования системы $\dot{x} = Ax + Bu$ с регулятором $u = Kx$.

$$\dot{x} = Ax + Bu\,, \qquad u = Kx \tag{6}$$

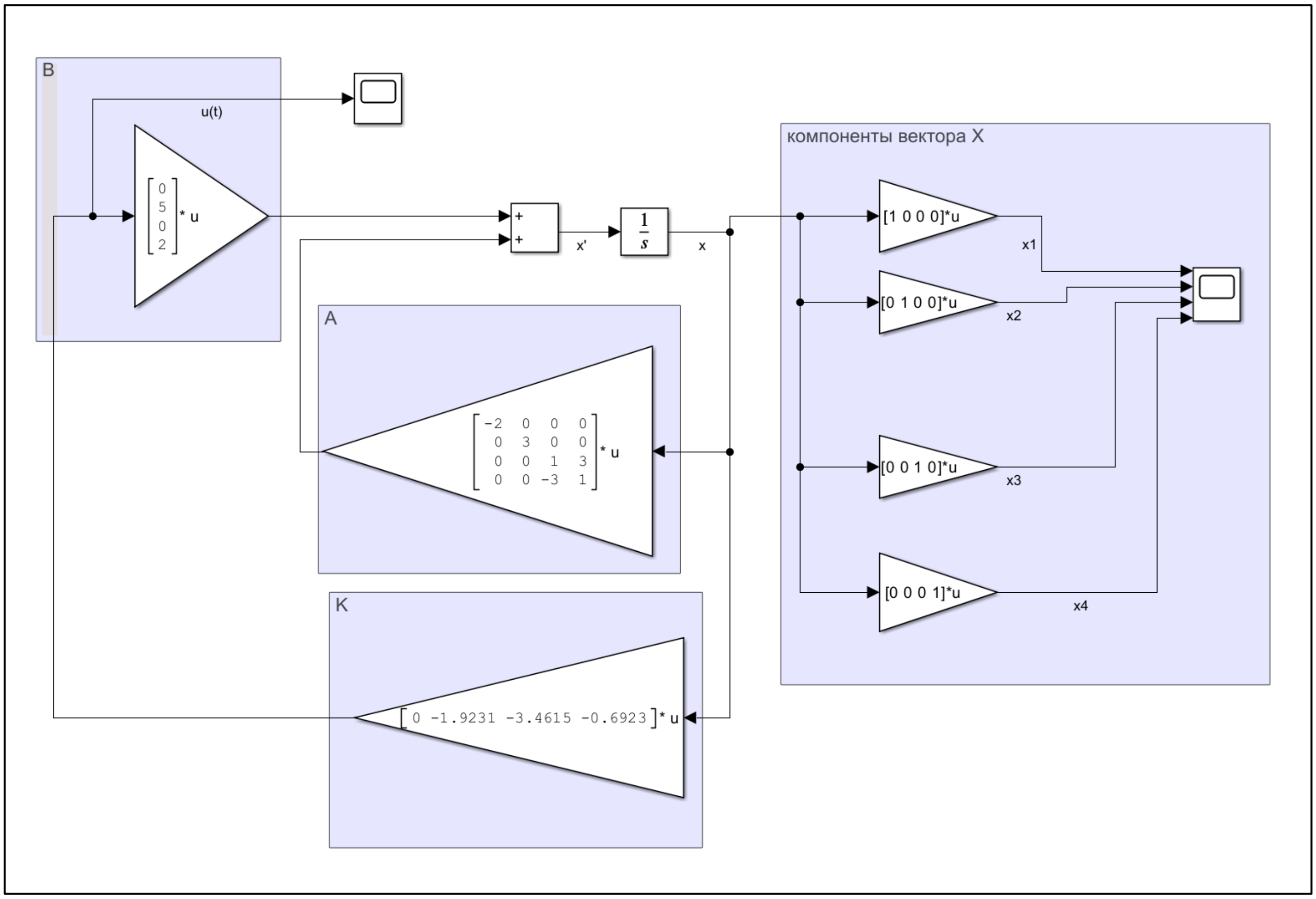

Figure 1 - Схема моделирования с регулятором u = Kx

3. Для каждого желаемого спектра матрицы $A + BK$ из таблицы 1:

a) Найдите соответствующую матрицу регулятора K.

b) Выполните компьютерное моделирование и постройте графики x(t) и u(t) замкнутой системы при начальных условиях $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

$$\text{Желаемый спектр 1} : \{-2, -2, -2, -2\} \tag{7}$$

Шаг 1. Выбираем желаемый спектр и матрицу Г

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Шаг 2. Выбираем матрицу Y

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Проверяем, наблюдаема ли пара (Y, Γ)

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$rank\ O = 3 \neq n$$

Пара Г и Y не полностью наблюдаема, но обнаруживаема.

Из практики:

Если система стабилизируема,
то не управляемые собственные
числа пары (A, B) должны стать
ненаблюдаемыми в паре (Y, Г),
так мы их «не трогаем»

Шаг 3. Находим матрицу подобия

$$AP - P\Gamma = BY \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ P_5 & P_6 & P_7 & P_8 \\ P_9 & P_{10} & P_{11} & P_{12} \\ P_{13} & P_{14} & P_{15} & P_{16} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ P_5 & P_6 & P_7 & P_8 \\ P_9 & P_{10} & P_{11} & P_{12} \\ P_{13} & P_{14} & P_{15} & P_{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ P_5 & P_6 & P_7 & P_8 \\ P_9 & P_{10} & P_{11} & P_{12} \\ P_{13} & P_{14} & P_{15} & P_{16} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ P_5 & P_6 & P_7 & P_8 \\ P_9 & P_{10} & P_{11} & P_{12} \\ P_{13} & P_{14} & P_{15} & P_{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -P_1 & -P_2 & -P_3 \\ 5P_5 & -P_5 + 5P_6 & -P_6 + 5P_7 & -P_7 + 5P_8 \\ 3P_{13} + 3P_9 & 3P_{10} + 3P_{14} - P_9 & -P_{10} + 3P_{11} + 3P_{15} & -P_{11} + 3P_{12} + 3P_{16} \\ 5P_{13} - 3P_9 & -3P_{10} - P_{13} + 3P_{14} & -3P_{11} - P_{14} + 3P_{15} & -3P_{12} - P_{15} + 3P_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1.24 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{11} & -0.46 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0.314 \end{bmatrix}$$

Шаг 4. Вычисляем матрицу регулятора

$$K = -YP^{-1} \tag{9}$$

$$= -[0 \quad 1 \quad 1 \quad 1] * pinv(P) = -[0 \quad 1 \quad 1 \quad 1]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13.4615 & 33.2308 & -4.1538 \\ 0 & -46.1538 & -92.0769 & 46.3846 \\ 0 & 34.6154 & 62.3077 & -41.5385 \end{bmatrix}$$

$$K = [0 \quad -1.9231 \quad -3.4615 \quad -0.6923]$$

Шаг 5. Проверка

$$K = [0 \quad -1.9231 \quad -3.4615 \quad -0.6923]$$

$$A + BK = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-55693}{6000} & \frac{-4327}{250} & \frac{-6923}{2000} \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{-3}{10} \\ 0 & \frac{-19231}{5000} & \frac{-8279}{1250} & \frac{-6423}{5000} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Собственные значения A + BK:

$$\lambda_1 = -2☺, \qquad \lambda_2 = -2☺, \qquad \lambda_3 = -2☺, \qquad \lambda_4 = -2 ☺$$

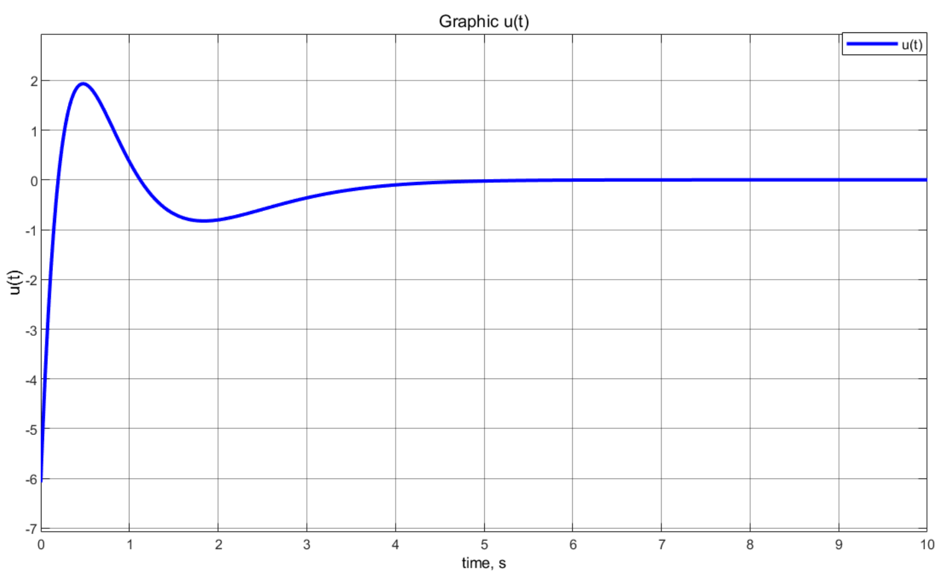

Figure 2 - График u(t)

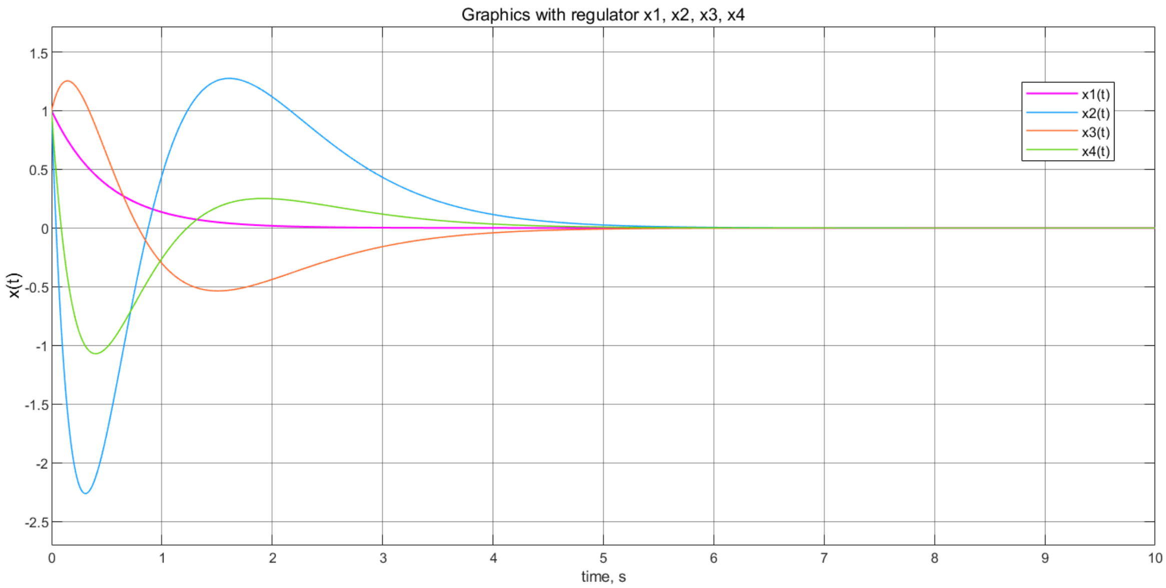

Figure 3 - Графики x1(t), x2(t), x3(t), x4(t)

Теперь повторяем те же действия для следующих спектров:

$$\text{Желаемый спектр 2}: \; \{-2, -20, -200, -200\} \tag{11}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -200 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -200 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -14582 & 16022 & 36242 \end{bmatrix}$$

$$A + BK = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.7291 & 0.8011 & 1.8121 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2916 & 0.3204 & 0.7248 \end{bmatrix} * 1.0e+05$$

Собственные значения:

$$\lambda_1 = -2☺, \qquad \lambda_2 = -20☺, \qquad \lambda_3 = -200☺, \qquad \lambda_4 = -200☺$$

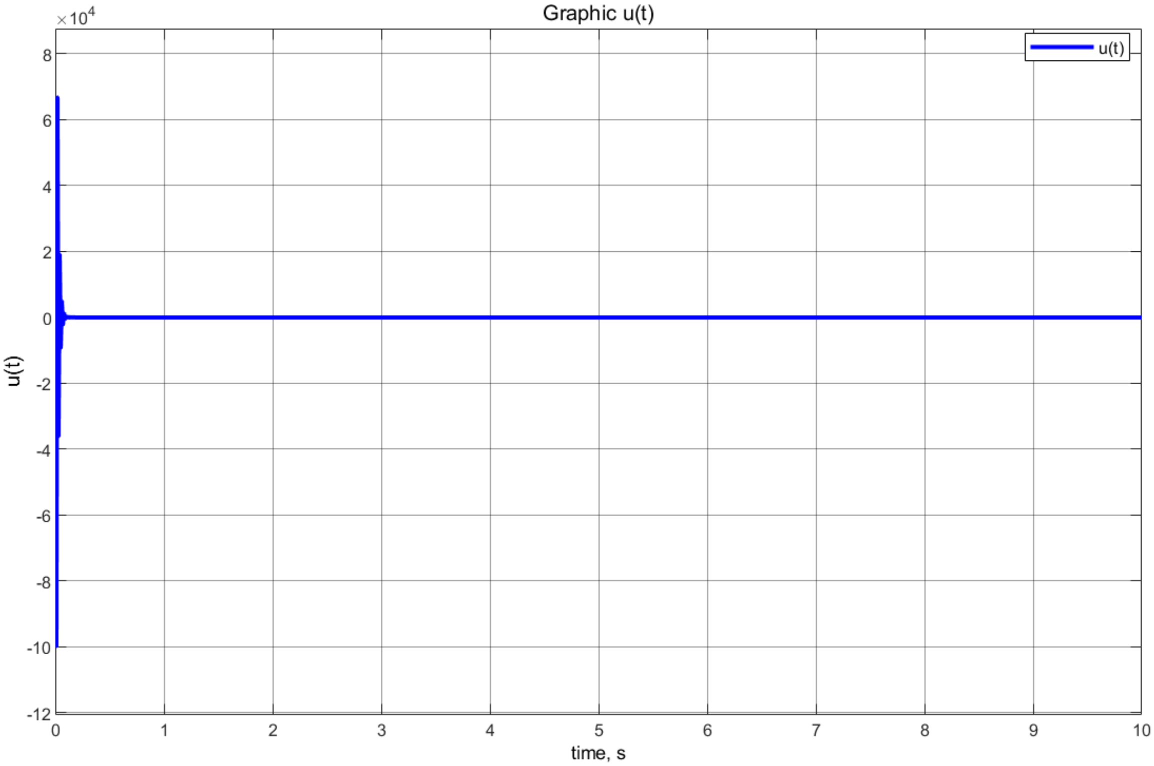

Figure 4 - График u(t)

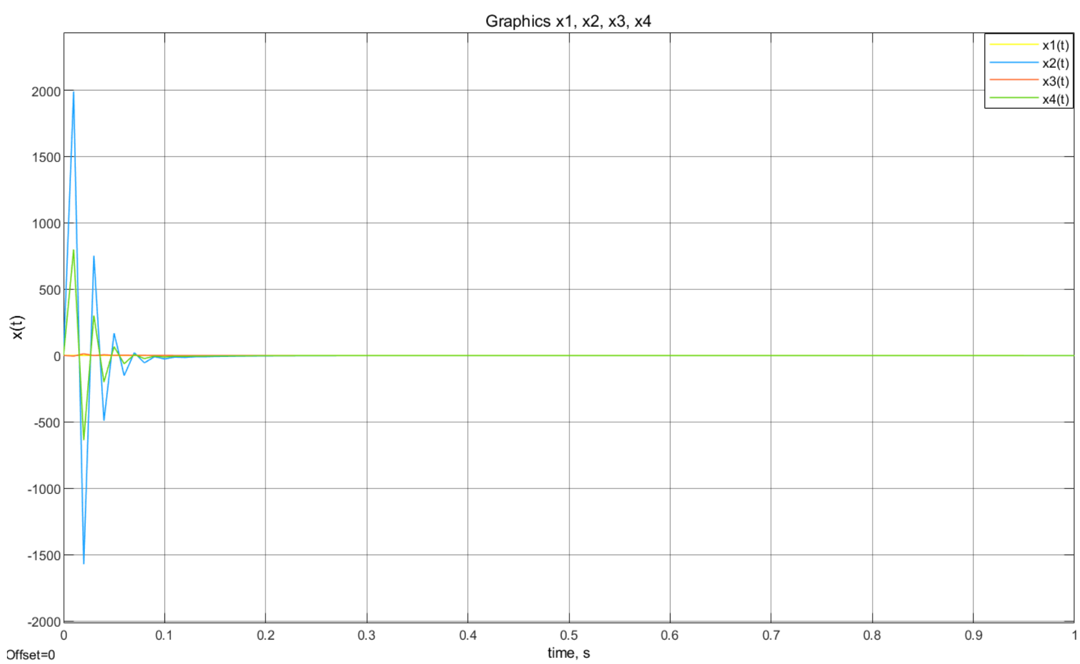

Figure 5 - Графики x1(t), x2(t), x3(t), x4(t)

$$\text{Желаемый спектр 3}: \{-2, -20, 3i, -3i\} \qquad (12)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = [0 \quad -6.3692 \quad -4.8846 \quad 3.4231]$$

$$A + BK = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -28.8462 & -24.4231 & 17.1154 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12.7385 & -12.7692 & 7.8462 \end{bmatrix}$$

Собственные значения:

$\lambda_1 = -2$☺, $\lambda_2 = -20$☺, $\lambda_3 = 3i$☺, $\lambda_4 = -3i$☺

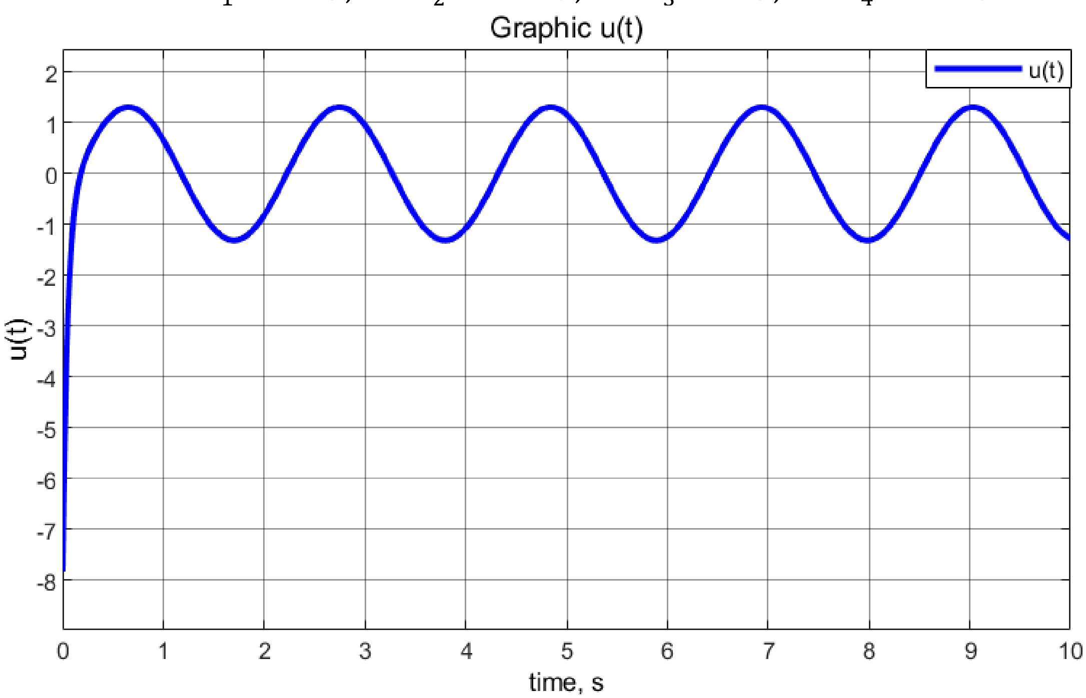

Figure 6 - График u(t)

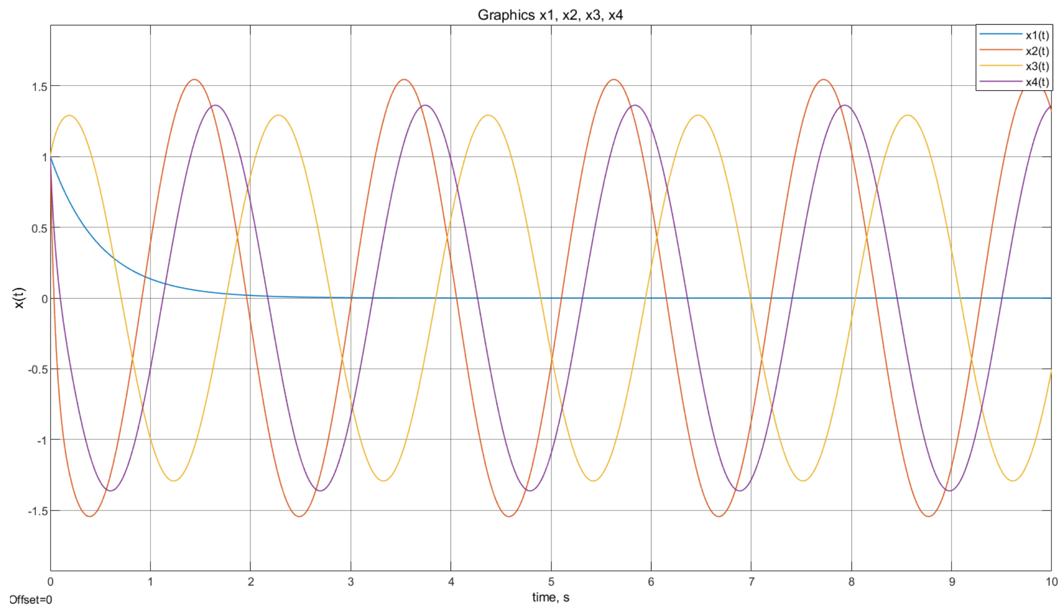

Figure 7 - Графики x1(t), x2(t), x3(t), x4(t)

$$\text{Желаемый спектр 4}: \{-2, -20, -4+3i, -4-3i\} \tag{13}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -20.5231 & -15.9615 & 34.8077 \end{bmatrix}$$

$$A + BK = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -99.6154 & -79.8077 & 174.0385 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -41.0462 & -34.9231 & 70.6154 \end{bmatrix}$$

Собственные значения:

$\lambda_1 = -2$☺, $\lambda_2 = -20$☺, $\lambda_3 = -4 + 3i$☺, $\lambda_4 = -4 - 3i$☺

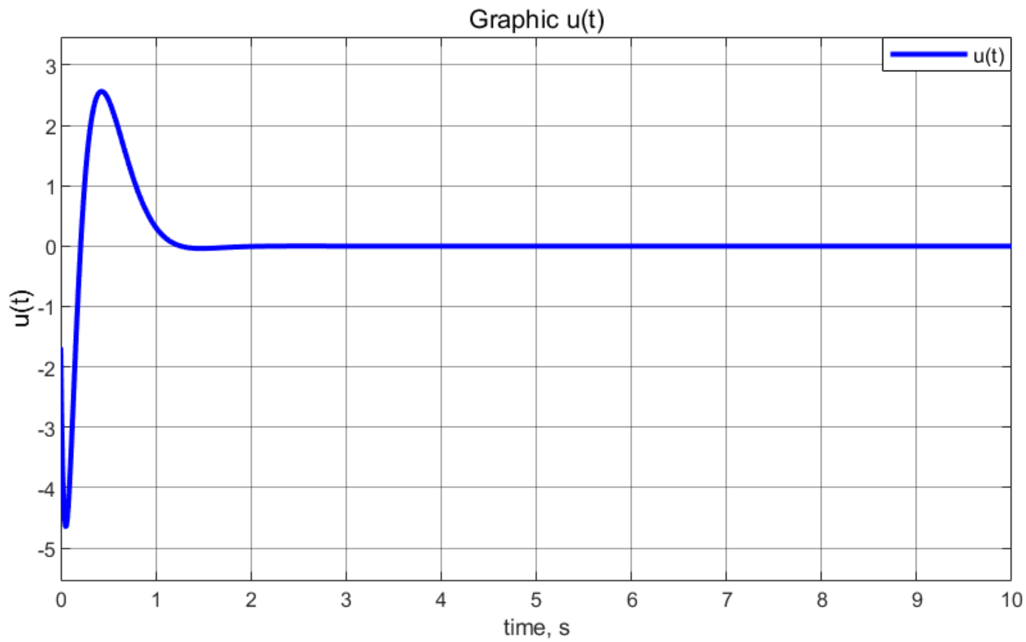

Figure 8 - График u(t)

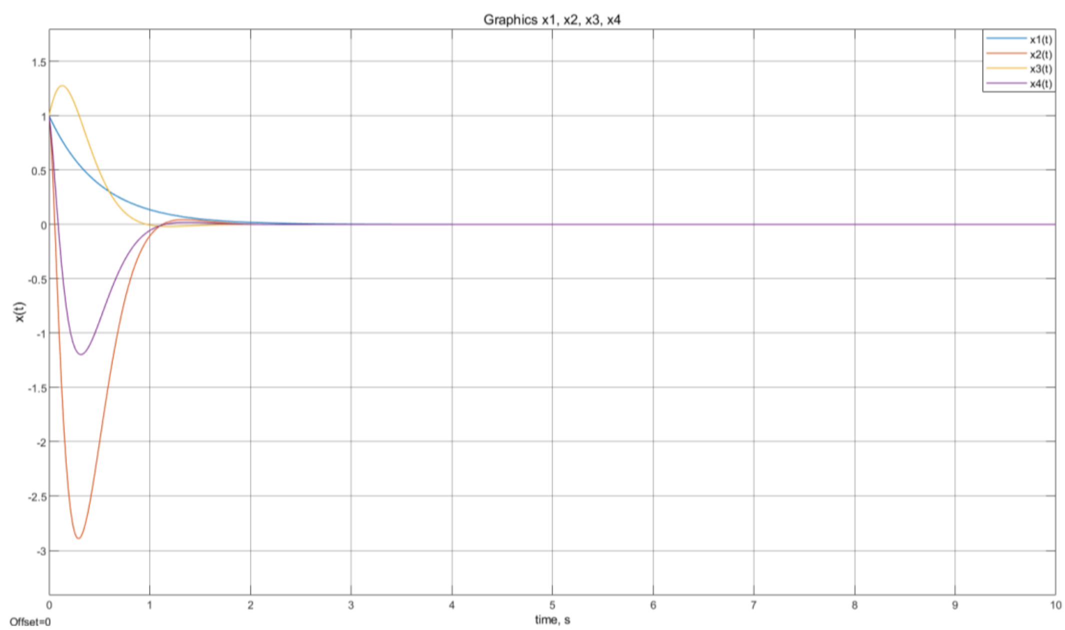

Figure 9 - Графики x1(t), x2(t), x3(t), x4(t)

4. Сделайте выводы.

Поначалу система оказалась неустойчивой, так как имела собственные значения с положительным знаком. С другой стороны, эти собственные значения оказались управляемыми, поэтому систему можно было стабилизировать с помощью К-регулятора.

Задание 2.

Возьмите матрицы A и C из таблицы 2 в соответствии с вашим вариантом и рассмотрите систему

$$\dot{x} = Ax, \qquad y = Cx \tag{14}$$

Выполните следующие шаги и приведите в отчёте результаты всех вычислений, схемы моделирования, графики и выводы:

Исходные данные:

Матрица A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Матрица B:

$$C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Желаемые спектры:

$$\{-2, -2, -2, -2\}$$

$$\{-2, -20, -200, -200\}$$

$$\{-2, -20, 3i, -3i\}$$

$$\{-2, -20, -4 + 3i, -4 - 3i\}$$

1. Найдите собственные числа матрицы A и определите наблюдаемость каждого из них. Сделайте вывод о наблюдаемости и обнаруживаемости системы.

$$rank \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ \mathrm{C} \end{bmatrix} = n$$

$$rank \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} - \lambda I \\ \begin{matrix} 0 & 3 & 2 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} = n$$

$$rank\begin{bmatrix} A-(2i)I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2i & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -2i \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 4 = n$$

$$rank\begin{bmatrix} A-(-2i)I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2i & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 2i \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 4 = n$$

$$rank\begin{bmatrix} A-(4i)I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4i & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -4i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4i & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -4i \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 4 = n$$

$$rank\begin{bmatrix} A-(-4i)I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 4i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4i & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 4i \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 4 = n$$

Можно сделать вывод, что все собственные значения наблюдаемы. Следовательно, система наблюдаема и обнаружима.

2. Постройте схему моделирования системы $\dot{x} = Ax, y = Cx$ с наблюдателем состояния:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y) \tag{15}$$

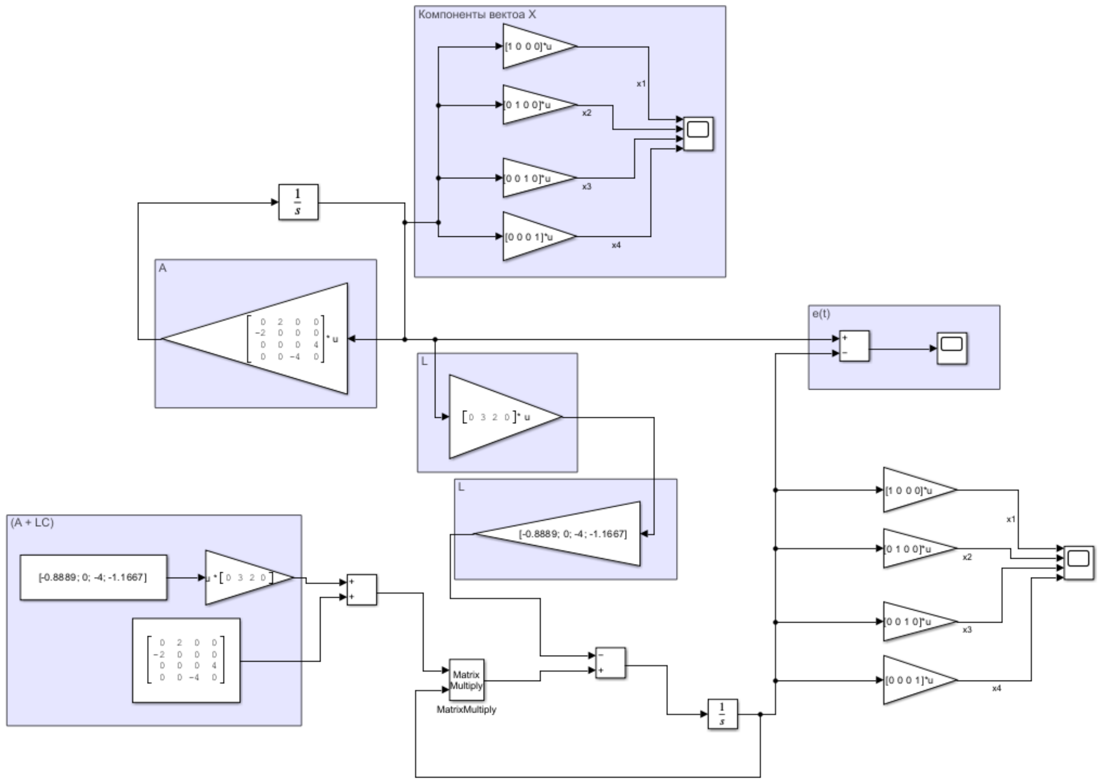

Figure 10 - Схема моделирования с наблюдателем

3. Для каждого желаемого спектра матрицы $A + LC$ из таблицы 2:
   a) Найдите соответствующую матрицу наблюдателя L.
   b) Выполните моделирование с начальными условиями $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ и $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$. Постройте сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$, а также график ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

$$\text{Желаемый спектр 1} : \{-2, -2, -2, -2\} \tag{16}$$

Шаг 1. Выбираем желаемый спектр и матрицу Γ

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Шаг 2. Выбираем матрицу Y

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Необходима что пара (Y, Γ) была управляема

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$rank\ O = rank \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{bmatrix} = 4 ☺$$

Шаг 3. Находим матрицу подобия

$$\Gamma Q - QA = YC \tag{17}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 \\ Q_5 & Q_6 & Q_7 & Q_8 \\ Q_9 & Q_{10} & Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{13} & Q_{14} & Q_{15} & Q_{16} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 \\ Q_5 & Q_6 & Q_7 & Q_8 \\ Q_9 & Q_{10} & Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{13} & Q_{14} & Q_{15} & Q_{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [0 \quad 3 \quad 2 \quad 0]$$

$$\begin{pmatrix} -2Q_1 + 2Q_2 + Q_5 & -2Q_1 - 2Q_2 + Q_6 & -2Q_3 + 4Q_4 + Q_7 & -4Q_3 - 2Q_4 + Q_8 \\ -2Q_5 + 2Q_6 + Q_9 & Q_{10} - 2Q_5 - 2Q_6 & Q_{11} - 2Q_7 + 4Q_8 & Q_{12} - 4Q_7 - 2Q_8 \\ 2Q_{10} + Q_{13} - 2Q_9 & -2Q_{10} + Q_{14} - 2Q_9 & -2Q_{11} + 4Q_{12} + Q_{15} & -4Q_{11} - 2Q_{12} + Q_{16} \\ -2Q_{13} + 2Q_{14} & -2Q_{13} - 2Q_{14} & -2Q_{15} + 4Q_{16} & -4Q_{15} - 2Q_{16} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2Q_1+2Q_2+Q_5 = 0 \\ -2Q_1-2Q_2+Q_6 = 3 \\ -2Q_3+4Q_4+Q_7 = 2 \\ -4Q_3-2Q_4+Q_8 = 0 \\ -2Q_5+2Q_6+Q_9 = 0 \\ Q_{10}-2Q_5-2Q_6 = 3 \\ Q_{11}-2Q_7+4Q_8 = 2 \\ Q_{12}-4Q_7-2Q_8 = 0 \\ 2Q_{10}+Q_{13}-2Q_9 = 0 \\ -2Q_{10}+Q_{14}-2Q_9 = 3 \\ -2Q_{11}+4Q_{12}+Q_{15} = 2 \\ -4Q_{11}-2Q_{12}+Q_{16} = 0 \\ -2Q_{13}+2Q_{14} = 0 \\ -2Q_{13}-2Q_{14} = 3 \\ -2Q_{15}+4Q_{16} = 2 \\ -4Q_{15}-2Q_{16} = 0 \end{cases}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -1.2188 & -0.6094 & -0.1166 & 0.4712 \\ -1.2188 & -0.6562 & -0.1180 & 0.4760 \\ -1.1250 & -0.750 & -0.1400 & 0.4800 \\ -0.7500 & -0.7500 & -0.2000 & 0.4000 \end{bmatrix} \tag{19}$$

Шаг 4. Вычисляем матрицу наблюдателя

$$L = Q^{-1}Y \tag{20}$$

$$L = \begin{bmatrix} -0.8889 \\ 0 \\ -4 \\ -1.1667 \end{bmatrix}$$

Шаг 5. Проверка

$$L = \begin{bmatrix} -0.8889 \\ 0 \\ -4 \\ -1.1667 \end{bmatrix}$$

$$A + LC = \begin{bmatrix} 0 & -0.6667 & -1.7778 & 0 \\ -2 & -0.0000 & -0.0000 & 0 \\ 0 & -12.0000 & -8.0000 & 4 \\ 0 & -3.5000 & -6.3333 & 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

Собственные значения:

$$\lambda_1 = -2☺, \qquad \lambda_2 = -2☺, \qquad \lambda_3 = -2☺, \qquad \lambda_4 = -2☺$$

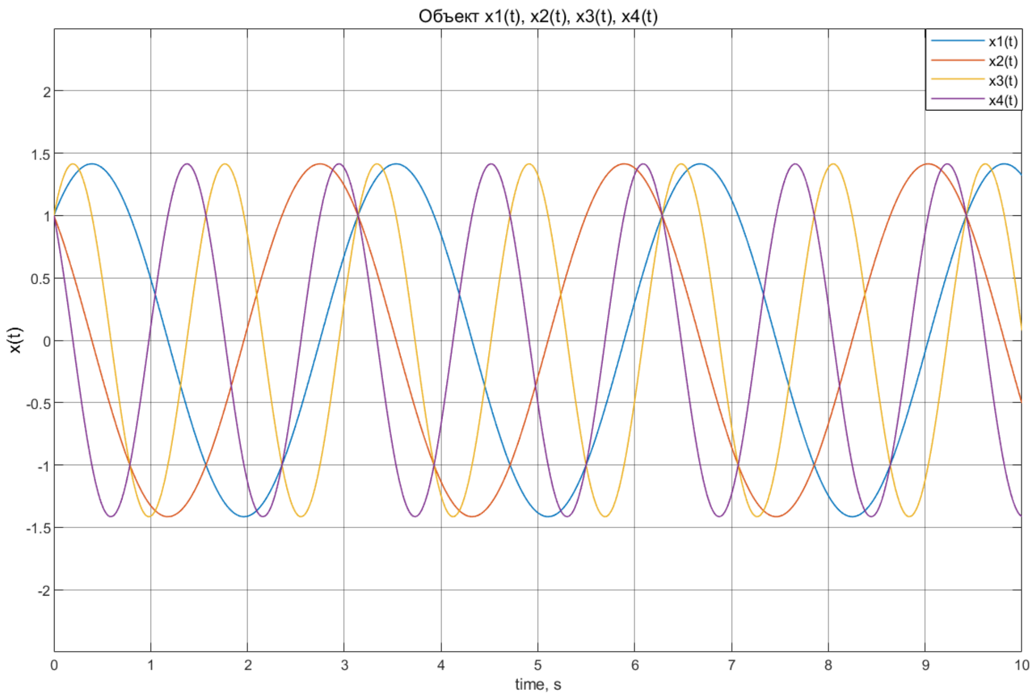

Figure 11 – Графика объекта x1(t), x2(t), x3(t), x4(t)

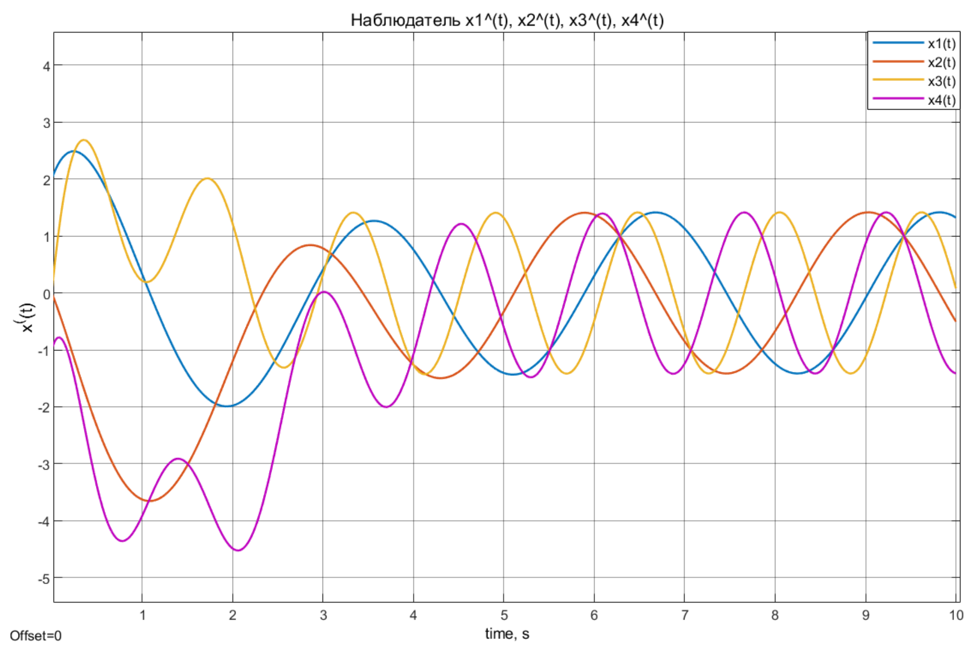

Figure 12 - графики наблюдателей x1(t), x2(t), x3(t), x4(t)

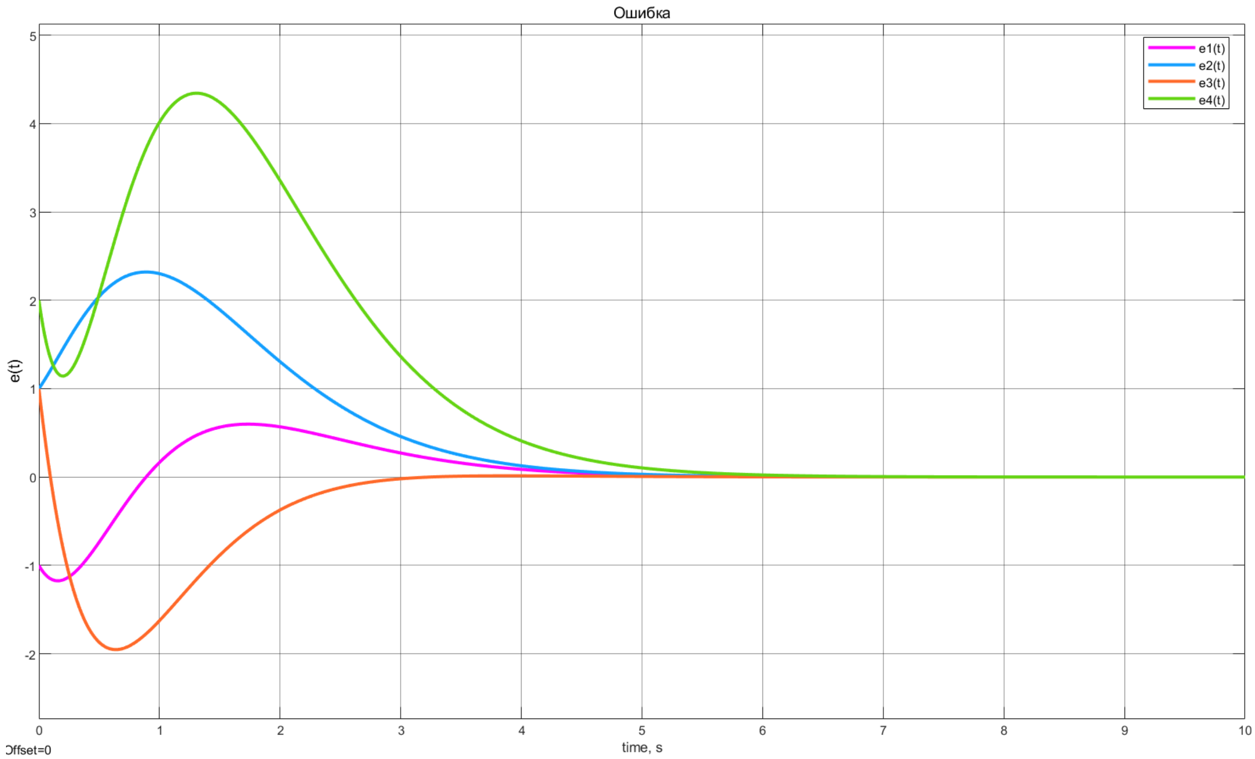

Figure 13 - Графики ошибок e(t)

$$\text{Желаемый спектр 2}: \{-2, -20, -200, -200\} \tag{22}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -200 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -200 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 19509 \\ -24842 \\ 37052 \\ 08529 \end{bmatrix}$$

$$A + LC = \begin{bmatrix} 0 & 0.5853 & 0.3902 & 0 \\ 0 & -0.7453 & -0.4968 & 0 \\ 0 & 1.1116 & 0.7410 & 0 \\ 0 & 0.2559 & 0.1705 & 0 \end{bmatrix} * 1.0e+05 \tag{23}$$

Собственные значения:

$$\lambda_1 = -2, \qquad \lambda_2 = -20, \qquad \lambda_3 = -200, \qquad \lambda_4 = -200$$

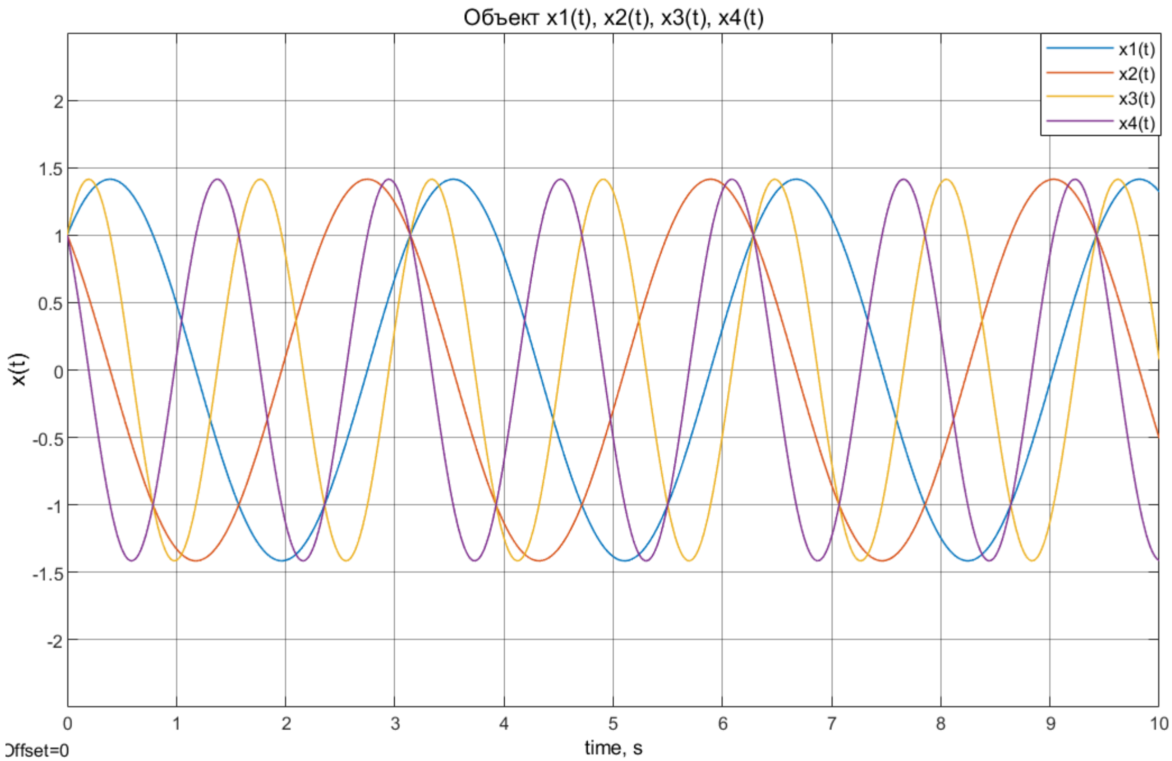

Figure 14 - Графика объекта x1(t), x2(t), x3(t), x4(t)

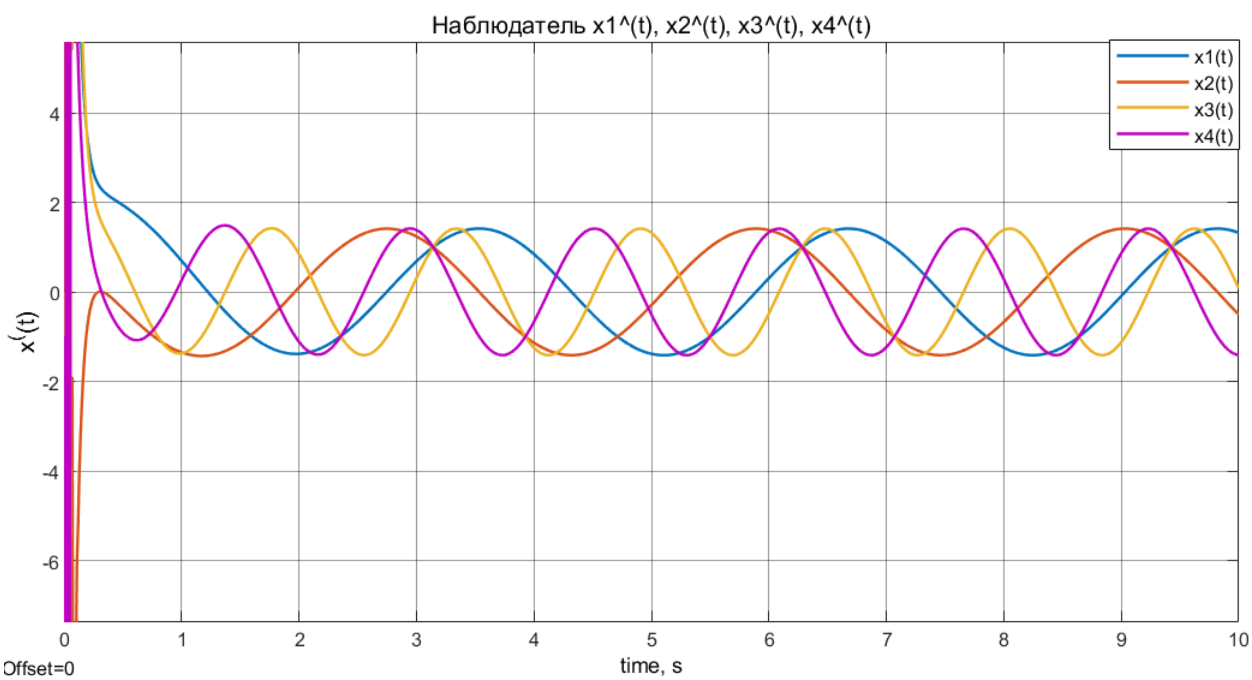

Figure 15 - графики наблюдателей x1(t), x2(t), x3(t), x4(t)

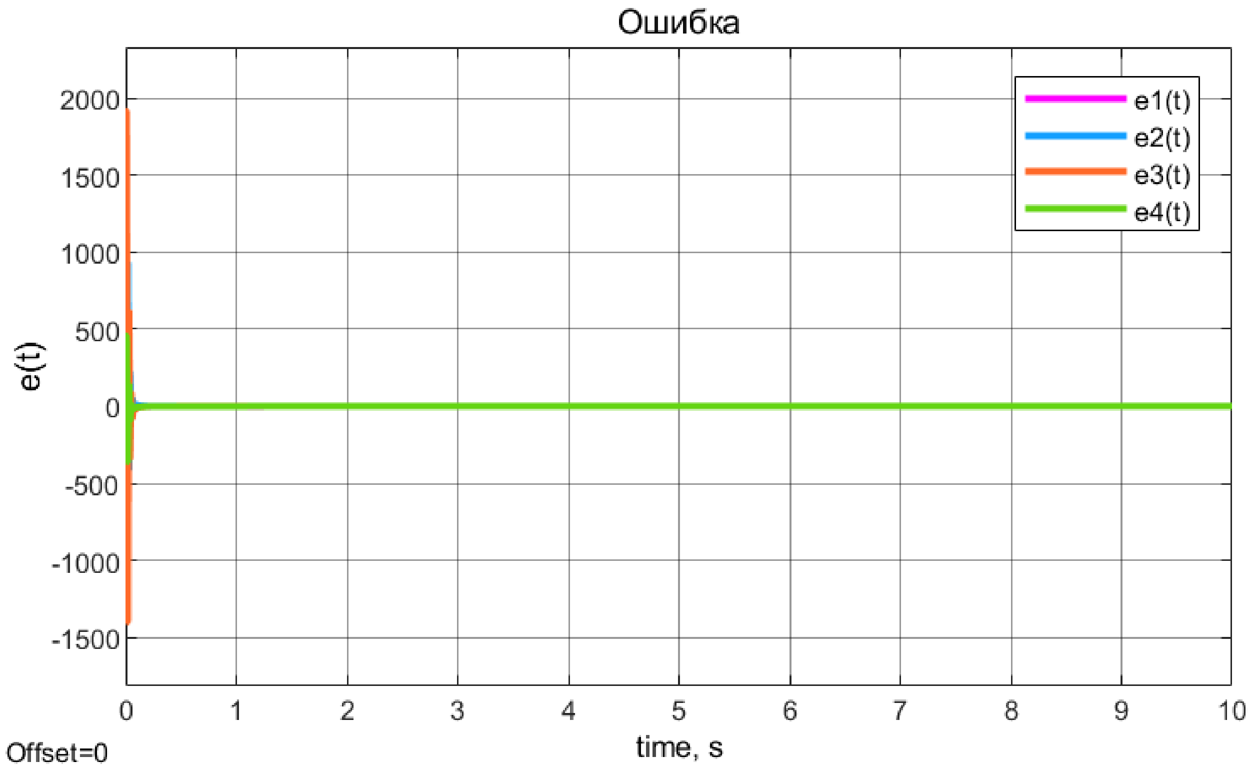

Figure 16 - Графики ошибок e(t)

$$\text{Желаемый спектр 3}: \{-2, -20, 3i, -3i\} \tag{24}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 2.5000 \\ -3.0556 \\ -6.4167 \\ -1.7500 \end{bmatrix}$$

$$A + LC = \begin{bmatrix} 0 & 9.5000 & 5.0000 & 0 \\ -2.0000 & -9.1667 & -6.1111 & 0 \\ 0 & -19.2500 & -12.8333 & 4 \\ 0 & -5.2500 & -7.5000 & 0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

Собственные значения:

$$\lambda_1 = -2, \qquad \lambda_2 = -20, \qquad \lambda_3 = 3i, \qquad \lambda_4 = -3i$$

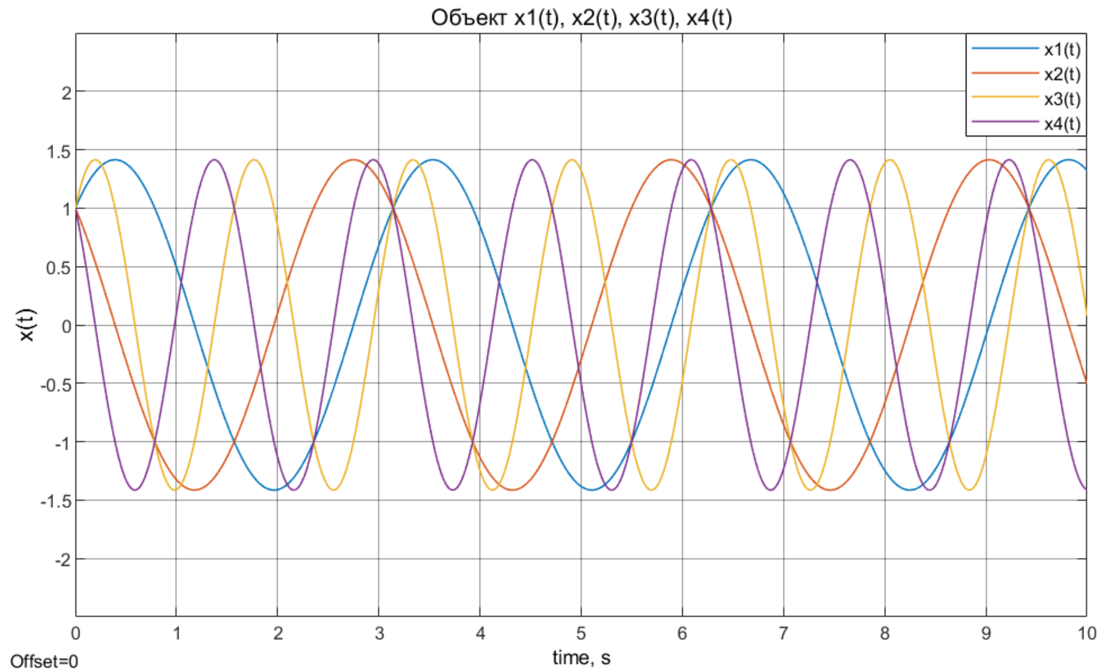

Figure 17 - Графика объекта x1(t), x2(t), x3(t), x4(t)

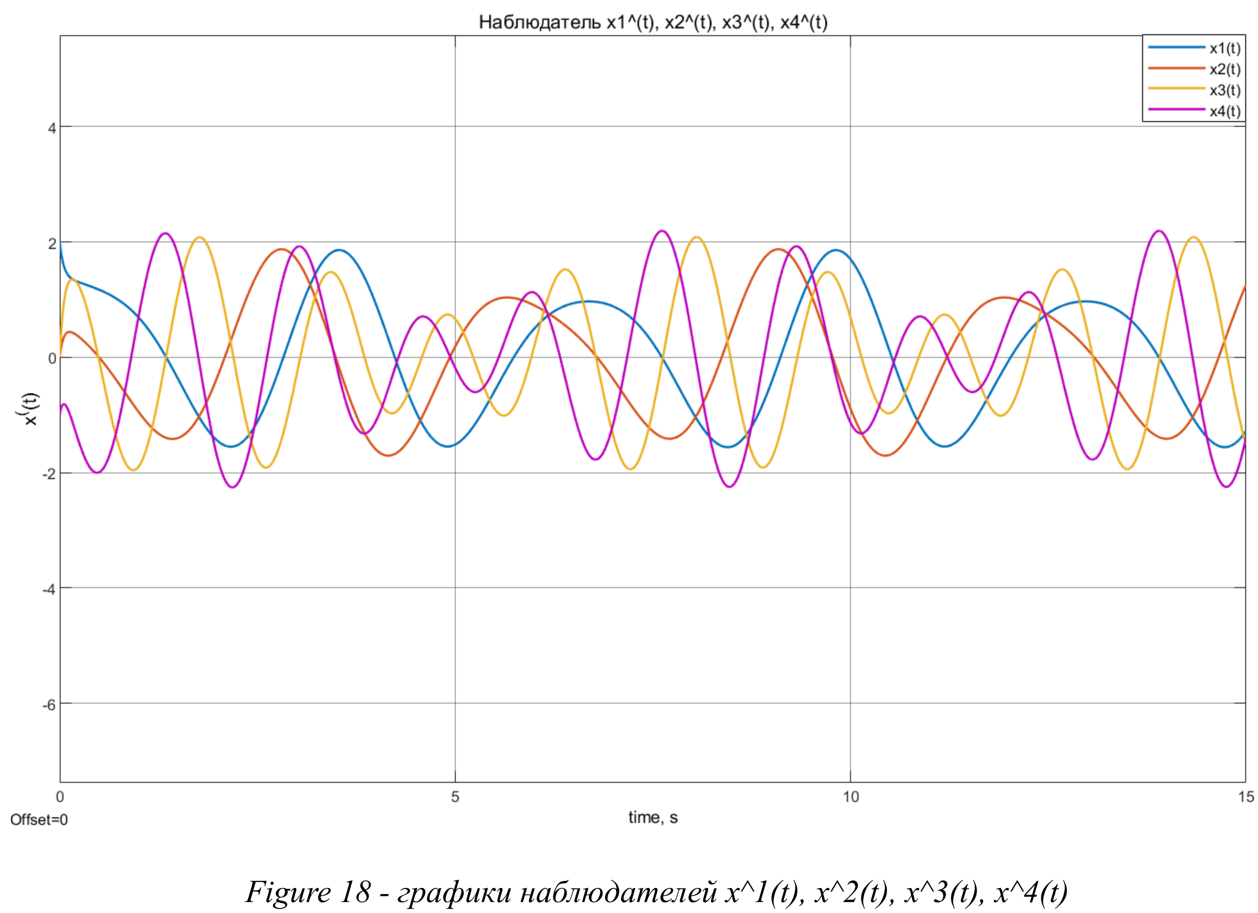

Figure 18 - графики наблюдателей x^1(t), x^2(t), x^3(t), x^4(t)

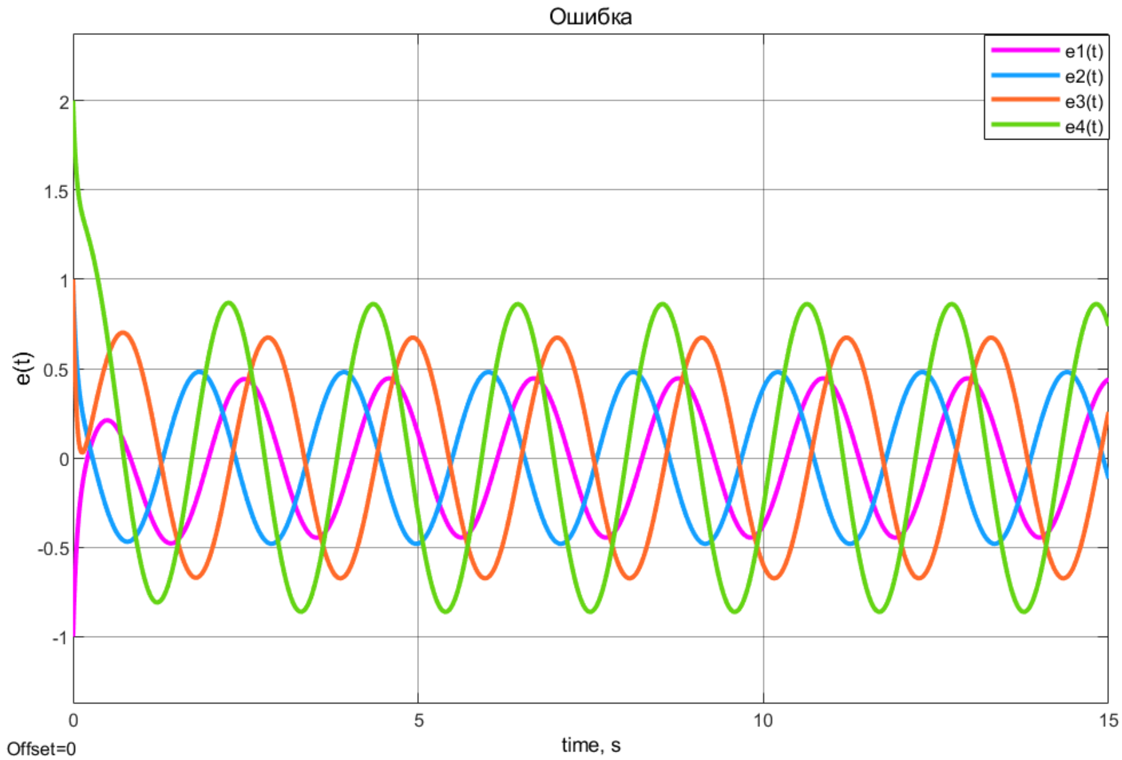

Figure 19 - Графики ошибок e(t)

$$\text{Желаемый спектр 4}: \{-2, -20, -4+3i, -4-3i\} \tag{26}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0.7222 \\ -20.8333 \\ 16.2500 \\ -27.0833 \end{bmatrix}$$

$$A + LC = \begin{bmatrix} 0 & 4.1667 & 1.4444 & 0 \\ -2 & -62.5000 & -41.6667 & 0 \\ 0 & 48.7500 & 32.5000 & 4 \\ 0 & -81.2500 & -58.1667 & 0 \end{bmatrix} \tag{27}$$

Собственные значения:

$$\lambda_1 = -2, \qquad \lambda_2 = -20, \qquad \lambda_3 = -4+3i, \qquad \lambda_4 = -4-3i$$

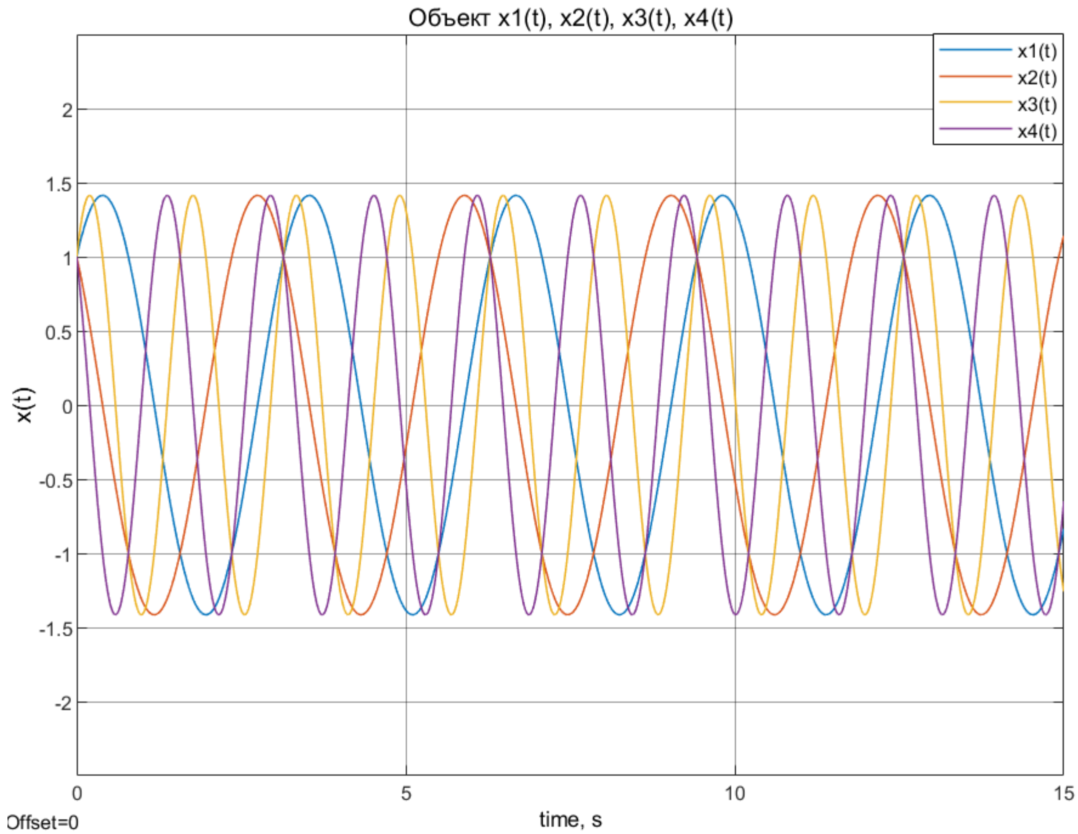

Figure 20 - Графика объекта x1(t), x2(t), x3(t), x4(t)

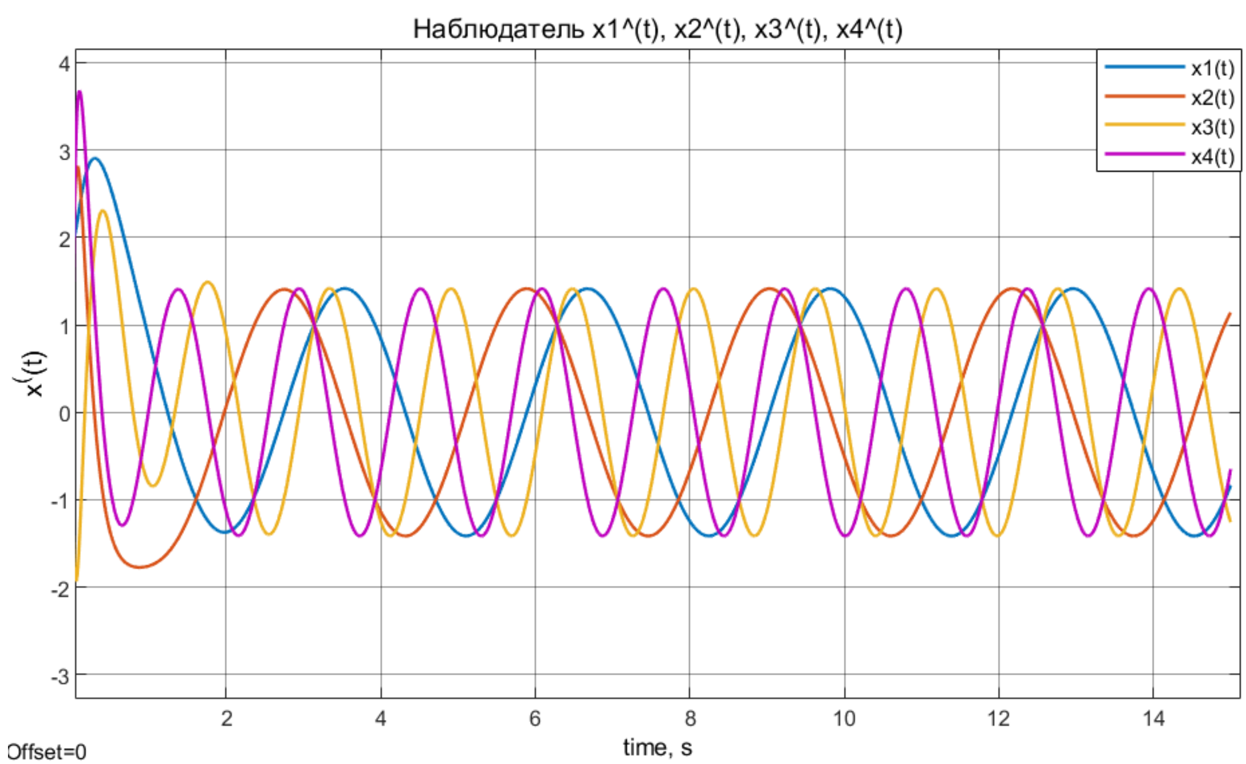

Figure 21 - графики наблюдателей x1(t), x2(t), x3(t), x4(t)

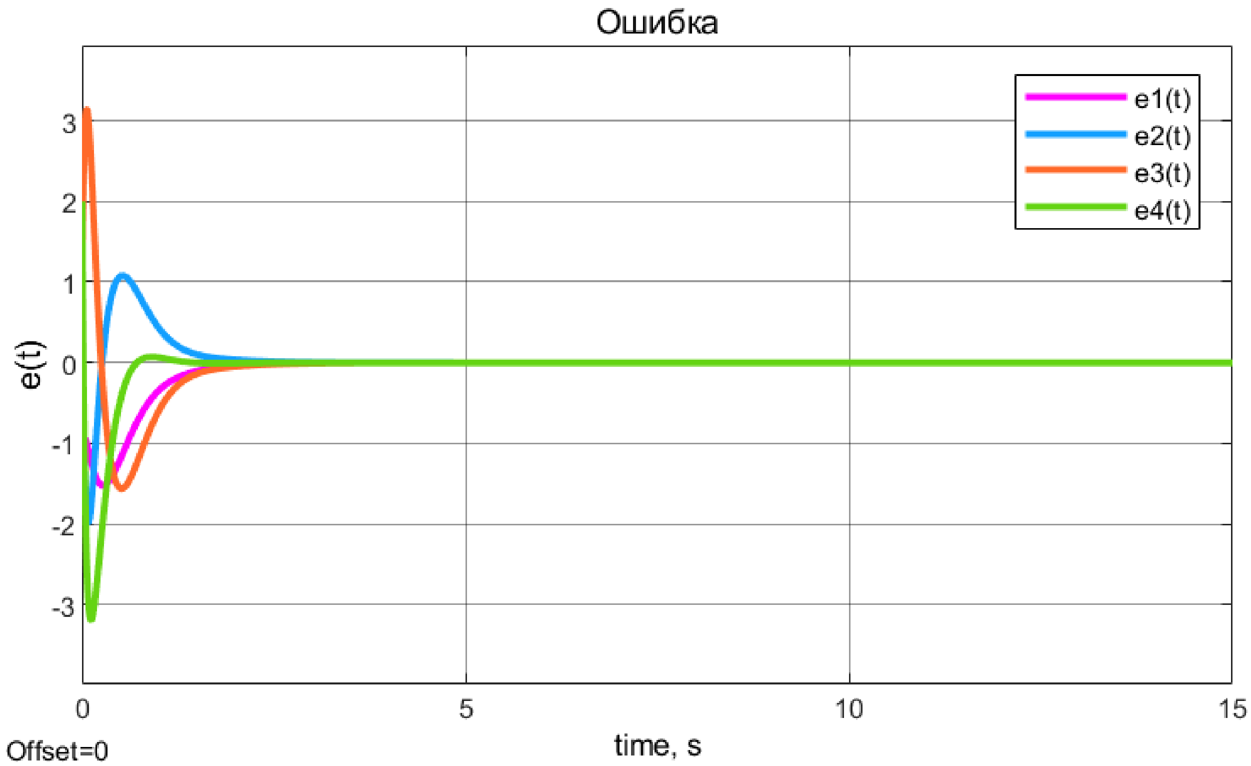

Figure 22 - Графики ошибок e(t)

Задание 3.

Возьмите матрицы A, B, C из таблицы 3 в соответствии с вашим вариантом и рассмотрите систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx. \end{cases} \tag{28}$$

Выполните следующие шаги и приведите в отчёте результаты всех вычислений, схемы моделирования, графики и выводы:

a) Найдите собственные числа матрицы A. Определите управляемость и наблюдаемость каждого из них. Сделайте вывод об управляемости, наблюдаемости, стабилизируемости и обнаруживаемости системы.

b) Постройте схему моделирования приведённой системы с регулятором, состоящим из наблюдателя состояния $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y)$ и закона управления $u = K\hat{x}$.

c) Задайтесь желаемыми спектрами матриц $A + BK$ и $A + LC$ такими, чтобы замкнутая система была устойчива. Найдите соответствующие матрицы K и L.

d) Задайтесь начальными условиями и выполните моделирование. Постройте графики $x(t), \hat{x}(t), y(t), \hat{y}(t) = C\hat{x}(t), u(t)$и $e(t) = x(t)\ \hat{x}(t)$.

e) Сделайте выводы.

Исходные данные:

Матрица A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{29}$$

Матрица B:

$$B = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{30}$$

Матрица C:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{31}$$

1. Найдите собственные числа матрицы A. Определите управляемость и наблюдаемость каждого из них. Сделайте вывод об управляемости, наблюдаемости, стабилизируемости и обнаруживаемости системы.

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{32}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda I\right) = 0$$

$$\lambda^4 - 8\lambda^3 - 16\lambda^2 + 128\lambda = 0 \tag{33}$$

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = -4, \qquad \lambda_3 = 4, \qquad \lambda_4 = 8 \tag{34}$$

Переходим к проверке управляемости собственных значений:

$$rank\ [A - \lambda I\ \ B] = n \tag{35}$$

$$rank \begin{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{matrix} - \lambda I & \begin{matrix} 8 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \end{matrix} \end{bmatrix} = n$$

$$rank\ [A\ \ B]\ = \begin{bmatrix} -256 & 0 & 0 & 256 & 0 \\ 0 & -256 & 0 & -256 & 0 \\ 0 & 0 & -256 & 256 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -256 \end{bmatrix} = 4 = n$$

$$rank\ [A + 4I\ \ B] = \begin{bmatrix} -1536 & 0 & 0 & 1536 & 0 \\ 0 & -1536 & 0 & -1536 & 0 \\ 0 & 0 & -1536 & -1536 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1536 \end{bmatrix} = 4 = n$$

$$rank\ [A + 4I\ \ B] = \begin{bmatrix} 128 & 0 & 0 & 128 & 0 \\ 0 & 128 & 0 & -128 & 0 \\ 0 & 0 & 128 & -128 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 128 \end{bmatrix} = 4 = n$$

$$rank\ [A - 8I\ \ B]\ = \begin{bmatrix} -1152 & 0 & 0 & 1152 & 0 \\ 0 & -1152 & 0 & 1152 & 0 \\ 0 & 0 & -1152 & -1152 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1152 \end{bmatrix} = 4 = n$$

Переходим к проверке наблюдаемости собственных значений:

$$rank\ \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ \mathrm{C} \end{bmatrix} = n \tag{36}$$

$$rank \begin{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{matrix} - \lambda I \\ \begin{matrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix} = n$$

$$rank\ \begin{bmatrix} A \\ \mathrm{C} \end{bmatrix}\ = 4 = n$$

$$rank\ \begin{bmatrix} A + 4I \\ \mathrm{C} \end{bmatrix} = 3 \neq n$$

$$rank\ \begin{bmatrix} A - 4I \\ \mathrm{C} \end{bmatrix} = 4 = n$$

$$rank\ \begin{bmatrix} A - 8I \\ \mathrm{C} \end{bmatrix}\ = 4 = n$$

Мы видим, что система неустойчива, поскольку имеет положительные собственные значения. Но, с другой стороны, систему можно стабилизировать, поскольку все собственные значения управляемы.

Также, если мы проанализируем наблюдаемость системы, мы можем прийти к выводу, что система не является полностью наблюдаемой, поскольку мы могли проверить ее с помощью критерия Хаутуса, но система является обнаруживаемой, так как можно наблюдать собственные значения, которые не являются устойчивыми.

2. Постройте схему моделирования приведённой системы с регулятором, состоящим из наблюдателя состояния $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y)$ и закона управления $u = K\hat{x}$.

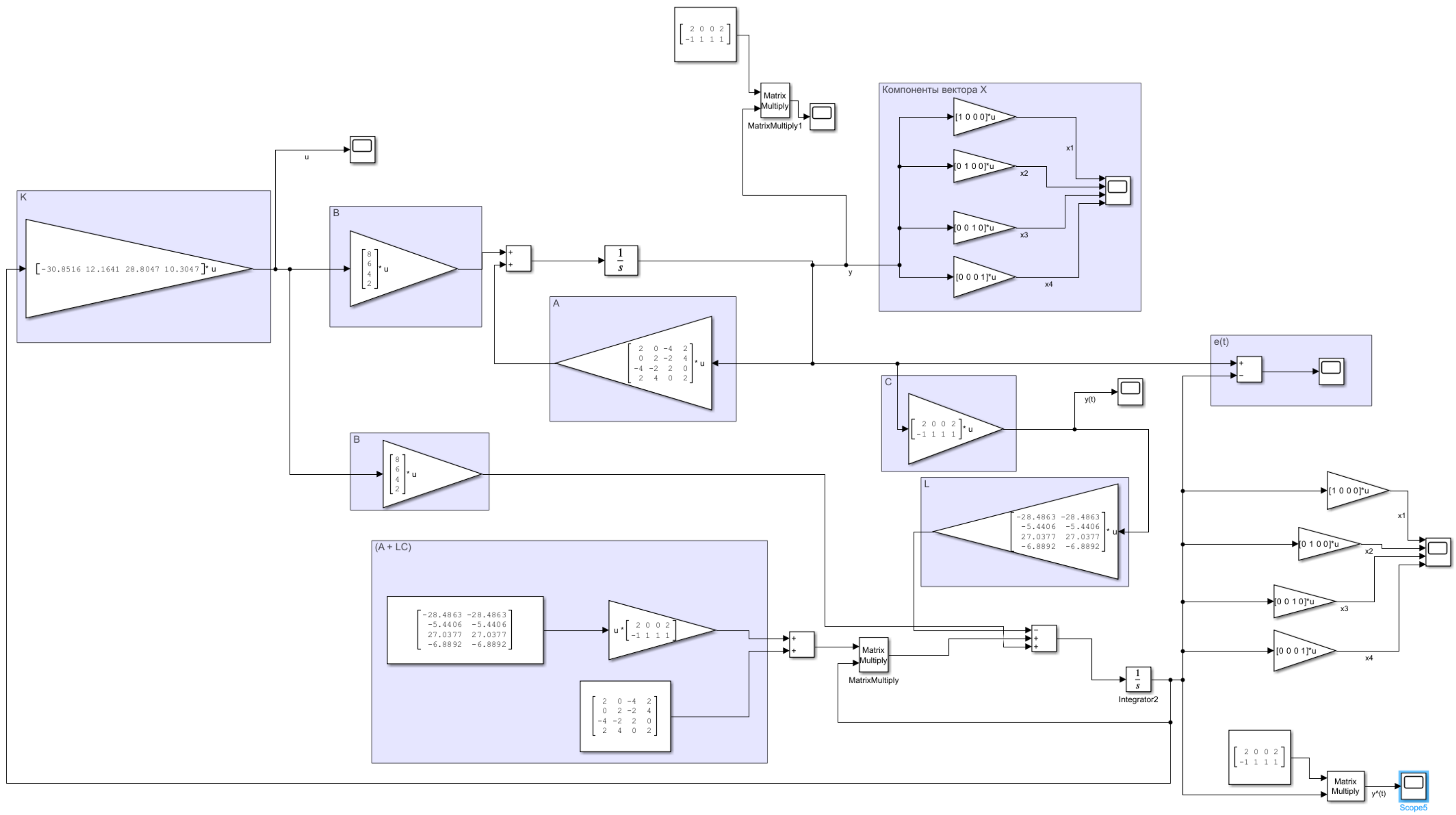

Figure 23 - Схема моделирования с регулятором и наблюдателем

3. Задайтесь желаемыми спектрами матриц $A + BK$ и $A + LC$ такими, чтобы замкнутая система была устойчива. Найдите соответствующие матрицы K и L.

$$\text{Желаемый спектр для } A + BK : \{-2, -20, -4 + 3i, -4 - 3i\} \tag{37}$$

$$\text{Желаемый спектр для } A + LC : \{-4, -20, -4 + 3i, -4 - 3i\}$$

$$Y \text{ для } A + BK = [1\ 1; 1\ 1; 1\ 1; 1\ 1]$$

$$Y \text{для } A + LC = [0\ 0; 1\ 1; 1\ 1; 1\ 1]$$

$$\Gamma1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{bmatrix} \tag{38}$$

$$\Gamma2 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} -30.8516 & 12.1641 & 28.8047 & 10.3047 \end{bmatrix} \tag{39}$$

$$A + BK = \begin{bmatrix} -244.8125 & 97.3125 & 226.4375 & 84.4375 \\ -185.1094 & 74.9844 & 170.8281 & 65.8281 \\ -127.4062 & 46.6562 & 117.2187 & 41.2187 \\ -59.7031 & 28.3281 & 57.6094 & 22.6094 \end{bmatrix} \tag{40}$$

$$L = \begin{bmatrix} -64.7500 & -64.7500 \\ -2.1875 & -2.1875 \\ 56.9375 & 56.9375 \\ -10.0000 & -10.0000 \end{bmatrix} \tag{41}$$

$$A + LC = \begin{bmatrix} -62.7500 & -64.7500 & -68.7500 & -192.2500 \\ -2.1875 & -0.1875 & -4.1875 & -2.5625 \\ 52.9375 & 54.9375 & 58.9375 & 170.8125 \\ -8.0000 & -6.0000 & -10.0000 & -28.0000 \end{bmatrix} \tag{42}$$

Собственные значения $A + BK$:

$$\lambda_1 = -2☺, \qquad \lambda_2 = -20☺, \qquad \lambda_3 = -4 + 3i☺, \qquad \lambda_4 = -4 - 3i☺$$

Собственные значения $A + LC$:

$$\lambda_1 = -4☺, \qquad \lambda_2 = -20☺, \qquad \lambda_3 = -4 + 3i☺, \qquad \lambda_4 = -4 - 3i☺$$

4. Задайтесь начальными условиями и выполните моделирование. Постройте графики $x(t), \hat{x}(t), y(t), \hat{y}(t) = C\hat{x}(t), u(t)$ и $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

Начальные условия:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{43}$$

$$\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T \tag{44}$$

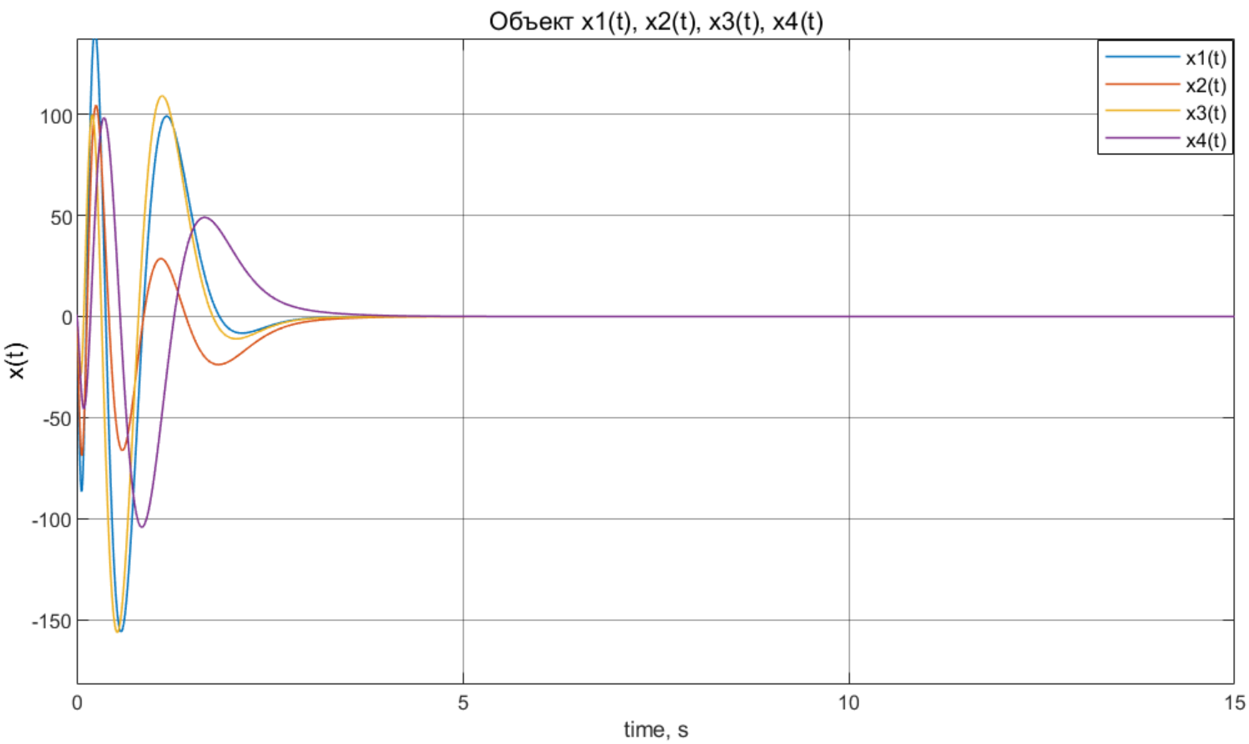

Figure 24 - Графика объекта x1(t), x2(t), x3(t), x4(t)

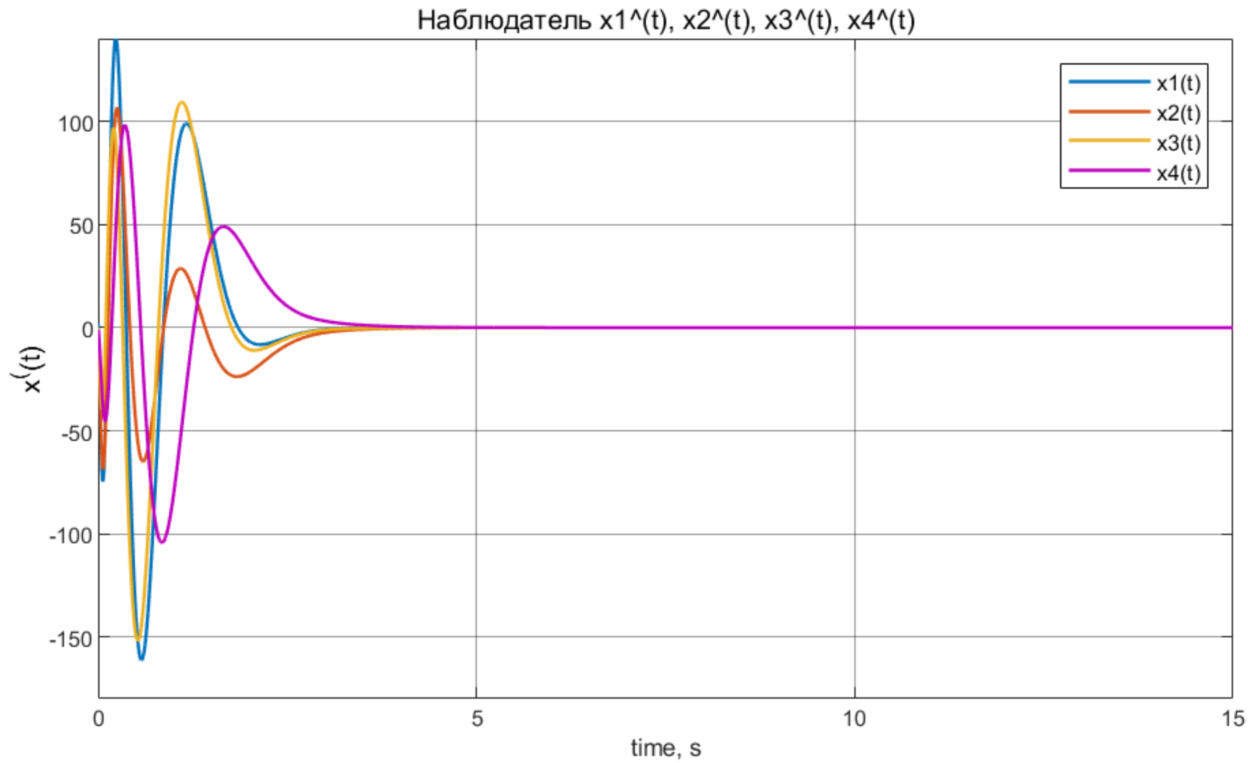

Figure 25 - графики наблюдателей x^1(t), x^2(t), x^4(t)

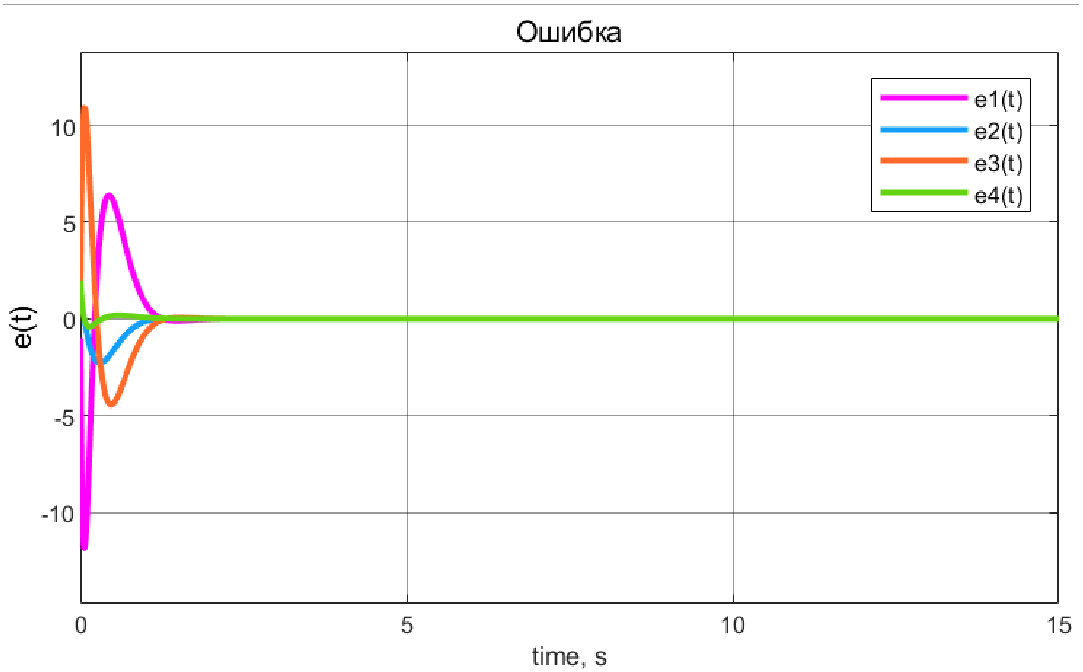

Figure 26 - Графики ошибок e(t)

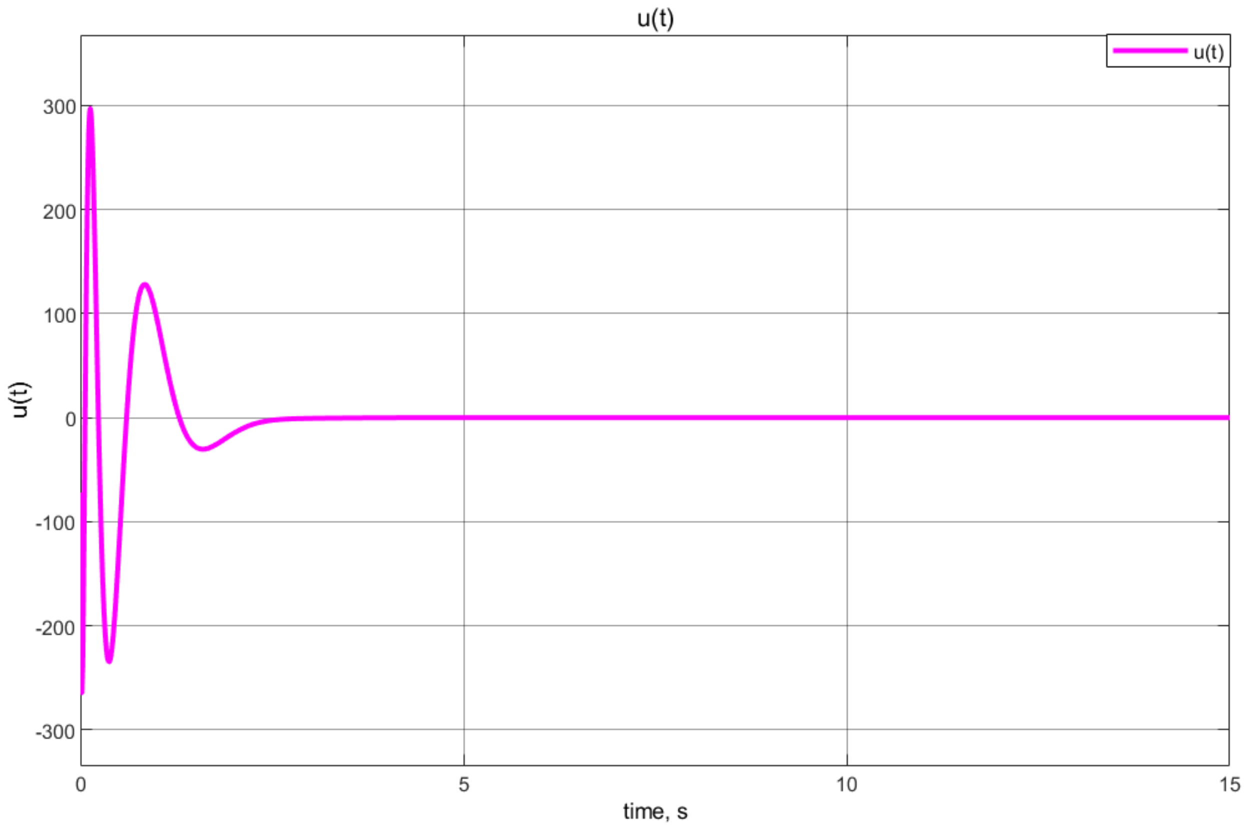

Figure 27 - График u(t)

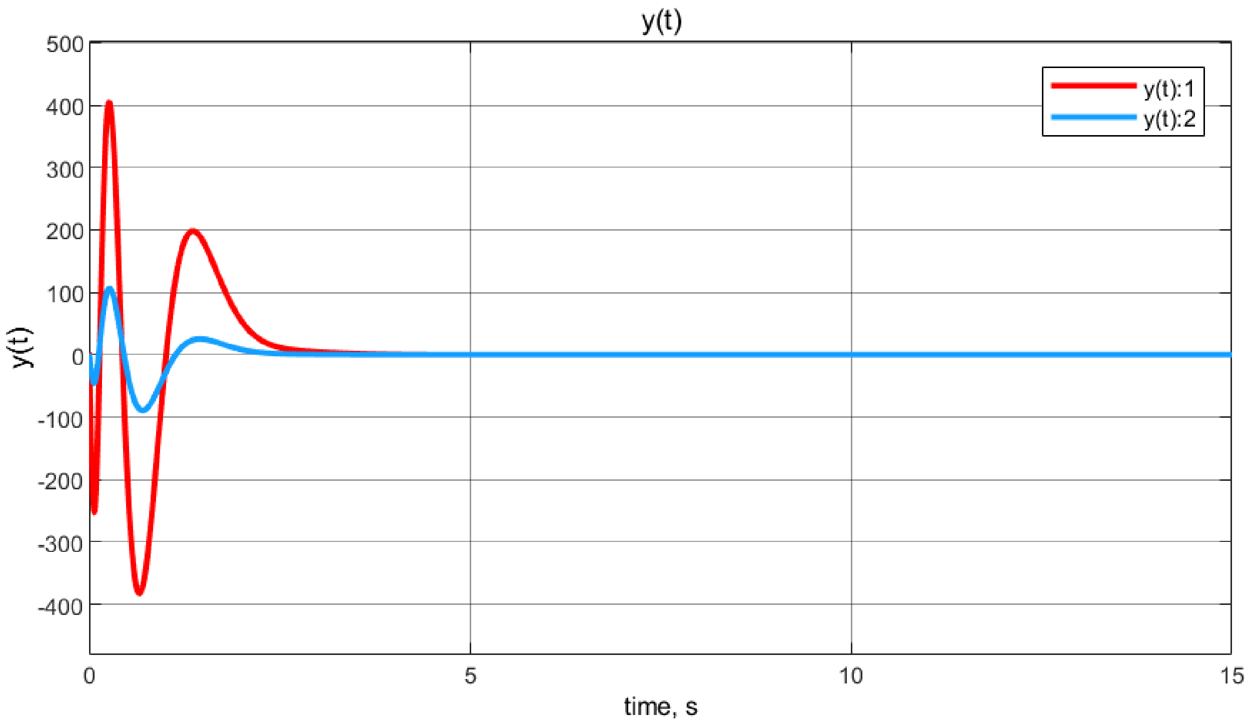

Figure 28 - График y(t)

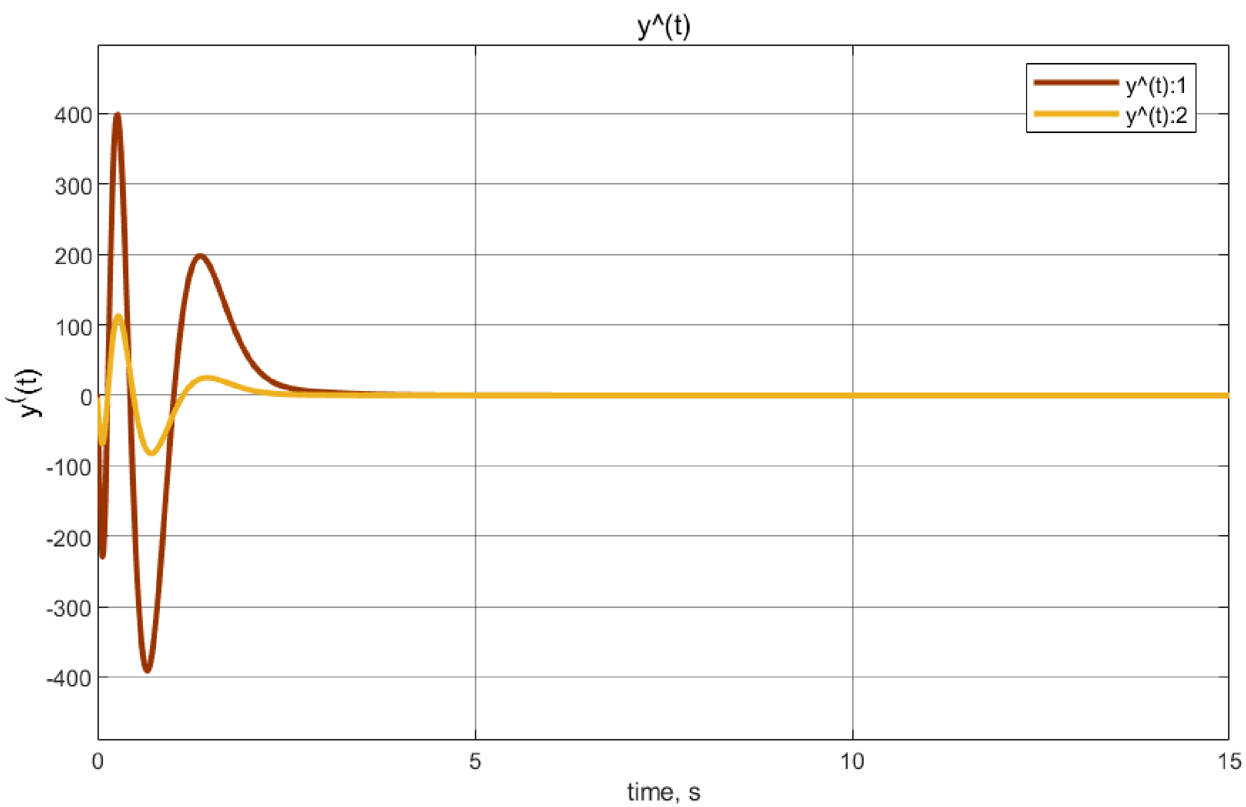

Figure 29 - График $\hat{y}(t)$

5. Сделайте выводы.

После проведения расчетов и моделирования системы с использованием Simulink было обнаружено, что результаты совпадают с вычислениями. Регулятор K и наблюдатель L были успешно вычислены, что позволило построить стабильную замкнутую систему. Графики переменных состояния, выхода системы, управления и ошибки отслеживания показывают соответствие между теоретическими ожиданиями и практическими результатами. Таким образом, можно сделать вывод о том, что предложенная система является управляемой, не наблюдаемой, стабилизируемой и обнаруживаемой.

Заключение

В результате предыдущей лабораторной работы нам удалось изучить, как регулятор и наблюдатель влияют на систему.

Моделирование в Matlab позволило нам визуально проверить расчеты, которые проводились на протяжении всей лабораторной работы. Рассчитанный регулятор позволил стабилизировать изначально неустойчивую систему и позволил наблюдателю лучше понять динамику изучаемого объекта, создав «виртуальную копию» динамики объекта.