Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Национальный исследовательский университет ИТМО»

(Университет ИТМО)

Дисциплина: Теория автоматического управления

Отчет
по лабораторной работе №2:
«Переходные процессы, свободное движение, устойчивость»

Вариант 12

Выполнил:

Самбрано Браво Рикардо Хосе,

студент гр. R33352

Преподаватель:

Пашенко Артем Витальевич,

фак. СУиР

Санкт-Петербург,

2023 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

1 Выполнение задания №1 «Свободное движение»

1.1 Условие задания №1 «Свободное движение»

Дана система 2-го порядка, представленная в форме Вход-Выход

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = u \tag{1}$$

где

$y' -$ Первая производная неизвестной функции $y(t)$ по времени

$y'' =$ Вторая производная неизвестной функции у(t) по времени.

$u\ -$ Входная функция или возбуждение

$a_1, a_2 -$ Параметры или константы

Самостоятельно придумайте три набора (λ_1, λ_2) корней характеристического уравнения, соответствующих приведенным ниже парам мод. Номера возьмите из таблицы 1 в соответствии со своим вариантом (Вариант 12).

3. нейтральной и устойчивой апериодической модам;

4. нейтральной и неустойчивой апериодической модам;

7. паре устойчивых колебательных мод;

Вычислите коэффициенты a_1, a_0 системы и найдите аналитическое выражение для свободной составляющей её движения $y_{CB}(t)$. В отчёте приведите все вычисления и полученные результаты. Проанализируйте устойчивость каждой из систем на основании корневого критерия, сделайте соответствующие выводы.

Для каждой системы выберите ненулевые начальные условия $y(0)$ и $\dot{y}(0)$. Составьте схему для моделирования свободного движения и проведите моделирование сначала с нулевыми начальными условиями, а затем с выбранными ненулевыми. В отчёте приведите графики зависимостей $y(t)$ и $\dot{y}(t)$. Сделайте выводы.

1.2 Аналитика по полученным графикам и промежуточные результаты по заданию №1 «Свободное движение»

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = u$$

$$\lambda_1, \lambda_2$$

3. нейтральной и устойчивой апериодической модам;

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = -2$$

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 0y = u \tag{2}$$

$$y = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \tag{3}$$

$$y = C_1 e^{0t} + C_2 e^{-2t}$$

$$\dot{y} = -2C_2 e^{-2t} \tag{4}$$

На рисунке 1 представлена схема моделирования дифференциального уравнения с заданными корнями.

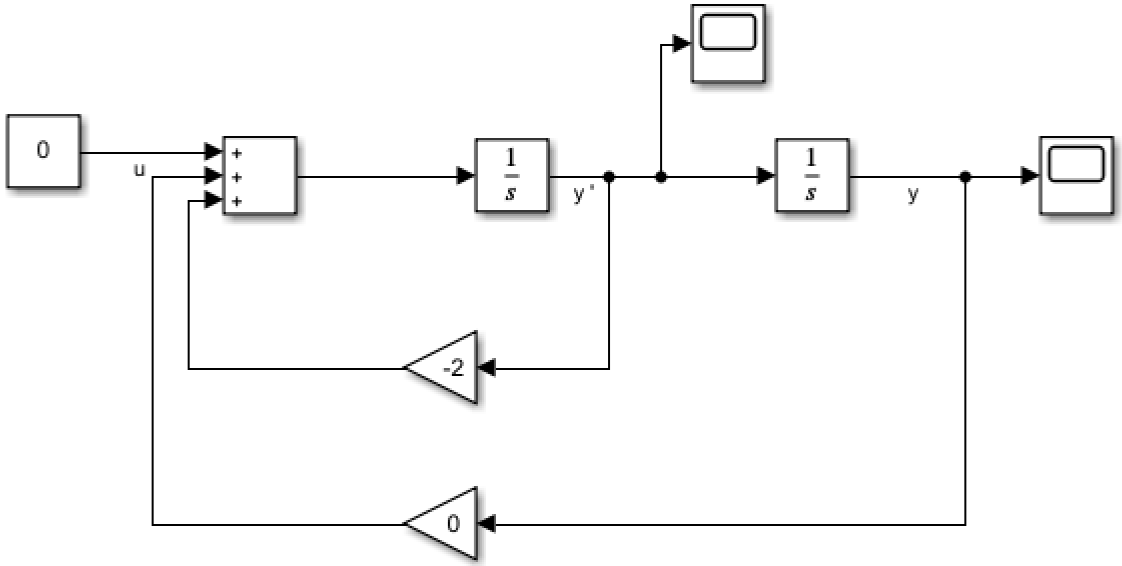

Рисунок 1 – Схема моделирования дифференциального уравнения с заданными корнями

Для нулевых начальных условий:

$$y(0) = 0$$

$$\dot{y}(0) = 0$$

$$\begin{cases} C_1 e^{0t} + C_2 e^{-2t} = 0 \\ -2C_2 e^{-2t} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

$$y(t) = 0 * e^{0t} + 0 * e^{-2t} = 0 \tag{6}$$

$$\dot{y}(t) = 0 \tag{7}$$

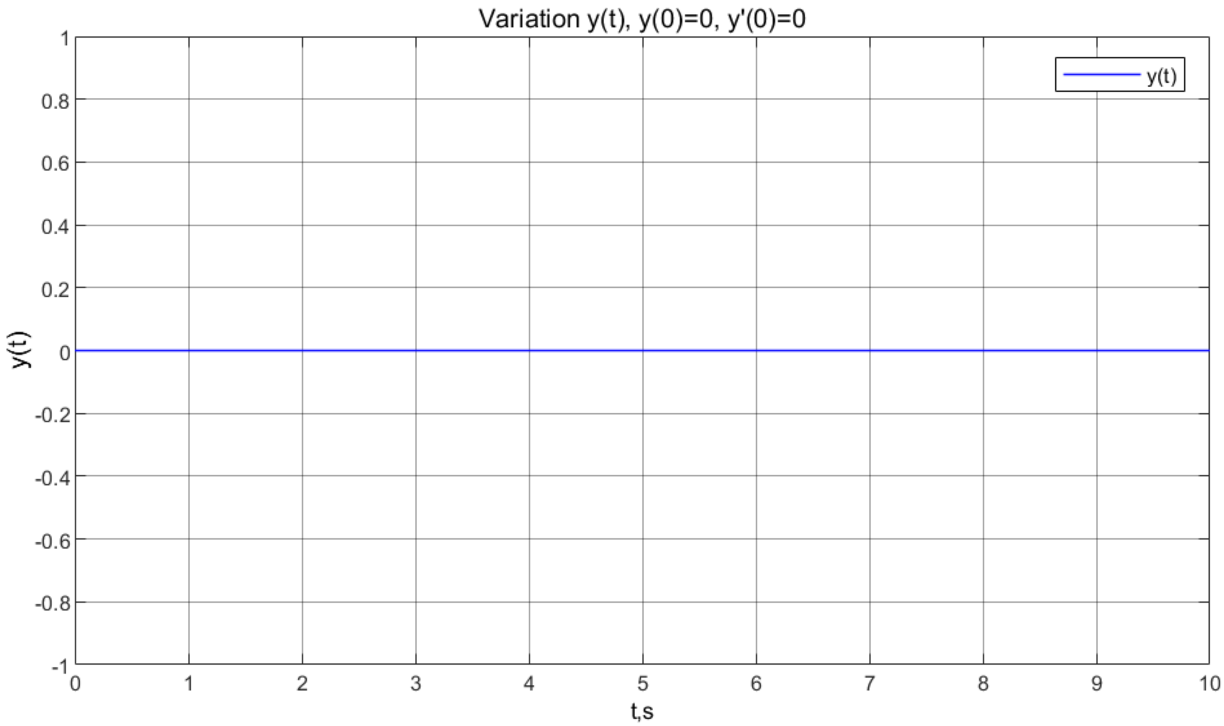

Рисунок 2 – График вывода функции y(t) для нулевых начальных условий

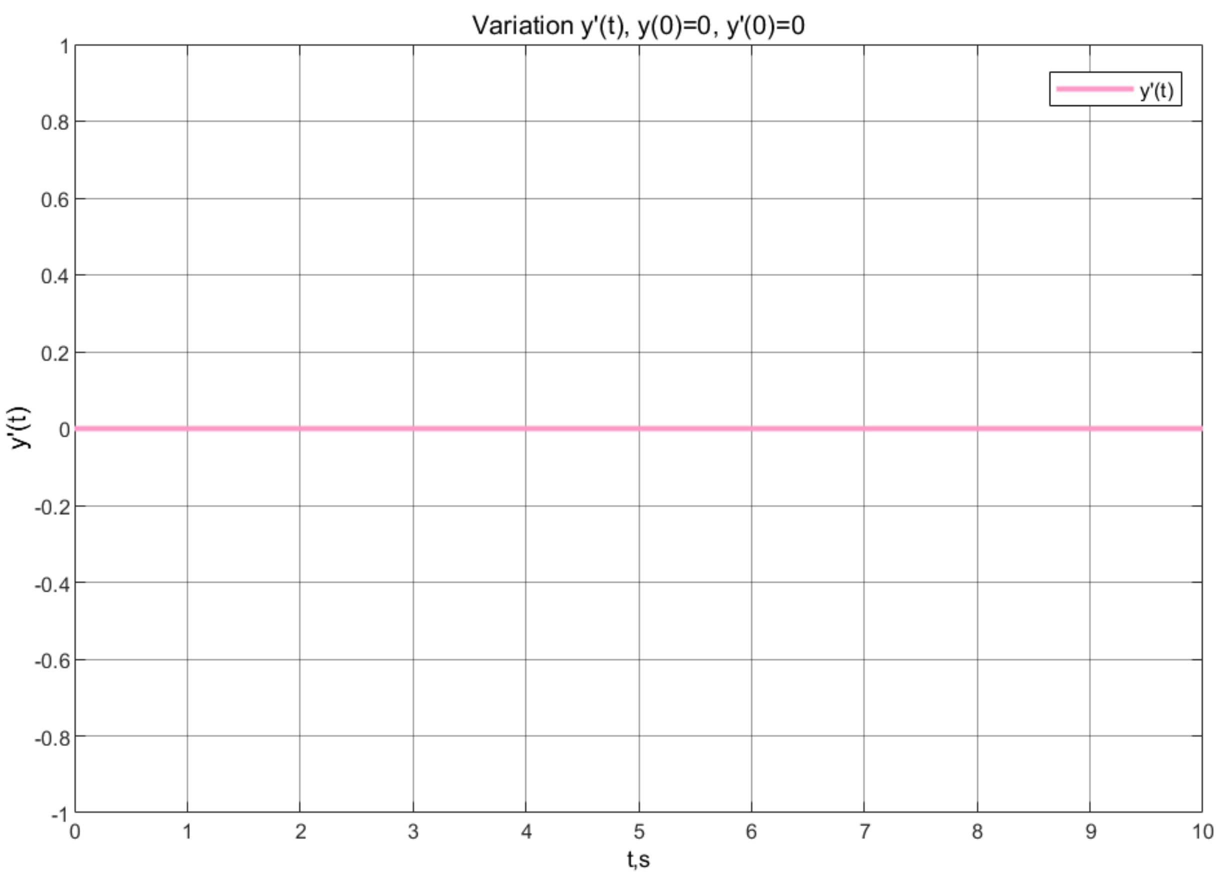

Рисунок 3 – График вывода функции y'(t) для нулевых начальных условий

При данных начальных условиях:

$$y(0) = 5$$

$$\dot{y}(0) = 11$$

$$\begin{cases} C_1 e^{0t} + C_2 e^{-2t} = 5 \\ -2C_2 e^{-2t} = 11 \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} C_1 e^{0} + C_2 e^{0} = 5 \\ -2C_2 e^{0} = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 e^{0} + C_2 e^{0} = 5 \\ C_2 = -\dfrac{11}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 - \dfrac{11}{2} = 5\,;\ C_1 = \dfrac{21}{2} \\ C_2 = -\dfrac{11}{2} \end{cases}$$

$$y = \frac{21}{2} - \frac{11}{2} e^{-2t} \tag{9}$$

$$\dot{y} = 11 e^{-2t} \tag{10}$$

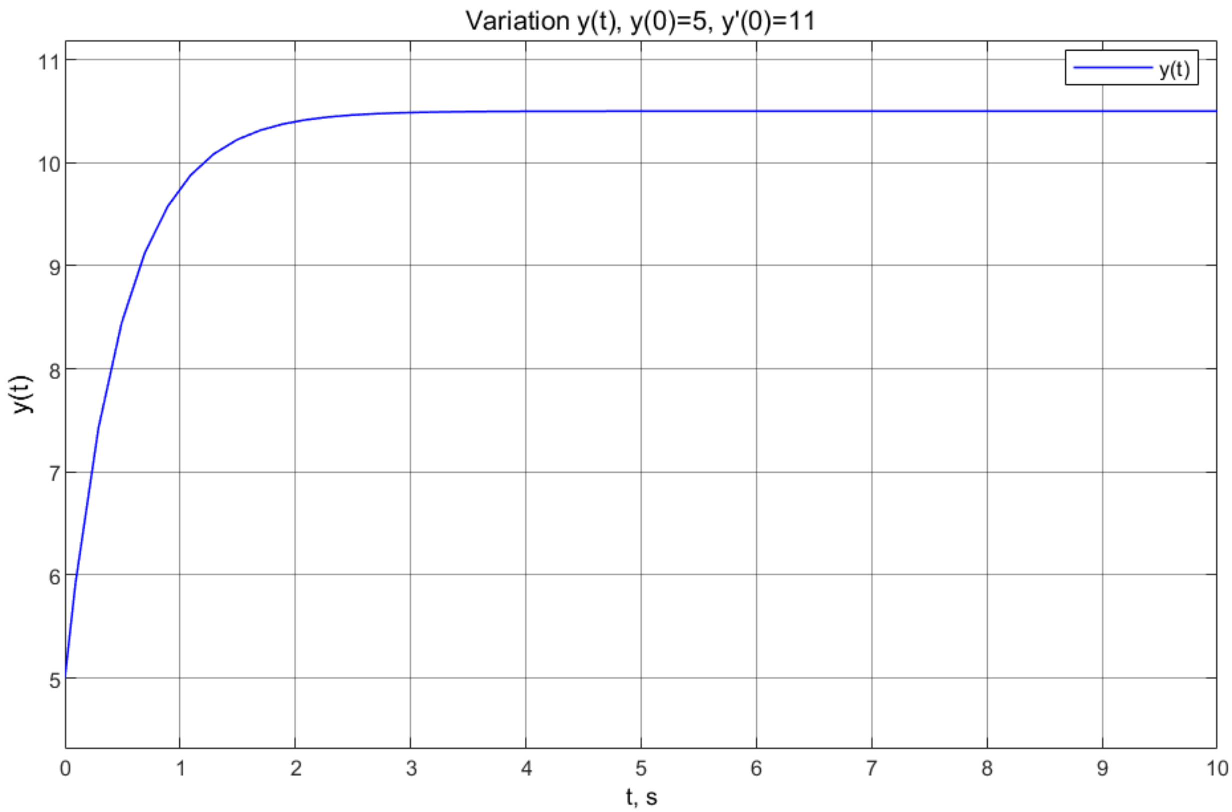

Рисунок 4 – График вывода функции y(t) для заданных начальных условий

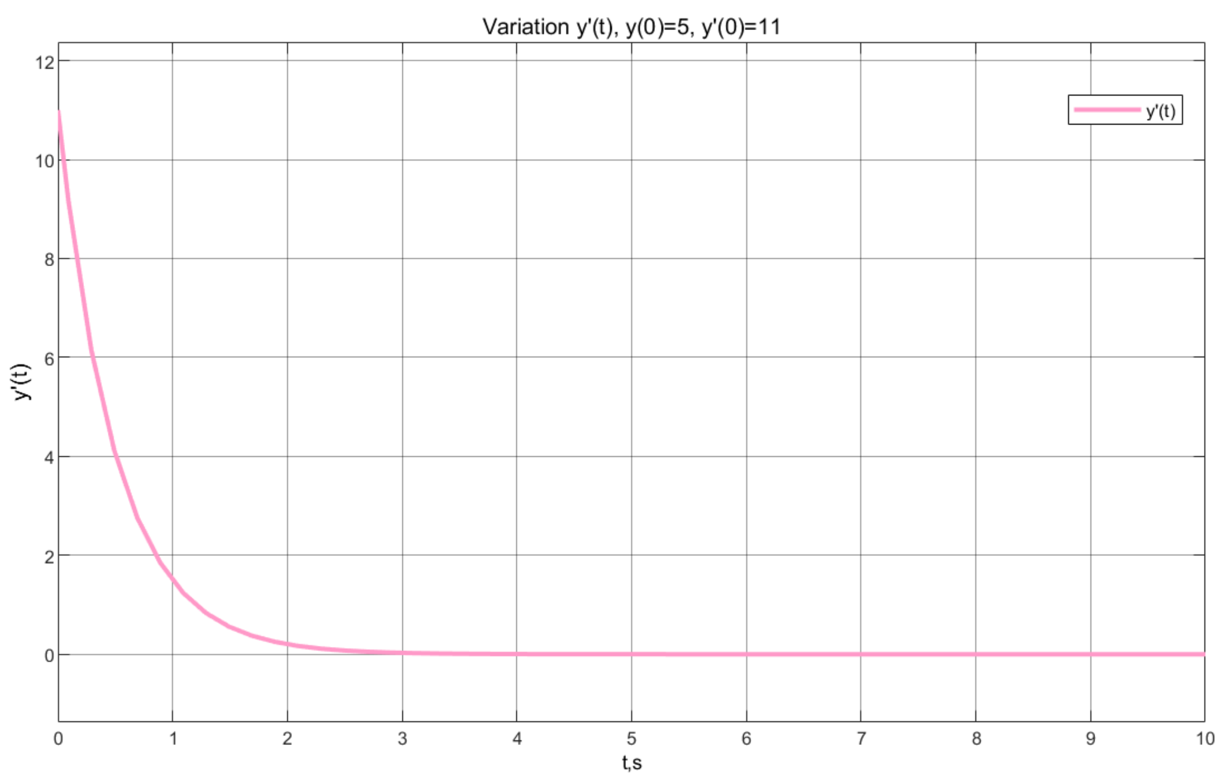

Рисунок 5 – График вывода функции y'(t) для заданных начальных условий

4. нейтральной и неустойчивой апериодической модам;

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$\ddot{y} - 2\dot{y} + 0y = u$$

$$y = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$y = C_1 e^{0t} + C_2 e^{2t} \tag{11}$$

$$\dot{y} = 2C_2 e^{2t} \tag{12}$$

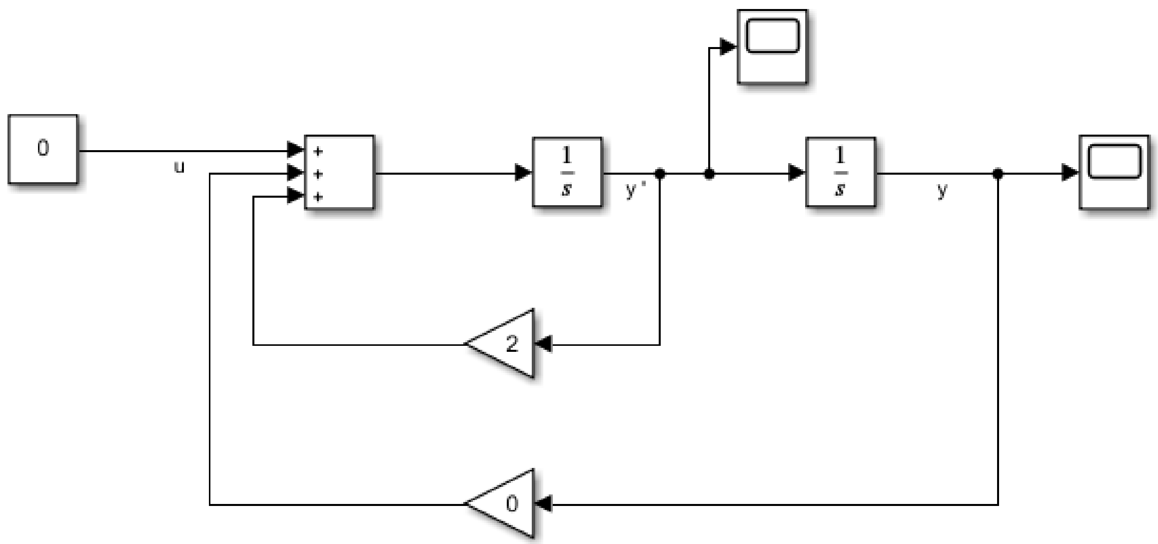

Рисунок 6 – Схема моделирования дифференциального уравнения с заданными корнями

Для нулевых начальных условий:

$$y(0) = 0$$

$$\dot{y}(0) = 0$$

$$\begin{cases} C_1 e^{0t} + C_2 e^{2t} = 0 \\ 2C_2 e^{2t} = 0 \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

$$y(t) = 0 * e^{0t} + 0 * e^{2t} = 0 \tag{14}$$

$$\dot{y}(t) = 0 \tag{15}$$

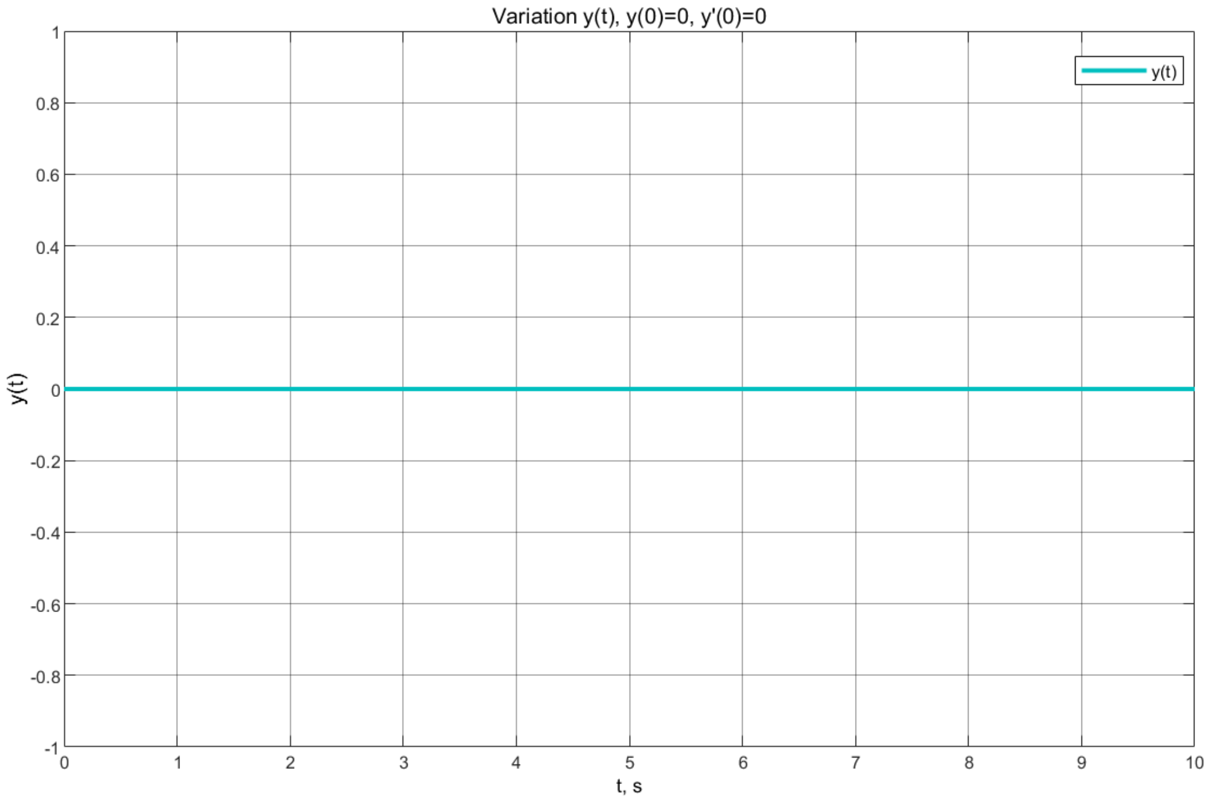

Рисунок 7 – График вывода функции y(t) для нулевых начальных условий

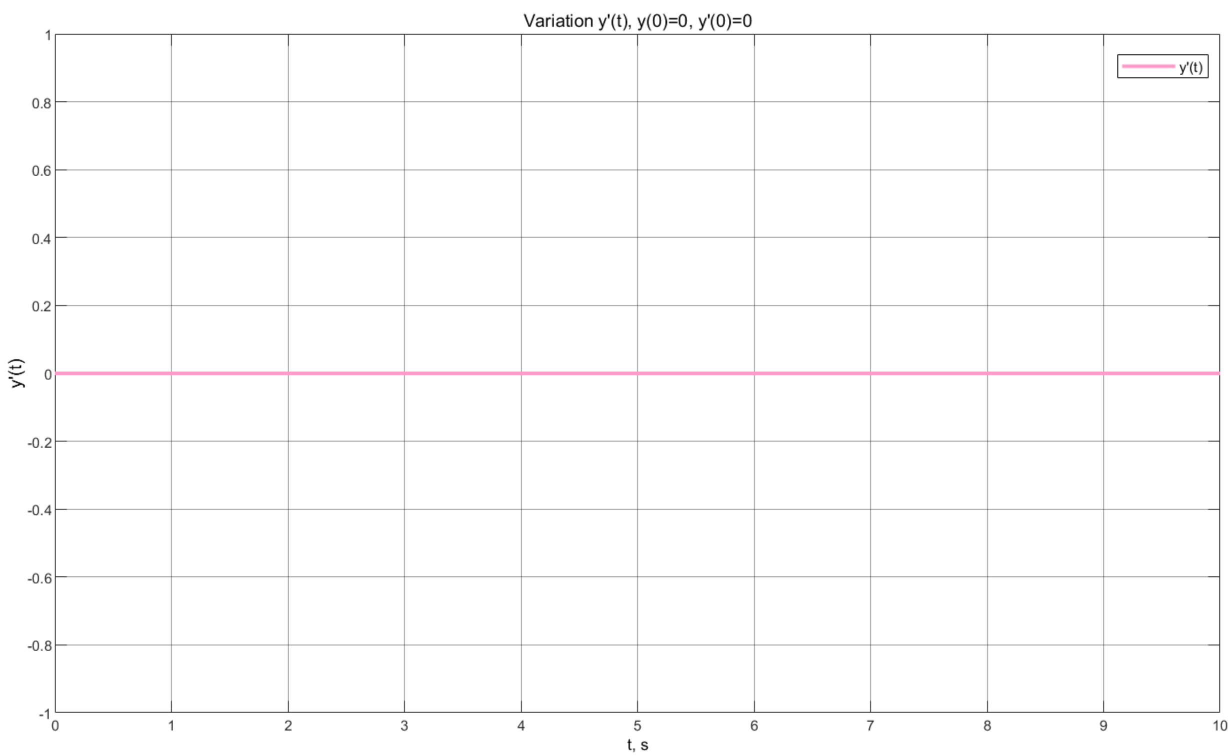

Рисунок 8 – График вывода функции y'(t) для нулевых начальных условий

При данных начальных условиях:

$$y(0) = 5$$

$$\dot{y}(0) = 11$$

$$\begin{cases} C_1 e^{0t} + C_2 e^{2t} = 5 \\ 2C_2 e^{2t} = 11 \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} C_1 e^{0} + C_2 e^{0} = 5 \\ 2C_2 e^{0} = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 e^{0} + C_2 e^{0} = 5 \\ C_2 = \dfrac{11}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + \dfrac{11}{2} = 5\, ;\ C_1 = -\dfrac{1}{2} \\ C_2 = \dfrac{11}{2} \end{cases}$$

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{11}{2} e^{2t} \tag{17}$$

$$\dot{y} = 11e^{2t} \tag{18}$$

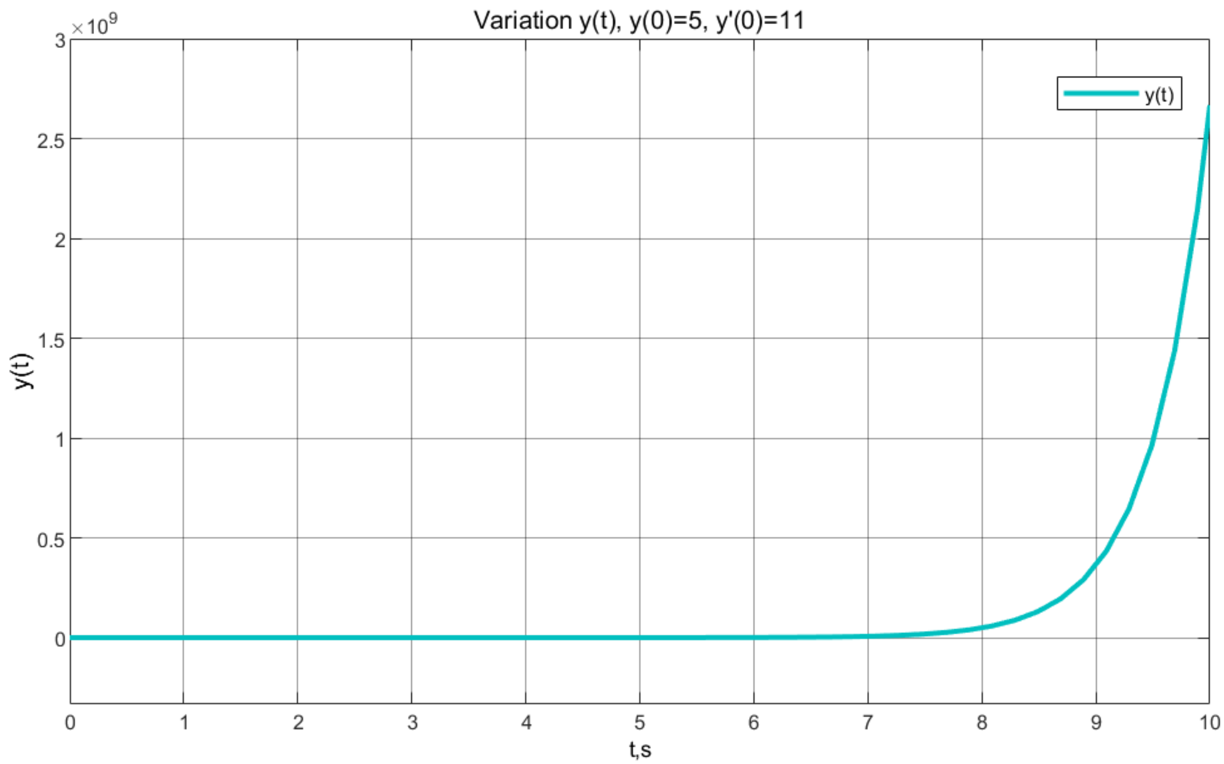

Рисунок 9 – График вывода функции y(t) для заданных начальных условий

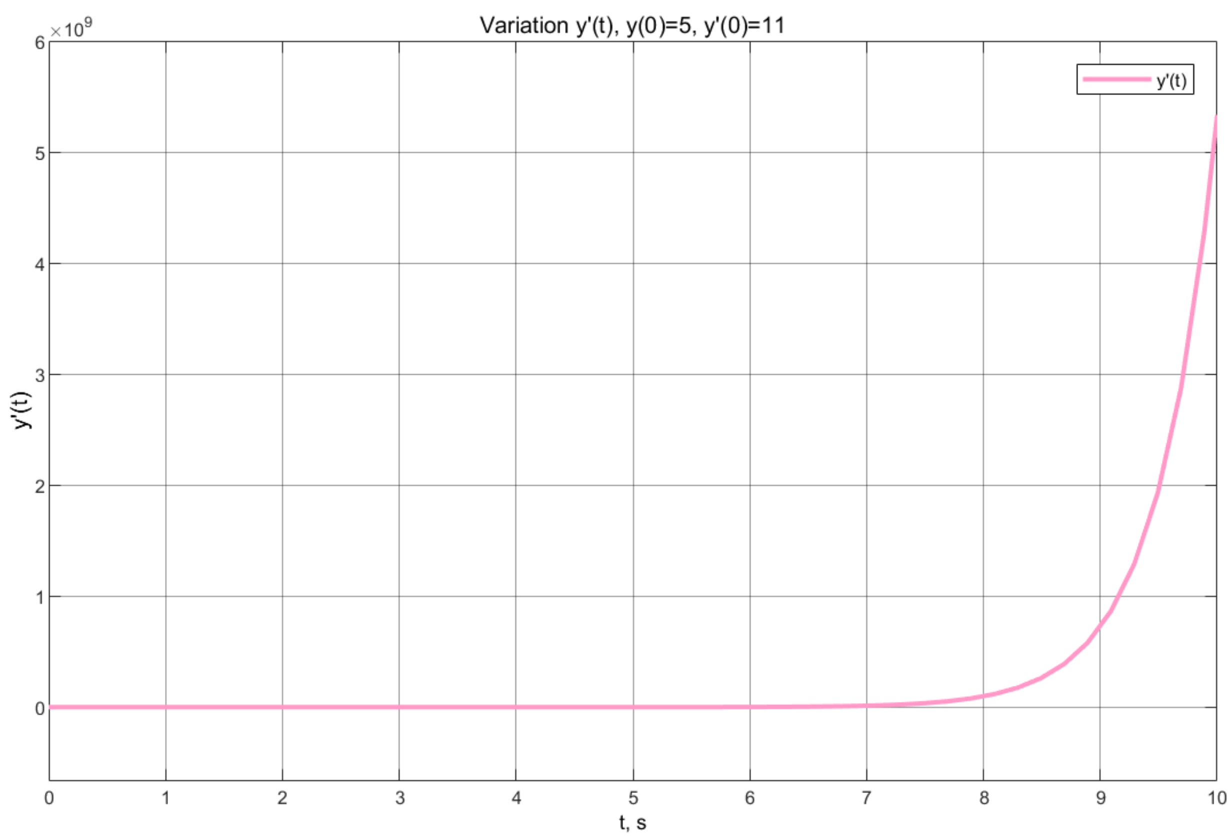

Рисунок 10 – График вывода функции y'(t) для заданных начальных условий

7. паре устойчивых колебательных мод;

$$\lambda_1 = -2$$

$$\lambda_2 = -2$$

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

$$(\lambda + 2)(\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 2$$

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 0 \quad (19)$$

$$y = C_1 e^{\lambda_1 t} + tC_2 e^{\lambda_2 t} \quad (20)$$

$$y = C_1 e^{-2t} + tC_2 e^{-2t} \quad (21)$$

$$\dot{y} = -2C_1 e^{-2t} + C_2(e^{-2t} - 2e^{-2t}t) \quad (22)$$

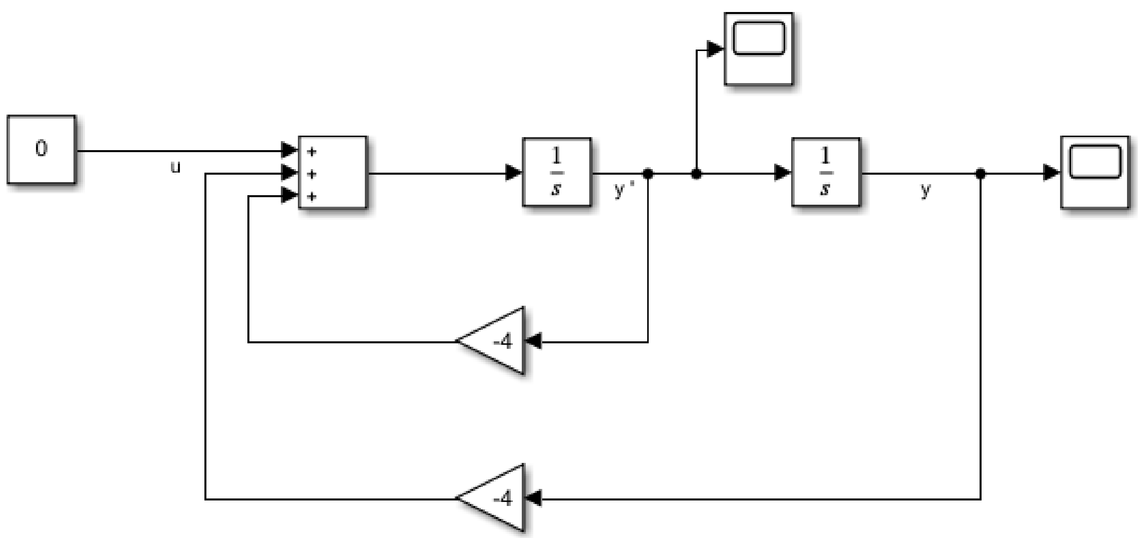

Рисунок 11 – Схема моделирования дифференциального уравнения с заданными корнями

Для нулевых начальных условий:

$$y(0) = 0$$

$$\dot{y}(0) = 0$$

$$\begin{cases} C_1 e^{-2t} + \ t * C_2 e^{-2t} = 0 \\ -2C_1 e^{-2t} + C_2(e^{-2t} - 2e^{-2t}t) = 0 \end{cases} \tag{23}$$

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

$$y(t) = 0 \tag{24}$$

$$\dot{y}(t) = 0 \tag{25}$$

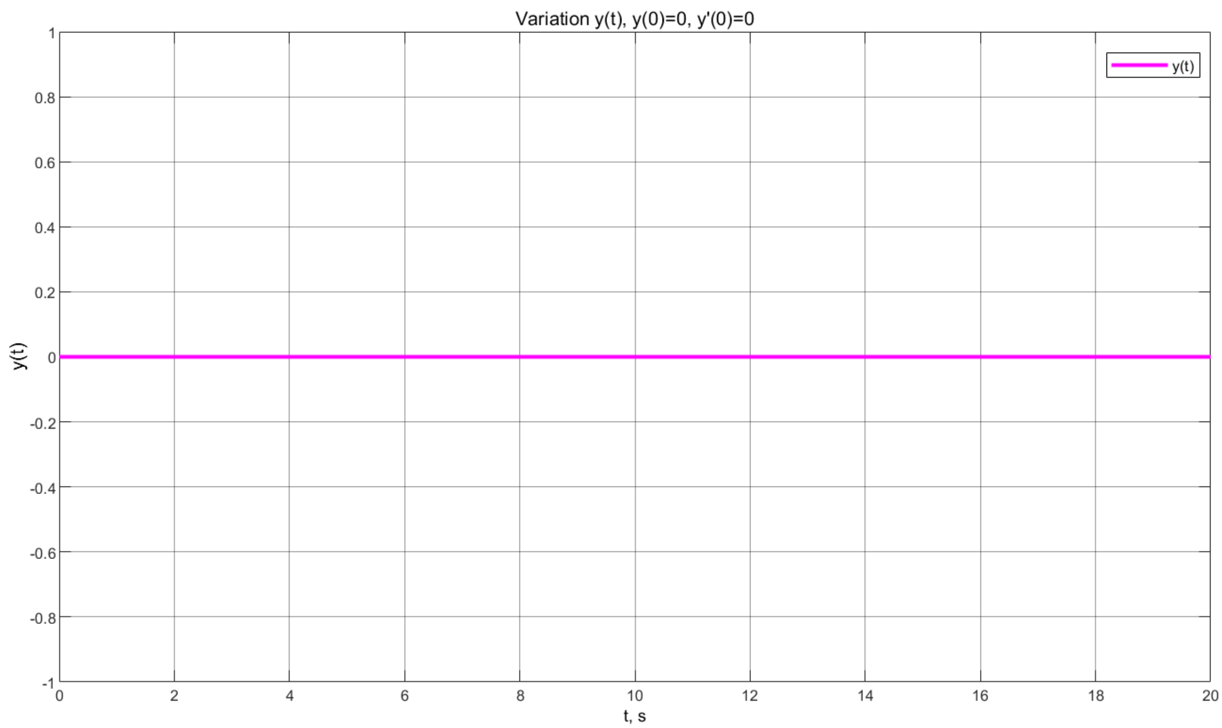

Рисунок 12 – График вывода функции y(t) для нулевых начальных условий

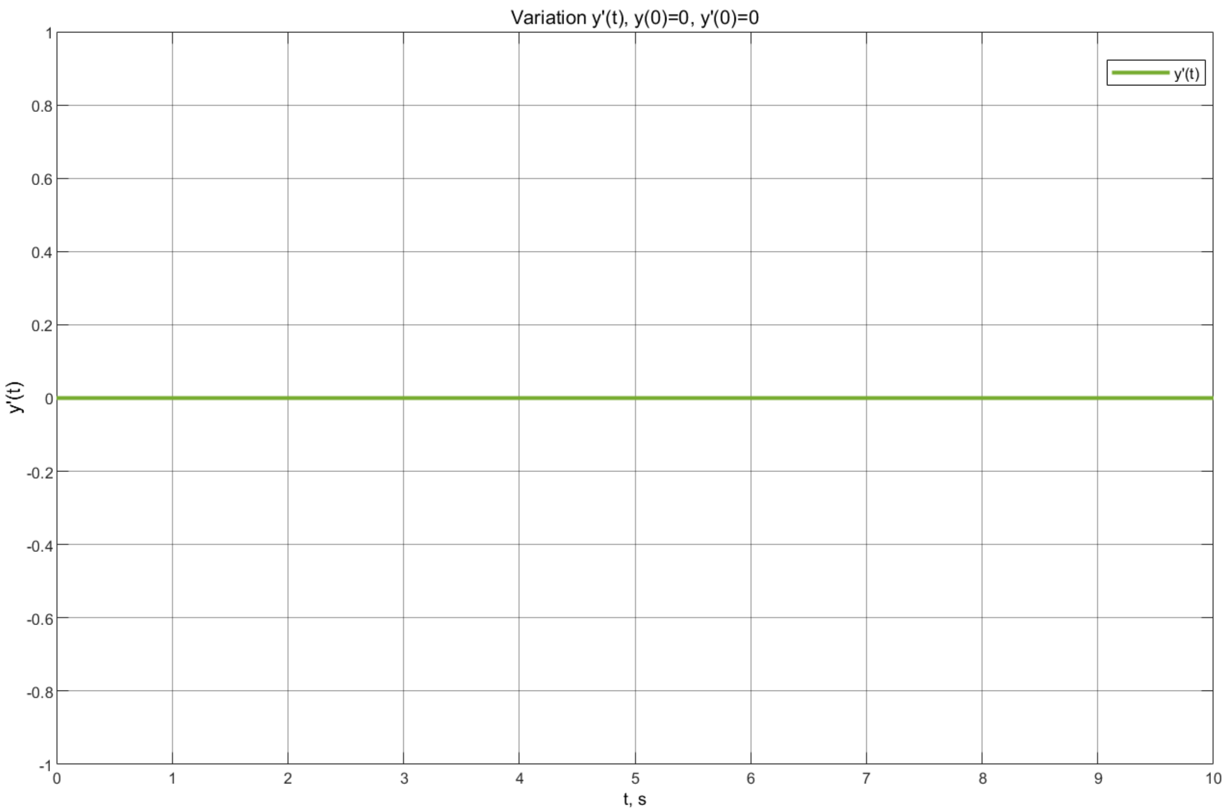

Рисунок 13 – График вывода функции y'(t) для заданных начальных условий

$$y(0) = 5$$

$$\dot{y}(0) = 11$$

$$\begin{cases} C_1e^{-2t} + t * C_2e^{-2t} = 5 \\ -2C_1e^{-2t} + C_2(e^{-2t} - 2e^{-2t}t) = 11 \end{cases} \tag{26}$$

$$\begin{cases} C_1 + 0 = 5 \\ -10 + C_2 * 1 = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 5 \\ C_2 = 21 \end{cases}$$

$$y = 5e^{-2t} + 21te^{-2t} \tag{27}$$

$$\dot{y} = -10e^{-2t} + 21e^{-2t} - 42te^{-2t} \tag{28}$$

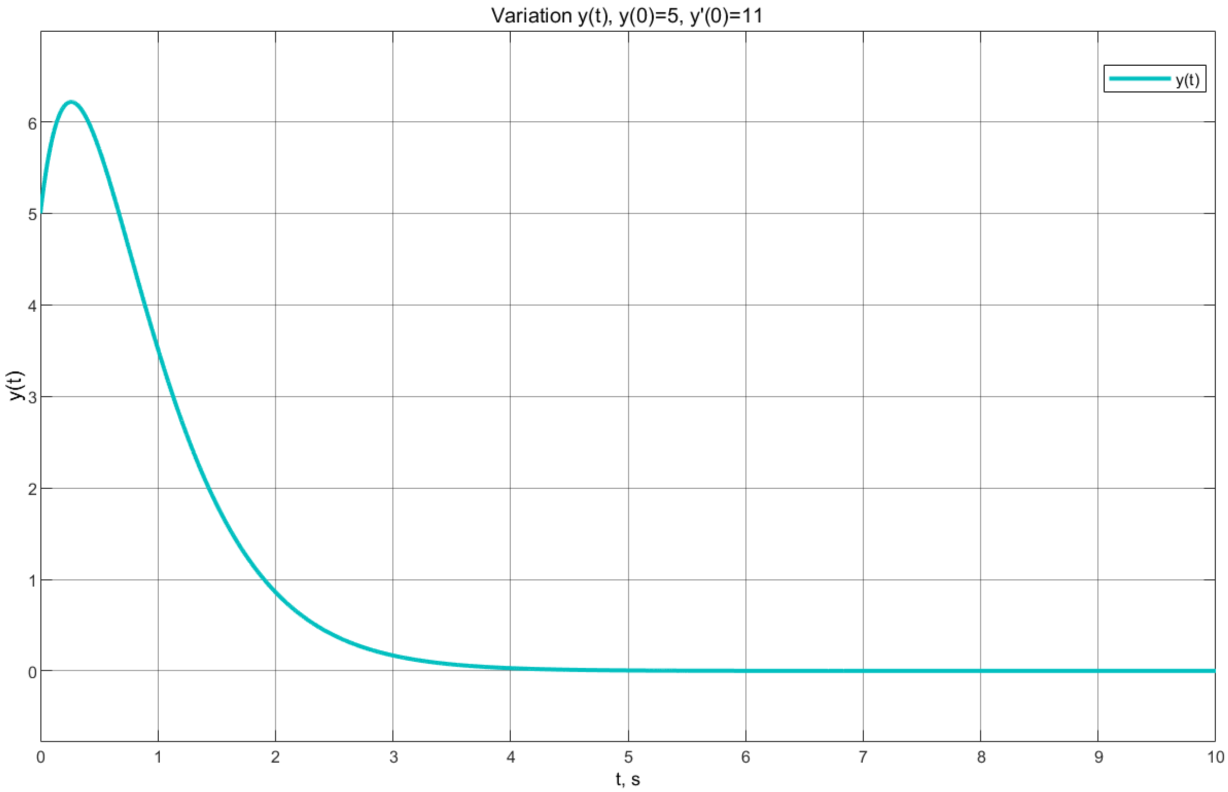

Рисунок 14 – График вывода функции y(t) для заданных начальных условий

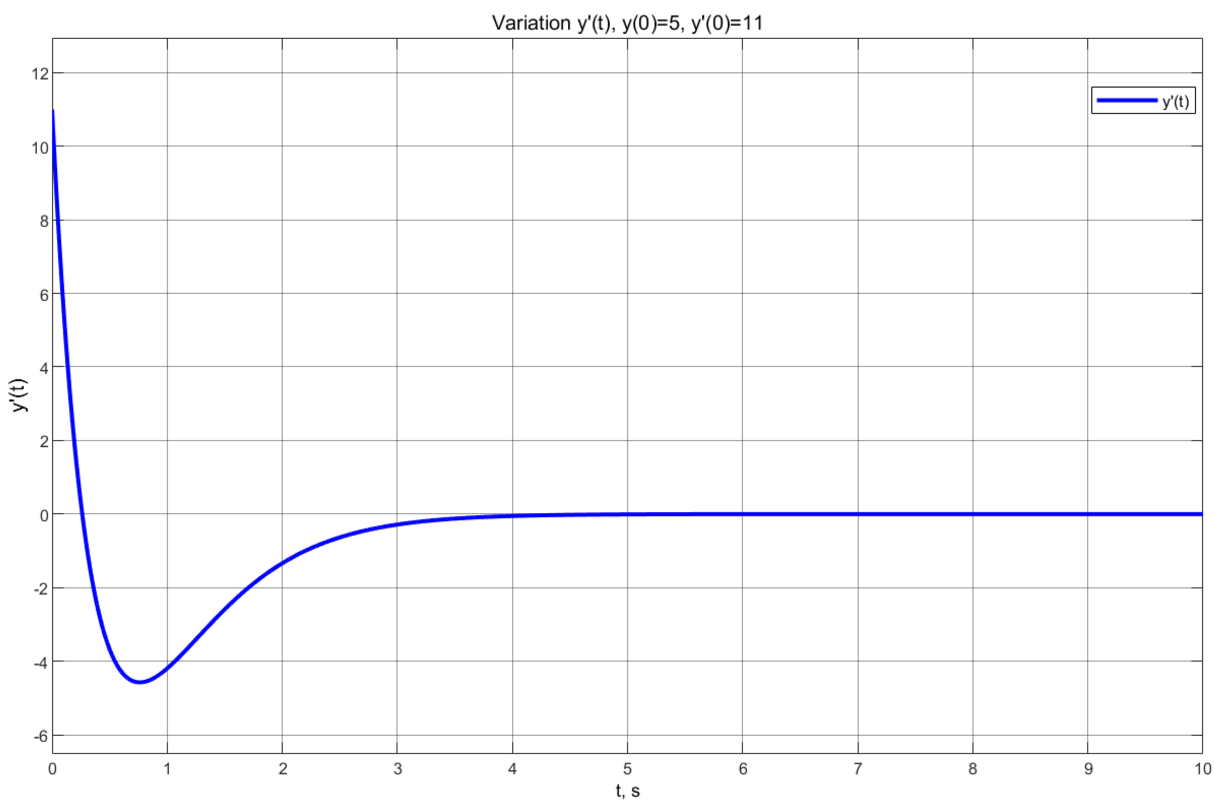

Рисунок 15 – График вывода функции y'(t) для заданных начальных условий

1.3 Выводы по заданию №1 «Свободное движение»

Случай 1: нейтральные и устойчивые апериодические режимы. Для этого набора корней λ_1, λ_2 система проявляет нейтральное поведение и является устойчивой и апериодической. Это означает, что, хотя система и не имеет колебаний, она устойчива и возвращается к своей позиции равновесия без превышения ее, даже если она начинается с некоторого отклонения.

Случай 2: нейтральные и неустойчивые апериодические режимы. Для этого набора корней система проявляет апериодическое поведение, но при этом она является неустойчивой. Это означает, что, несмотря на отсутствие колебаний и апериодического характера движения, система неспособна вернуться к своей позиции равновесия после любого начального возмущения и будет удаляться от нее с течением времени.

Случай 3: пара устойчивых колебательных режимов. Для этого набора корней система имеет два устойчивых колебательных режима. Это означает, что система проявляет затухающие осцилляции вокруг своей позиции равновесия, которые в итоге сходятся к этой точке.

2 Выполнение задания №2 «Область устойчивости»

2.1 Условие задания №2 «Область устойчивости»

Задание 2. Область устойчивости. Соберите схему моделирования линейной системы третьего порядка (рис. 1), установив значение постоянных времени T_1 и T_2 таким образом, чтобы полюса соответствующих передаточных функций совпали с первым набором корней (λ_1, λ_2) из задания 1.

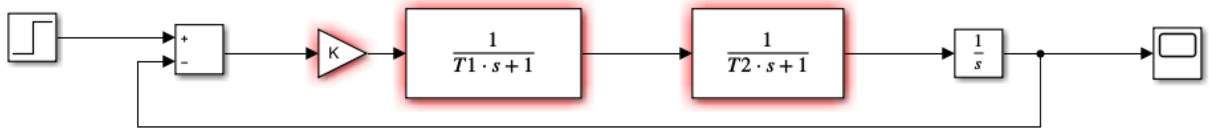

Рисунок 16 – Схема моделирования для задания №2

2.2 Аналитика по полученным графикам и промежуточные результаты по заданию №2 «Область устойчивости»

Дано:

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = -2$$

В данном случае невозможно найти значение параметра T_1 при котором полюс функции передачи $G_1(s) = \frac{1}{T_1 s+1}$ окажется в точке $s = 0$. Если попытаться решить уравнение $T_1 s + 1 = 0$ для $s = 0$ то мы получим следующее:

$$T_1 * 0 + 1 = 0$$

$$1 = 0$$

Очевидно, что данное уравнение не имеет решения. Это связано с делением на ноль в знаменателе при попытке найти значение параметра T_1, при котором полюс находится в нуле. Полюсы функции передачи являются корнями знаменателя, и в данном случае, невозможно удовлетворить условию, что один из этих полюсов должен быть $s = 0$, не придавая при этом T_1 бесконечно большое значение.

Дано:

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = -2$$

$$G_1(s) = \frac{1}{T_1 s + 1} \tag{29}$$

Для $\lambda = -1$:

$$T_1 s + 1 = 0 \tag{30}$$

$$s = -\frac{1}{T_1}$$

$$-1 = -\frac{1}{T_1}$$

$$T_1 = 1$$

Для $\lambda = -2$:

$$G_2(s) = \frac{1}{T_2 s + 1} \tag{31}$$

$$T_2 s + 1 = 0 \tag{32}$$

$$s = -\frac{1}{T_2}$$

$$-2 = -\frac{1}{T_2}$$

$$T_2 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} T_1 = 1 \\ T_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{K}{T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2) s^2 + s} \tag{33}$$

где $G(s)$ – передаточная функция

$$T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2) s^2 + s + K = 0 \tag{34}$$

Условия устойчивости критерия Грубицы:

$$T_1 * T_2 > 0 \qquad T_1 + T_2 > T_1 * T_2 * K = 0 \tag{35}$$

$$0 < K < \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \quad (36)$$

Для условия фиксированного значения Т2:

$$T_2 = \frac{1}{2}$$

$$K < \frac{1}{T_1} + 2\,; \;\; K, T_1 > 0 \quad (37)$$

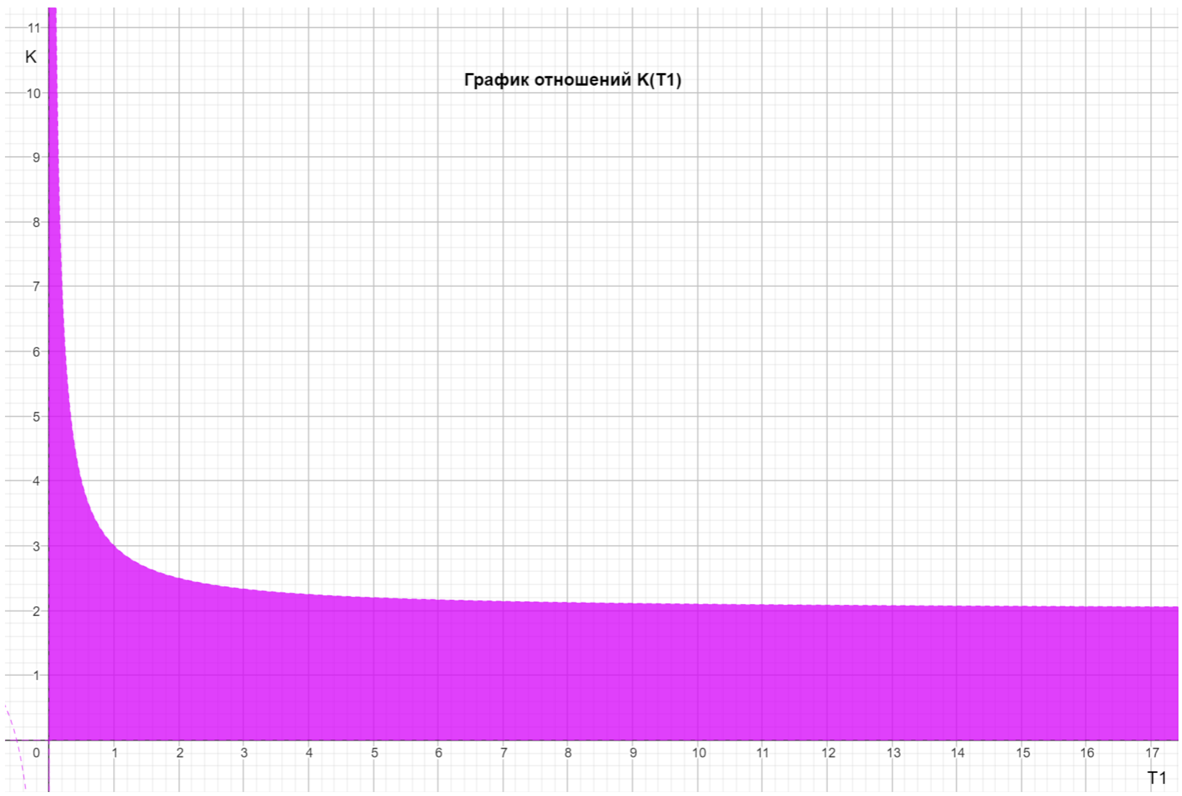

Рисунок 17 – График области устойчивости K(T1) при фиксированном Т2

Для условия фиксированного значения Т1:

$$T_1 = 1$$

$$K < \frac{1}{T_2} + 1\,; \;\; K, T_2 > 0 \quad (38)$$

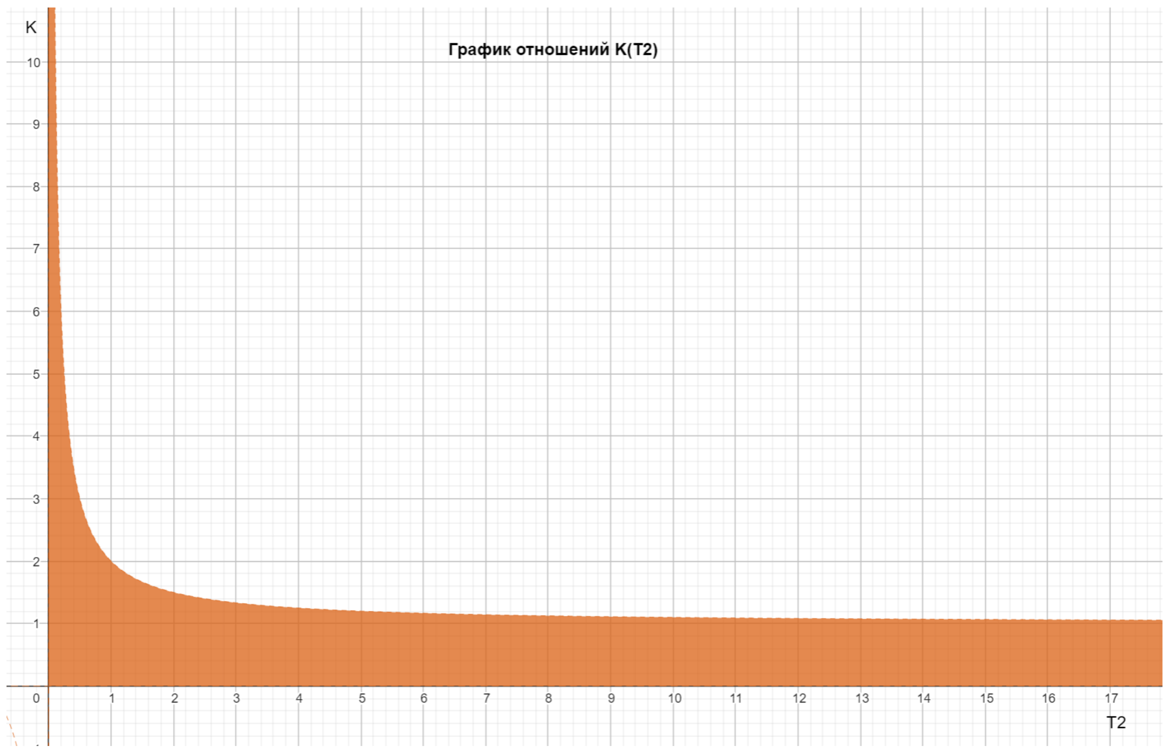

Рисунок 18 – График области устойчивости K(T2) при фиксированном T1

Возьмите три набора параметров K, T1 и T2 таких, чтобы первый набор соответствовал устойчивой системе, второй – системе на границе устойчивости, а третий – неустойчивой системе. Выполните моделирование при g(t) = 1 и сделайте выводы.

Наборы параметров для устойчивой системы: $\mathrm{K} = 1, \mathrm{T}_1 = 1, \mathrm{T}_2 = 1$

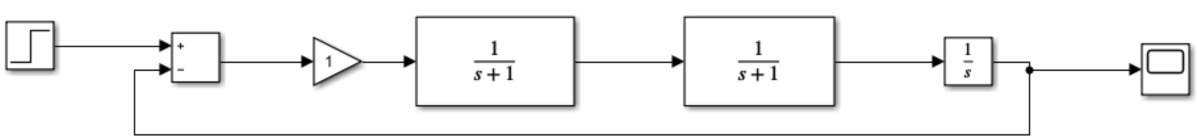

Рисунок 19 – Схема моделирования передаточной функции для устойчивой системы

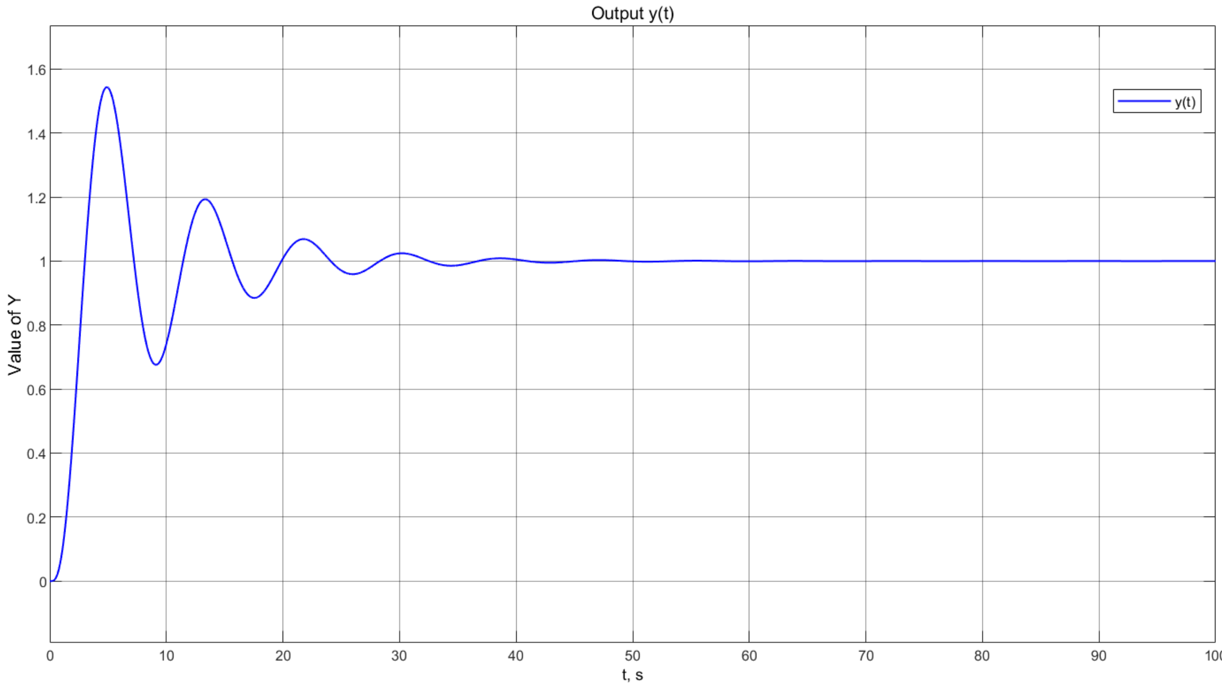

Рисунок 20 – Результат моделирования для устойчивой системы

Наборы параметров для системы на границе устойчивости:

$K = 3, T_1 = 1, T_2 = 0.5$

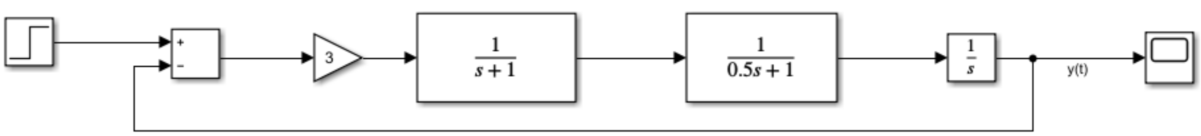

Рисунок 21 – Схема моделирования передаточной функции для системы на границе устойчивости

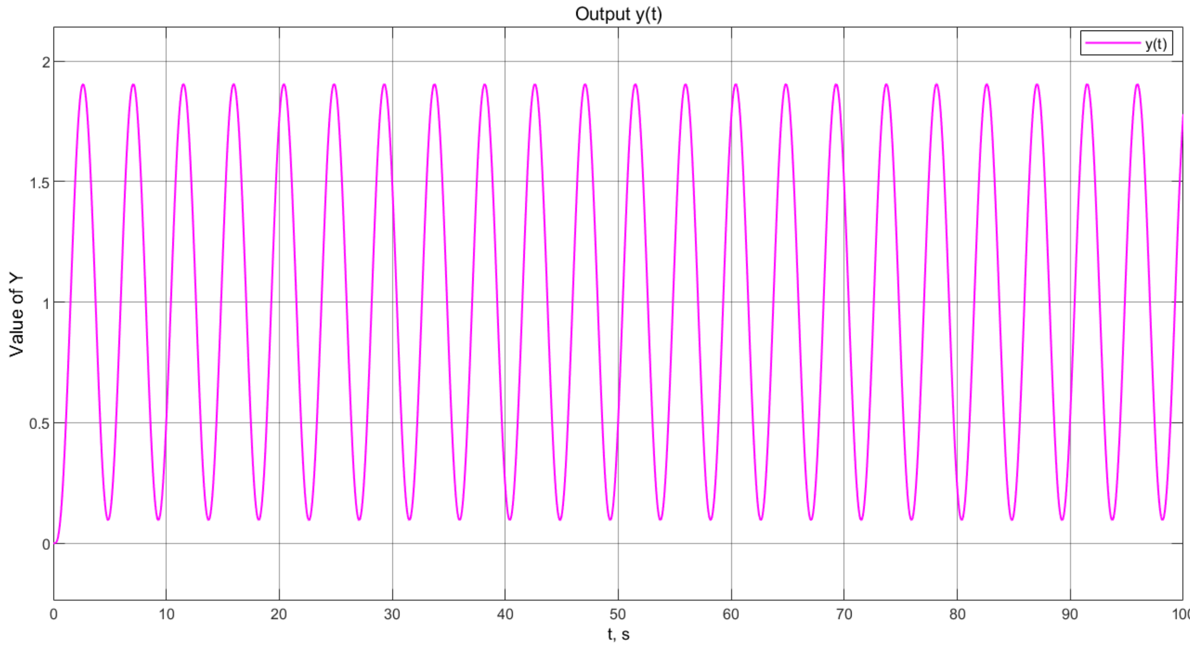

Рисунок 22 – Результат моделирования для системы на границе устойчивости

Наборы параметров для неустойчивой системы: $\text{К} = 1, \text{Т}_1 = -1, \text{Т}_2 = 1$

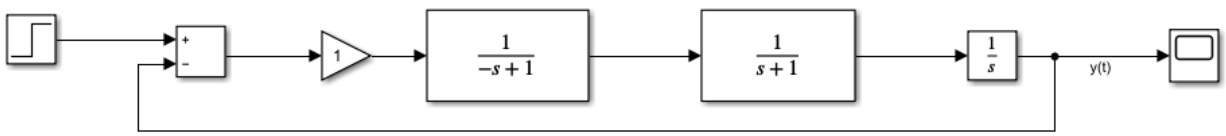

Рисунок 23 – Схема моделирования передаточной функции для неустойчивой системы

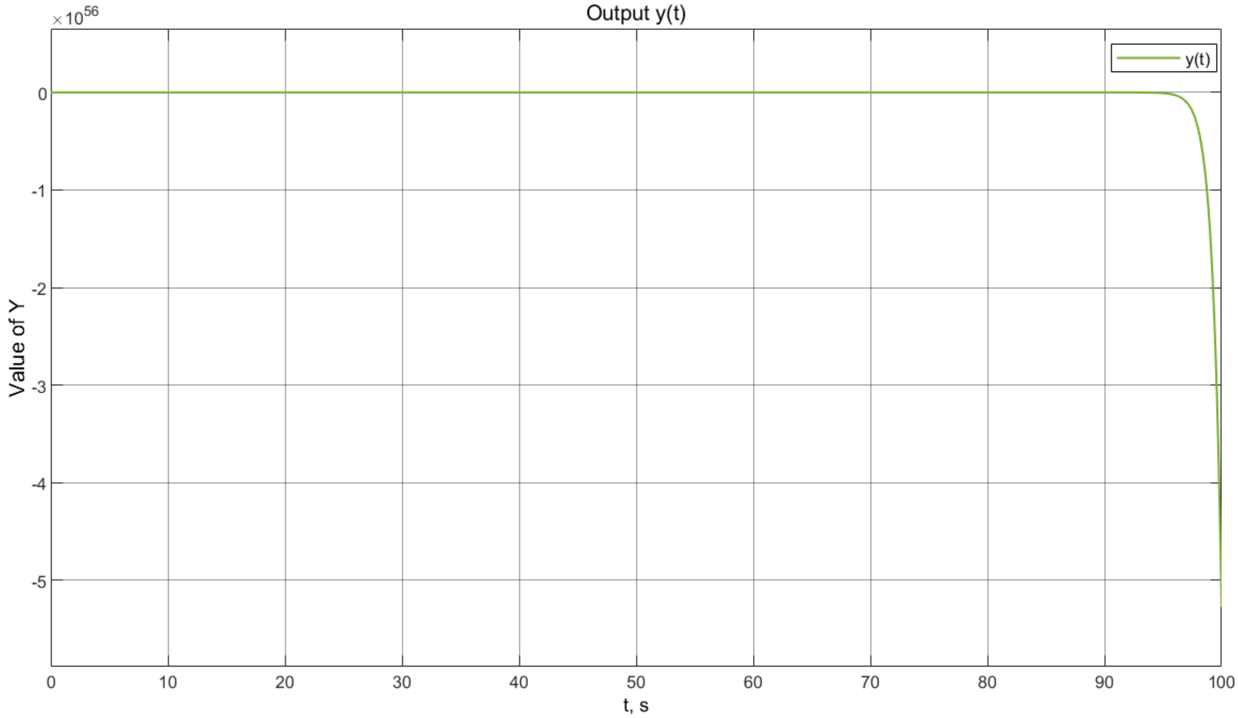

Рисунок 24 – Результат моделирования для неустойчивой системы

2.3 Выводы по заданию №2 «Область устойчивости»

В результате проведенного исследования были получены важные выводы относительно стабильности линейной системы третьего порядка с различными наборами параметров.

1) Для первого набора параметров (стабильная система). При анализе первого набора параметров было установлено, что система является устойчивой. Это подтверждается наблюдаемой плавностью и быстрой стабилизацией системы после воздействия внешних возмущений. Полюсы системы располагаются в левой полуплоскости комплексной плоскости, указывая на устойчивость системы в долгосрочной перспективе.

2) Для второго набора параметров (система на грани устойчивости). При исследовании второго набора параметров было отмечено, что система находится на грани устойчивости. Это означает, что система не является полностью устойчивой, но и не является полностью неустойчивой. Ответ системы может

колебаться вокруг определенных значений, и может потребоваться бесконечное время для полной стабилизации.

3) Для третьего набора параметров (неустойчивая система). В случае неустойчивой системы было замечено, что ответ системы становится неуправляемым и расходится по мере прохождения времени. Это свидетельствует о неустойчивости системы, где полюсы системы находятся в правой полуплоскости комплексной плоскости.

3 Выполнение задания №3 «Автономный генератор»

3.1 Условие задания №3 «Автономный генератор»

Задание 3. Автономный генератор. Придумайте такую систему вида

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \tag{39}$$

где

$\dot{x} -$ производная x по времени

$x =$ вектор состояния

$y =$ выход системы

с ненулевыми начальными условиями $x(0)$, чтобы выход системы при свободном движении совпадал с желаемым выходом (см. Табл. 2) в соответствии с вашим вариантом задания. В отчёте приведите матрицы A и C полученной системы, схему моделирования и результаты моделирования свободного движения системы с заданными начальными условиями. Выполните сравнение полученного выхода с желаемым. Сделайте выводы.

3.2 Аналитика по полученным графикам и промежуточные результаты по заданию №3 «Автономный генератор»

$$y = \sin(-3t) + e^{7t}\sin(t) \tag{40}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 3i$$

$$\lambda_{3.4} = 7 \pm i$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \end{bmatrix} \tag{41}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^0\cos(3t) & e^0\sin(3t) & 0 & 0 \\ -e^0\sin(3t) & e^0\cos(3t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^7\cos(t) & e^7\sin(t) \\ 0 & 0 & -e^7\sin(t) & e^7\cos(t) \end{bmatrix} \tag{41}$$

$$e^{At}x(0) = \begin{bmatrix} e^0\cos(3t) & e^0\sin(3t) & 0 & 0 \\ -e^0\sin(3t) & e^0\cos(3t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^7\cos(t) & e^7\sin(t) \\ 0 & 0 & -e^7\sin(t) & e^7\cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \tag{42}$$

$$Ce^{At}x(0) = \begin{bmatrix} a_1\cos(3t) + a_2\sin(3t) \\ -a_1\sin(3t) + a_2\cos(3t) \\ a_3e^7\cos(t) + a_4e^7\sin(t) \\ -a_3e^7\sin(t) + a_4e^7\cos(t) \end{bmatrix} [C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4] \tag{43}$$

$$Ce^{At}x(0) = \begin{matrix} a_1C_1\cos(3t) + a_2C_1\sin(3t) - \\ -a_1C_2\sin(3t) + a_2C_2\cos(3t) + \\ +a_3C_3e^7\cos(t) + a_4C_3e^7\sin(t) - \\ -a_3C_4e^7\sin(t) + a_4C_4e^7\cos(t) \end{matrix} \tag{44}$$

$$Ce^{At}x(0) = (a_1C_1 + a_2C_2)\cos(3t) + (a_2C_1 - a_1C_2)\sin(3t) + (a_3C_3 + a_4C_4)e^7\cos(t) + (a_4C_3 - a_3C_4)e^7\sin(t)$$

$$\begin{cases} a_1C_1 + a_2C_2 = 0 \\ a_2C_1 - a_1C_2 = 1 \\ a_3C_3 + a_4C_4 = 0 \\ a_4C_3 - a_3C_4 = 1 \end{cases} \tag{45}$$

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \\ a_3 = -1 \\ a_4 = 0 \\ C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \\ C_3 = 0 \\ C_4 = 1 \end{cases} \tag{46}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \end{bmatrix} \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

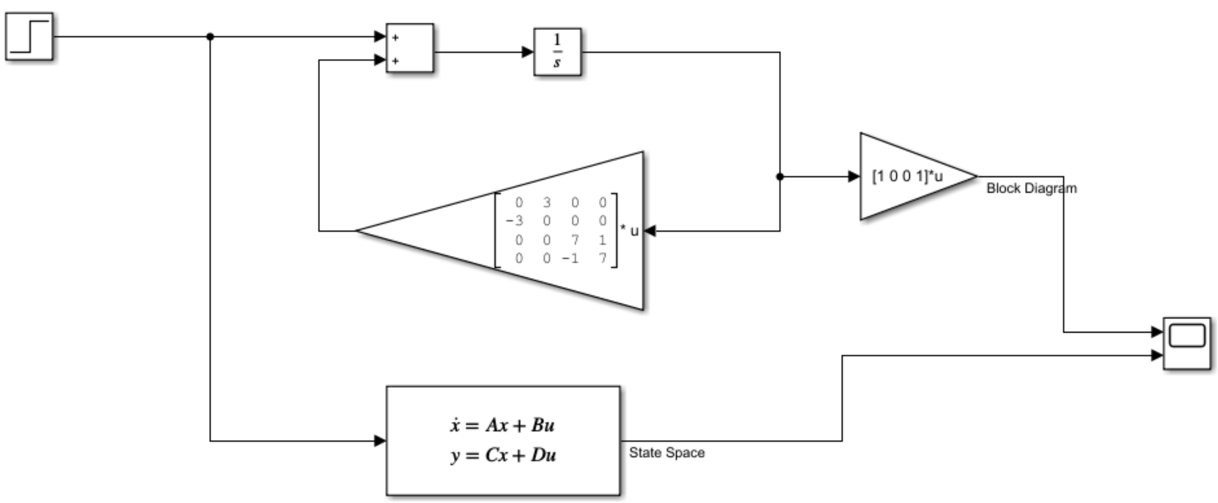

Рисунок 25 – Схема моделирования пространства состояний

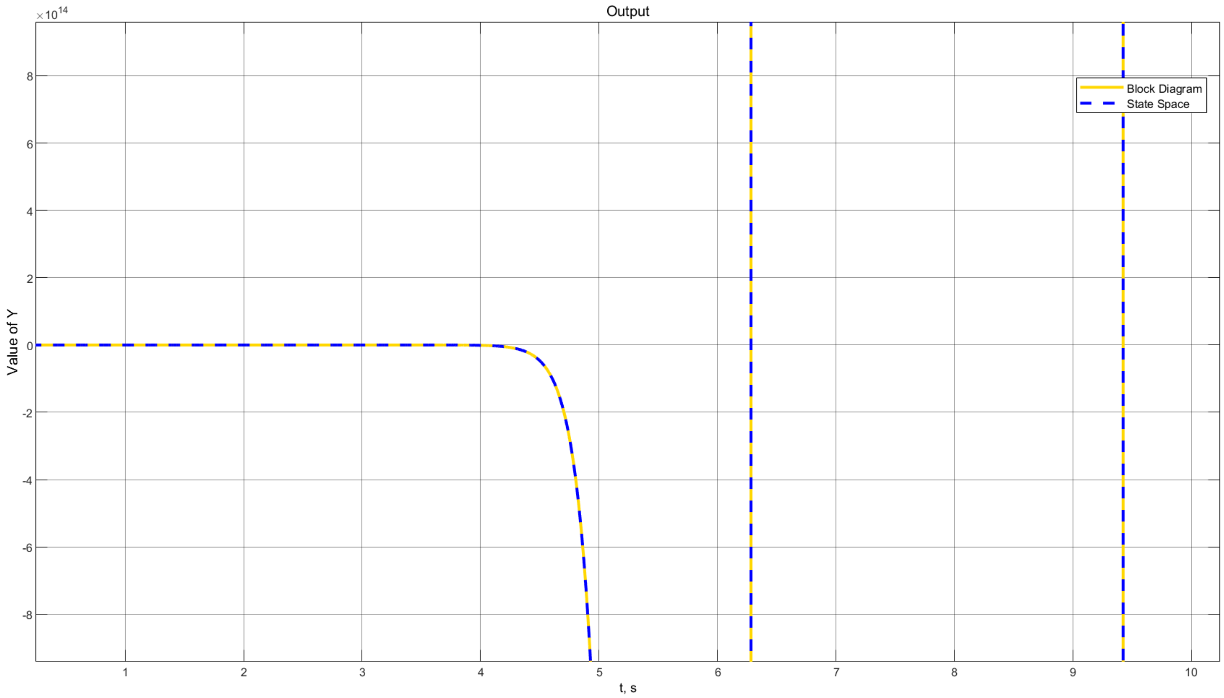

Рисунок 26 – Моделирование дифференциального уравнения с заданными корнями

Чтобы убедиться, что моделирование пространства состояний выполнено правильно, было решено построить график заданной функции в Matalab, чтобы узнать, совпадают ли они.

```
% Определение переменной t как символьной
syms t;

% Определение функции y(t) в виде анонимной функции
y = @(t) sin(-3*t) + ((exp(7*t)) * sin(t));

% Построение графика функции y(t) с красной линией толщиной 2
fplot(y, 'r', 'LineWidth', 2);

% Добавление подписи по оси x
xlabel('t');

% Добавление подписи по оси y
ylabel('y(t)');

% Включение сетки на графике
```

```
grid on;

% Добавление легенды к графику, указывая описание функции
legend('y(t) = sin(-3*t) + exp(7*t) * sin(t)');
```

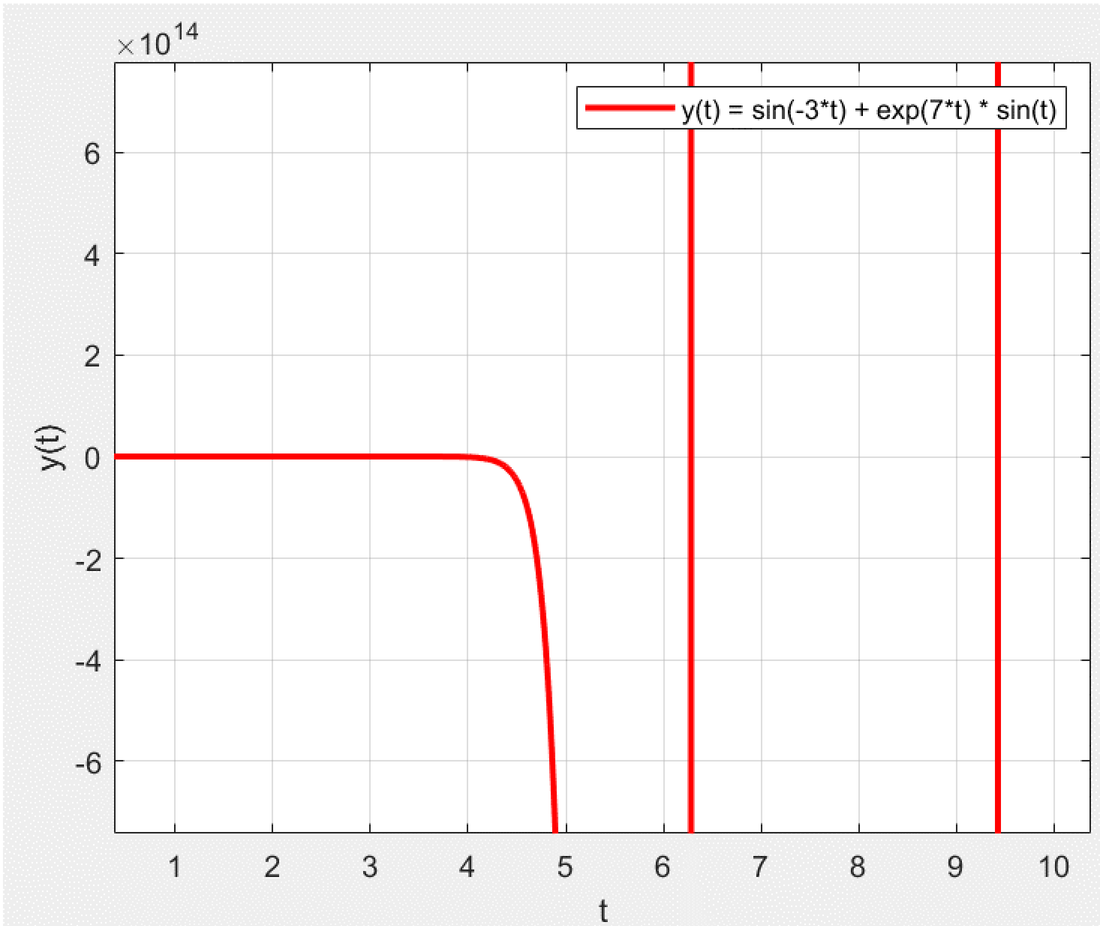

Рисунок 27 – График заданной функции y(t)

3.3 Выводы по заданию №3 «Автономный генератор»

В данном упражнении нам было предложено разработать автономную систему, представленную уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}$$

Матрицы A и C были тщательно подобраны, чтобы система вела себя в соответствии с заданным образцом.

После выбора подходящих матриц A и C и определения начальных значений x(0) было проведено моделирование системы. Во время симуляции наблюдалось, как система эволюционирует со временем, и сравнивался ее выход с желаемым образцом.

По результатам можно сказать, что разработанная система вела себя удовлетворительно: выход симулированной системы близко соответствовал желаемому образцу. Это свидетельствует о том, что выбранные матрицы A и C были подходящими для достижения желаемого поведения системы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задачи, связанные с системами второго и третьего порядка, показали поведение, которое могут проявлять системы. От стабильных и колебательных реакций до нейтральных и нестабильных апериодических режимов стало очевидно, что характеристики системы тесно связаны с ее стабильностью и режимом реагирования.

Задачи анализа устойчивости, особенно в контексте критерия Рауса-Гурвица, позволили глубоко понять тонкий баланс между параметрами системы и стабильностью. Построение графиков пределов стабильности подчеркнуло критическую природу выбора параметров, выявив области, в которых система стабильна, минимально стабильна или склонна к нестабильности.

Создание автономной генерирующей системы показало практическое применение теории управления. Манипулируя матрицами системы, можно было спроектировать систему, дающую желаемый результат.

Способность переводить математические концепции в осязаемые результаты посредством моделирования не только подтвердила теоретические выводы, но и подчеркнула актуальность теорий управления в реальном мире.