



**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**  
**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**  
**«Национальный исследовательский университет ИТМО»**  
**(Университет ИТМО)**

Дисциплина: Теория автоматического управления

**Отчет**  
**по лабораторной работе №1:**  
**«Формы представления линейных систем»**

Выполнил:  
Самбрано Браво Рикардо Хосе,  
студент гр. R33352

Преподаватель:  
Пашенко Артем Витальевич,  
фак. СУиР

Санкт-Петербург,  
2023 г.

## СОДЕРЖАНИЕ

Основная часть.....	4
1 Выполнение задания №1 «Одноканальная система в форме вход-выход» .....	4
1.1 Условие задания №1 «Одноканальная система в форме вход-выход» .....	4
1.2 Аналитика по полученным графикам и промежуточные результаты по заданию №1 «Одноканальная система в форме вход-выход».....	4
2 Выполнение задания №2 «Переход от формы вход-выход к форме вход-состояние-выход».....	6
2.1 Условие задания №2 «Переход от формы вход-выход к форме вход-состояние-выход».....	6
2.2 Аналитика по полученным графикам и промежуточные результаты по заданию №2 «Переход от формы вход-выход к форме вход-состояние-выход»..	7
3 Выполнение задания №3 «Многоканальная система в форме вход-выход» ....	10
3.1 Условие задания №3 «Многоканальная система в форме вход-выход» .....	10
3.2 Аналитика по полученным графикам и промежуточные результаты по заданию №3 «Многоканальная система в форме вход-выход» .....	11
4 Выполнение задания №4 «Одноканальная система в форме вход-состояние-выход» .....	14
4.1 Условие задания №4 «Одноканальная система в форме вход-состояние-выход».....	14
4.2 Аналитика по полученным графикам и промежуточные результаты по заданию №4 «Одноканальная система в форме вход-состояние-выход» .....	15
5 Выполнение задания №5 «Многоканальная система в форме вход-состояние-выход» .....	17
5.1 Условие задания №5 «Многоканальная система в форме вход-состояние-выход».....	17

5.2 Аналитика по полученным графикам и промежуточные результаты по заданию №5 «Многоканальная система в форме вход-состояние-выход».....	18
5.3 Дополнительное решение.....	21
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	24

## ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

### 1 Выполнение задания №1 «Одноканальная система в форме вход-выход»

#### 1.1 Условие задания №1 «Одноканальная система в форме вход-выход»

Возьмите коэффициенты  $a_2, a_1, a_0, b_2, b_1$  и  $b_0$  из таблицы 1 в соответствии с вашим вариантом и рассмотрите уравнение:

$$\ddot{y} + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = b_2\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_0u \quad (1)$$

где  $y, u$  – зависимые переменные

Выполните моделирование при входном воздействии  $u(t) = 1(t)$  и нулевых начальных условиях. Приведите в отчете схему моделирования и графики входного воздействия  $u(t)$  и выхода  $y(t)$ .

#### 1.2 Аналитика по полученным графикам и промежуточные результаты по заданию №1 «Одноканальная система в форме вход-выход»

Необходимо представить нашу линейную систему (1) в дифференциальном виде (р), чтобы впоследствии иметь возможность исключить переменную из уравнения и провести моделирование:

$$a_2 = 6, \quad a_1 = 5, \quad a_0 = 2, \quad b_2 = 7, \quad b_1 = 8, \quad b_0 = 1$$

$$\ddot{y} + 6\ddot{y} + 5\dot{y} + 2y = 7\ddot{u} + 8\dot{u} + u$$

$$\ddot{y} = 7\ddot{u} + 8\dot{u} + u - 6\ddot{y} - 5\dot{y} - 2y$$

$$yp^3 = 7up^2 + 8up + u - 6yp^2 - 5yp - 2y$$

$$y = \frac{7u}{p} + \frac{8u}{p^2} + \frac{u}{p^3} - \frac{6y}{p} - \frac{5y}{p^2} - \frac{2y}{p^3}$$

$$y = \frac{1}{p} \left( 7u - 6y + \frac{1}{p} \left( 8u - 5y + \frac{1}{p} (u - 2y) \right) \right)$$

На рисунке 1 представлена схема моделирования передаточной функции в Matlab.

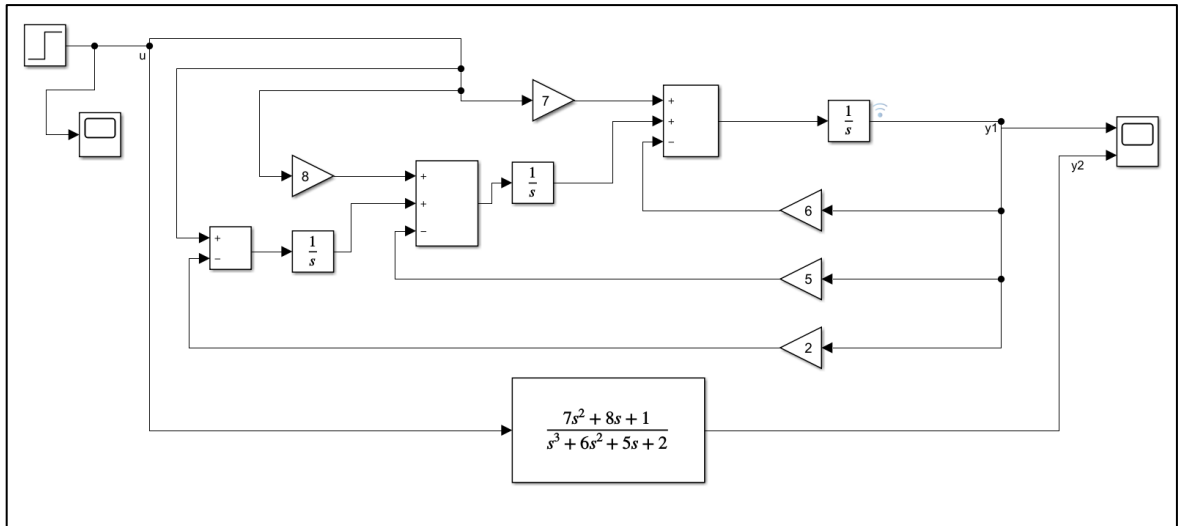


Рисунок 1 – Схема моделирования передаточной функции в Matlab

На рисунке 2 построен график входного воздействия  $u(t)$ .

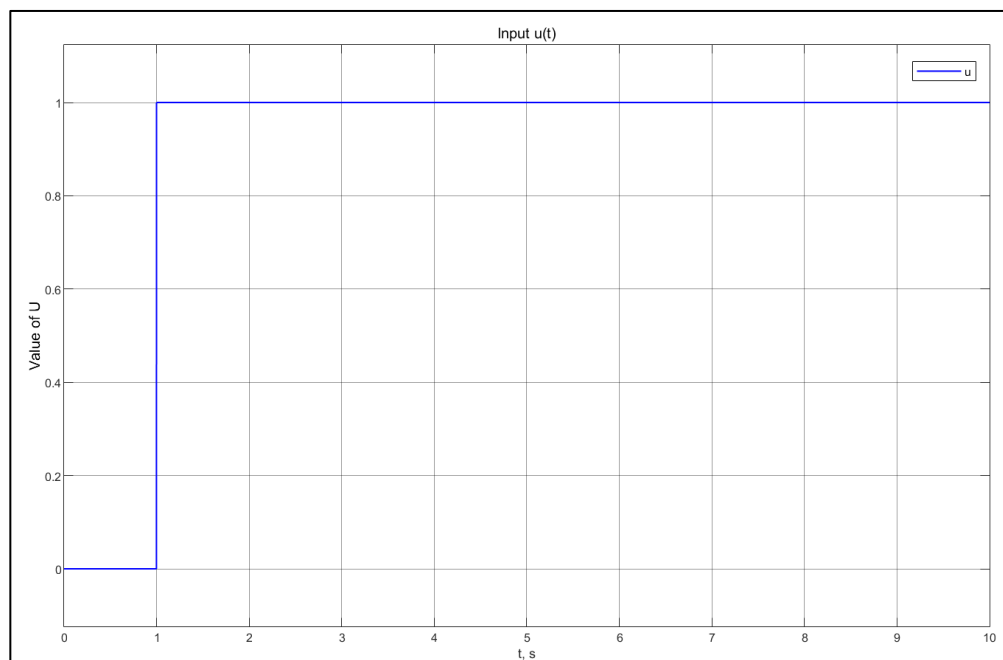


Рисунок 2 – График входного значения  $u(t)$  задания №1

На рисунке 3 построен график выхода  $y(t)$ .

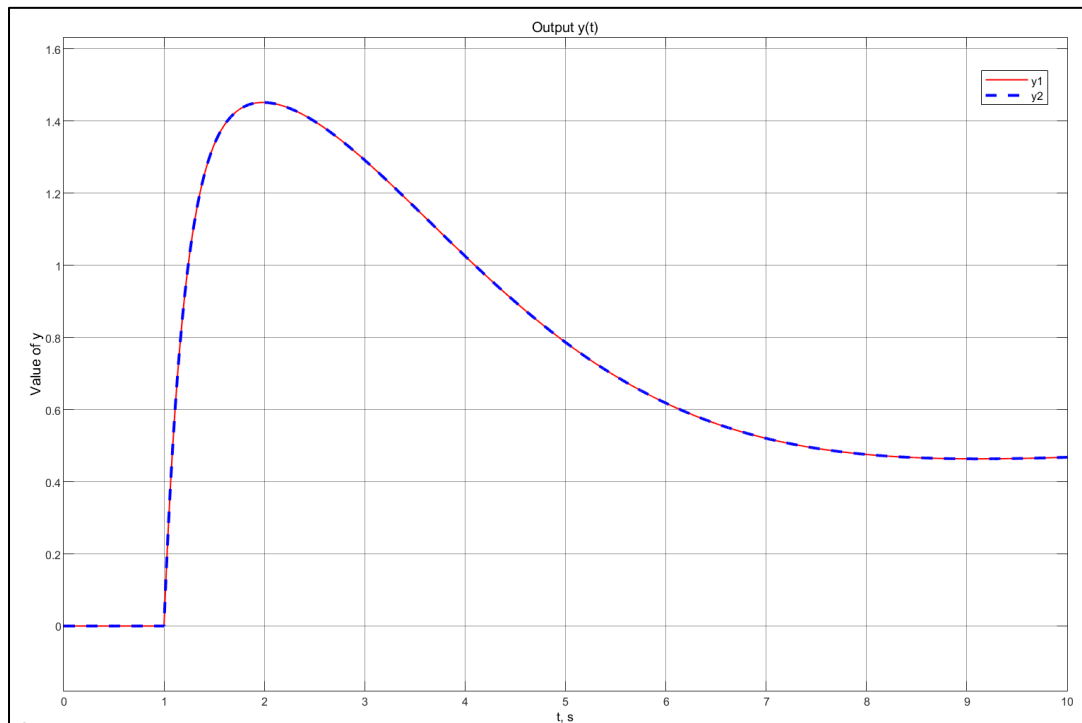


Рисунок 3 – График выхода  $y(t)$  линейной системы (1)

## 2 Выполнение задания №2 «Переход от формы вход-выход к форме вход-состояние-выход»

### 2.1 Условие задания №2 «Переход от формы вход-выход к форме вход-состояние-выход»

Возьмите коэффициенты  $a_2, a_1, a_0, b_2, b_1$  и  $b_0$  из задания 1. Определите передаточную функцию системы. Постройте математические модели вход-состояние-выход в одной из канонических форм: канонической управляемой для четных и канонической наблюдаемой для остальных вариантов. Выполните сравнительное моделирование полученных форм представления системы при входном воздействии  $u(t) = 1(t)$  и нулевых начальных условиях. Приведите в

отчете схемы моделирования и графики входного воздействия  $u(t)$  и выхода  $y(t)$ , сделайте выводы.

$$W(p) = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{p^3 + b_2 p^2 + b_1 p + b_0} \quad (2)$$

$$W(p) = \frac{7p^2 + 8p + 1}{p^3 + 6p^2 + 5p + 2}$$

**2.2 Аналитика по полученным графикам и промежуточные результаты по заданию №2 «Переход от формы вход-выход к форме вход-состояние-выход»**

$$\ddot{y} + a_2 \dot{y} + a_1 y + a_0 y = b_2 \ddot{u} + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (3)$$

$$y = [b_0 \quad b_1 \quad b_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

где  $x$  – вектор состояния

$u$  – вектор управления

Производится преобразование передаточной функции в форму В-С-В. Функция оставлена выраженной в управляемой канонической форме, как того требует упражнение. Для этого используется формулы (2) и (3) в качестве отправной точки. Тогда:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = [1 \quad 8 \quad 7] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y = [1 \quad 8 \quad 7] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

На рисунке 4 представлено сравнительное моделирование полученных форм представления системы при входном воздействии  $u(t) = 1(t)$  и нулевых начальных условиях.

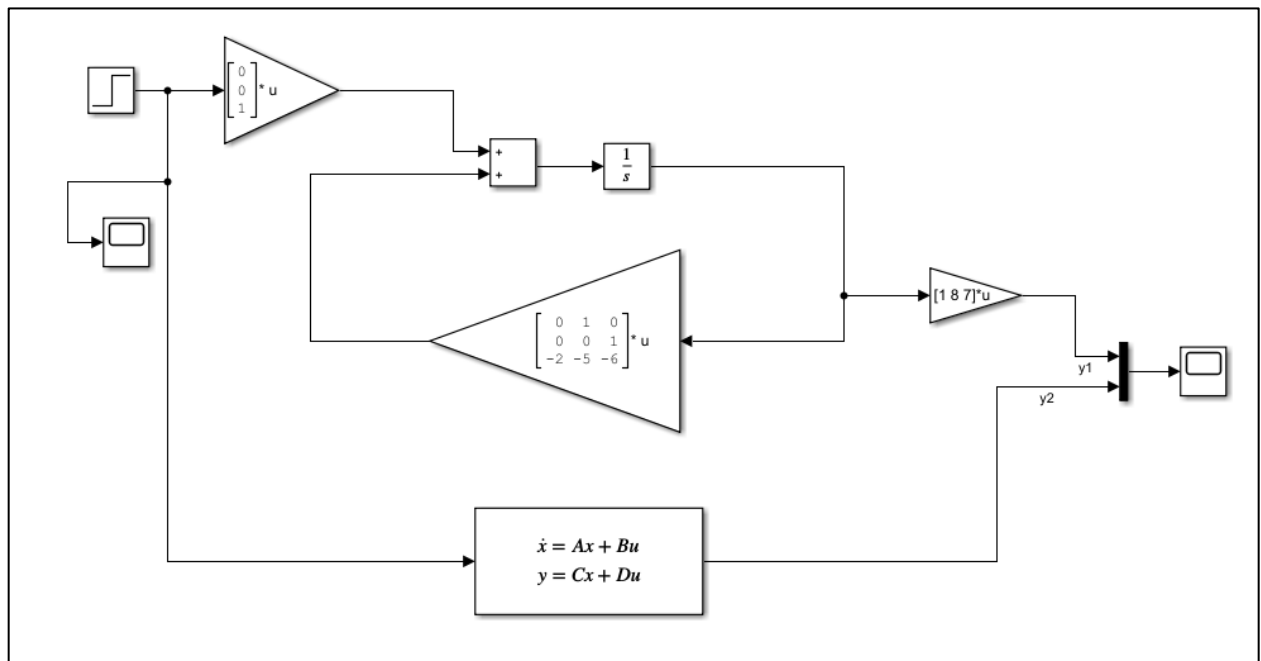


Рисунок 4 – Схема моделирования системы формы В-С-В в Matlab

На рисунке 5 построен график входного воздействия  $u(t)$ .



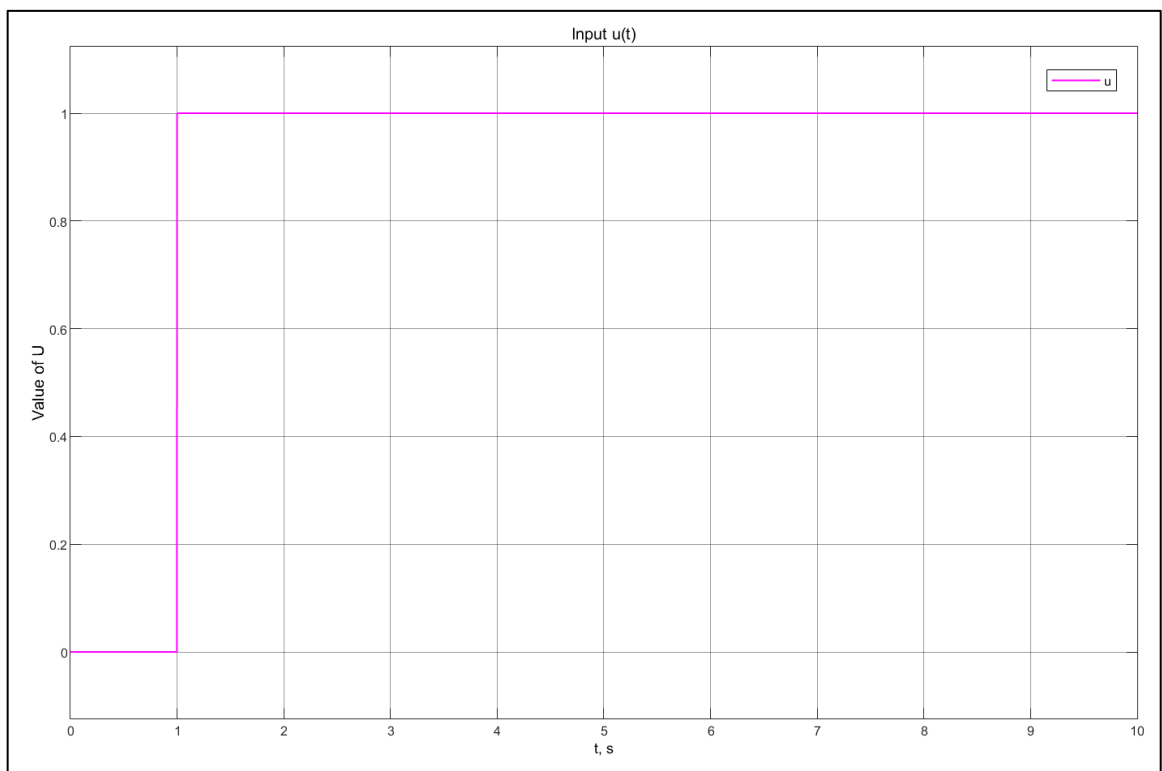


Рисунок 5 – График входного значения  $u(t)$  задания №2

На рисунке 6 построен график выхода  $y(t)$ .

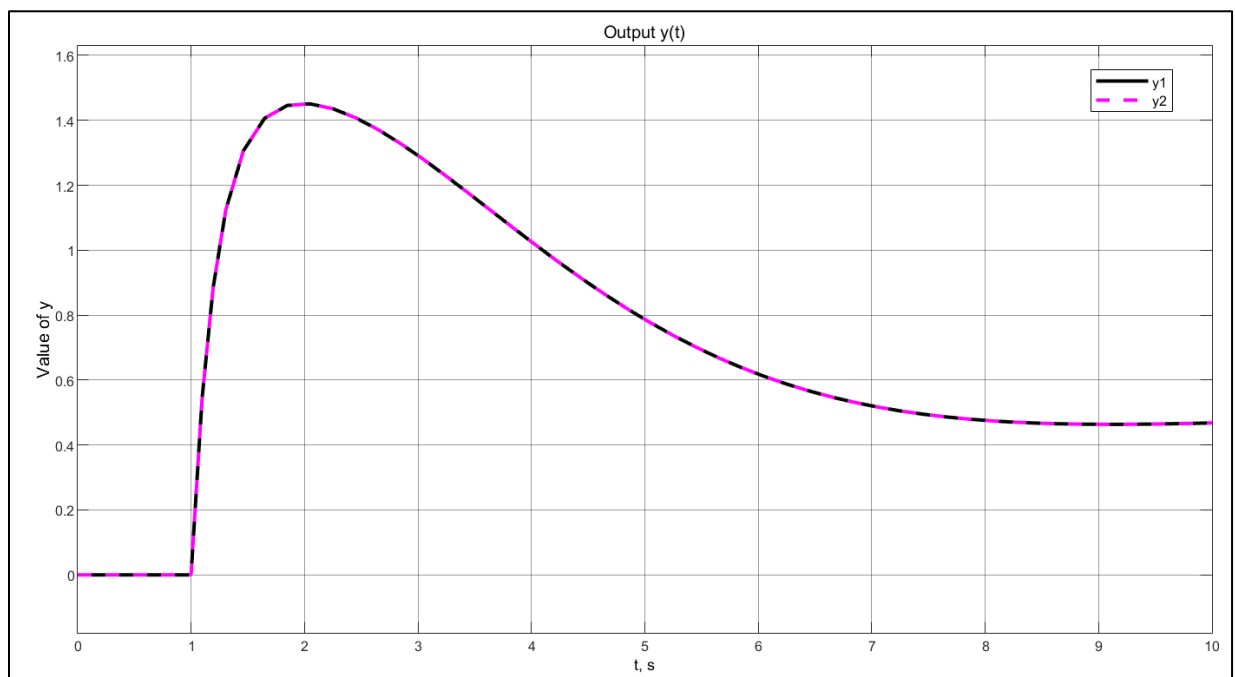


Рисунок 6 – График выхода  $y(t)$  системы формы В-С-В

Таким образом, можно сделать вывод о том, что фундаментальное различие между передаточной функцией и пространством состояний в контексте динамических систем и управления заключается в том, каким образом они представляют и анализируют систему.

Передаточная функция описывает взаимосвязь между выходными и входными данными динамической системы в частотной области. Это выражается как преобразование Лапласа реакции системы на входные данные, а переменная « $s$ » в передаточной функции представляет собой комплексную частоту в области Лапласа.

Пространство состояний описывает динамическую систему посредством набора дифференциальных уравнений первого порядка, известных как уравнения состояния. В этом представлении « $x$ » – это вектор состояний, который полностью описывает систему, а « $A$ », « $B$ », « $C$ » и « $D$ » – это матрицы, которые определяют отношения между входами, состояниями и выходами.

### **3      Выполнение задания №3 «Многоканальная система в форме ВХОД-ВЫХОД»**

#### **3.1    Условие задания №3 «Многоканальная система в форме вход-выход»**

Возьмите коэффициенты  $a_{11}(p), a_{12}(p), a_{21}(p), a_{22}(p), b_{11}(p), b_{12}(p), b_{21}(p), b_{22}(p)$  из таблицы 2 в соответствии с вашим вариантом и рассмотрите систему

$$A(p)y(t) = B(p)u(t) \quad (4)$$

$$\text{Где } A(p) = \begin{bmatrix} a_{11}(p) & a_{12}(p) \\ a_{21}(p) & a_{22}(p) \end{bmatrix}, B(p) = \begin{bmatrix} b_{11}(p) & b_{12}(p) \\ b_{21}(p) & b_{22}(p) \end{bmatrix}$$

Выполните моделирование при входных воздействиях  $u_1(t) = 1(t)$  и  $u_2(t) = 2 \sin(t)$  и нулевых начальных условиях. Приведите в отчете схему моделирования и графики входных воздействий  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  и выходов  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$

**3.2 Аналитика по полученным графикам и промежуточные результаты по заданию №3 «Многоканальная система в форме вход-выход»**

$$A(p) = \begin{bmatrix} p + 12 & p + 2 \\ p + 7 & p + 3 \end{bmatrix}$$

$$B(p) = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$$

$$W(p) = A^{-1}(p) B(p) \quad (5)$$

$$A^{-1}(p) = \begin{bmatrix} \frac{p+3}{6p+22} & \frac{-p-2}{6p+22} \\ \frac{-p-7}{6p+22} & \frac{p+12}{6p+22} \end{bmatrix}$$

$$W(p) = \begin{bmatrix} \frac{p+3}{6p+22} & \frac{-p-2}{6p+22} \\ \frac{-p-7}{6p+22} & \frac{p+12}{6p+22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$$

$$W(p) = \begin{bmatrix} \frac{-7p-12}{6p+22} & \frac{2p+8}{3p+11} \\ \frac{7p+94}{6p+22} & \frac{-2p-4}{3p+11} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{-7p - 12}{6p + 22} u_1 + \frac{2p + 8}{3p + 11} u_2 \\ y_2 = \frac{7p + 94}{6p + 22} u_1 + \frac{-2p - 4}{3p + 11} u_2 \end{cases}$$

На рисунке 7 представлено моделирование системы при входных воздействиях  $u_1(t) = 1(t)$  и  $u_2(t) = 2 \sin(t)$  и нулевых начальных условиях.

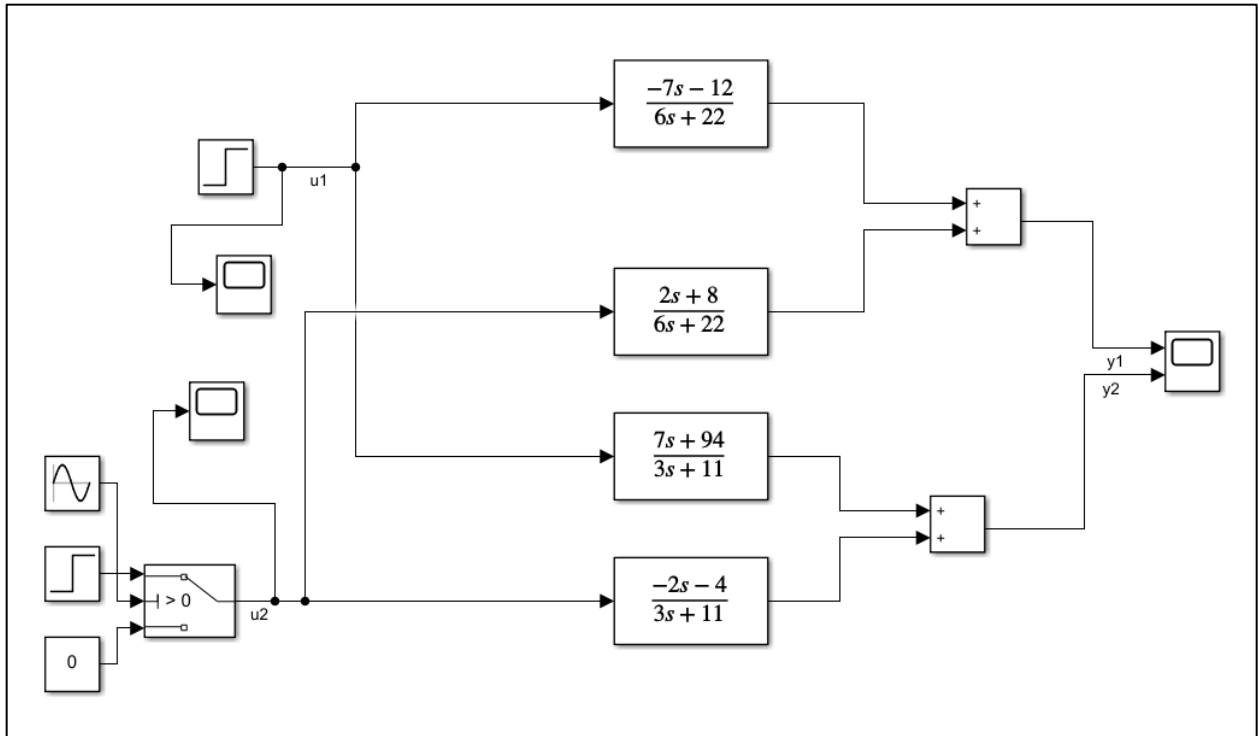


Рисунок 7 – Схема моделирования многоканальной системы в форме В-В

На рисунке (8) построен график входного воздействия  $u_1(t)$ .

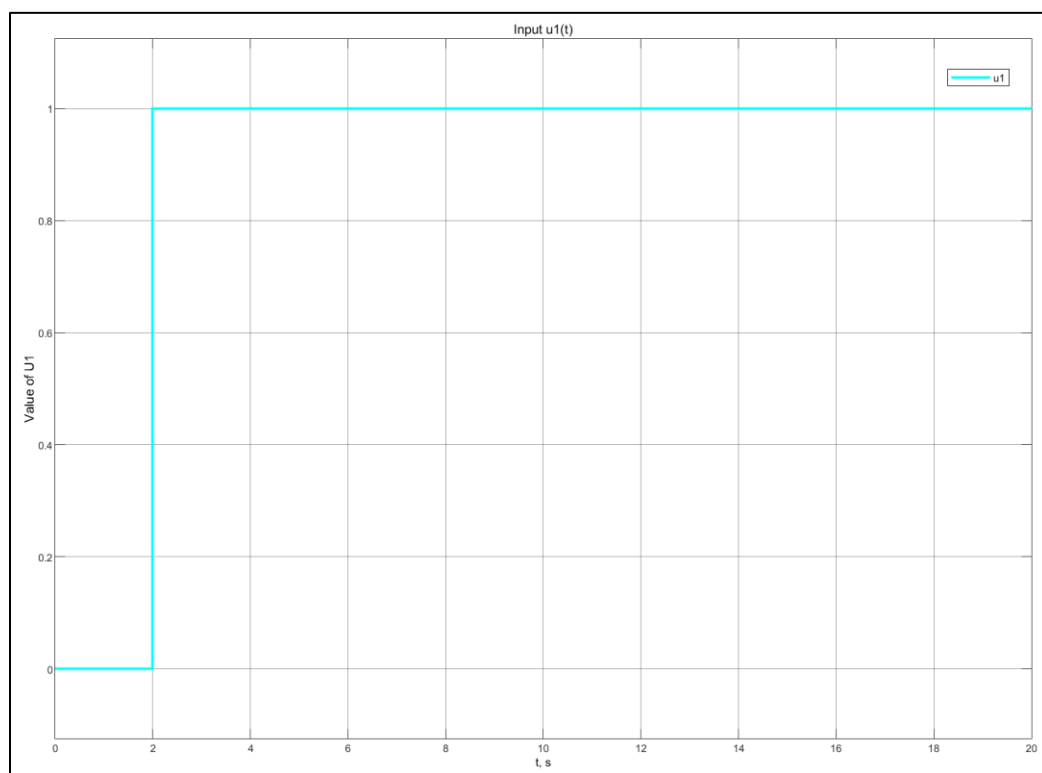


Рисунок 8 – График входного значения  $u_1(t)$  задания №3

На рисунке 9 построен график входного воздействия  $u_2(t)$ .

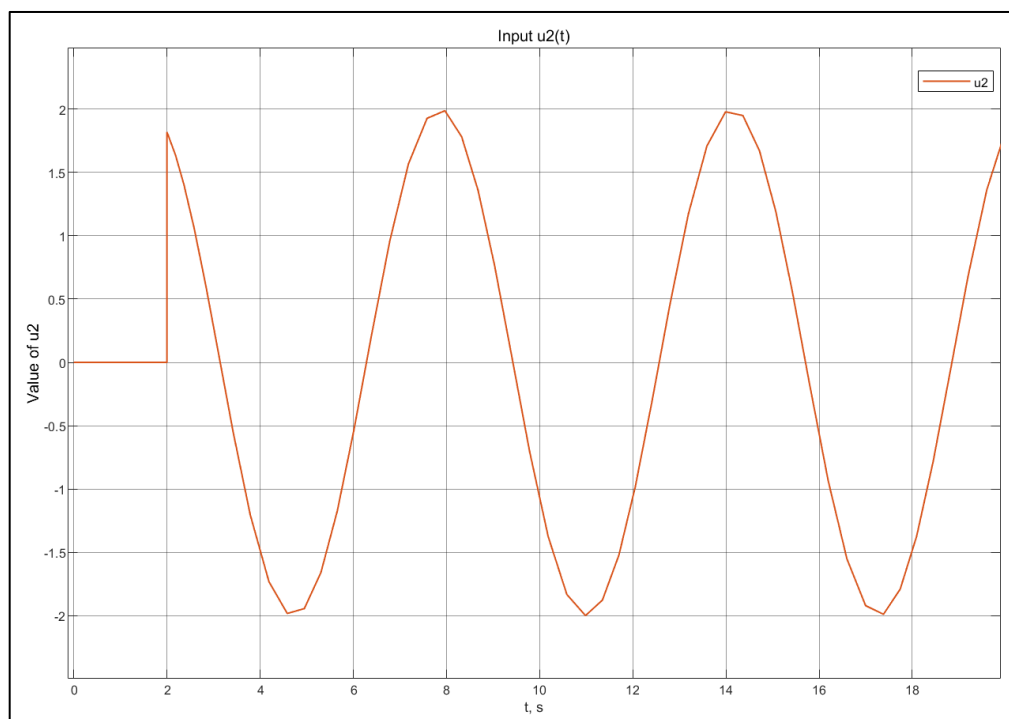


Рисунок 9 – График входного значения  $u_2(t)$  задания №3

На рисунке 10 построены графики выходов  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ .

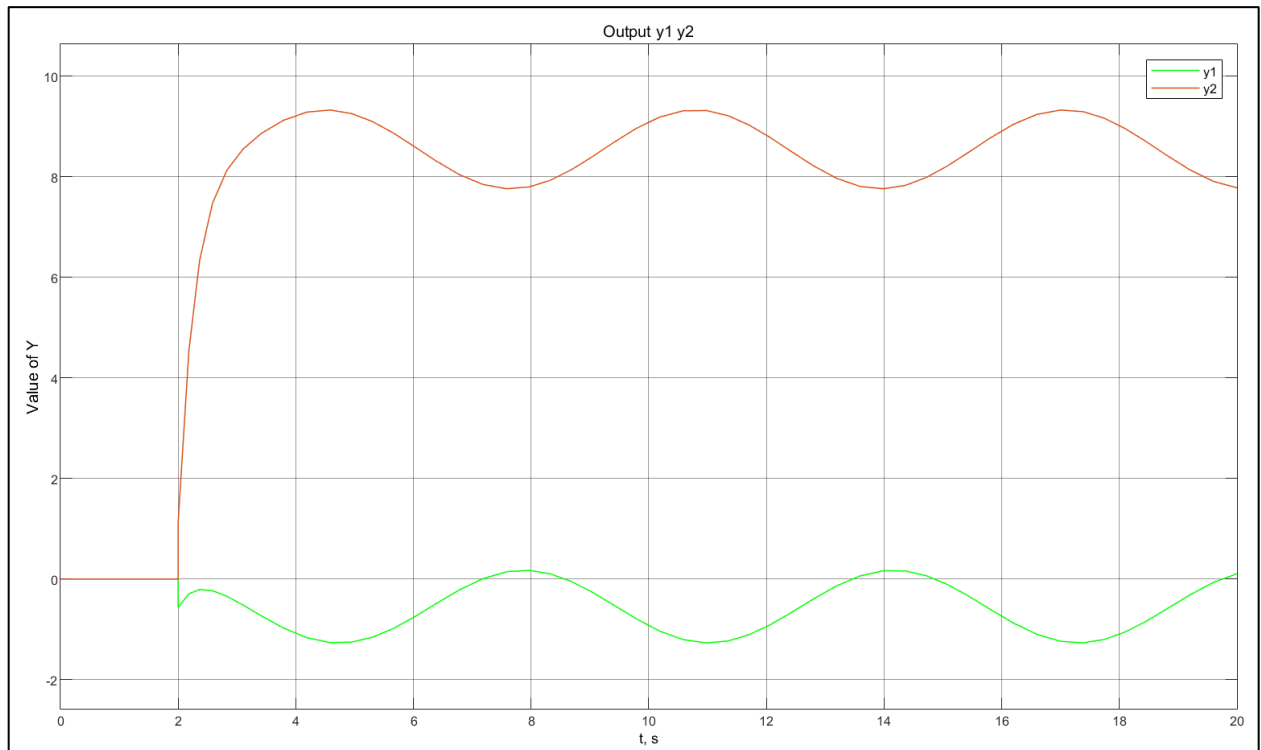


Рисунок 10 – Графики выходов  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  системы в форме В-В

#### 4 Выполнение задания №4 «Одноканальная система в форме вход-состояние-выход»

##### 4.1 Условие задания №4 «Одноканальная система в форме вход-состояние-выход»

Возьмите матрицы  $A$ ,  $B$  и  $C$  из таблицы 3 в соответствии с вашим вариантом и рассмотрите систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (6)$$

где  $x$  – вектор состояния;

$u$  – вектор управления;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -5 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix};$$

$$C = [1 \quad 5];$$

$$D = 0.$$

Выполните моделирование при входном воздействии  $u(t) = 1(t)$  и нулевом начальном значении вектора состояния. Приведите в отчете схему моделирования и графики входного воздействия  $u(t)$  и выхода  $y(t)$ .

#### **4.2 Аналитика по полученным графикам и промежуточные результаты по заданию №4 «Одноканальная система в форме вход-состояние-выход»**

Для улучшения моделирования в Simulink было решено использовать компонент `mux`, который позволяет объединять несколько сигналов или данных в один выход. Эта функциональность является ключевой для упрощения и организации моделей, поскольку она облегчает соединение нескольких блоков эффективным образом, снижая сложность блок-схемы и улучшая читаемость системы. Результат моделирования представлен на рисунке 11.

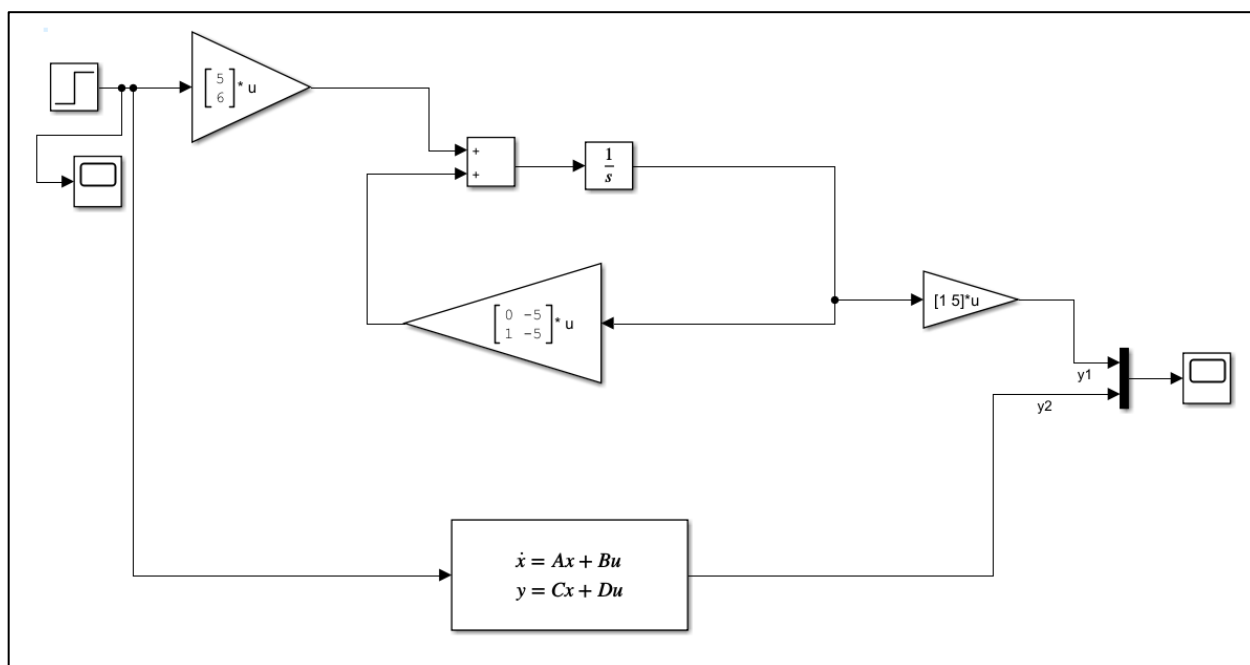


Рисунок 11 – Схема моделирования в форме В-С-В в Matlab

На рисунке 12 построен график входного воздействия  $u(t)$ .

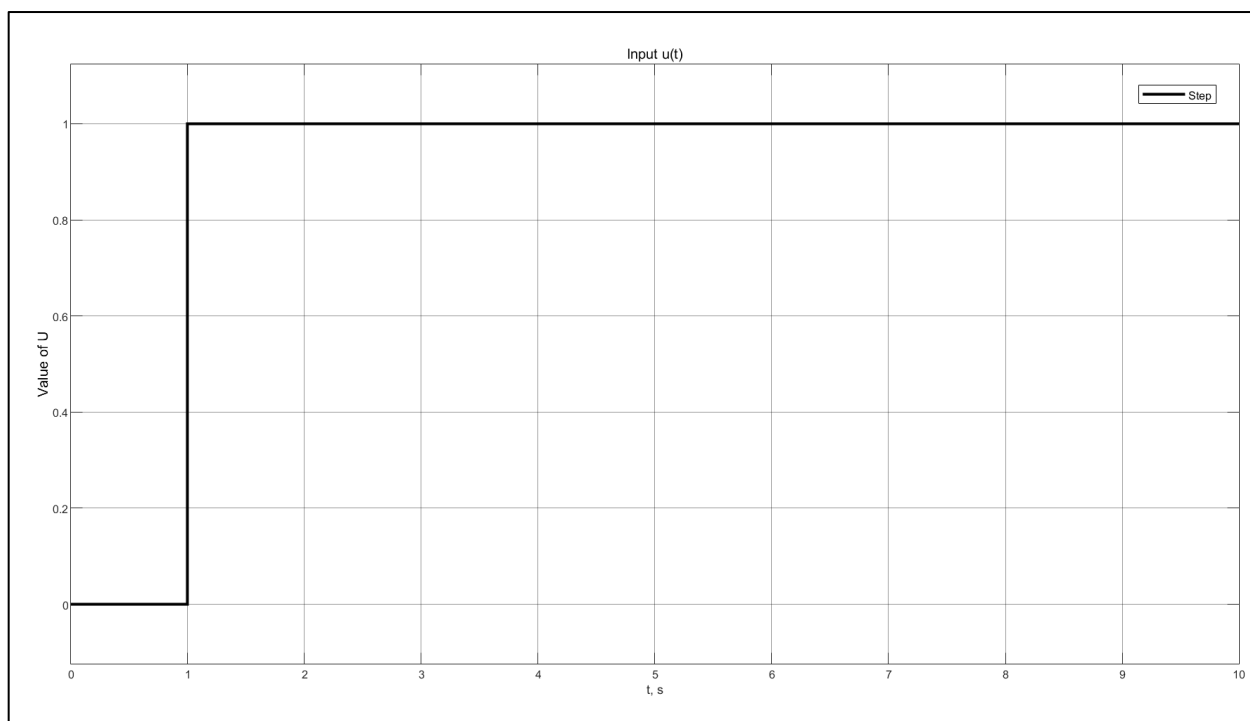


Рисунок 12 – График входного значения  $u(t)$  задания №4

На рисунке 13 построен график выхода  $y(t)$ .



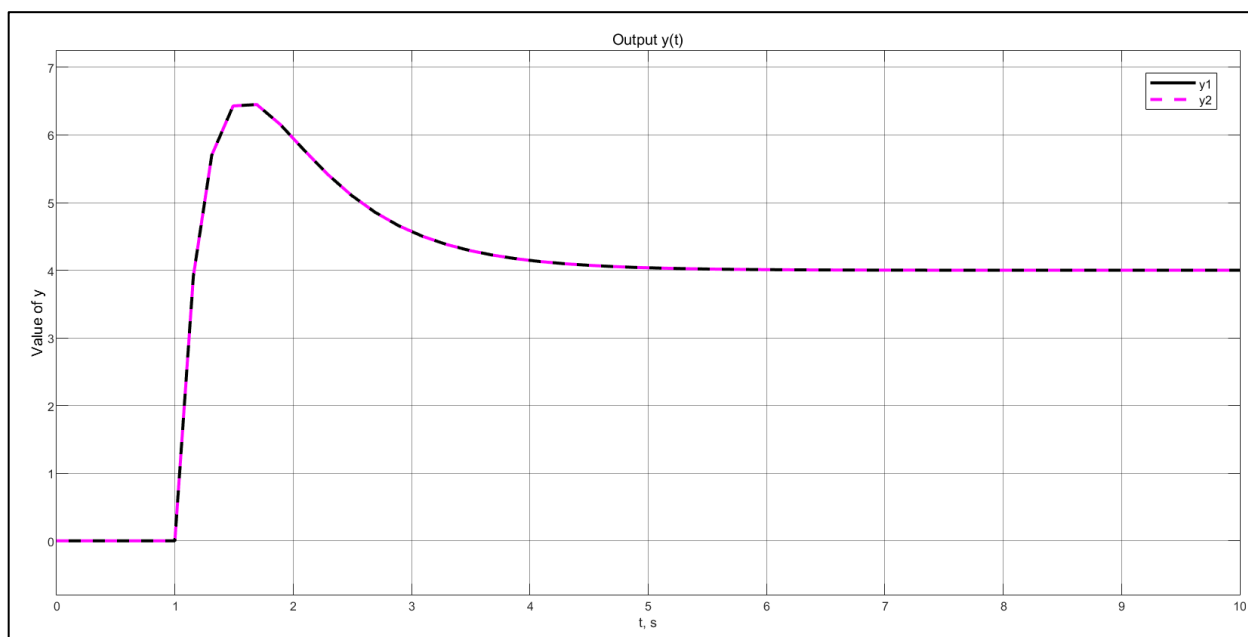


Рисунок 13 – График выхода  $y(t)$  системы в форме В-С-В

## 5 Выполнение задания №5 «Многоканальная система в форме вход-состояние-выход»

### 5.1 Условие задания №5 «Многоканальная система в форме вход-состояние-выход»

Возьмите матрицы  $A$ ,  $B$  и  $C$  из таблицы 4 в соответствии с вашим вариантом и рассмотрите систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx \end{cases}$$

Выполните моделирование при входных воздействиях  $u_1(t) = 1(t)$  и  $u_2(t) = 2 \sin(t)$  и нулевом начальном значении вектора состояния. Приведите в отчете схему моделирования и графики входных воздействий  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  и выходов  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ .

## 5.2 Аналитика по полученным графикам и промежуточные результаты по заданию №5 «Многоканальная система в форме вход-состояние-выход»

Смоделировать многоканальную систему можно двумя способами. Первый из них – построить график через блок «Пространство состояний» или, в свою очередь, разделить блок на более мелкие блоки, как показано на рисунке 14.

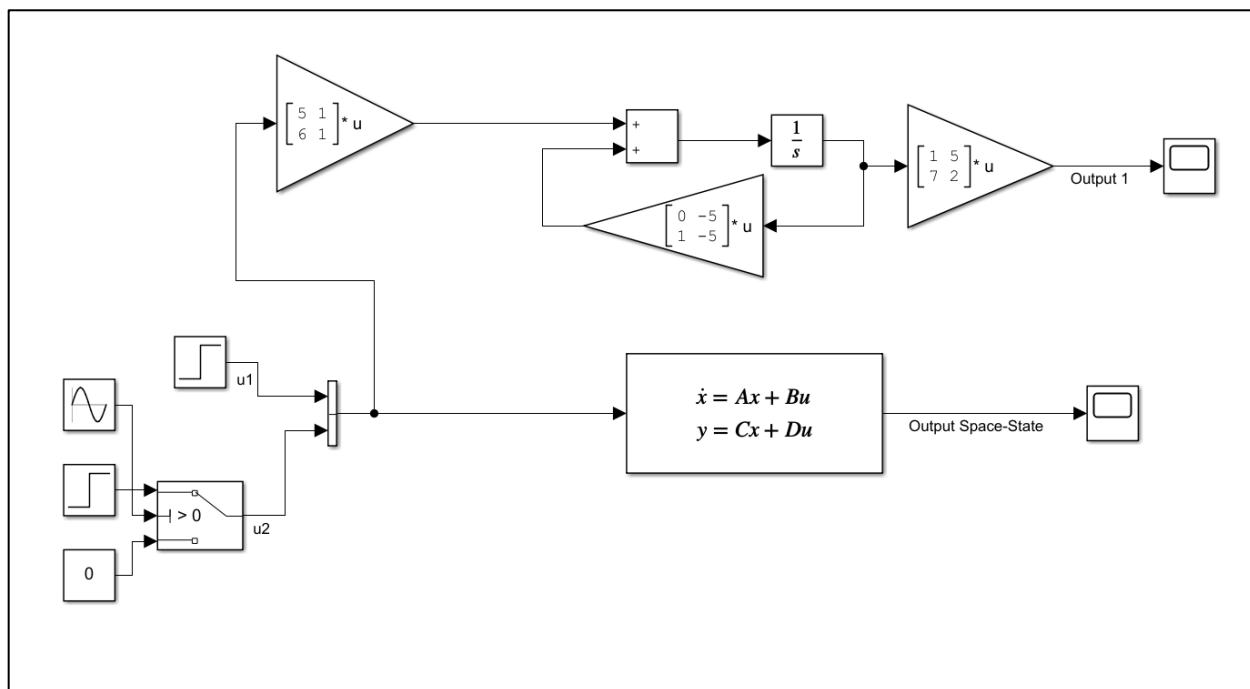


Рисунок 14 – Схема многоканальной системы в форме В-С-В

Графики входных воздействий  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  представлены на рисунке 15.

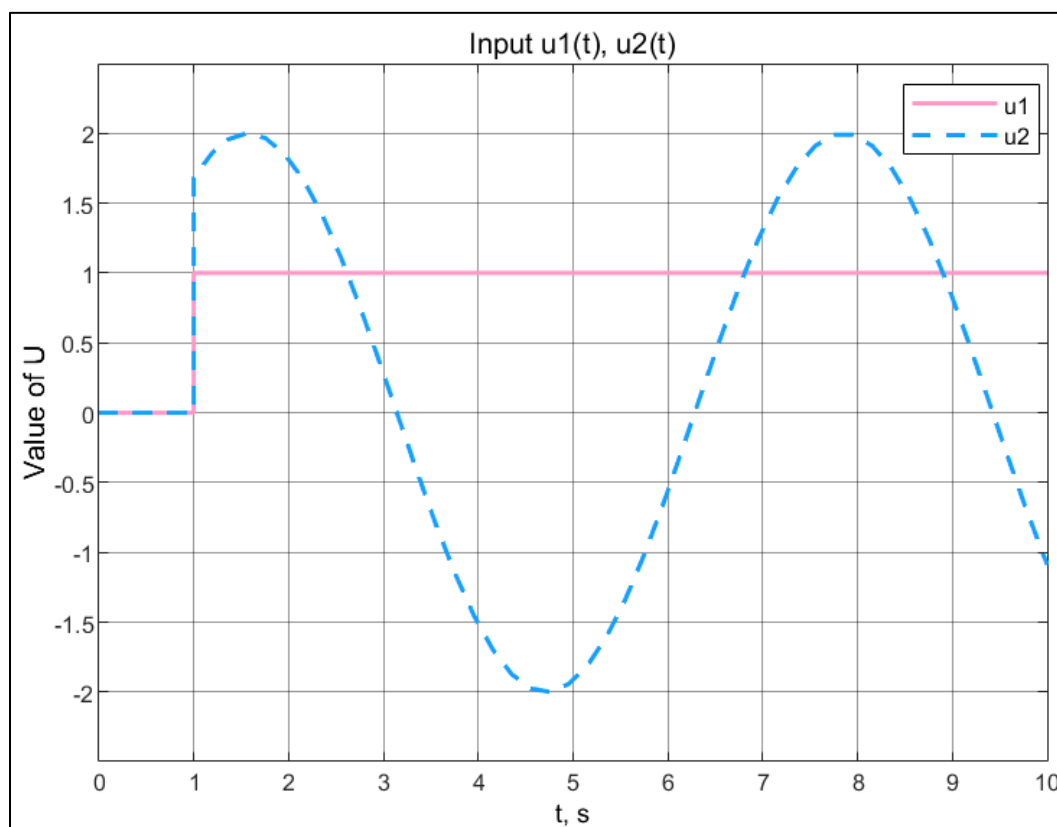


Рисунок 15 – Графики входных воздействий  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  задания №5

Графики выходов  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  построены на рисунке 16.

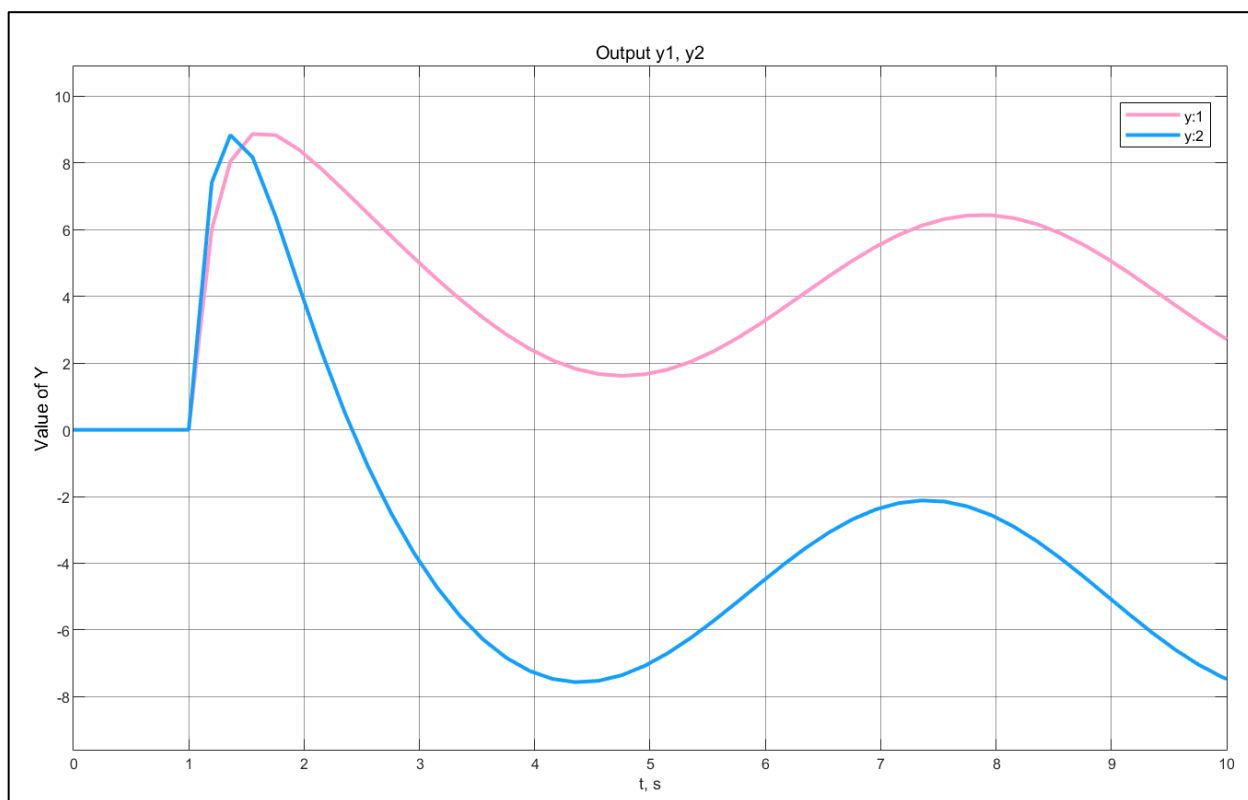


Рисунок 13 – Графики выходов  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$

Графики выходов  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  блока State-Space построены на рисунке 14.

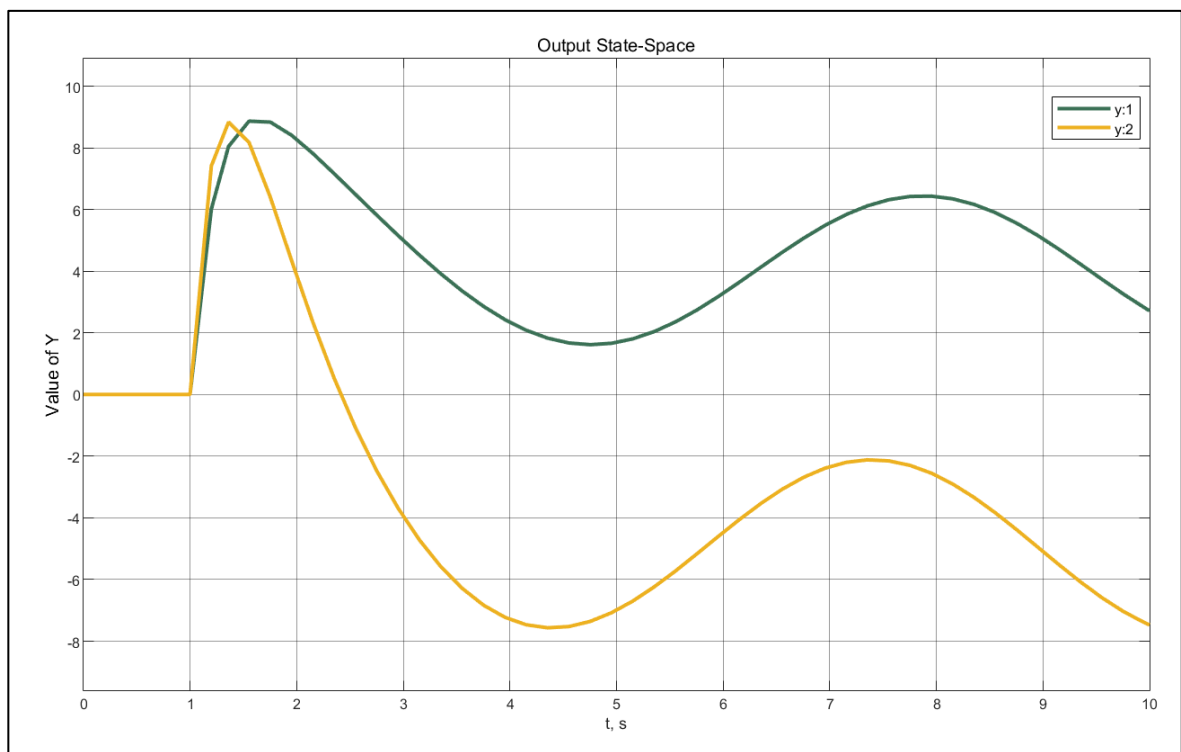


Рисунок 14 – Графики выходов  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  блока State-Space

### 5.3 Дополнительное решение задания №5 «Многоканальная система в форме вход-состояние-выход»

Чтобы убедиться, что система пространства состояний хорошо смоделирована, было решено построить график многоканальной системы с использованием матрицы передачи. Для этого необходимо было перейти от формы В-С-В к форме В-В.

Это возможно по следующей формуле:

$$W(s) = C (SI - A)^{-1} B + D \quad (7)$$

Где  $G(s)$  – это матрица передачи в пространстве Лапласа

$s$  – комплексная переменная Лапласа

$I$  – это единичная матрица

$A, B, C, D$  – матрицы пространства состояния системы

Решение:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$W(s) = C (SI - A)^{-1} B + D$$

$$(SI - A) = \begin{bmatrix} s & 5 \\ -1 & s + 5 \end{bmatrix}$$

$$(SI - A)^{-1} = \frac{1}{s(s+5)+5} * \begin{bmatrix} s+5 & -5 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

$$W(s) = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} * \frac{1}{s(s+5)+5} * \begin{bmatrix} s+5 & -5 \\ 1 & s \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{35s+20}{s^2+5s+5} & \frac{6s+5}{s^2+5s+5} \\ \frac{47s-25}{s^2+5s+5} & \frac{9s+2}{s^2+5s+5} \end{bmatrix}$$

Схема моделирования при входных воздействиях  $u_1(t) = 1(t)$  и  $u_2(t) = 2 \sin(t)$  и нулевом начальном значении вектора состояния представлена на рисунке 15.

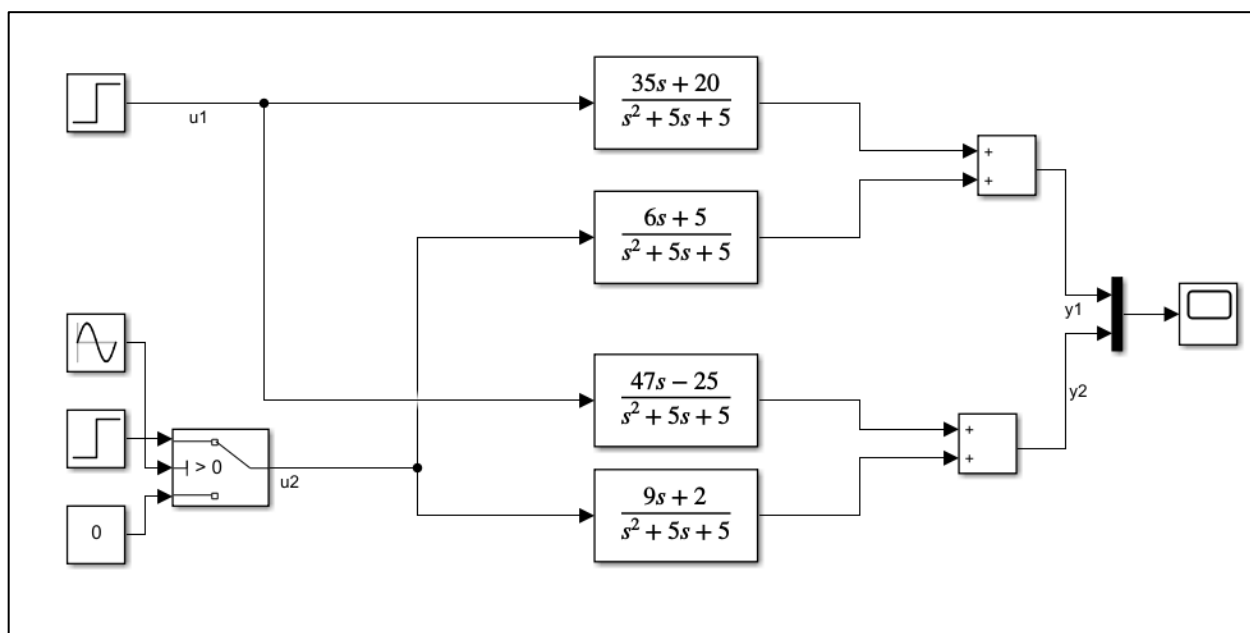


Рисунок 15 – Схема моделирования трансферной матрицы

Построенные графики выходов  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  передаточной матрицы показаны на рисунке 16.

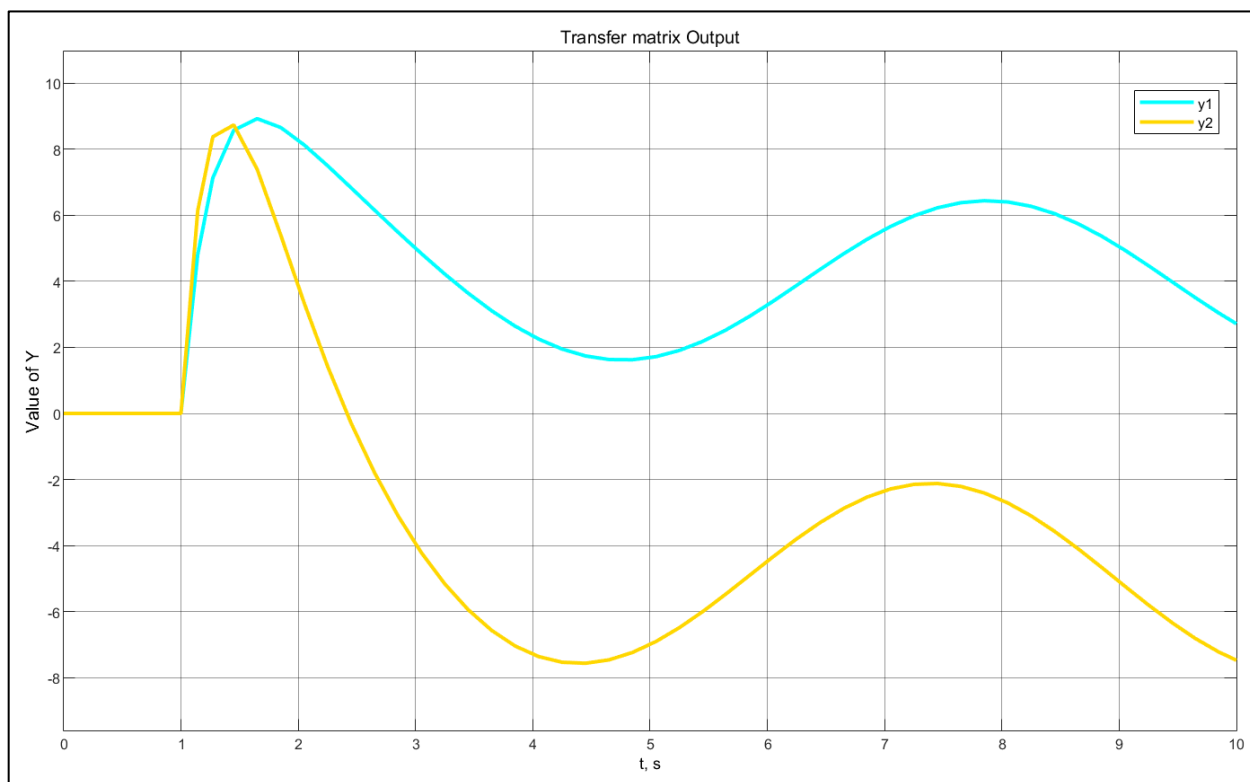


Рисунок 16 – Графики выходов  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  передаточной матрицы

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе проведено моделирование передаточной функции, системы пространства состояний и матрицы передачи с использованием программного средства Matlab. Были выполнены все необходимые расчеты для демонстрации данных концепций.

Проведенные исследования являются чрезвычайно важными для теории автоматического управления. Моделирование передаточной функции позволяет анализировать и предсказывать поведение системы при различных входных воздействиях, что является ключевым аспектом в проектировании систем управления. Системы пространства состояний, в свою очередь, позволяют более полно и гибко описывать динамику системы и рассматривать ее в контексте множества состояний и входов. А матрица передачи представляет собой мощный инструмент для анализа и синтеза линейных систем управления.

Эти концепции и методы являются фундаментальными для инженеров в области автоматического управления и находят широкое применение в разработке и управлении различными техническими системами, начиная от роботов и автомобилей и заканчивая производственными процессами и энергетическими установками. Важность и актуальность данных концепций только усиливается с развитием современных технологий и автоматизации процессов в различных отраслях промышленности.