Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Национальный исследовательский университет ИТМО»

(Университет ИТМО)

Дисциплина: Теория автоматического управления

Отчет
по лабораторной работе №7:
«Управляемость и наблюдаемость»

Выполнил:

Самбрано Браво Рикардо Хосе,

студент гр. R33352

Преподаватель:

Пашенко Артем Витальевич,

фак. СУиР

Санкт-Петербург,

2023 г.

Содержание

Управляемость и наблюдаемость

Задание 1. Возьмите матрицы A и B из таблицы 1 в соответствии с вашим вариантом и рассмотрите систему

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1}$$

a. Найдите матрицу управляемости системы, определите её ранг, сделайте вывод об управляемости системы.

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}^2 * \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 7 & -13 \\ -8 & 7 & -8 \\ 8 & -3 & 12 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 \\ -7 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 8 & -19 \\ -1 & 3 & -7 \\ 3 & -7 & 15 \end{bmatrix}$$

$$rank\ U = rank \begin{bmatrix} -3 & 8 & -19 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 3$$

Делается вывод о полной управляемости системы, поскольку ранг матрицы управляемости равен 3, как и n.

b. Найдите собственные числа матрицы A и жорданову форму системы. Определите управляемость каждого собственного числа двумя способами: на основе жордановой формы и с помощью рангового критерия.

Способ 1:

$$\det(A-\lambda I)=0 \tag{4}$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -3 & 2\\ -2 & 1 & -4\end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I)=\begin{bmatrix}1-\lambda & -2 & 3\\ 2 & -3-\lambda & 2\\ -2 & 1 & -4-\lambda\end{bmatrix}=\lambda^3-6\lambda^2-13\lambda-10=\ -(\lambda+2)(\lambda^2+4\lambda+5)$$

$$\det(A-\lambda I)=-(\lambda+2)*\big(\lambda+(2+i)\big)*\big(\lambda+(2-i)\big)=0$$

$$\lambda_1=\ -2$$

$$\begin{bmatrix}1-\lambda & -2 & 3\\ 2 & -3-\lambda & 2\\ -2 & 1 & -4-\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -2 & 3\\ 2 & -1 & 2\\ -2 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

Nullspace = $\left\{\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\right\}$ = *eigenvector*

$$\lambda_2=\ -2-i$$

$$\begin{bmatrix}1-\lambda & -2 & 3\\ 2 & -3-\lambda & 2\\ -2 & 1 & -4-\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+i & -2 & 3\\ 2 & -1+i & 2\\ -2 & 1 & -2+i\end{bmatrix}$$

Nullspace = $\left\{\begin{bmatrix}-1.5+0.5i\\ -1\\ 1\end{bmatrix}\right\}$ = *eigenvector*

$$\lambda_3=\ -2+i$$

$$\begin{bmatrix}1-\lambda & -2 & 3\\ 2 & -3-\lambda & 2\\ -2 & 1 & -4-\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-i & -2 & 3\\ 2 & -1-i & 2\\ -2 & 1 & -2-i\end{bmatrix}$$

Nullspace = $\left\{\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}-\frac{i}{2}\\ -1\\ 1\end{bmatrix}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}-1.5-0.5i\\ -1\\ 1\end{bmatrix}\right\}$ = *eigenvector*

Получаем следующую матрицу перехода:

$$P=\begin{bmatrix}-1 & -1.5+0.5i & -1.5-0.5i\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \tag{5}$$

Теперь мы можем определить жорданову форму системы:

$$\begin{cases}\hat{\dot{x}}=P^{-1}APx+P^{-1}Bu\\ y=CP\,\hat{x}\end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\widehat{x_1}} \\ \dot{\widehat{x_2}} \\ \dot{\widehat{x_3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2-i & 0 \\ 0 & 0 & -2+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{x_1} \\ \widehat{x_2} \\ \widehat{x_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0.5-i \\ 0.5+i \end{bmatrix} u$$

Система в жордановой форме полностью управляема тогда и только тогда, когда

- ✓ Все жордановы клетки относятся к различным собственным числам.
- ✓ Элементы матрицы входных воздействий, соответствующие последним строкам жордановых клеток, не равны нулю.

Способ 2:

Переходим к проверке, управляемо ли каждое из собственных значений с помощью рангового критерия.

Собственное число λ матрицы A называется управляемым, если:

$$rank\,[A - \lambda I \;\; B] = n$$

$$\lambda_1 = -2$$

$$rank\,[A - 2I \;\; B] = rank \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = 3 = n$$

$$\lambda_1 = -2 - i$$

$$rank\,[A - [(-2-i)I] \;\; B] = rank \begin{bmatrix} 3+i & -2 & 3 & -3 \\ 2 & -1+i & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2+i & 3 \end{bmatrix} = 3 = n$$

$$\lambda_1 = -2 + i$$

$$rank\,[A - [(-2+i)I] \;\; B] = rank \begin{bmatrix} 3-i & -2 & 3 & -3 \\ 2 & -1-i & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2-i & 3 \end{bmatrix} = 3 = n$$

Можно сделать вывод, что в обоих случаях система управляема, как и каждое из собственных значений.

c. Принадлежит ли точка x_1 из таблицы 1 управляемому подпространству системы?

$$x = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$[C \quad x^*] = [B\ AB\ A^2B\ X_*] \tag{7}$$

$$[C \quad x^*] = \begin{bmatrix} -3 & 8 & -19 & 4 \\ -1 & 3 & -7 & 3 \\ 3 & -7 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$rank\ [C \quad x^*] = rank \begin{bmatrix} -3 & 8 & -19 & 4 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -16 & -4 \end{bmatrix} = 3$$

Да, точка принадлежит

d. Найдите Грамиан управляемости системы относительно времени $t_1 = 3$, вычислите его собственные числа.

Грамиан управляемости системы относительно времени $t_1 = 3$:

$$P(t_1) = \left(\int_0^{t_1} e^{At}BB^Te^{A^Tt}dt\right) = \left(\int_0^{t_1} e^{A(t_1-t)}BB^Te^{A^{(t_1-t)}}dt\right) \tag{8}$$

$$P(3) = \begin{bmatrix} 1.5956 & 0.4779 & -1.7139 \\ 0.4779 & 0.1500 & -0.5029 \\ -1.7132 & -0.5029 & 1.8559 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1.5956 - \lambda & 0.4779 & -1.71 \\ 0.4779 & 0.15 - \lambda & -0.50 \\ -1.7132 & -0.5029 & 1.855 - \lambda \end{vmatrix}$$
$$= \lambda^3 + \frac{7203}{2000}\lambda^2 - \frac{3132399}{50000000}\lambda - \frac{13222909}{1000000000000}$$

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = 0{,}017; \quad \lambda_3 = 3{,}584$$

e. Найдите управление, переводящее систему из $x(0) = 0$ в $x(t_1) = x_1$ за время $t_1 = 3$.

$$u(t) = B^Te^{A^T(t_1-t)}\left(P(t_1)\right)^{-1}x_1 \tag{9}$$

$$u(t) = [-3 \quad -1 \quad 3]\, e^{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}(3-t)} \begin{bmatrix} 1404.1823 & -1406.2994 & 914.82114 \\ -1581.4117 & 1652.6989 & -1011.835 \\ 867.694 & -850.3313 & 570.93112 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$u(t) = [(21250600000 * \exp(2 * t) - 21369380000 * \exp(2) * \cos(171.887 - t)\ 4467450000 * \exp(2) * \sin(171.887 - t))/(19181981 * \exp(6))]$$

f. Выполните моделирование системы с рассчитанным управлением, постройте графики компонент вектора $x(t)$ до времени $t_1 = 3$, а также график сигнала управления $u(t)$.

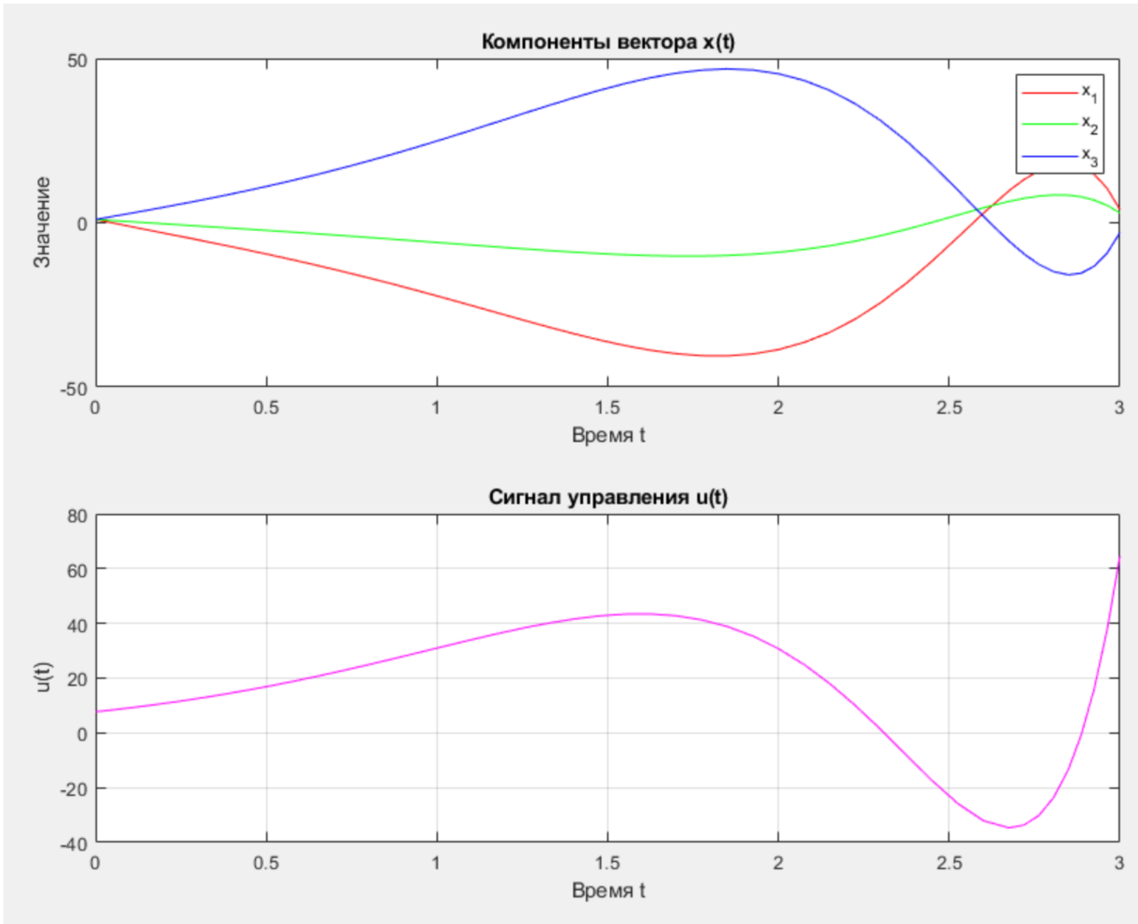

Figure 1 - Входной сигнал u(t) и реакция системы на этот вход за 3 секунды.

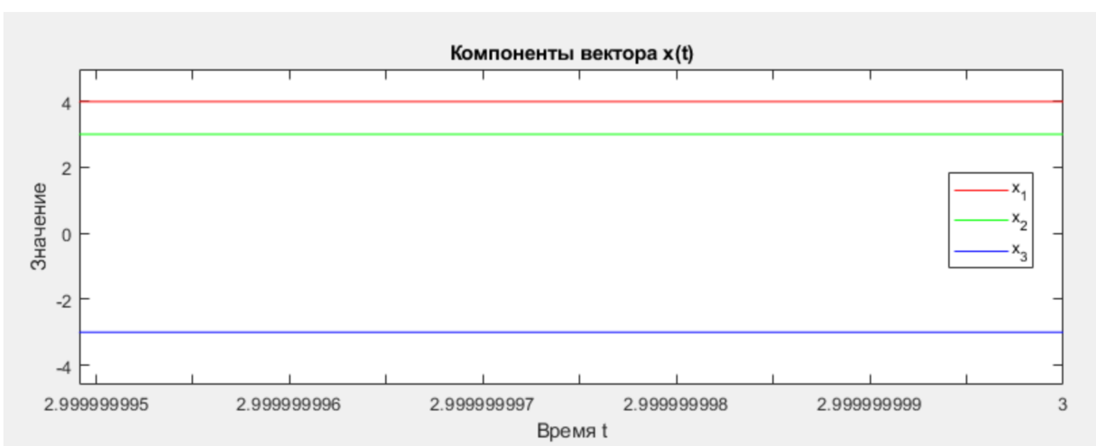

Figure 2 - Выход y(t) через 3 секунды после масштабирования.

Задание 2.

Возьмите матрицы A и B из таблицы 2. Проверьте обе точки $x_1{}'$ и $x_1{}''$ из таблицы 2 на принадлежность управляемому подпространству системы. В качестве целевой точки x_1 возьмите ту из них, которая принадлежит управляемому подпространству системы. Выполните все шаги задания 1 для этих матриц A, B и точки x_1, включая поиск соответствующего управляющего воздействия и моделирование.

Решение:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x_1' = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$x''_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

2.1 Переходим к расчету матрицы управляемости:

$$U = [B \quad AB \quad A^2B]$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}^2 * \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -9 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$U = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -7 \\ 1 & 1 & -9 \\ -1 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$rank\ U = rank \begin{bmatrix} 5 & 0 & -25 \\ 0 & 5 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2\ != n$$

Система не полностью управляема.

2.2 Переходим к определению, какие собственные значения управляемы, а какие нет.

$$rank\,[A-\lambda I\ \ B] = n$$

$$\lambda_1 = -2$$

$$rank\,[A-2I\ \ B] = rank\begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = 2\,!= n$$

Собственное значение $\lambda_1 = -2$ не управляемо.

$$\lambda_1 = -2-i$$

$$rank\,[A-[(-2-i)I]\ \ B] = rank\begin{bmatrix} 3+i & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -1+i & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2+i & -1 \end{bmatrix} = 3 = n$$

$$\lambda_1 = -2+i$$

$$rank\,[A-[(-2+i)I]\ \ B] = rank\begin{bmatrix} 3-i & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -1-i & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2-i & -1 \end{bmatrix} = 3 = n$$

Теперь мы можем определить жорданову форму системы:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = P^{-1}APx + P^{-1}Bu \\ y = CP\,\hat{x} \end{cases}$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1.5+0.5i & -1.5-0.5i \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\widehat{x_1}} \\ \dot{\widehat{x_2}} \\ \dot{\widehat{x_3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2-i & 0 \\ 0 & 0 & -2+i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \widehat{x_1} \\ \widehat{x_2} \\ \widehat{x_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i \\ -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i \end{bmatrix}u$$

Наша система имеет диагональную форму, поэтому:

Система полностью управляема тогда и только тогда, когда

- ☹ Все элементы матрицы $P^{-1}B$ не равны нулю.
- ☹ Система не полностью управляема.

2.3 Проверяем принадлежность точки к системе подпространства

$$x_1' = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -7 \\ 1 & 1 & -9 \\ -1 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$[C \quad x_1'] = [B\ AB\ A^2B\ x_1'] \tag{10}$$

$$[C \quad x_1'] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -7 & 4 \\ 1 & 1 & -9 & 3 \\ -1 & -1 & 9 & -3 \end{bmatrix}$$

$$rank\ [C \quad x_1'] = rank \begin{bmatrix} 5 & 0 & -25 & 10 \\ 0 & 5 & -20 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \ 2$$

$$x''_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$[C \quad x_1''] = [B\ AB\ A^2B\ x_1''] \tag{11}$$

$$[C \quad x_1''] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -7 & 3 \\ 1 & 1 & -9 & 3 \\ -1 & -1 & 9 & -2 \end{bmatrix}$$

$$rank\ [C \quad x_1''] = rank \begin{bmatrix} 5 & 0 & -25 & 0 \\ 0 & 5 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 3$$

Можно заключить, что точка $x1'$ принадлежит пространству управляемости, поскольку она имеет тот же ранг, что и матрица управляемости. $rank\ [C \quad x_1'] = rank\ C = 2$

2.4 Грамиан управляемости системы относительно времени t_1 = 3:

$$P(t_1) = \left(\int_0^{t_1} e^{At}BB^Te^{A^Tt}dt\right) = \left(\int_0^{t_1} e^{A(t_1-t)}BB^Te^{A^{(t_1-t)}}dt\right) \tag{12}$$

$$P(3) = \begin{bmatrix} 3.6250 & 1.6250 & -1.6250 \\ 1.6250 & 0.7500 & -0.7500 \\ -1.6250 & -0.7500 & 0.7500 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = 0.0307; \quad \lambda_3 = 5.0943$$

2.5 Вычисляем u(t):

Поскольку матрица вырождена, determinant грамиана будет равен 0. Это означает, что нам придется использовать псевдообратную матрицу $A^{+} = (A^T A)^{-1} A^T$, чтобы иметь возможность найти u(t).

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_1 - t)} \left(P(t_1)\right)^{+} x_1 \tag{13}$$

$$u(t) = [3 \quad 1 \quad -1]\, e^{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}(3-t)} \left(P(t_1)\right)^{+} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$u(t) = \left[\frac{55362116 * e^{(2t)} - 55716687 * e^2 * \cos(3rad - t) - 11614934e^2 * \sin(3\,rad - t)}{50000 * e^6}\right]$$

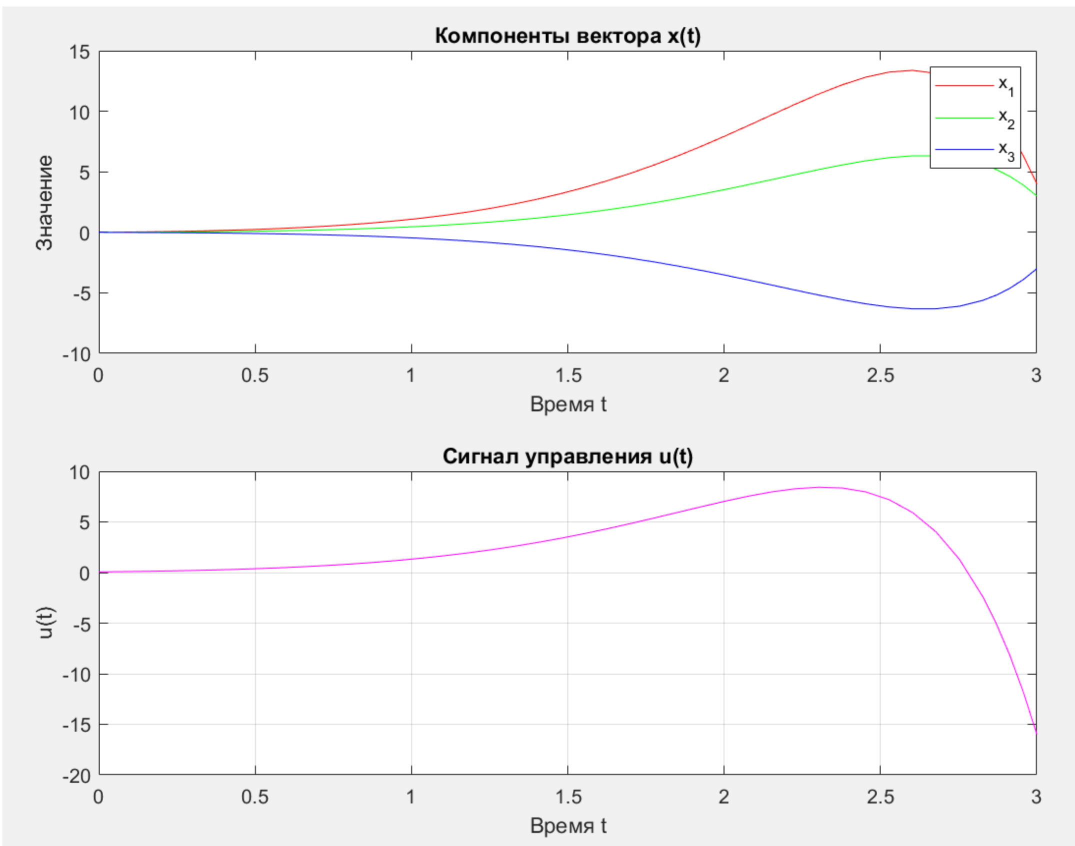

Figure 3 - Входной сигнал u(t) и реакция системы на этот вход за 3 секунды.

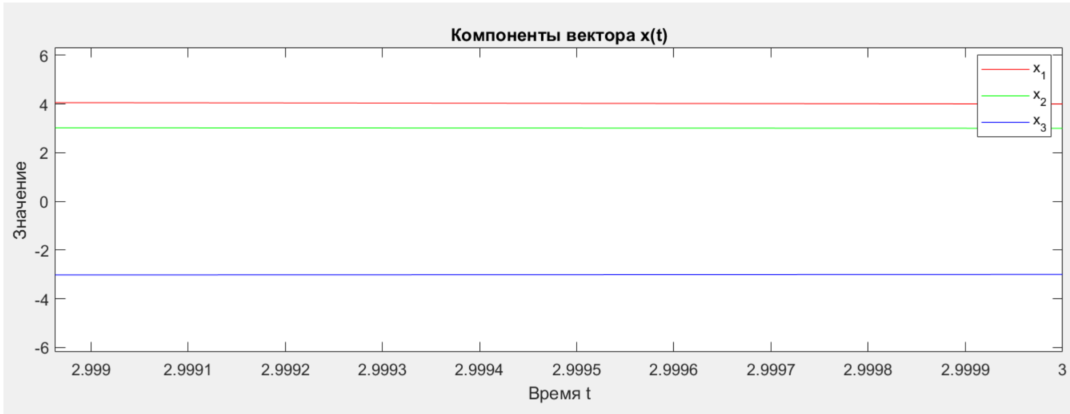

Figure 4 – Выход y(t) через 3 секунды после масштабирования.

Задание 3.

Возьмите матрицы A и C из таблицы 3 в соответствии с вашим вариантом и рассмотрите систему

$$\dot{x} = Ax, \quad y = Cx \tag{14}$$

Выполните следующие шаги и приведите в отчёте результаты всех вычислений, схемы моделирования, графики и выводы:

a. Найдите матрицу наблюдаемости системы, определите её ранг, сделайте вывод о наблюдаемости системы.

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 0 & -10 \\ -4 & -1 & -6 \\ 6 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Используя матрицу наблюдаемости, можно определить, является ли система полностью наблюдаемой или нет.

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$CA = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -9 & 0 & -10 \\ -4 & -1 & -6 \\ 6 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$CA^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -9 & 0 & -10 \\ -4 & -1 & -6 \\ 6 & -2 & 5 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 6 & 11 & 18 \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \\ 6 & 11 & 18 \end{bmatrix}$$

$$rank\ O = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \\ 6 & 11 & 18 \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} -40 & 0 & 0 \\ 0 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & -40 \end{bmatrix} = 3$$

Система полностью наблюдаема

b. Найдите собственные числа матрицы A и жорданову форму системы. Определите наблюдаемость каждого собственного числа двумя способами: на основе жордановой формы и с помощью рангового критерия

Способ 1:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 0 & -10 \\ -4 & -1 & -6 \\ 6 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} -9-\lambda & 0 & -10 \\ -4 & -1-\lambda & -6 \\ 6 & -2 & 5-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 - 5\lambda^2 - 7\lambda + 13 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 6\lambda + 13)$$

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1) * \big(\lambda + (3 + 2i)\big) * \big(\lambda + (3 - 2i)\big) = 0$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\begin{bmatrix} -9-\lambda & 0 & -10 \\ -4 & -1-\lambda & -6 \\ 6 & -2 & 5-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 & -10 \\ -4 & -2 & -6 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$Nullspace = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = eigenvector$$

$$\lambda_2 = -3 - 2i$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 & 3 \\ 2 & -3-\lambda & 2 \\ -2 & 1 & -4-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6+2i & 0 & -10 \\ -4 & 2+2i & -6 \\ 6 & -2 & 8+2i \end{bmatrix}$$

$$Nullspace = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} - \frac{i}{2} \\ -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = eigenvector$$

$$\lambda_3 = -3 + 2i$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 & 3 \\ 2 & -3-\lambda & 2 \\ -2 & 1 & -4-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6-2i & 0 & -10 \\ -4 & 2-2i & -6 \\ 6 & -2 & 8-2i \end{bmatrix}$$

$$Nullspace = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} + \frac{i}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = eigenvector$$

Получаем следующую матрицу перехода:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1.5-0.5i & -1.5+0.5i \\ -1 & -0.5-0.5i & -0.5+0.5i \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Теперь мы можем определить жорданову форму системы:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = P^{-1}APx \\ y = CP\,\hat{x} \end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\widehat{x_1}} \\ \dot{\widehat{x_2}} \\ \dot{\widehat{x_3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3-2i & 0 \\ 0 & 0 & -3+2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{x_1} \\ \widehat{x_2} \\ \widehat{x_3} \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -0.5-0.5i & -0.5+0.5i \end{bmatrix} \hat{x}$$

Система в жордановой форме полностью наблюдаема тогда и только тогда, когда

- ✓ Все жордановы клетки относятся к различным собственным числам.
- ✓ Элементы матрицы выходов, соответствующие первым столбцам жордановых клеток, не равны нулю.

Способ 2:

Переходим к проверке, управляемо ли каждое из собственных значений с помощью рангового критерия.

Собственное число λ матрицы A называется управляемым, если:

$$rank \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} = n$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$rank \begin{bmatrix} A - I \\ C \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} -10 & 0 & -10 \\ -4 & -2 & -6 \\ 6 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 3 = n$$

$$\lambda_2 = -3 - 2i$$

$$rank \begin{bmatrix} A - [(-3-2i)I] \\ C \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} -6+2i & 0 & -10 \\ -4 & 2+2i & -6 \\ 6 & -2 & 8+2i \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 3 = n$$

$$\lambda_3 = -3 + 2i$$

$$rank \begin{bmatrix} A - [(-3+2i)I] \\ C \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} -6-2i & 0 & -10 \\ -4 & 2-2i & -6 \\ 6 & -2 & 8-2i \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 3 = n$$

Можно сделать вывод, что в обоих случаях система наблюдаема, как и каждое из собственных значений.

c. Найдите Грамиан наблюдаемости системы относительно времени $t_1 = 3$, вычислите его собственные числа.

Грамиан находим по следующей формуле:

$$Q(t_1) = \left(\int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt \right) \tag{18}$$

$$Q(t_1) = \begin{bmatrix} 201.8539 & -201.7517 & 201.5658 \\ -201.7517 & 201.7392 & -201.4764 \\ 201.5658 & -201.4764 & 201.3034 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 604.8284, \qquad \lambda_2 = 0.0126, \qquad \lambda_3 = 0.0555$$

d. Представьте, что вам известна следующая информация: выход y системы в течение времени $t \in [0, t_1]$ подчинялся закону $y(t)$, приведенному в таблице 3. Найдите какой-нибудь вектор $x(0)$ начальных условий, которые могла иметь система.

$$y(t) = -3^{-3t} \cos(2t) - 2e^{-3t} \sin(2t) \tag{19}$$

$$x(0) = \left(Q(t_1)\right)^{-1} \int_0^3 e^{A^T t} C^T y(t) dt \tag{20}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} -8 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

e. Могла ли система иметь какие-то другие начальные условия кроме тех, которые вы нашли? Обоснуйте свой ответ.

Система называется (полностью) наблюдаемой, если любым двум траекториям x(t) и x'(t), порождённым различными начальными условиями x (0) = ! x'(0), соответствуют различные выходы y(t) ≡ ! y'(t).

Можно заключить, что по определению не может быть другого начального условия.

f. Выполните моделирование системы с найденными начальными условиями, постройте графики компонент вектора $x(t)$ до времени $t_1 = 3$, а также график сигнала выхода $y(t)$.

$$x(t) \ = \ e^{At}x(0) \tag{21}$$

$$x(t) \ = \ e^{\begin{bmatrix} -9 & 0 & -10 \\ -4 & -1 & -6 \\ 6 & -2 & 5 \end{bmatrix} * t} * \begin{bmatrix} -8 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{-8 \cdot \cos(2t) - \mathrm{sen}(2t)}{e^{3}} \\ \dfrac{-3 \cdot \cos(2t) - 2 \cdot \mathrm{sen}(2t)}{e^{3}} \\ \dfrac{5 \cdot \cos(2t) - \mathrm{sen}(2t)}{e^{3}} \end{pmatrix} \tag{22}$$

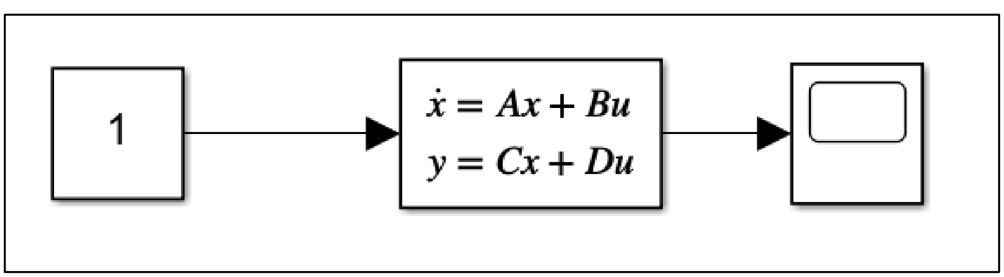

Figure 5 - Моделирование модели пространства состояний в Simulink.

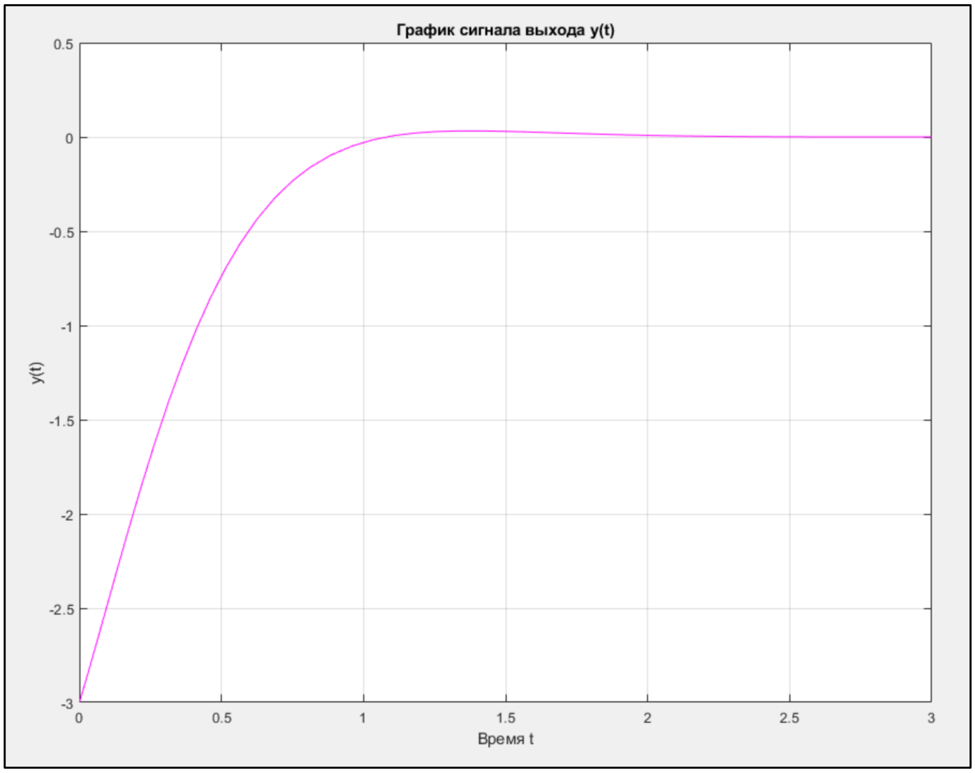

Figure 6 - Выходной график y(t)

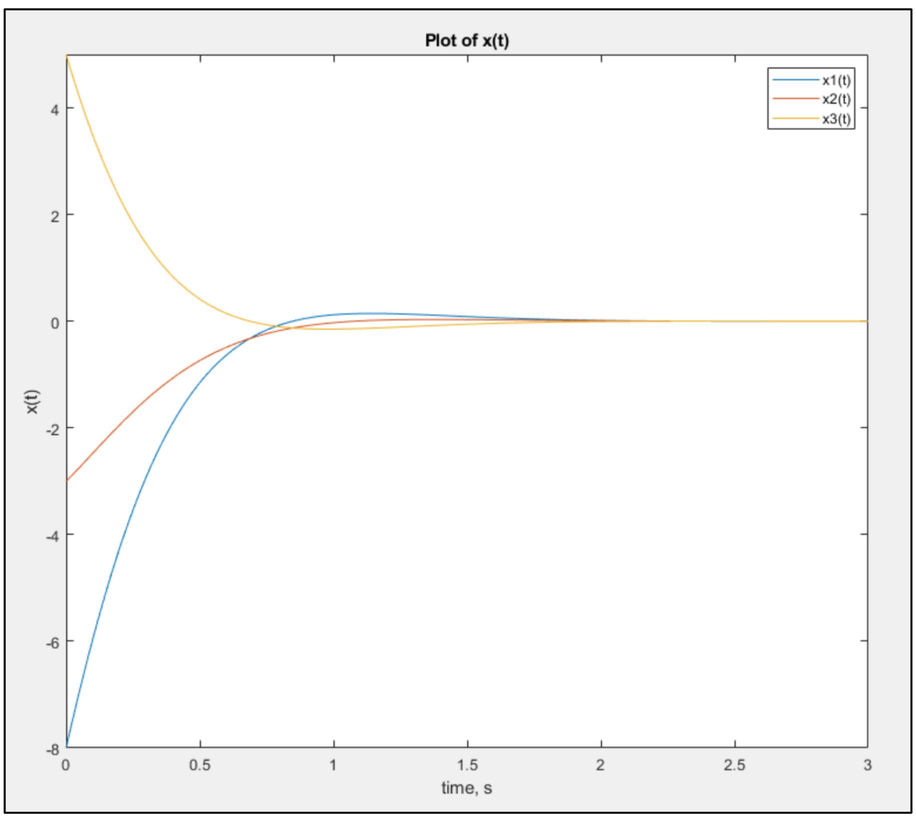

Figure 7 - Выходные графики x1(t), x2(t), x3(t)

Задание 4.

Возьмите матрицы A и C, а также сигнал y(t) из таблицы 4. Выполните все шаги задания 3. Если сигнал y(t) мог быть порожден различными векторами x (0) начальных условий, то приведите хотя бы три таких вектора и выполните требуемое моделирование для каждого из них.

Решение:

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 0 & -10 \\ -4 & -1 & -6 \\ 6 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = -3e^{-3t}\cos(2t) - 2e^{-3t}\sin(2t) \qquad (23)$$

4.1 Находим матрицу наблюдаемости:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -9 & 0 & -10 \\ -4 & -1 & -6 \\ 6 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$CA^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -9 & 0 & -10 \\ -4 & -1 & -6 \\ 6 & -2 & 5 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 5 & 12 & 17 \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -5 \\ 5 & 12 & 17 \end{bmatrix}$$

$$rank\ O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -5 \\ 5 & 12 & 17 \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

Ранг матрицы наблюдаемости равен 2, поэтому система не является полностью наблюдаемой.

4.2 Приступим к вычислению каждого из собственных векторов и каждого из собственных значений чтобы двумя способами убедиться в том, что наша система не является полностью наблюдаемой:

Способ 1:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 0 & -10 \\ -4 & -1 & -6 \\ 6 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} -9-\lambda & 0 & -10 \\ -4 & -1-\lambda & -6 \\ 6 & -2 & 5-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 - 5\lambda^2 - 7\lambda + 13 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 6\lambda + 13)$$

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1) * \big(\lambda + (3 + 2i)\big) * \big(\lambda + (3 - 2i)\big) = 0$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\begin{bmatrix} -9-\lambda & 0 & -10 \\ -4 & -1-\lambda & -6 \\ 6 & -2 & 5-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 & -10 \\ -4 & -2 & -6 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$Nullspace = \left\{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = eigenvector$

$$\lambda_2 = -3 - 2i$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 & 3 \\ 2 & -3-\lambda & 2 \\ -2 & 1 & -4-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6+2i & 0 & -10 \\ -4 & 2+2i & -6 \\ 6 & -2 & 8+2i \end{bmatrix}$$

$Nullspace = \left\{\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} - \frac{i}{2} \\ -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = eigenvector$

$$\lambda_3 = -3 + 2i$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 & 3 \\ 2 & -3-\lambda & 2 \\ -2 & 1 & -4-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6-2i & 0 & -10 \\ -4 & 2-2i & -6 \\ 6 & -2 & 8-2i \end{bmatrix}$$

$Nullspace = \left\{\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} + \frac{i}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = eigenvector$

Получаем следующую матрицу перехода:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1.5-0.5i & -1.5+0.5i \\ -1 & -0.5-0.5i & -0.5+0.5i \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Теперь мы можем определить жорданову форму системы:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = P^{-1}APx \\ y = CP\,\hat{x} \end{cases} \tag{24}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\widehat{x_1}} \\ \dot{\widehat{x_2}} \\ \dot{\widehat{x_3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3-2i & 0 \\ 0 & 0 & -3+2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{x_1} \\ \widehat{x_2} \\ \widehat{x_3} \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & -0.5-0.5i & -0.5+0.5i \end{bmatrix} \hat{x}$$

☹ Элементы матрицы выходов, соответствующие первым столбцам жордановых клеток, равны нулю.

☹ Все элементы матрицы CP не равны нулю (система имеет диагональную форму).

Способ 2:

Переходим к проверке, управляемо ли каждое из собственных значений с помощью рангового критерия.

Собственное число λ матрицы A называется управляемым, если:

$$rank \begin{bmatrix} A-\lambda I \\ C \end{bmatrix} = n$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$rank \begin{bmatrix} A-I \\ C \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} -10 & 0 & -10 \\ -4 & -2 & -6 \\ 6 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 = n$$

Собственное значение $\lambda_1 = 1$ не наблюдаемо.

$$\lambda_2 = -3-2i$$

$$rank \begin{bmatrix} A-[(-3-2i)I] \\ C \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} -6+2i & 0 & -10 \\ -4 & 2+2i & -6 \\ 6 & -2 & 8+2i \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3 = n$$

$$\lambda_3 = -3+2i$$

$$rank \begin{bmatrix} A-[(-3+2i)I] \\ C \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} -6-2i & 0 & -10 \\ -4 & 2-2i & -6 \\ 6 & -2 & 8-2i \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3 = n$$

4.3 Приступаем к вычислению граммиана и собственных значений граммиана наблюдаемости:

$$Q(t_1) = \left(\int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt\right) \tag{25}$$

$$Q(t_1) = \begin{bmatrix} 0.1410 & -0.0385 & 0.1026 \\ -0.0385 & 0.0256 & -0.0128 \\ 0.1026 & -0.0128 & 0.0897 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0.2283, \qquad \lambda_2 = 0, \qquad \lambda_3 = 0.0281$$

4.4 Переходим к расчету начальных условий:

$$y(t) = -3^{-3t}\cos(2t) - 2e^{-3t}\sin(2t) \tag{26}$$

$$x(0) = \left(Q(t_1)\right)^{-1} \int_0^3 e^{A^T t} C^T y(t) dt \tag{27}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Поскольку наша точка принадлежит ненаблюдаемому подпространству, разные начальные условия могут давать одинаковые результаты:

Если два начальных состояния x_0 и x_0' таковы, что

$$(x_0 - x_0') \epsilon\ Nullspace\ O \tag{28}$$

То выход y(t) при x (0) = x_0 будет тождественно равен выходу y(t) при x (0) = x_0'.

$$Null\ space\ O = Null\ space \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -5 \\ 5 & 12 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4.5 Мы переходим к вычислению трех различных начальных условий:

$$x1 = x(0) + Nullspace\ O = \begin{bmatrix} 4.7560 \\ -5.9107 \\ 0.5574 \end{bmatrix}$$

$$x2 = x(0) + Nullspace\ O = \begin{bmatrix} 4.1786 \\ -6.4880 \\ 1.1547 \end{bmatrix}$$

$$x3 = x(0) + Nullspace\ O = \begin{bmatrix} 3.6013 \\ -7.0654 \\ 1.7321 \end{bmatrix}$$

4.6 Переходим к расчету x(t) для каждого начального условия и проводим моделирование

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

$$x_1(t) = e^{\begin{bmatrix} -9 & 0 & -10 \\ -4 & -1 & -6 \\ 6 & -2 & 5 \end{bmatrix} * t} * \begin{bmatrix} 4.7560 \\ -5.9107 \\ 0.5574 \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{-112241 \cdot e^{(t+3)} + 159801 \cdot \cos(2t) + 53932 \cdot \mathrm{sen}(2t)}{10000e^{3}} \\ \dfrac{-112241 \cdot e^{(t+3)} + 53134 \cdot \cos(2t) + 53533 \cdot \mathrm{sen}(2t)}{10000e^{3}} \\ \dfrac{112241 \cdot e^{(t+3)} - 106667 \cdot \cos(2t) - 399 \cdot \mathrm{sen}(2t)}{10000e^{3}} \end{pmatrix}$$

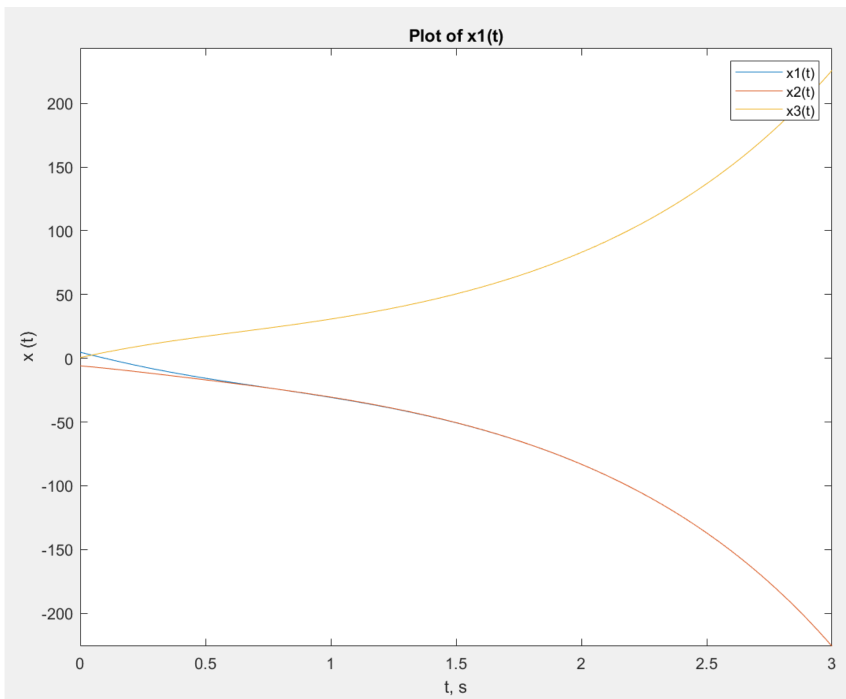

Figure 8 - Графики x(t) с начальными условиями x (0) = $\begin{bmatrix} 4.7560 \\ -5.9107 \\ 0.5574 \end{bmatrix}$

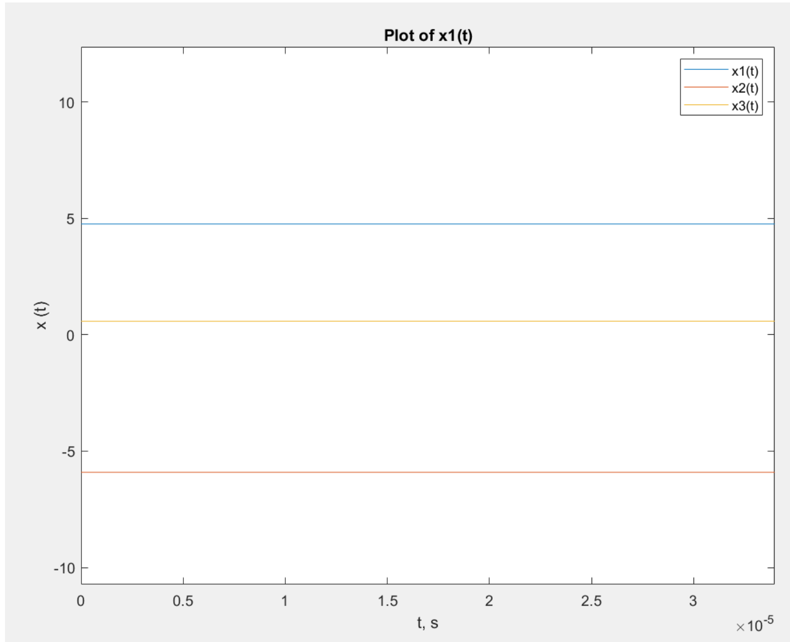

Figure 9 - Графики x(t) с начальными условиями после масштабирования.

$$x_2(t) = e^{\begin{bmatrix} -9 & 0 & -10 \\ -4 & -1 & -6 \\ 6 & -2 & 5 \end{bmatrix} * t} * \begin{bmatrix} 4.1786 \\ -6.4880 \\ 1.1547 \end{bmatrix}$$

$$x_2(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{-118213 \cdot e^{(t+3)} + 159999 \cdot \cos(2t) + 53333 \cdot \mathrm{sen}(2t)}{10000 e^{3}} \\ \dfrac{-118213 \cdot e^{(t+3)} + 53333 \cdot \cos(2t) + 53333 \cdot \mathrm{sen}(2t)}{10000 e^{3}} \\ \dfrac{118213 \cdot e^{(t+3)} - 106666 \cdot \cos(2t)}{10000 e^{3}} \end{pmatrix}$$

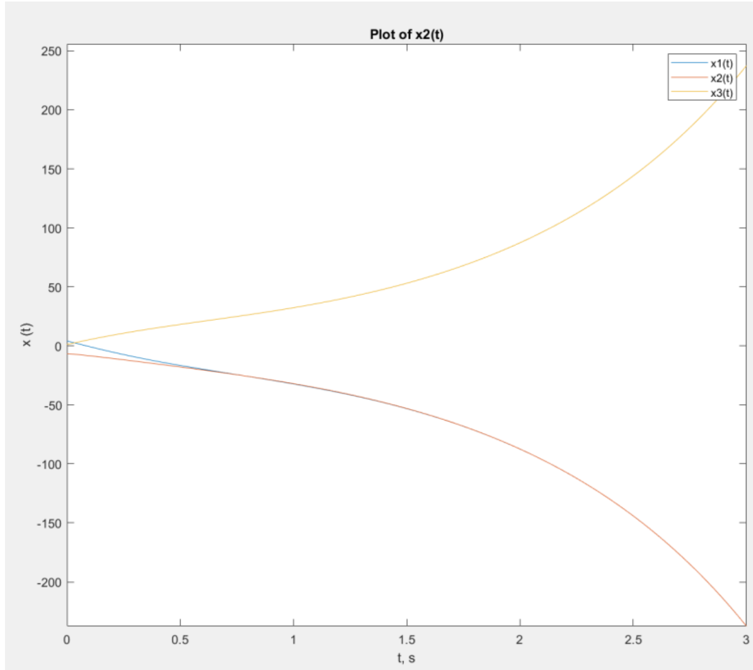

Figure 10 - Графики x(t) с начальными условиями x (0) = $\begin{bmatrix} 4.1786 \\ -6.4880 \\ 1.1547 \end{bmatrix}$

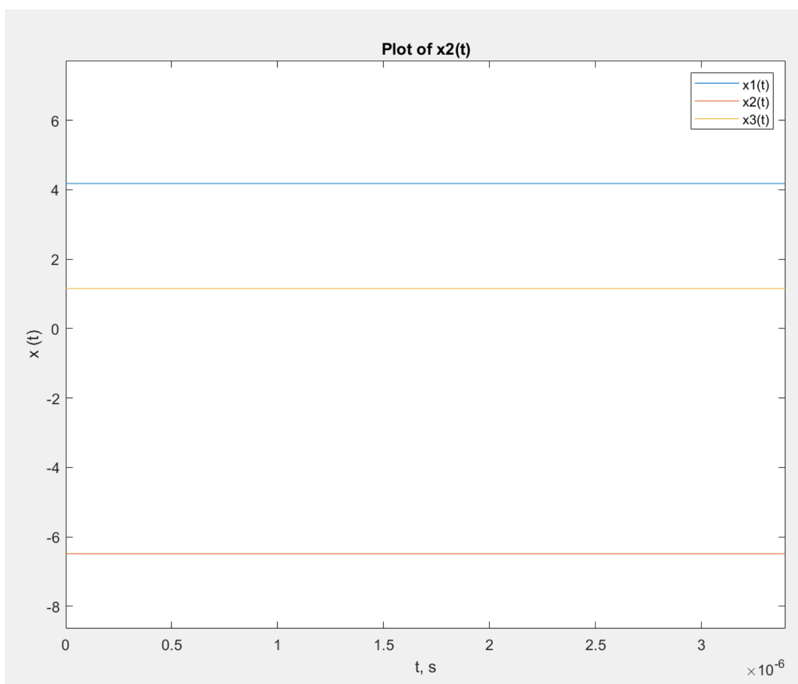

Figure 11 - Графики x(t) с начальными условиями после масштабирования.

$$x_3(t) = e^{\begin{bmatrix} -9 & 0 & -10 \\ -4 & -1 & -6 \\ 6 & -2 & 5 \end{bmatrix} * t} * \begin{bmatrix} 3.6013 \\ -7.0654 \\ 1.7321 \end{bmatrix}$$

$$x_3(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{-123988 \cdot e^{(t+3)} + 160001 \cdot \cos(2t) + 53332 \cdot \mathrm{sen}(2t)}{10000e^3} \\ \dfrac{-123988 \cdot e^{(t+3)} + 53334 \cdot \cos(2t) + 53333 \cdot \mathrm{sen}(2t)}{10000e^3} \\ \dfrac{123988 \cdot e^{(t+3)} - 106667 \cdot \cos(2t) + \mathrm{sen}(2t)}{10000e^3} \end{pmatrix}$$

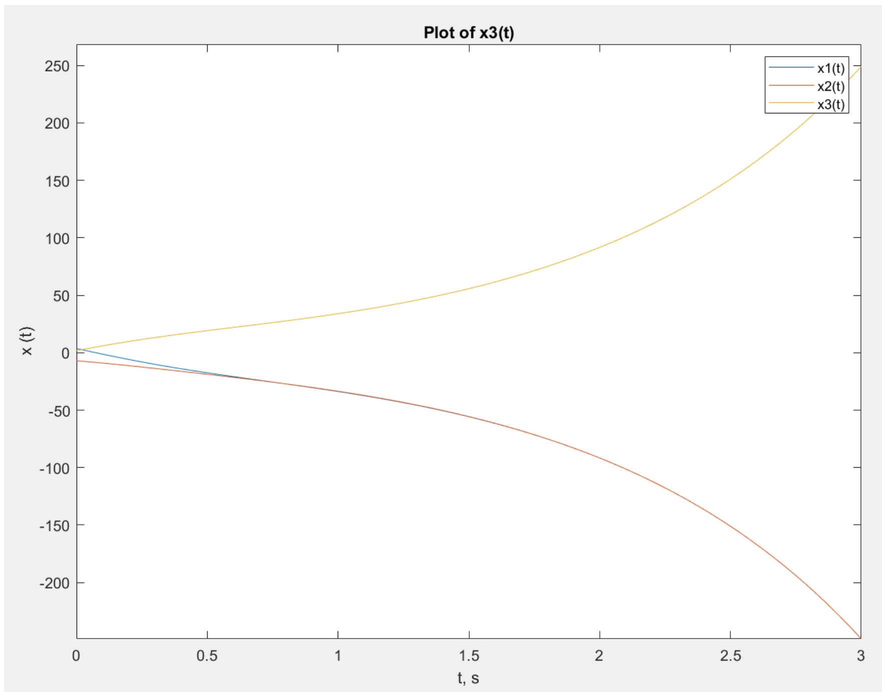

Figure 12 - Графики x(t) с начальными условиями x (0) = $\begin{bmatrix} 3.6013 \\ -7.0654 \\ 1.7321 \end{bmatrix}$

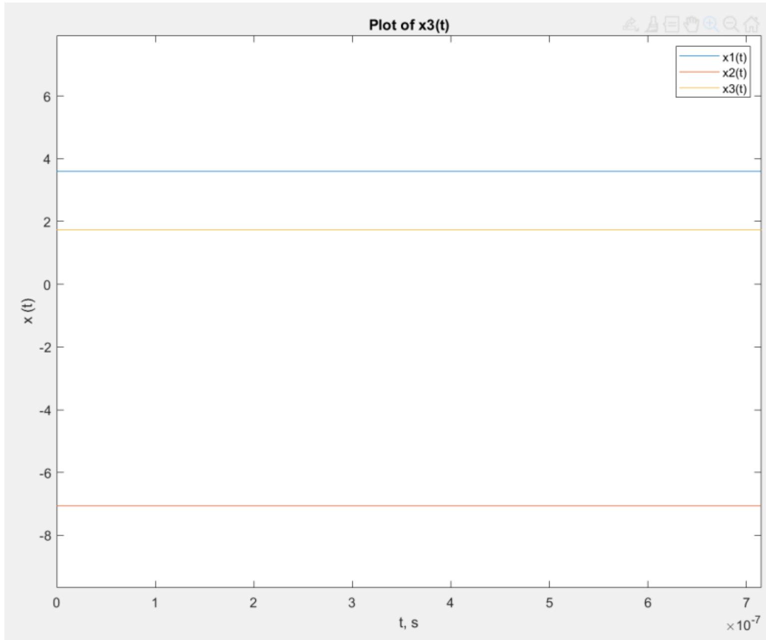

Figure 13 - Графики x(t) с начальными условиями после масштабирования.

Мы приступаем к построению графика y(t) в Simulink с различными начальными условиями, рассчитанными ранее.

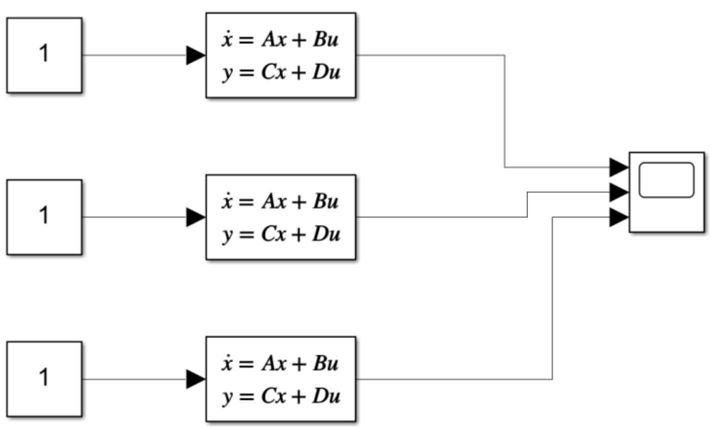

Figure 14 - Моделирование в Simulink с разными начальными условиями.

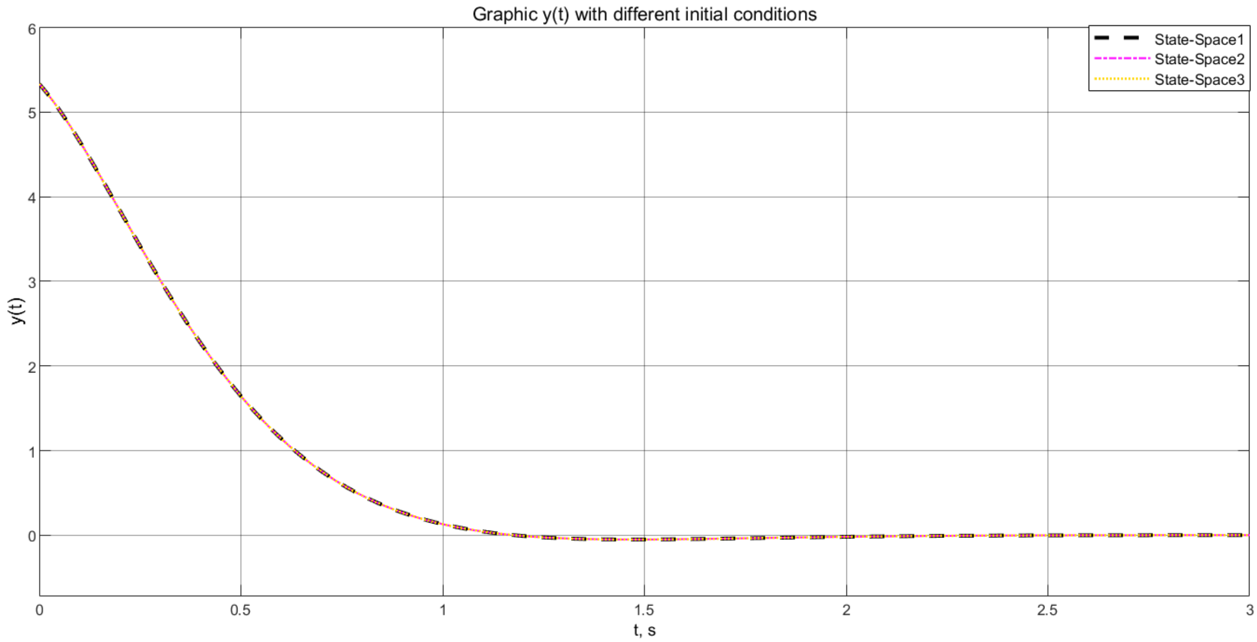

Figure 15 - Выход y(t) с разными начальными условиями.

Как мы можем убедиться, три выхода дают один и тот же результат y(t) для всех случаев.

Заключение

В заключение, изучение управляемости и наблюдаемости в динамических системах является фундаментальным для понимания и анализа их поведения. С помощью инструментов, таких как матрица управляемости и матрица наблюдаемости, мы можем определить, является ли система управляемой и наблюдаемой, что позволяет нам разрабатывать эффективные стратегии управления и проводить точные оценки ее состояния. Кроме того, моделирование систем в Simulink и Matlab предоставляет практический способ проверить теоретические концепции и понять, как они применяются на практике.