Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Национальный исследовательский университет ИТМО»

(Университет ИТМО)

Дисциплина: Теория автоматического управления

Отчет
по лабораторной работе №12:
«Слежение и компенсация»

Выполнил:

Самбрано Браво Рикардо Хосе,

студент гр. R33352

Преподаватель:

Пашенко Артем Витальевич,

фак. СУиР

Санкт-Петербург,

2024 г.

Содержание

Слежение и компенсация

Задание 1.

Компенсирующий регулятор по состоянию. Придумайте объект управления вида

$$\dot{x} = A_1 x + B_1 u + B_2 w \tag{1}$$

и генератор внешнего возмущения вида $\dot{w} = A_2 w$. Размерности векторов x и w должны быть различными, каждая – не менее 3. Должны быть выполнены условия:

$$\sigma(A1) \not\subset C_-, \qquad \sigma(A2) \subset \bar{C}_+ \tag{2}$$

пара (A_1, B_1) стабилизируема. Задайтесь целевой переменной $z = C_2 x$ и найдите регулятор вида

$$u = K_1 x + K_2 w \tag{3}$$

который обеспечит выполнение целевого условия

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = 0 \tag{4}$$

Предлагаю следующие матрицы:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & 5 & 0 \\ 0 & 8 & 80 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 10 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$eigenvalues\ A_1 = \{5 \quad 10 \quad 80.559 \quad 8.4410\}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & -8 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$eigenvalues\ A_2 = \{0 \quad 0 + 8i \quad 0 - 8i\}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$C_2 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \tag{9}$$

пара (A_1, B_1) стабилизируема

```
U = ctrb(A1,B1);
k=rank(U);
n = length(A1);
if k == n
 disp('Матрица полностью управляемая')
end
```

Figure 1 - Код Matlab для определения управляемости

Предлагаю использовать регулятор LQR с условиями Q = eye (4) и R = 1 как в лекции:

Решаем уравнения Рикатти:

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \tag{10}$$

$$K = -R^{-1}B^T P \tag{11}$$

Тогда:

$$K_1 = [139.1473 \quad -789.9802 \quad -214.4962 \quad 131.2189]$$

Теперь переходим к расчету P и Y, чтобы приступить к расчету регулятора К_2.

$$PA_2 - A_1 P = B_1 Y + B_2 \tag{12}$$

$$C_2 P + D_2 = 0 \tag{13}$$

$$P = \begin{bmatrix} 5.8000 & -0.6486 & 0.0361 \\ 3.000 & -0.3692 & 0.0462 \\ 0 & 0 & 0 \\ 13.3000 & -2.1111 & 0.9773 \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$Y = [-29.0000 \quad 2.9538 \quad -5.3692] \tag{15}$$

$$K_2 = Y - K_1 P \tag{16}$$

$$K_2 = [-211.3253 \quad 78.5284 \quad -102.1757]$$

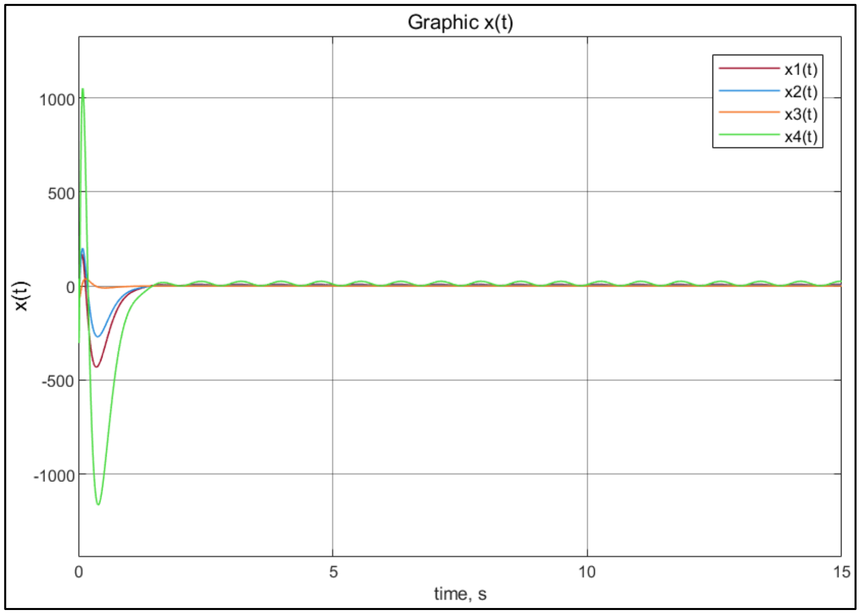

Figure 2 - Графики x1(t), x2(t), x3(t), x4(t)

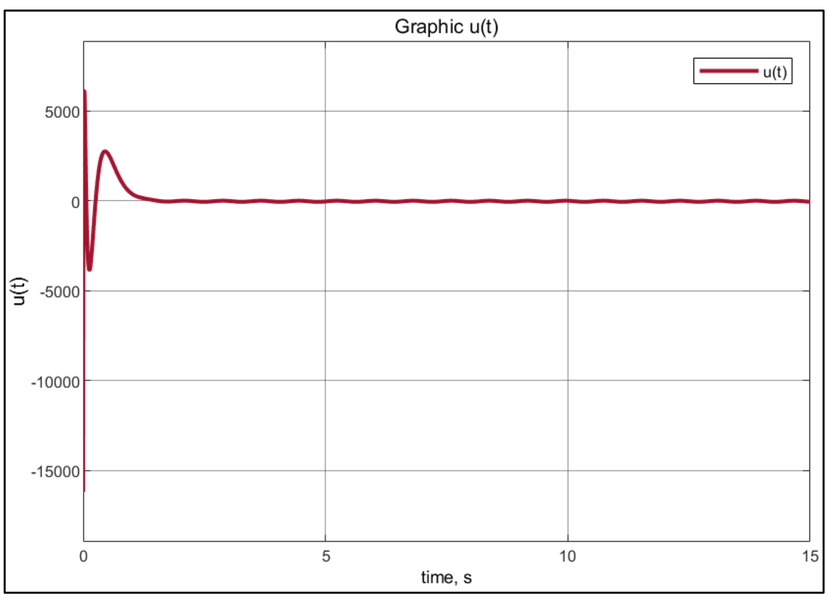

Figure 3 - График u(t)

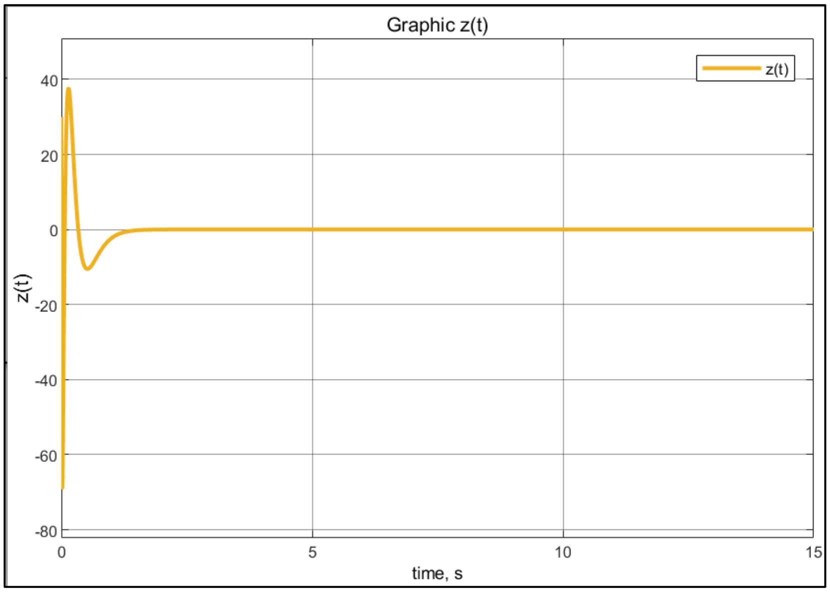

Figure 4 - График z(t)

Задание 2.

Следящий регулятор по состоянию. Придумайте объект управления вида

$$\dot{x} = A_1 x + B_1 u \tag{17}$$

и генератор внешнего возмущения вида $\dot{w} = A_2 w$. Размерности векторов x и w должны быть различными, каждая – не менее 3. Должны быть выполнены условия:

$$\sigma(A1) \not\subset C_-, \qquad \sigma(A2) \subset \bar{C}_+$$

пара (A_1, B_1) стабилизируема. Задайтесь целевой переменной $z = C_2 x$ и найдите регулятор вида $u = K_1 x + K_2 w$, который обеспечит выполнение целевого условия

$$\lim_{t \to \infty} z(t) = 0$$

Предлагаю следующие матрицы:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & 5 & 0 \\ 0 & 8 & 80 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$eigenvalues\ A_1 = \{5 \quad 10 \quad 80.559 \quad 8.4410\}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$eigenvalues\ A_2 = \{0 \quad 0+8i \quad 0-8i\}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

$$D_2 = [0 \quad 0 \quad 1]$$

пара (A_1, B_1) стабилизируема

Поскольку у нас те же матрицы, что и в упражнении 1, можно вывести, что K1 равно:

$$K_1 = [139.1473 \quad -789.9802 \quad -214.4962 \quad 131.2189]$$

Теперь переходим к расчету P и Y, чтобы приступить к расчету регулятора K2.

$$PA_2 - A_1P = B_1Y \tag{18}$$

$$C_2P + D_2 = 0 \tag{19}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 12.1929 & 0.4871 \\ 0 & 9.1077 & -2.1385 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 40.821 & -15.0417 \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$Y = [0 \quad 40.8210 \quad -15.0417] \tag{21}$$

$$K_2 = Y - K_1P \tag{22}$$

$$K_2 = [0 \quad -64.8615 \quad 97.1077] \tag{23}$$

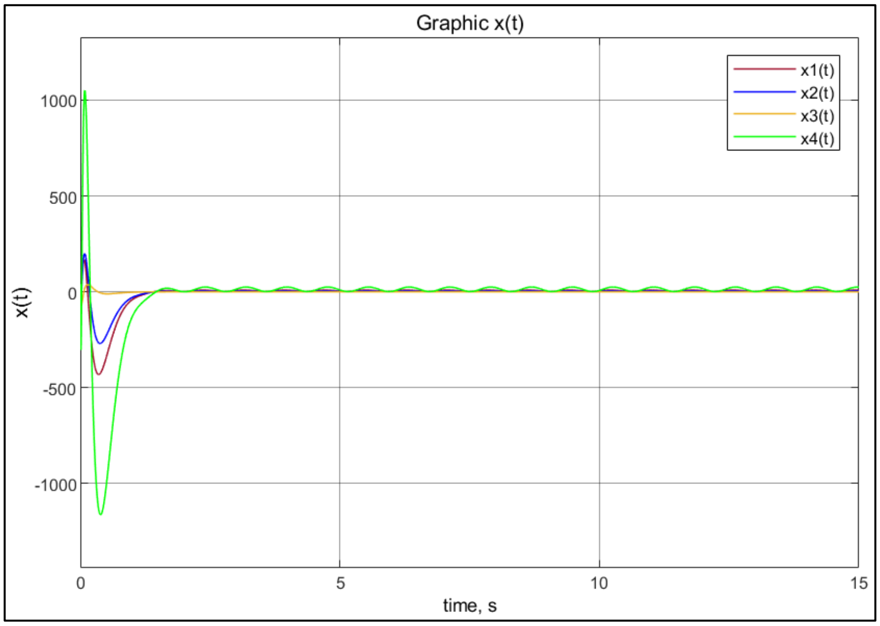

Figure 5 - Графики x1(t), x2(t), x3(t), x4(t)

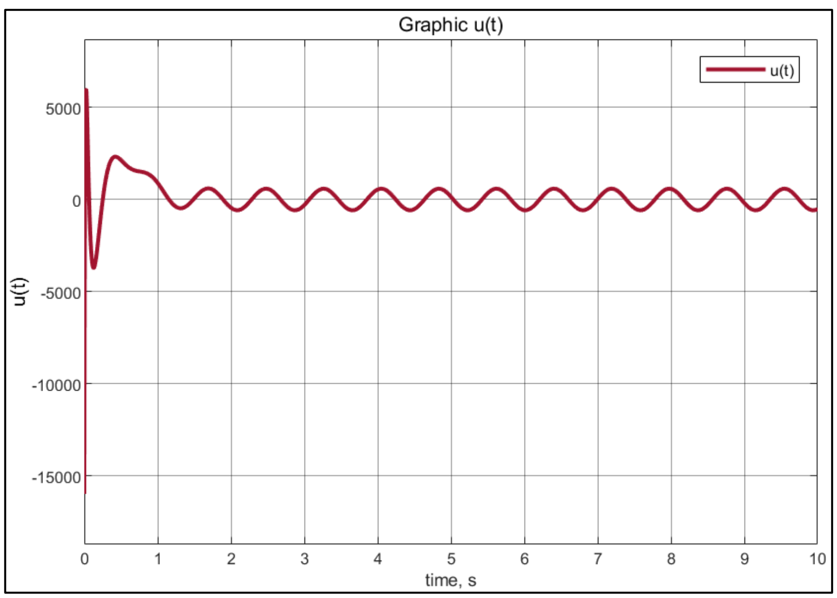

Figure 6 - График u(t)

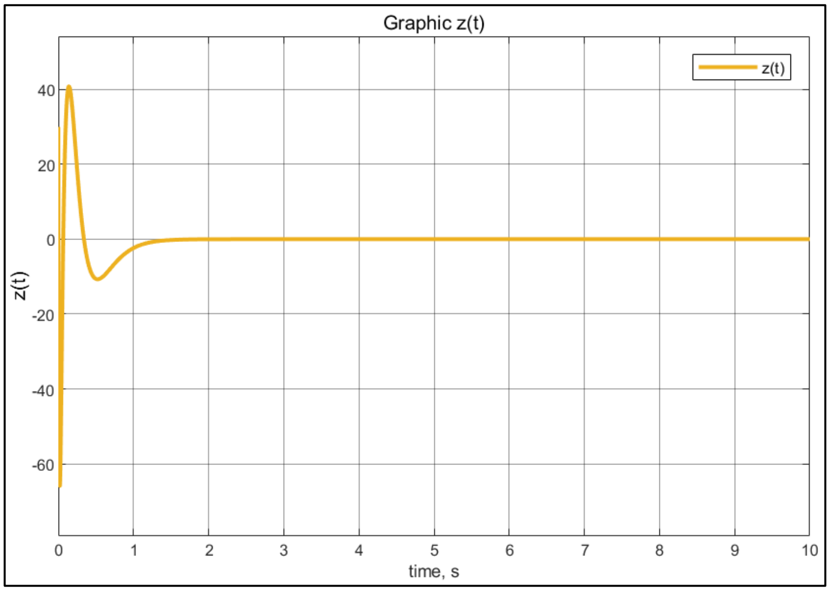

Figure 7 - График z(t)

Задание 3.

Регулятор по выходу при различных y и z. Самостоятельно придумайте матрицы для уравнений

$$\dot{x} = A_1 x + B_1 u + B_2 w, \qquad \dot{w} = A_2 w, \qquad y = C_1 x + D_1 w, \qquad z = C_2 x + D_2 w \tag{24}$$

где измеряемой величиной является y(t), а регулируемой – z(t). Размерность каждого из векторов x и w должна быть не менее 3, при этом они могут быть одинаковыми. Выберите матрицы так, чтобы переменные y и z были различными. Постройте регулятор по выходу, который формирует управляющее воздействие u(t) на основе измеряемой величины y(t) и достигает цели управления.

$$\lim_{t \to \infty} z(t) = 0$$

Представьте уравнения регулятора в форме вход-состояние-выход, найдите его собственные числа, сравните их с собственными числами матрицы A_2.

Предлагаю следующие матрицы:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & 5 & 0 \\ 0 & 8 & 80 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 10 \end{bmatrix} \tag{25}$$

$$eigenvalues\ A_1 = \{5 \quad 10 \quad 80.559 \quad 8.4410\}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & -8 & 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$eigenvalues\ A_2 = \{0 \quad 0 + 8i \quad 0 - 8i\}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{28}$$

$$C_1 = [2 \quad 5 \quad 8 \quad 3] \tag{29}$$

$$D_1 = [2 \quad 4 \quad 2] \tag{30}$$

$$C_2 = [0 \quad 1 \quad 4 \quad 1] \tag{31}$$

$$D_2 = [0 \quad 1 \quad 1] \tag{32}$$

пара (A_1, B_1) стабилизируема

Поскольку у нас те же матрицы, что и в упражнении 1, можно вывести, что K1 равно:

$$K_1 = [139.1473 \quad -789.9802 \quad -214.4962 \quad 131.2189] \tag{33}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 5 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 80 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix} \tag{34}$$

$$\overline{C} = [C_1 \quad D_1] = [2 \quad 5 \quad 8 \quad 3 \quad 2 \quad 4 \quad 2] \tag{35}$$

Перейдем к решению уравнений Рикатти для фильтра Калмана и получим таким образом наблюдателя:

Q = I

R = 1

$$P + PA^T + Q - PC^T R^{-1} CP = 0 \tag{36}$$

$$L = -PC^T R^{-1} \tag{37}$$

$$L = \begin{bmatrix} 88.0177 \\ 424.9923 \\ -85.4577 \\ -609.9248 \\ -1 \\ 0.2291 \\ -1.3955 \end{bmatrix} \tag{38}$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 88.0177 \\ 424.9923 \\ -85.4577 \\ -609.9248 \end{bmatrix}, \qquad L_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.2291 \\ -1.3955 \end{bmatrix} \tag{39}$$

Находим K2:

$$PA_2 - A_1 P = B_1 Y + B_2 \tag{40}$$

$$C_2 P + D_2 = 0 \tag{41}$$

$$K_2 = Y - K_1 P \tag{42}$$

$$K_2 = [-179.3444 \quad 83.9331 \quad -100.0588] \tag{43}$$

Форма вход-состояние-выход:

```
disp ([A1+B1*K1+L1*C1 B1*K2+B2+L1*D1; L2*C1 A2+L2*D1]) (Код матлаба)
```

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = 1.0e{+}03 * \begin{matrix} 0.3202 & -0.3499 & 0.4916 & 0.3953 & -0.0033 & 0.4360 & 0.0760 \\ 0.9891 & 1.3440 & 3.1904 & 1.4062 & 0.6726 & 1.7839 & 0.7519 \\ -0.0318 & -1.2093 & -0.8182 & -0.1252 & -0.3453 & -0.2579 & -0.2660 \\ -0.5241 & -6.9955 & -5.9519 & -1.1637 & -2.1166 & -2.0200 & -1.7201 \\ -0.0020 & -0.0050 & -0.0080 & -0.0030 & -0.0020 & -0.0040 & -0.0020 \\ 0.0005 & 0.0011 & 0.0018 & 0.0007 & 0.0005 & 0.0009 & 0.0085 \\ -0.0028 & -0.0070 & -0.0112 & -0.0042 & -0.0028 & -0.0136 & -0.0028 \end{matrix} + \begin{bmatrix} 88.0177 \\ 424.9923 \\ -85.4577 \\ -609.9248 \\ -1 \\ 0.2291 \\ -1.3955 \end{bmatrix} y \qquad (44)$$

$$u = [139.1473 \quad -789.9802 \quad -214.4962 \quad 131.2189 \quad -179.3444 \quad 83.9331 \quad -100.0588] \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} \qquad (45)$$

Собственные значения:

$$Eigenvalues: \begin{bmatrix} -0.1933 + 3.40i \\ -0.1933 - 3.40i \\ 0.0597 \\ 0.0053 \\ 0 + 0.008i \\ 0 - 0.008i \\ 0 \end{bmatrix} * 10^3 \qquad (46)$$

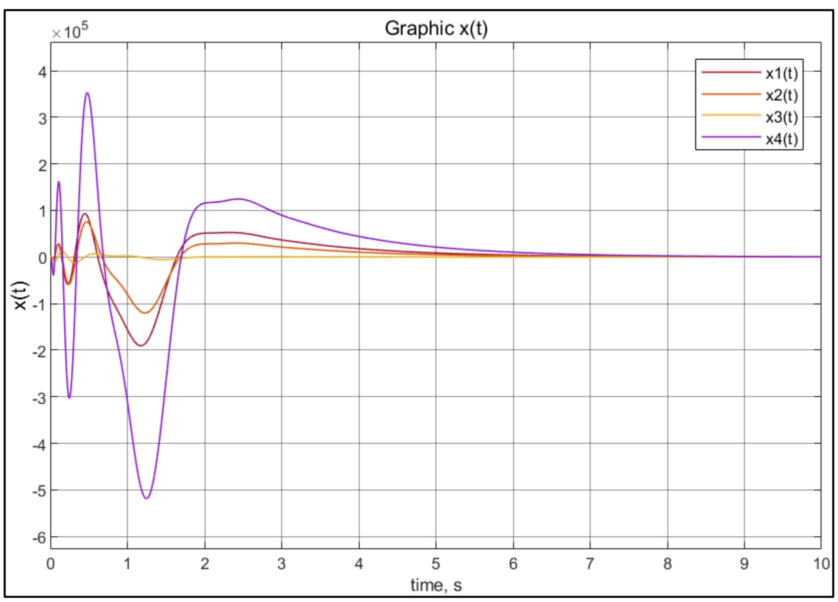

Figure 8 - Графики x1(t), x2(t), x3(t), x4(t)

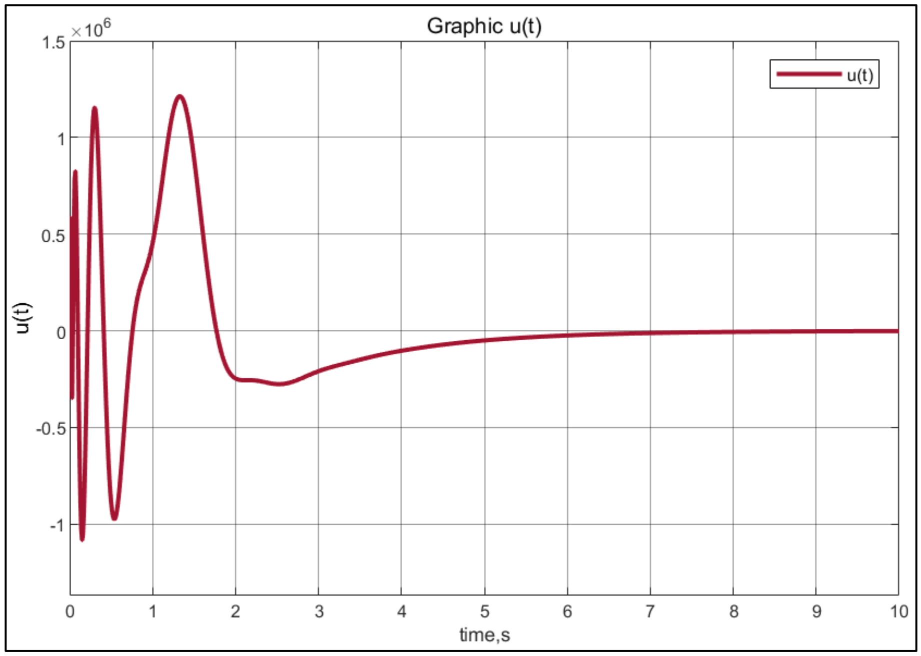

Figure 9 - График u(t)

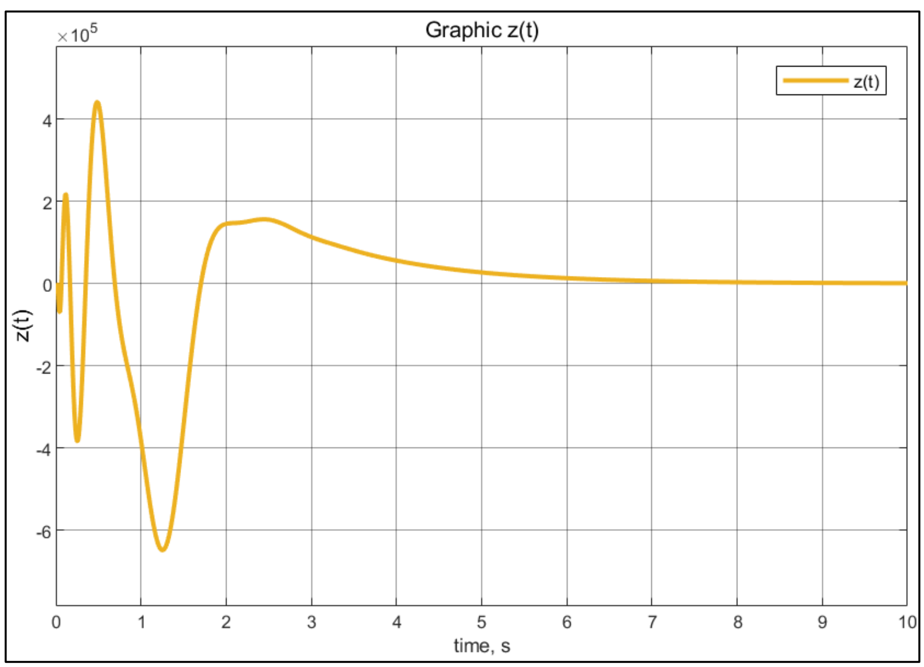

Figure 10 - График z(t)

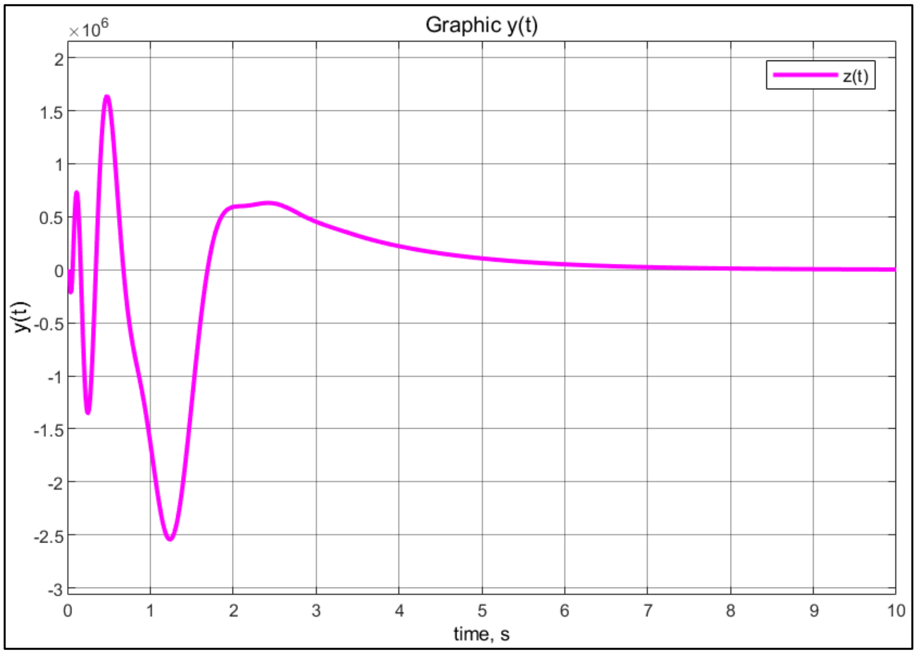

Figure 11 - График y(t)

Задание 4.

Регулятор по выходу при одинаковых y и z. Самостоятельно придумайте матрицы для уравнений

$$\dot{x} = A_1 x + B_1 u + B_2 w, \qquad \dot{w} = A_2 w, \qquad y = z = Cx + Dw \tag{47}$$

где измеряемая величина y(t) и регулируемая величина z(t) совпадают. Размерность каждого из векторов x и w должна быть не менее 3, при этом они могут быть одинаковыми. Постройте регулятор по выходу, который формирует управляющее воздействие u(t) на основе измеряемой величины y(t) и достигает цели управления

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$$

Представьте уравнения регулятора в форме вход-состояние-выход, найдите его собственные числа, сравните их с собственными числами матрицы A_2.

Предлагаю следующие матрицы:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & 5 & 0 \\ 0 & 8 & 80 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 10 \end{bmatrix} \tag{48}$$

$$eigenvalues\ A_1 = \{5 \quad 10 \quad 80.559 \quad 8.4410\}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & -8 & 0 \end{bmatrix} \tag{49}$$

$$eigenvalues\ A_2 = \{0 \quad 0+8i \quad 0-8i\}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{50}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{51}$$

$$C_1 = [2 \quad 5 \quad 8 \quad 3] \tag{52}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \tag{53}$$

$$C_2 = C_1 \tag{54}$$

$$D_2 = D_1 \tag{55}$$

пара (A_1, B_1) стабилизируема

Поскольку у нас те же матрицы, что и в упражнении 1, можно вывести, что K1 равно:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 139.1473 & -789.9802 & -214.4962 & 131.2189 \end{bmatrix} \tag{56}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 5 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 80 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix} \tag{57}$$

$$\overline{C} = \begin{bmatrix} C_1 & D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 3 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \tag{58}$$

Перейдем к решению уравнений Рикатти для фильтра Калмана и получим таким образом наблюдателя:

Q = eye (1)

R = 1

$$P + PA^T + Q - PC^T R^{-1} CP = 0 \tag{59}$$

$$L = -PC^T R^{-1} \tag{60}$$

$$L = \begin{bmatrix} 88.0177 \\ 424.9923 \\ -85.4577 \\ -609.9248 \\ -1 \\ 0.2291 \\ -1.3955 \end{bmatrix} \tag{61}$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 88.0177 \\ 424.9923 \\ -85.4577 \\ -609.9248 \end{bmatrix}, \qquad L_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.2291 \\ -1.3955 \end{bmatrix} \tag{62}$$

Находим K2:

$$PA_2 - A_1P = B_1Y + B_2 \tag{63}$$

$$C_2P + D_2 = 0 \tag{64}$$

$$K_2 = Y - K_1P \tag{65}$$

$$K_2 = [-178.3238 \quad 82.7313 \quad -100.0714] \tag{66}$$

Форма вход-состояние-выход:

```
disp ([A1+B1*K1+L1*C1 B1*K2+B2+L1*D1; L2*C1 A2+L2*D1]) (Код матлаба)
```

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{matrix} \text{1.0e+03 *} & & & & & & \\ 0.3202 & -0.3499 & 0.4916 & 0.3953 & -0.0023 & 0.4348 & 0.0760 \\ 0.9891 & 1.3440 & 3.1904 & 1.4062 & 0.6737 & 1.7827 & 0.7519 \\ -0.0318 & -1.2093 & -0.8182 & -0.1252 & -0.3442 & -0.2591 & -0.2660 \\ -0.5241 & -6.9955 & -5.9519 & -1.1637 & -2.1115 & -2.0260 & -1.7202 \\ -0.0020 & -0.0050 & -0.0080 & -0.0030 & -0.0020 & -0.0040 & -0.0020 \\ 0.0005 & 0.0011 & 0.0018 & 0.0007 & 0.0005 & 0.0009 & 0.0085 \\ -0.0028 & -0.0070 & -0.0112 & -0.0042 & -0.0028 & -0.0136 & -0.0028 \end{matrix} + \begin{bmatrix} 88.0177 \\ 424.9923 \\ -85.4577 \\ -609.9248 \\ -1 \\ 0.2291 \\ -1.3955 \end{bmatrix} y \tag{67}$$

$$u = [139.1473 \quad -789.9802 \quad -214.4962 \quad 131.2189 \quad -179.3444 \quad 83.9331 \quad -100.0588] \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} \tag{68}$$

Собственные значения:

$$Eigenvalues: \begin{bmatrix} -0.1933 + 3.40i \\ -0.1933 - 3.40i \\ 0.0597 \\ 0.0053 \\ 0 + 0.008i \\ 0 - 0.008i \\ 0 \end{bmatrix} * 10^3 \tag{69}$$

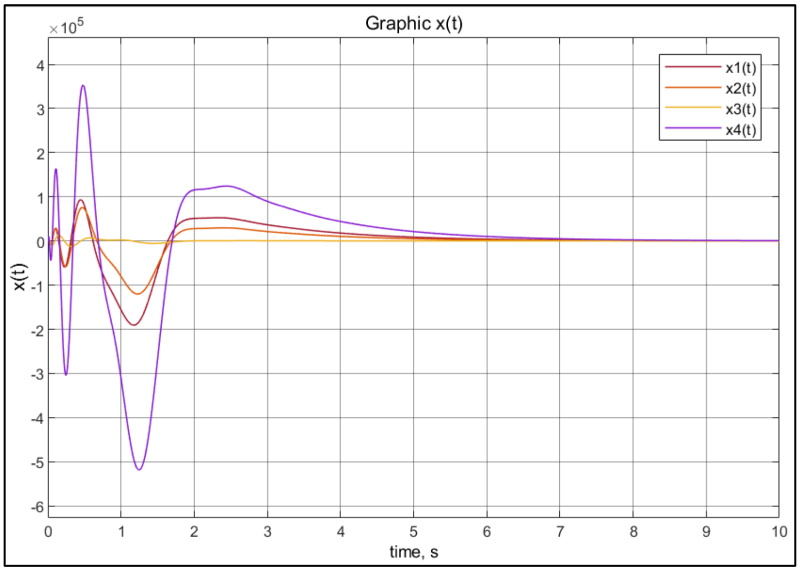

Figure 12 - Графики x1(t), x2(t), x3(t), x4(t)

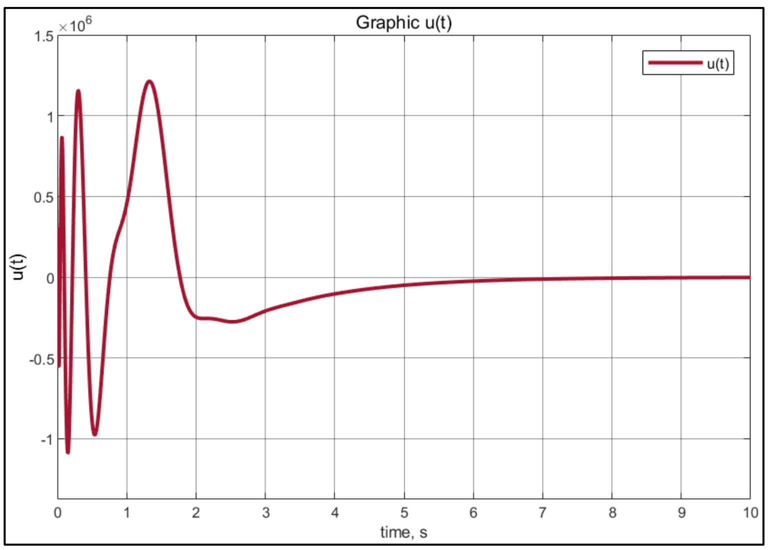

Figure 13 - График u(t)

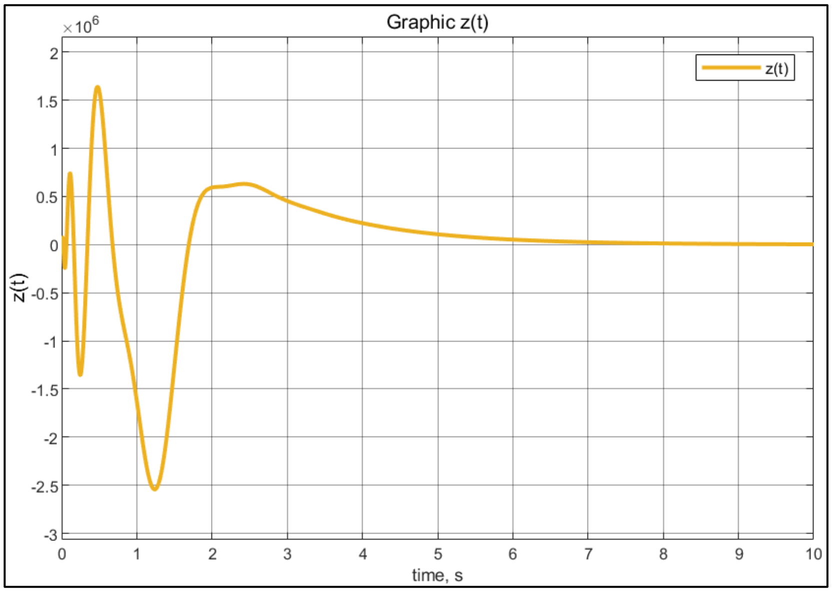

Figure 14 - График z(t)

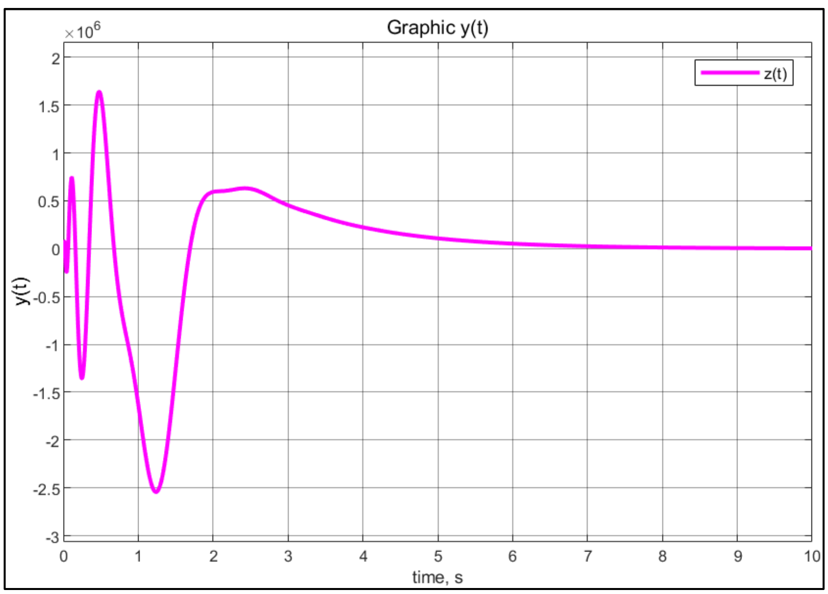

Figure 15 - График y(t)

Вывод

Задание 1

В результате выполнения задания 1 мы получили регулятор по состоянию, который обеспечивает компенсацию внешнего возмущения и достижение цели управления $z(t) = 0$. Регулятор имеет форму $u = K1x + K2w$.

Задание 2

В результате выполнения задания 2 мы получили следящий регулятор по состоянию, который обеспечивает достижение цели управления $z(t) = 0$. Регулятор имеет форму $u = K1x + K2w$

Задание 3

В результате выполнения задания 3 мы получили регулятор по выходу, который формирует управляющее воздействие $u(t)$ на основе измеряемой величины $y(t)$ и достигает цели управления $z(t) = 0$.

Задание 4

В результате выполнения задания 4 мы получили регулятор по выходу, который формирует управляющее воздействие $u(t)$ на основе измеряемой величины $y(t)$ и достигает цели управления $z(t) = 0$. Также $z(t) = y(t)$