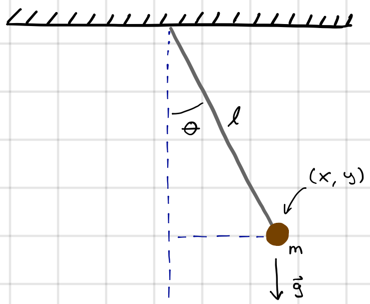
N.L.S.

Consideremos el problema del péndulo



La energía del péndulo es $E = \frac{1}{2} m v^2 + mgh$ donde v y h la podemos poner en términos de una sola variable al escribir x y y como función de θ: $x = \ell \sin\theta$; $y = -\ell \cos\theta$

$\dot{x} = \ell\dot{\theta}\cos\theta$; $\dot{y} = \ell\dot{\theta}\sin\theta$

De esta manera $v^2 = \ell^2\dot{\theta}^2$ y $h = \ell(1-\cos\theta)$. Por lo tanto la energía es:

$$E = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + mg\ell(1-\cos\theta) = mg\ell(1-\cos\theta_0)$$ considerando que en $\theta_0 \neq 0$ se tiene que $\dot{\theta}_0 = 0$

> Hay que notar que la ecuación de movimiento asociada es: $\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta$, misma que es una ecuación diferencial de segundo orden no lineal y además no depende de la masa del péndulo. Si se hace la aproximación de ángulos pequeños se obtiene $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ con $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$.

Primero calculemos el periodo τ del péndulo y posteriormente calculemos la solución

Despejando $\dot{\theta}$ se tiene $\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}}\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0} \Rightarrow \tau = 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$

sabemos que $\cos(\theta) - \cos(\theta_0) = \cos\left(2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) - \cos\left(2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) = 2\left(\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$,

entonces

$$\tau = 2\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\left(\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}} = 2\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\theta_0}\frac{1}{\sin\frac{\theta_0}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta_0}{2}}\right)^2}}\,d\theta$$

si hacemos el cambio de variable $\sin u = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} \Rightarrow \cos u\, du = \frac{1}{2}\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta$

$$\sqrt{1-\sin^2 u}\,du = \frac{1}{2}\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2 u}\,d\theta$$

notemos que si $\left.\begin{array}{l}\theta = 0 \Rightarrow u = 0\\ \theta = \theta_0 \Rightarrow u = \pi/2\end{array}\right\}$

$$\frac{2\sqrt{1-\sin^2 u}}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2 u}}\,du = \frac{d\theta}{\sin\frac{\theta_0}{2}}$$

De esta manera: $\tau = 2\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{2\cancel{\sqrt{1-\sin^2 u}}}{\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\sin^2 u}}\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{1-\sin^2 u}}}\,du \Rightarrow$ si definimos $m \equiv \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \Rightarrow 0 \leq m \leq 1$

Entonces $\tau = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\underbrace{\int_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1-m\sin^2 u}}}$ ☺

Integral elíptica de Jacobi de primera especie

> Entonces como resultado se tiene que el periodo del péndulo depende del ángulo inicial o amplitud inicial, tal como uno lo esperaría.
>
> $\tau = \tau(m)$

Una forma alternativa de la ecuación anterior es $x = \sin u$ $\quad dx = \cos u\, du \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = du$

$$\tau = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-mx^2)}}$$

Demostración de que la solución de G-P dentro de un pozo cuadrado es una función elíptica de Jacobi

La ec. estacionaria de G-P con $\Psi = e^{-\mu t}\phi(x)$ es:

$$\mu\phi = -\frac{1}{2}\phi_{xx} + V\phi + g|\phi|^2\phi \qquad V(x) = \begin{cases} -V_0 & |x|\le R \\ 0 & |x|>R \end{cases}$$

Consideremos $V_0>0$ sin pérdida de generalidad $x_0 \geq 0$

$$\mu\phi = -\frac{1}{2}\phi_{xx} - V_0\phi + g\phi^3 \quad \text{multiplicando por } \phi_x$$

tomar en cuenta que $-V_0 < \mu < 0$

$$\mu\phi_x\phi = -\frac{1}{2}\phi_x\phi_{xx} - V_0\phi_x\phi + g\phi^3\phi_x$$

$$\frac{1}{2}\mu(\phi^2)_x = -\frac{1}{4}(\phi_x^2)_x - \frac{1}{2}V_0(\phi^2)_x + \frac{1}{4}g(\phi^4)_x \Rightarrow \mu\phi^2 = -\frac{1}{2}\phi_x^2 - V_0\phi^2 + \frac{1}{2}g\phi^4 + \frac{\varepsilon}{2}$$

cte de integración

Una forma de obtener ε es conociendo el valor de ϕ en un punto. Por ej.: $\phi(0)=0$ y $\phi_x(0)=\phi_{x0}$

$$\Rightarrow \phi_x^2 = -2(V_0+\mu)\phi^2 + g\phi^4 + \varepsilon \qquad \Rightarrow \varepsilon = \phi_{x0}^2 \quad ✳$$

Integrando ✳ :

$$\int_0^{\phi} \frac{1}{\sqrt{\phi_{x0}^2 - 2(V_0+\mu)\bar\phi^2 + g\bar\phi^4}}\, d\bar\phi = \int_0^x d\tilde{x} = x \Rightarrow \text{con } \sqrt{\frac{(1+m)g}{2m(V_0+\mu)}}\,\bar\phi = z$$

$$\boxed{\text{se pide que } \phi_{x0}^2 = \frac{2m(V_0+\mu)^2}{(1+m)^2 g} \text{ para que la integral tome la forma estándar}}$$

y que si $\bar\phi = 0 \Rightarrow z = 0$ y en $\bar\phi = \phi \Rightarrow z = \sqrt{\frac{(1+m)g}{2m(V_0+\mu)}}\,\phi \Rightarrow$

$$\int_0^{\sqrt{\frac{(1+m)g}{2m(V_0+\mu)}}\phi} \frac{dz}{\underbrace{\sqrt{1-(1+m)z^2+mz^4}}_{\sqrt{(1-z^2)(1-mz^2)}}} = \sqrt{\frac{2(V_0+\mu)}{1+m}}\,x$$

$$\operatorname{arcsn} z \Big|_0^{\sqrt{\frac{(1+m)g}{2m(V_0+\mu)}}\phi} = \sqrt{\frac{2(V_0+m)}{1+m}}\,x \Rightarrow \phi(x) = \sqrt{\frac{2m(V_0+\mu)}{(1+m)g}}\,\operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{2(V_0+\mu)}{1+m}}\,x\right)$$

solución genérica

Revisando que sí es solución genérica:

$$\mu\phi = -\frac{1}{2}\phi'' - V_0\phi + g\phi^3$$

$$\phi'' = \underbrace{-2(V_0+\mu)\phi}\ \underbrace{+2g\phi^3}$$

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{2m(V_0+\mu)}{(1+m)g}}\,\operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{2(V_0+\mu)}{1+m}}\,x\right)$$

$$\phi'(x) = \sqrt{\frac{m}{g}}\,\frac{2(V_0+\mu)}{1+m}\,\operatorname{cn}\left(\sqrt{\frac{2(V_0+\mu)}{1+m}}\,x\right)\operatorname{dn}\left(\sqrt{\frac{2(V_0+\mu)}{1+m}}\,x\right)$$

$$\phi''(x) = \sqrt{\frac{m}{g}}\left(\frac{2(V_0+\mu)}{1+m}\right)^{3/2}\left[-\operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{2(V_0+\mu)}{1+m}}\,x\right)\operatorname{dn}^2\left(\sqrt{\frac{2(V_0+\mu)}{1+m}}\,x\right) - m\operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{2(V_0+\mu)}{1+m}}\,x\right)\operatorname{cn}^2\left(\sqrt{\frac{2(V_0+\mu)}{1+m}}\,x\right)\right]$$

$$\underbrace{-2(V_0+\mu)\sqrt{\frac{2m(V_0+\mu)}{(1+m)g}}\,\operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{2(V_0+\mu)}{1+m}}\,x\right)}$$

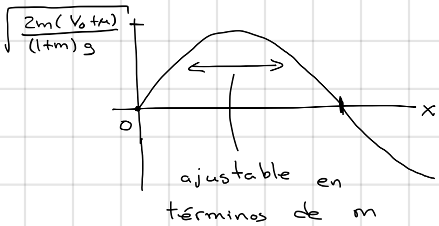
$$\underbrace{-\sqrt{\frac{m}{(1+m)g}}\,(2(V_0+\mu))^{3/2}\,\operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{2(V_0+\mu)}{1+m}}\,x\right)}$$

$$\underbrace{2g\left(\frac{2m(V_0+\mu)}{(1+m)g}\right)^{3/2}\operatorname{sn}^3\left(\sqrt{\frac{2(V_0+\mu)}{1+m}}\,x\right)} \Longleftrightarrow \phi''(x) = \underbrace{-\sqrt{\frac{m}{g}}\left(\frac{2(V_0+\mu)}{1+m}\right)^{3/2}\operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{2(V_0+\mu)}{1+m}}\,x\right)}\left[\underbrace{1+m}\ \underbrace{-2m\operatorname{sn}^2\left(\sqrt{\frac{2(V_0+\mu)}{1+m}}\,x\right)}\right]$$

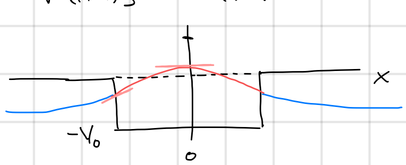
$$\underbrace{\operatorname{dn}^2}_{1-m\operatorname{sn}^2} + m\underbrace{\operatorname{cn}^2}_{1-\operatorname{sn}^2} = 1+m-2m\operatorname{sn}^2$$

si es solución y se ve de la siguiente manera:

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{2m(V_0+\mu)}{(1+m)g}}\,\operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{2(V_0+\mu)}{1+m}}\,x\right)$$



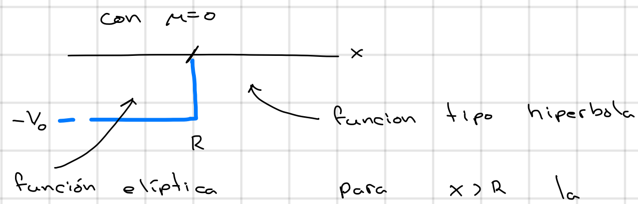
$$\boxed{\phi(x) = \sqrt{\frac{2m(V_0+\mu)}{(1+m)g}}\,\operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{2(V_0+\mu)}{1+m}}\,x + K(m)\right)}$$



$K(m)$ es el cuarto de periodo natural de $\operatorname{sn}(\cdot)$

$K(0) = \pi/2 \qquad K(1) \to \infty$

Pegado de una función elíptica de Jacobi con una función tipo hipérbola en una frontera R



$$\mu\phi = -\frac{1}{2}\phi_{xx} - V_0\phi + g\phi^3 \qquad \text{si} \quad \mu = 0$$

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{2m(V_0+\mu)}{(1+m)g}}\, sn\left(\sqrt{\frac{2(V_0+\mu)}{1+m}}\,x + k(m)\right)$$

para $x > R$ la ec. diferencial es:

$$0 = -\frac{1}{2}\phi_{xx} + g\phi^3$$

con solución $\phi = \dfrac{1}{a+\sqrt{g}\,x}$

En la frontera $\phi_{in}(R) = \phi_{out}(R)$ y $\phi'_{in}(R) = \phi'_{out}(R)$

$$\sqrt{\frac{2mV_0}{(1+m)g}}\, sn\left(\sqrt{\frac{2V_0}{1+m}}\,R + k(m)\right) = \frac{1}{a+\sqrt{g}R}$$

$$\sqrt{\frac{m}{g}}\,\frac{2V_0}{1+m}\, cn\left(\sqrt{\frac{2V_0}{1+m}}\,R + k(m)\right) dn\left(\sqrt{\frac{2V_0}{1+m}}\,R + k(m)\right) = -\frac{\sqrt{g}}{(a+\sqrt{g}R)^2}$$

Entonces:

$$\sqrt{\frac{2mV_0}{(1+m)g}}\, \frac{cn\left(\sqrt{\frac{2V_0}{1+m}}\,R\right)}{dn\left(\sqrt{\frac{2V_0}{1+m}}\,R\right)} = \frac{1}{a+\sqrt{g}R}$$

eleva al cuadrado

$$+\sqrt{\frac{m}{g}}\,\frac{2V_0}{1+m}(1-m)\,\frac{sn\left(\sqrt{\frac{2V_0}{1+m}}\,R\right)}{dn^2\left(\sqrt{\frac{2V_0}{1+m}}\,R\right)} = +\frac{\sqrt{g}}{(a+\sqrt{g}R)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{m}}{\cancel{\sqrt{g}}}\,\cancel{\frac{2V_0}{1+m}}(1-m)\,\frac{sn\left(\sqrt{\frac{2V_0}{1+m}}\,R\right)}{\cancel{dn^2\left(\sqrt{\frac{2V_0}{1+m}}\,R\right)}} = \cancel{\sqrt{g}}\,\cancel{\frac{2mV_0}{(1+m)g}}\,\frac{cn^2\left(\sqrt{\frac{2V_0}{1+m}}\,R\right)}{\cancel{dn^2\left(\sqrt{\frac{2V_0}{1+m}}\,R\right)}}$$

$$\Rightarrow (1-m)\, sn\left(\sqrt{\frac{2V_0}{1+m}}\,R\right) = \sqrt{m}\, cn^2\left(\sqrt{\frac{2V_0}{1+m}}\,R\right) = \sqrt{m}\left[1 - sn^2\left(\sqrt{\frac{2V_0}{1+m}}\,R\right)\right]$$

$$\sqrt{m}\, sn^2\left(\sqrt{\frac{2V_0}{1+m}}\,R\right) + (1-m)\, sn\left(\sqrt{\frac{2V_0}{1+m}}\,R\right) - \sqrt{m} = 0$$

$$\Rightarrow sn\left(\sqrt{\frac{2V_0}{1+m}}\,R\right) = \frac{-(1-m) \pm \sqrt{(1-m)^2 + 4m}}{2\sqrt{m}}$$

$1 - 2m + m^2 + 4m$

$1 + 2m + m^2 = (1+m)^2$

$$= \frac{-(1-m) \pm (1+m)}{2\sqrt{m}} \Rightarrow \begin{cases} (+) = \dfrac{\cancel{2}m}{\cancel{2}\sqrt{m}} = \sqrt{m} \\[2ex] (-) = \dfrac{-2}{2\sqrt{m}} = -\dfrac{1}{\sqrt{m}} \end{cases}$$

pero $0 < m < 1$ y $-1 < sn(\ ) < 1$ y por lo tanto

$$\underline{sn\left(\sqrt{\frac{2V_0}{1+m}}\,R\right) = \sqrt{m}}$$ condición en la frontera.