9. 典型信道分析

例 9.1: 二进制对称信道

输入 $\mathbf{x}_m \in C = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_M\}$, $\mathbf{x}_m = (x_{m1}, x_{m2}, \cdots, x_{mN})$, $x_{mn} \in \{0, 1\}$, $n = 1, 2, \cdots, N$.

输出 $\mathbf{y} \in Y^N$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_N)$, $y_n \in \{0, 1\}$, $n = 1, 2, \cdots, N$.

离散无记忆二进制对称信道, 信道转移概率:

$$p(\mathbf{y}/\mathbf{x}_m) = \prod_{n=1}^{N} p(y_n / x_{mn})$$

$$p(y_n / x_{mn}) = \begin{cases} 1-p & y_n = x_{mn} \\ p & y_n \neq x_{mn} \end{cases} \qquad p< 1/2.$$

假设发送 $\mathbf{x}_m$ 是等概的，译码时采用最大似然概率判决准则, 接收到 $\mathbf{y}$ 之后译作 $\mathbf{x}_m$, 即判定是发送 $\mathbf{x}_m$ 的条件为:

$$p(\mathbf{y}/\mathbf{x}_{m'}) = \prod_{n=1}^{N} p(y_n / x_{m'n}) \le p(\mathbf{y}/\mathbf{x}_m) = \prod_{n=1}^{N} p(y_n / x_{mn}) \qquad \forall m' \neq m.$$

即
$$p^{d_{m'}}(1-p)^{N-d_{m'}} \le p^{d_m}(1-p)^{N-d_m}, \qquad \forall m' \neq m$$

$$\left(\frac{p}{1-p}\right)^{d_{m'}} \le \left(\frac{p}{1-p}\right)^{d_m}, \qquad \forall m' \neq m$$

其中 $d_{m'}$,d_m 为 $\mathbf{y}$ 与 $\mathbf{x}_{m'}$和 $\mathbf{x}_m$ 间不相同分量的个数

又因为 $p/(1-p) < 1$

有 $d_{m'} > d_m$ $\qquad \forall m' \neq m$

上述译码准则简称为最小 Hamming 距离准则, 接收到 $\mathbf{y}$ 之后,在码 C 中选择与 $\mathbf{y}$ 的 Hamming 距离最小的码字 $\mathbf{x}_m$ 作为输出.

计算上述信道和判决准则下错误概率上界:

发送第 m 个码字的译码错误概率 $P_{e,m} \le \sum_{\substack{m' \\ m' \neq m}} P_e(m \to m')$ 并合界

其中 $P_e(m' \to m)$是只考虑 m、m'两个码字时，发送 m 错判作 m'的概率,

由 Bhattachayya 界,

$$\begin{aligned} P_e(m \to m') &\le \sum_{\mathbf{y}} \sqrt{p(\mathbf{y}/\mathbf{x}_{m'})p(\mathbf{y}/\mathbf{x}_m)} \\ &= \sum_{y_1} \cdots \sum_{y_N} \prod_{n=1}^{N} \sqrt{p(y_n / x_{m'n})p(y_n / x_{mn})} \\ &= \prod_{n=1}^{N} \sum_{y_n} \sqrt{p(y_n / x_{m'n})p(y_n / x_{mn})} \\ &= \left[\sqrt{4p(1-p)}\right]^{d_{mm'}} \end{aligned}$$

$d_{mm'}$是 $\mathbf{x}_m$, $\mathbf{x}_{m'}$两个码字中不相同分量的个数.

定义 $z = \sqrt{4p(1-p)}$

则 $P_{e,m} \le A(z) - 1$

其中 $A(x) = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_N x^N$

系数 A_n 是码 C 中与 $\mathbf{x}_m$ 有 n 个分量不相同的码字个数,

$A(x)$是码 C 中码字 $\mathbf{x}_m$ 的距离多项式.

例 9.2: 二进制加性高斯白噪声信道

输入 $\mathbf{x}_m \in C = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_M\}$, $\mathbf{x}_m = (x_{m1}, x_{m2}, \cdots, x_{mN})$, $x_{mn} \in \{-a, +a\}$, $n = 1, 2, \cdots, N$.

输出 $\mathbf{y} \in R^N$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_N)$, $y_n \in R$, $n = 1, 2, \cdots, N$.

加性高斯白噪声信道转移概率

$$p(\mathbf{y} / \mathbf{x}_m) = \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(y_n - x_{mn})^2}{N_0}}$$

假设发送 $\mathbf{x}_m$ 是等概的, 译码时采用最大似然概率判决准则, 接收到 $\mathbf{y}$ 之后译作 $\mathbf{x}_m$, 即判定发送 $\mathbf{x}_m$ 的条件为:

$$\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(y_n - x_{m'n})^2}{N_0}} \le \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(y_n - x_{mn})^2}{N_0}} \qquad \forall m' \ne m$$

即 $$\sum_{n=1}^{N} (y_n - x_{m'n})^2 \ge \sum_{n=1}^{N} (y_n - x_{mn})^2 \qquad \forall m' \ne m$$

即 $$\|\mathbf{y}, \mathbf{x}_{m'}\|^2 \ge \|\mathbf{y}, \mathbf{x}_m\|^2 \qquad \forall m' \ne m$$

上述译码准则简称为最小欧几里德距离准则, 接收到 $\mathbf{y}$ 之后在码 C 中选择与 $\mathbf{y}$ 欧几里德距离最小的码字 $\mathbf{x}_m$ 作为输出.

计算上述信道和判决准则下错误概率上界.

发送第 m 个码字的译码概率 $$P_{e,m} \le \sum_{\substack{m' \\ m' \ne m}} P_e(m \to m')$$

其中 $P_e(m \to m')$是仅考虑 $\mathbf{x}_m$, $\mathbf{x}_{m'}$两个码字, 并使用 Bhattachayya 界.

$$P_e(m \to m') \le \sum_{\mathbf{y}} \sqrt{p(\mathbf{y} / \mathbf{x}_{m'}) p(\mathbf{y} / \mathbf{x}_m)}$$

$$= \sum_{y_1} \cdots \sum_{y_N} \prod_{n=1}^{N} \sqrt{p(y_n / x_{m'n}) p(y_n / x_{mn})}$$

$$= \prod_{n=1}^{N} \int dy_n \sqrt{p(y_n / x_{m'n}) p(y_n / x_{mn})}$$

$$= \left[\int dy \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(y-a)^2 + (y+a)^2}{2N_0}} \right]^{d_{mm'}}$$ $d_{mm'}$是 $\mathbf{x}_m$, $\mathbf{x}_{m'}$两个码字不同分量个数.

定义 $$z = \int dy \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{y^2}{N_0}} \cdot e^{-\frac{a^2}{N_0}} = e^{-\frac{a^2}{N_0}}$$

则 $$P_{e,m} \le \sum_{\substack{m' \\ m' \ne m}} \left[e^{-\frac{a^2}{N_0}} \right]^{d_{mm'}} = A(z) - 1$$

或者也可以得到 $P_{e,m} \le (M-1) e^{-\frac{d_{\min} a^2}{N_0}}$,$d_{\min}$是码 C 中两个码字的最小距离.

注: 在例 2 的计算中, 如果不用 Bhattachayya 界, 而采用例 9.3 中的方法, 则有

$$P_e(m \to m') = Q\left(\sqrt{2a^2 d_{mm'} / N_0}\right)$$

例 9.3: 加性高斯白噪声信道

输入 $\mathbf{x}_m \in C = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_M\}$, $\mathbf{x}_m = (x_{m1}, x_{m2}, \cdots, x_{mN})$, $x_{mn} \in A_x$, $n = 1, 2, \cdots, N$.

输出 $\mathbf{y} \in R^N$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_N)$, $y_n \in R$, $n = 1, 2, \cdots, N$.

信道转移概率 $$p(\mathbf{y}/\mathbf{x}_m) = \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(y_n - x_{mn})^2}{N_0}}$$

按最大后验概率译码准则，若 $y \in Y_m$, $m=1, 2, \cdots M$. 则判发送了 $\mathbf{x}_m$.

$$Y_m = \{\mathbf{y}: p(\mathbf{y}/\mathbf{x}_m)p(\mathbf{x}_m) \geq p(\mathbf{y}/\mathbf{x}_{m'})p(\mathbf{x}_{m'}) \quad \forall m' \neq m\}$$

$$= \left\{\mathbf{y}: \log\frac{p(\mathbf{x}_m)}{p(\mathbf{x}_{m'})} + \frac{1}{N_0}\|\mathbf{y}, \mathbf{x}_{m'}\|^2 - \frac{1}{N_0}\|\mathbf{y}, \mathbf{x}_m\|^2 \geq 0 \quad \forall m' \neq m\right\}$$

$$= \left\{\mathbf{y}: \log\frac{p(\mathbf{x}_m)}{p(\mathbf{x}_{m'})} + \frac{1}{N_0}\sum_{n=1}^{N} 2(x_{mn} - x_{m'n})y_n - \frac{1}{N_0}\sum_{n=1}^{N}(x_{mn}{}^2 - x_{m'n}{}^2) \geq 0 \quad \forall m' \neq m\right\}$$

$$= \left\{\mathbf{y}: D_{mm'} = \frac{2}{N_0}\langle \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{m'}, \mathbf{y}\rangle \geq \frac{E_m - E_{m'}}{N_0} - \log\frac{p(\mathbf{x}_m)}{p(\mathbf{x}_{m'})} \quad \forall m' \neq m\right\}$$

若按最大似然准则译码

$$Y_m = \{y: D_{mm'} \geq (E_m - E_{m'})/N_0 \quad \forall m' \neq m\}$$

计算译码错误概率:

$$P_{e,m} \leq \sum_{\substack{m' \\ m' \neq m}} P_e(m \to m') = \sum_{\substack{m' \\ m' \neq m}} P_r\left\{D_{mm'} \leq \frac{E_m - E_{m'}}{N_0} / \mathbf{x}_m\right\}$$

$D_{mm'} = \frac{2}{N_0}\sum_{n=1}^{N}(x_{mn} - x_{m'n})y_n$ 是高斯变量 $y_n = x_{mn} + z_n$ 的线性组合，是高斯的.

$$E[D_{mm'}/\mathbf{x}_m] = \frac{2}{N_0}\sum_{n=1}^{N}(x_{mn} - x_{m'n})E[y_n/x_{mn}]$$

$$= \frac{2}{N_0}[E_m - \langle \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{m'}\rangle] = \mu_D$$

$$VAR[D_{mm'}/\mathbf{x}_m] = E\left[\frac{2}{N_0}\sum_{n=1}^{N}(x_{mn} - x_{m'n})(y_n - x_{mn})\frac{2}{N_0}\sum_{l=1}^{N}(x_{ml} - x_{m'l})(y_l - x_{ml})\right]$$

$$= \frac{2}{N_0}\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{m'}\|^2 = \sigma_D{}^2$$

$$P_e(m \to m') = \int_{-\infty}^{(E_m - E_{m'})/N_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_D{}^2}} \exp\left[-\frac{(D_{mm'} - \mu_D)^2}{2\sigma_D{}^2}\right] dD_{mm'} = Q(\beta)$$

其中 $$\beta = \frac{1}{\sigma_D}[\mu_D - (E_m - E_{m'})/N_0] = \frac{\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{m'}\|}{\sqrt{2N_0}} = \sqrt{\frac{\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{m'}\|^2}{2N_0}}$$

$$Q(u) = \int_{-\infty}^{-u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{u}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$