〖引言习题〗

0.1. 信道传送 R=4/7 的汉明码，接收端收到下列三组矢量: 1100000, 1010101, 0111100
试译出 4 比特信源符号。

0.2. 信道传送 R=7/4 的汉明码，接收端收到下列三组矢量: 1010, 0001,0111
试译出 7 比特信源符号。

0.3. 计算(7,4)汉明码第一个分量 x_0 出错的概率。

(1) 假设发送的 $\mathbf{x}$ = (0000000)；

(2) 假设发送的 $\mathbf{x}$ = (1111111)；

(3) 假设 $\mathbf{x}$ 是任意码字。

〖第一章习题〗

1.1 同时掷两个质地均匀的骰子（即各面出现的概率都是 1/6），求：

(1) “3 和 5 同时出现”这一事件的自信息量。

(2) “两个 1 同时出现”这一事件的自信息量。

(3) 两个点数之和（即 2，3，…12 构成的集合）的熵。

(4) 两个点数中至少有一个是 1 的事件自信息量。

1.2 假设一个三进制信道，相应的信道转移概率分布如下，且各输入符号是等概分布的，即 $p_x(0)=p_x(1)=p_x(2)$

(1)求平均互信息量；

(2)求收到 y=0 关于发送 x=0 的互信息量；

(3)求收到 y=1 关于发送 x=1 的互信息量。

p(y/x)	Y=0	Y=1	Y=2
X=0	3/5	1/5	1/5
X=1	7/10	2/10	1/10
X=2	2/10	1/10	7/10

1.3 有两个离散随机变量 X 和 Y，其和为 Z = X+Y（一般加法），若 X 和 Y 相互独立，
求证：(1) $H(X) \le H(Z)$ $\quad H(Y) \le H(Z)$

(2) $H(X,Y) \ge H(Z)$

1.4 对于任意三个离散随机变量 X，Y 和 Z，求证：

(1) $I(X; Y/Z) - I(X;Y)$
$= I(Y; Z/X) - I(Y; Z)$
$= I(Z; X/Y) - I(Z; X)$

(2) $H(X,Y,Z) = H(X,Z) + H(Y/X) - I(Z; Y/X)$

(3) $H(X,Y,Z) - H(X,Y) \le H(Z,X) - H(X)$

定义条件互信息量 $I(X;Y/Z) = \sum_{x,y,z} p(x,y,z)\log\frac{p(x,y/z)}{p(x/z)p(y/z)}$

1.5 有两个二进制随机变量 X 和 Y，它们的联合概率为

p(x,y)	0	1
0	1/8	3/8
1	3/8	1/8

定义另一随机变量 Z = X・Y（一般乘积）。

试计算：

(1) H(X), H(Y), H(Z), H(X,Z), H(Y,Z), H(X,Y,Z).

(2) H(X/Y), H(Y/Z), H(X/Z), H(X/Y,Z), H(Y/X,Z), H(Z/X,Y).

(3) I(X; Y), I(X; Z), I(Y; Z), I(X; Y/Z).

1.6 设 8 个等概率分布的消息通过误比特率为 ε 的 BSC 传输。8 个消息相应编成下述码字：

x1 = 0000，**x**2 = 0011，**x**3 = 0101，**x**4 = 0110，

x5 = 1001，**x**6 = 1010，**x**7 = 1100，**x**8 = 1111。

试问：

(1) 接收到的第一位数字 0 与 **x**1 之间的互信息量。

(2) 接收到第二位数字也是 0 时，得到多少关于 **x**1 的附加互信息量。

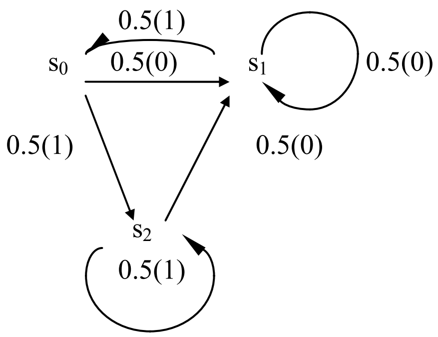
(3) 接收到第三位数字仍是 0 时，又增加多少关于 **x**1 的互信息量。

(4) 接收到第四位数字还是 0 时，再增加多少关于 **x**1 的互信息量。

(5) 接收到全部四位数字 0000 后，获得多少关于 **x**1 的互信息量。

讨论：ε = 0 和 ε = 1/2 时的情况，并加以说明。

1.7 有一个二进制马尔可夫信源，其状态转移概率分布如下。括弧内的数表示状态转移时发出的符号，求各状态的稳定概率分布和信源的熵。



1.8 一阶 Markov 信源，U∈$\{a_1, a_2, a_3\}$，状态转移概率分布如下：

	a_1	a_2	a_3
a_1	1/3	1/3	1/3
a_2	1/4	1/2	1/4
a_3	1/4	1/4	1/2

求从 a_1 态开始，连续发送三个符号的熵；以及达到稳态后信源的熵。

〖第二章习题〗

2.1 证明定理 2.5.

2.2 证明定理 2.7.

2.3 证明定理 2.9.

2.4 给定概率分布（$p_1, p_2, \cdots, p_n$）和整数 m, $0\le m \le n$,

定义 $q_m = 1-\sum_{j=1}^{m} p_j$， 当$m>0$时; $q_0 = 1$..

证明 $H(p_1, \cdots, p_n) \le H(p_1, \cdots, p_m, q_m) + q_m \log(n-m)$. 何时等式成立?

2.5 证明 n 个相同的 BSC（每个 BSC 的误码率都为 p） 级联后, 等价于一个误码率为 $[1-(1-2p)^n]/2$ 的 BSC, 并且如果 $p\ne 0$ 或 1, 则 $\lim_{n\to\infty} I(X_0; X_n) = 0$.

2.6 如果 X, Y 和 Z 是同一取值空间上的三个离散随机变量, 定义条件互信息量 $I(X;Y/Z)$

为: $$I(X;Y/Z)=\sum_{x,y,z} p(x,y,z)\log\frac{p(x,y/z)}{p(x/z)p(y/z)}$$

证明: (a) $I(X;Y/Z) = I(Y;X/Z)$

(b) $I(X;Y,Z) = I(X;Z) + I(X;Y/Z)$

(c) $I(X;Y/Z) \ge 0$, 当且仅当（X, Z, Y）是 Markov 链时等式成立.

〖第三章习题〗

3.1. 设有一离散无记忆信源$U=\begin{Bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0.004 & 0.996 \end{Bmatrix}$. 若对其输出的长度为 100 的序列中含有两个或更少个 a_1 的序列进行等长无失真二进制编码.

(a) 求最短码长.

(b) 计算未编码序列出现的概率。

3.2. 信源 X 输出七种符号, 相应概率为(0.20, 0.19, 0.18, 0.17, 0.15, 0.10, 0.01)

(1) 求符号熵 H(X).

(2) 用 Shannon 编码方法编成二进制变长码, 计算其编码效率.

(3) 用 Fano 编码方法编成二进制变长码, 计算其编码效率.

(4) 用 Huffman 编码方法编成二、三进制变长码, 计算其编码效率.

定义编码效率 $\eta = H_s(X)/\langle L_s\rangle$.

3.3. 设有 DMS 的输出为 U={0, 1},相应概率 p(0)=0.9, p(1)=0.1。

采用下述游程编码方案: 先把信源序列编成数字=0, 1, 2, $\cdots$, 8. 再采用二进制变长编码转换成二进制码字如下表:

信源序列	中间数字	输出二进制编码
1	0	0000
01	1	0001
001	2	0010
0001	3	0011
00001	4	0100

000001	5	0101
0000001	6	0110
00000001	7	0111
00000000	8	1

求: (1) 计算信源序列的平均长度 $\overline{n_1}$.

(2) 计算输出二进制编码的平均长度 $\overline{n_2}$.

(3) 计算 $\overline{n_1}/\overline{n_2}$.

(4) 说明该二进制编码是唯一可译码.

〖第四章习题〗

4.1. 信道转移概率分布, 代价函数如下, 求信道容量_代价函数.

(1)

p(y/x)	0	1	2	b(x)
0	1	0	0	0
1	0	1-p	p	1
2	0	p	1-p	1

(2)

p(y/x)	0	1	2	b(x)
0	1-p	p	0	0
1	p	1-p	0	0
2	0	0	1	3

(3)

p(y/x)	0	E	1	b(x)
0	1-p	p	0	0
1	0	p	1-p	1

4.2. 求下列信道的容量, 并证明 $2^{c3}=2^{c1}+2^{c2}$.

(1)

$p_1(y/x)$	0	1
0	1-p	p
1	p	1-p

(2)

$p_2(y/x)$	0	1
2	1-ε	ε
3	ε	1-ε

(3)

$p_3(y/x)$	0	1	2	3
0	1-p	p	0	0
1	p	1-p	0	0
2	0	0	1-ε	ε
3	0	0	ε	1-ε

4.3. 求下列各离散信道的容量（其转移概率矩阵如下）:

(1) Z 信道

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & 1-\varepsilon \end{bmatrix}$$

(2) 可删除信道

$$\begin{bmatrix} 1-\varepsilon_1-\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 1-\varepsilon_1-\varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

(3) 非对称信道

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

(4) 准对称信道

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}$$

4.4. 计算下述转移概率矩阵下信道的容量.

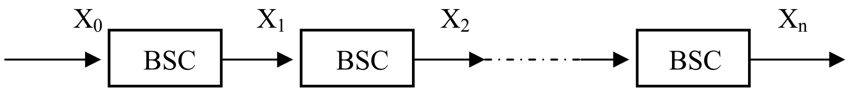
(1) $\begin{bmatrix} 1-p & p & 0 \\ 0 & 1-p & p \\ p & 0 & 1-p \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} (1-p)/2 & (1-p)/2 & p/2 & p/2 \\ p/2 & p/2 & (1-p)/2 & (1-p)/2 \end{bmatrix}$

4.5. 用出错率为ε的二进制对称信道（BSC）构成下列复合信道（选做!）

(1) 链接信道

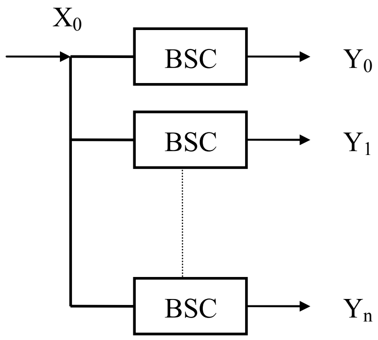
求当输入为 X_0, 输出为 X_n 时的信道容量 C_n, 并证明 $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = 0$

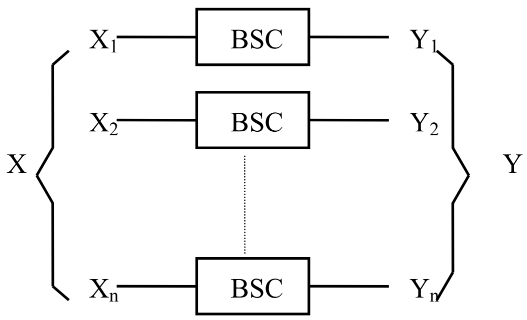


(2) 并联输入信道（下左图）

求把输入 X_0 并接到各信道, 输出是矢量（$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$）时的信道容量 C_n ,

并证明 $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = 1$ 比特/符号.





(3) “和”信道（上右图）

输入 X 的集合是各 X_r 的集合的和, 即 $X_r \in \{a_{r0}, a_{r1}\}$, $X \in \bigcup\limits_{r=1}^{n} \{a_{r0},\ a_{r1}\}$, 输出 Y 的

集合是各 Y_r 的集合的和, 求这“和”信道的容量 C_n, 并证明 $\lim\limits_{n\to\infty} C_n \to \infty$.

(4) 若用一般离散无记忆信道代替上面的二进制对称信道. 试写出上面(1)、(2)、(3)三种情况下的表达式.

〖第五章习题〗

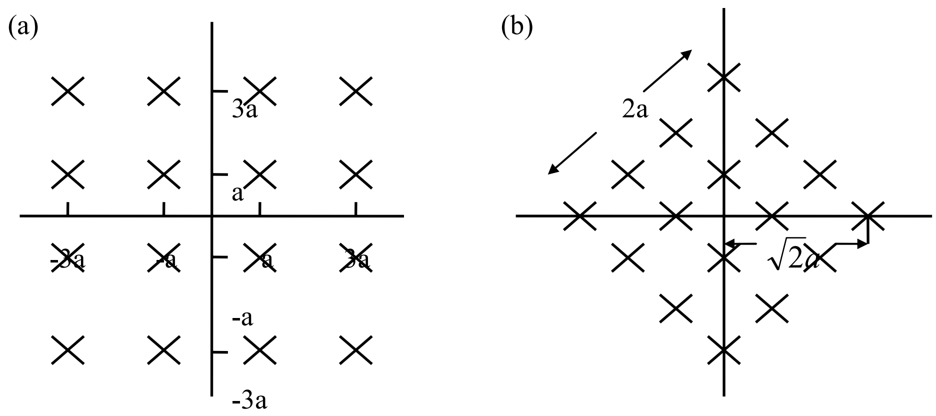
5.1 设有一 DMC, 其转移概率分布矩阵为

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}$$

若 $p(x_1) = 1/2$, $p(x_2) = p(x_3) = 1/4$, 试求采用最佳译码判决准则时的误码率。

5.2 考虑下列码长为 4 的二进制码字：$\mathbf{x}_1$=0000, $\mathbf{x}_2$=0011, $\mathbf{x}_3$=1100, $\mathbf{x}_4$=1111。假设这些码字以不同的概率送往 BSC（错误概率为 p）中传输，$p(\mathbf{x}_1) = 1/2$, $p(\mathbf{x}_2) = p(\mathbf{x}_3) = 1/8$, $p(\mathbf{x}_4) = 1/4$。试寻找一个译码规则，使得 $P_E = \frac{1}{2}P_E^{(1)} + \frac{1}{8}P_E^{(2)} + \frac{1}{8}P_E^{(3)} + \frac{1}{4}P_E^{(4)}$ 最小。

5.3 设有 16 个等概信号, 配置如图 5.3a 所示, 通过 AWGN 信道传送. 试求最佳判决区域划分, 并给出以平均能量噪声密度比表示的译码错误概率 p_e 的表示式. 若信号配置如图 5.3b 时情况如何?



〖第六章习题〗

6.1. 计算下述信道的 $E_0(1, \mathbf{Q})$, $E_0(1) = \max\limits_{\mathbf{Q}} E_0(1, \mathbf{Q})$

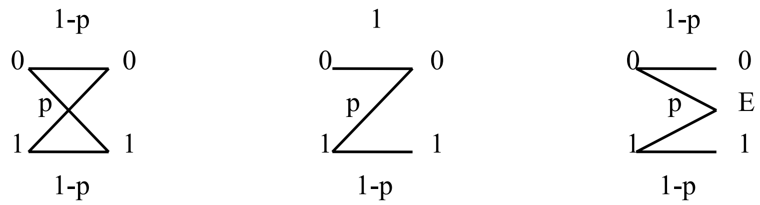
(a) BSC, 转移概率为 p.

(b) 二元 Z 信道, 转移概率为 p.

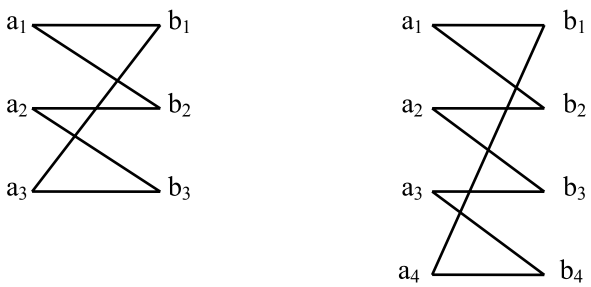
6.2. 求下述三元信道的 $E_0(\rho)$, 进而由它求出信道的容量. 信道转移概率矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1-2p & p & p \\ p & 1-2p & p \\ p & p & 1-2p \end{bmatrix}$$

6.3. 将 M 个消息编成长为 N 的二元数字序列, 此特定的 M 个序列从 2^N 个可能序列中独立、等概地选出. 设采用最大似然概率译码准则译码. 试求下图 a、b、c 信道下的译码错误概率限. 在保证错误概率随 N 指数地减小时, 最大编码速率 R=(logM)/N 可能为多大?



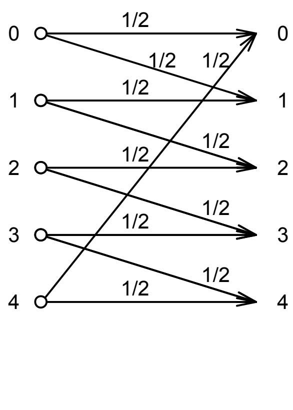
6.4. 计算下图中信道（转移概率 p = 1/2）的 $\max\limits_{\mathbf{Q}} E_0(\rho, \mathbf{Q})$, $C = \max\limits_{\mathbf{Q}} I(\mathbf{Q})$ 及 E(R)



6.5. 五进制信道转移概率如图, 求信道容量和可靠性函数 $E_r(R)$.

(a) 给出码长 N = 1, R = log2 且 $p_e = 0$ 的编码.

(b) 给出码长 N = 2, R = (log5)/2 且 $p_e = 0$ 的编码.



〖第七章习题〗

7.1. 设 U = {0, 1, 2}，相应的概率分别为 p(0) = p(1) = 2/5, p(2) = 1/5，失真函数定义为

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ 1 & i \neq j \end{cases} \quad (i,\ j = 0, 1, 2)$$

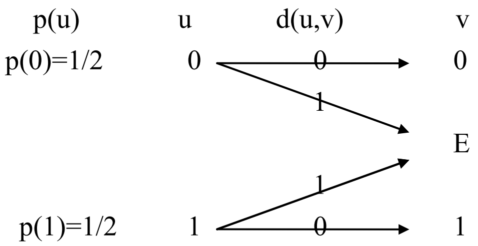
求率失真函数 R(δ).

7.2. 计算概率分布 **p** = (1/2, 1/2)，失真测度矩阵如下的信源的 R(δ).

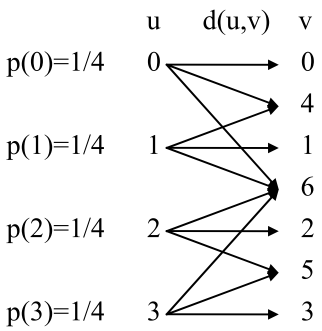
(1) $$D = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

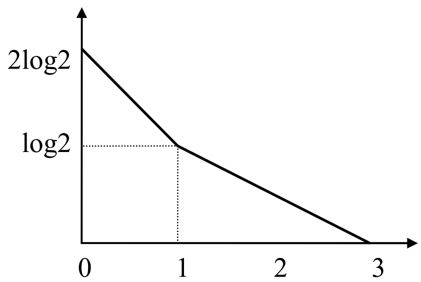
(2) $$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/4 \\ 1 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

7.3. 信源符号的概率分布和相应的失真测度如下图，求 R(δ).



7.4. 信源符号的概率分布和相应的失真测度如下图，证明 R(δ)函数如下图.





$$\left[d(u,v)\right]_{i\times j} = \begin{bmatrix} 0 & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 3 \\ \infty & 0 & \infty & \infty & 1 & \infty & 3 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & 1 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 1 & 3 \end{bmatrix}$$