信息论

1. 熵和互信息量的基本概念
2. 熵和互信息量的基本性质
3. 信源的无失真编码
4. 信道容量—代价函数
5. 最佳接收和错误概率的估计
6. 信道编码定理
7. 信源的率失真函数和限失真信源编码
8. 非离散信源和信道

4
信道容量-代价函数

目录

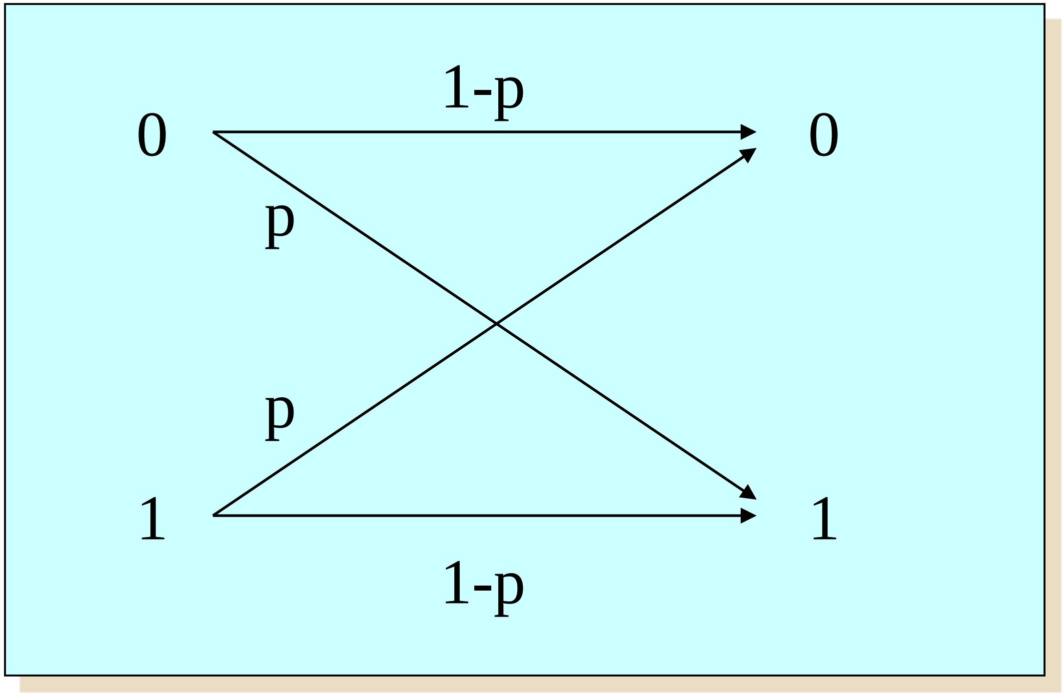
- 信道的分类
- 信道的数学描述
- 信道容量-代价函数的定义
- 信道容量-代价函数的性质
- 计算信道容量-代价函数$C(\beta)$
- 计算信道容量C_{max}
- 信道编码极限

4.1 信道的分类

- 按信道输入X、输出Y分类：
  - 离散信道
  - 非离散信道
- 按信道记忆特性分类，离散信道可分为：
  - 离散无记忆信道
  - 离散有记忆信道

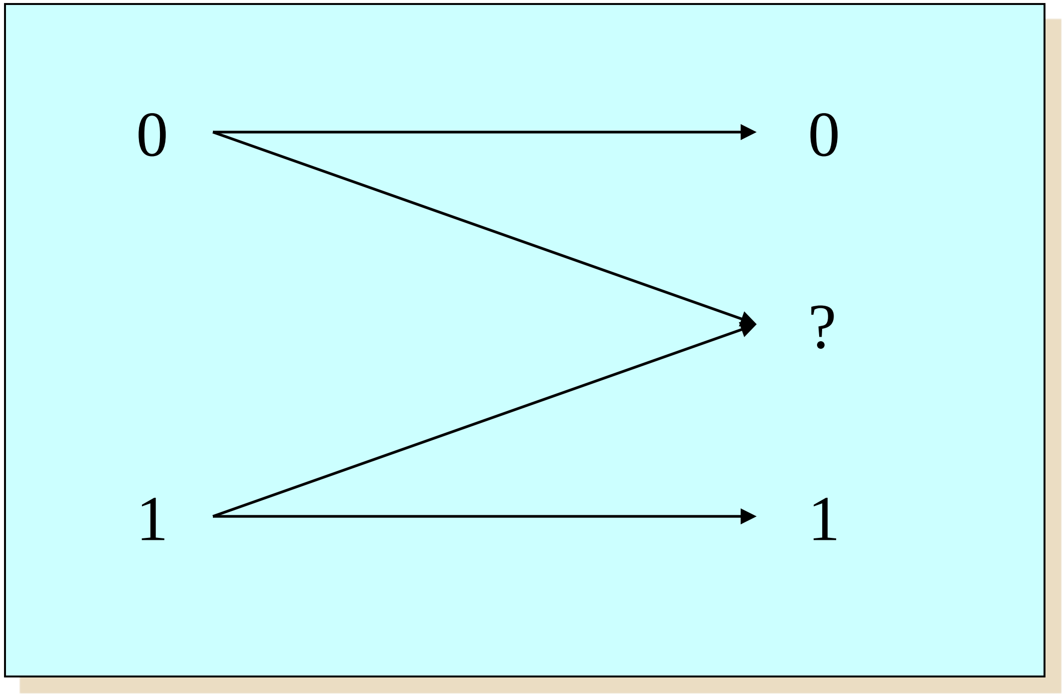
4.1 信道的分类

◉ 例:二进制对称信道



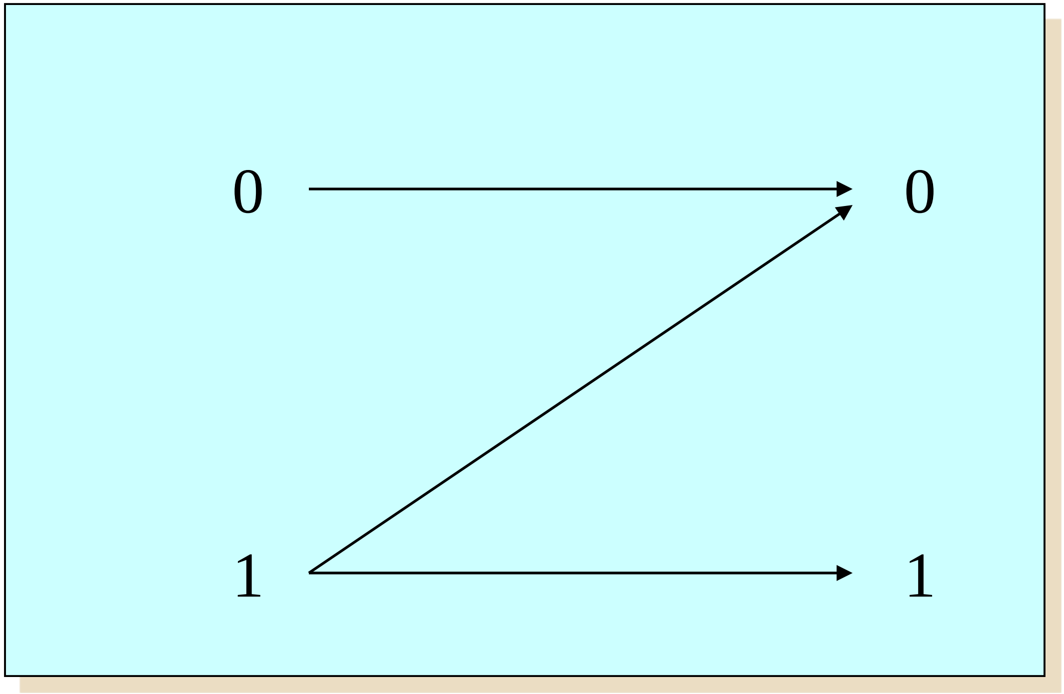
4.1 信道的分类

⦿例:二进制删除信道



4.1 信道的分类

- 例:二进制Z信道



目录

4.2 信道的数学描述

◉信道输入： $x \in A_x$

$A_x=\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$

◉信道输出： $y \in A_y$

$A_y=\{y_1, y_2, \dots, y_s\}$

◉信道转移概率分布矩阵：

$$Q = [p(y_j/x_i)]_{r\times s}$$

$i = 1, 2, \dots, r.$

$j = 1, 2, \dots, s.$

4.2 信道的数学描述

- 信道输入符号代价函数b(x)：

  设信道输入概率分布p(x)

  平均代价 $E[b(x)] = \sum_{x} p(x)b(x)$

  对于长度为n的符号串

  $$b(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} b(x_i)$$

  平均代价 $E[b(\mathbf{X})] = \sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x})b(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} E[b(X_i)]$

目录

- 信道的分类
- 信道的数学描述
- 信道容量-代价函数的定义
- 信道容量-代价函数的性质
- 计算信道容量-代价函数$C(\beta)$
- 计算信道容量C_{max}
- 信道编码极限

4.3 信道容量_代价函数的定义

- 定义4.1

$$C_n(\beta)=\max_{p(\mathbf{x})}\left\{I(\mathbf{X};\mathbf{Y}):E\left[b(\mathbf{X})\right]\le n\beta\right\}$$

为信道的n维容量_代价函数

其中β是最大代价

4.3 信道容量_代价函数的定义

- 说明

(1) $p(\mathbf{y}/\mathbf{x})$给定，寻找一种满足给定代价约束的输入概率分布$p(\mathbf{x})$，使互信息量达到极大值

(2) $I(\mathbf{X};\mathbf{Y})$是$p(\mathbf{x})$的连续函数

(3) 定义$\beta_{\min} = \min\limits_{x \in A_x} b(x)$

则$C_n(\beta)$的定义域为$\beta \geq \beta_{\min}$

(4) 若$\beta_1 > \beta_2$，则$C_n(\beta_1) \geq C_n(\beta_2)$

4.3 信道容量_代价函数的定义

- 定义4.2

信道的容量_代价函数定义为：

$$C(\beta)=\sup_{n}\frac{1}{n}C_n(\beta)$$

sup __ 上确界

目录

- 信道的分类
- 信道的数学描述
- 信道容量-代价函数的定义
- 信道容量-代价函数的性质
- 计算信道容量-代价函数C(β)
- 计算信道容量C_{max}
- 信道编码极限

4.4 信道容量_代价函数的性质

⊙定理4.1 $C_n(\beta)$是β的**上凸函数**, 对于$\beta \geq \beta_{min}$

证明：设 $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$

需证明对于$\beta_1, \beta_2 \geq \beta_{min}$， 下式成立

$$C_n(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2) \geq \alpha_1 C_n(\beta_1) + \alpha_2 C_n(\beta_2)$$

4.4 信道容量_代价函数的性质

证明：（续1）设$\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$是 n_维信源

其分布$p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x})$达到容量$C_n(\beta_1), C_n(\beta_2)$

即若$\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2$是与$\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$对应的输出，

则有 $I(\mathbf{X}_1;\mathbf{Y}_1) = C_n(\beta_1), \quad E[b(\mathbf{X}_1)] \le n\beta_1$

$I(\mathbf{X}_2;\mathbf{Y}_2) = C_n(\beta_2), \quad E[b(\mathbf{X}_2)] \le n\beta_2$

4.4 信道容量_代价函数的性质

证明：（续2）

设信源**X**的分布 $p(\mathbf{x}) = \alpha_1 p_1(\mathbf{x}) + \alpha_2 p_2(\mathbf{x})$.

Y是相应的输出，有

$$
\begin{aligned}
E[b(\mathbf{X})] &= \sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x})b(\mathbf{x}) \\
&= \alpha_1 \sum_{\mathbf{x}} p_1(\mathbf{x})b(\mathbf{x}) + \alpha_2 \sum_{\mathbf{x}} p_2(\mathbf{x})b(\mathbf{x}) \\
&= \alpha_1 E[b(\mathbf{X}_1)] + \alpha_2 E[b(\mathbf{X}_2)] \\
&\le n(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)
\end{aligned}
$$

根据定义4.1有 $I(\mathbf{X};\mathbf{Y}) \le C_n(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)$

4.4 信道容量_代价函数的性质

证明:（续3）

根据定理2.6，因为$I(\mathbf{X};\mathbf{Y})$是输入概率分布$p(\mathbf{x})$的上凸函数

有$I(\mathbf{X};\mathbf{Y}) \geq \alpha_1 I(\mathbf{X}_1;\mathbf{Y}_1)+\alpha_2 I(\mathbf{X}_2;\mathbf{Y}_2)$

$$= \alpha_1 C_n(\beta_1) + \alpha_2 C_n(\beta_2)$$

所以 $C_n(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2) \geq \alpha_1 C_n(\beta_1) + \alpha_2 C_n(\beta_2)$

证毕!

4.4 信道容量_代价函数的性质

$C_n(\beta)$ 的定义

证明:（小结）

$$C_n(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2) \geq I(\mathbf{X;Y})$$

$$\geq \alpha_1 I(\mathbf{X}_1;\mathbf{Y}_1)+\alpha_2 I(\mathbf{X}_2;\mathbf{Y}_2)$$

$$= \alpha_1 C_n(\beta_1) + \alpha_2 C_n(\beta_2)$$

定理2.6

假设条件

4.4 信道容量_代价函数的性质

- 定理4.2 对于离散无记忆信道(DMC)

  当信道输入离散无记忆时

  有 $C_n(\beta)=nC_1(\beta)$

  其中 $n=1, 2, \ldots$ 　　$\beta \geq \beta_{min}$

证明过程: (a) $C_n(\beta) \leq nC_1(\beta)$

(b) $C_n(\beta) \geq nC_1(\beta)$

4.4 信道容量_代价函数的性质

证明：(a) 设n_维信源$\mathbf{X}=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的分布

$p(\mathbf{x})$达到信道容量$C_n(\beta)$, 即

$$E[b(\mathbf{X})] \le n\beta,\ I(\mathbf{X};\mathbf{Y}) = C_n(\beta) \tag{4.1}$$

根据定理2.9 (DMC)，有

$$I(\mathbf{X};\mathbf{Y}) \le \sum_{i=1}^{n} I(X_i;Y_i) \tag{4.2}$$

定义 $\beta_i=E[b(x_i)]$, 则有

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i = \sum_{i=1}^{n}E[b(X_i)] = E[b(\mathbf{X})] \le n\beta$$

根据定义4.1，有 $I(X_i;Y_i) \le C_1(\beta_i)$ （4.3）

4.4 信道容量_代价函数的性质

证明：(a) （续）

由定理4.1知，$C_1(\beta)$是β的上凸/上升函数，

根据Jensen不等式，有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}C_1(\beta_i) \le C_1\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\beta_i\right) = C_1\left\{\frac{1}{n}E\left[b(\mathbf{X})\right]\right\} \le C_1(\beta)$$

$$\sum_{i=1}^{n}C_1(\beta_i) \le nC_1(\beta) \qquad (4.4)$$

由(4.1), (4.2), (4.3), (4.4)式得

$$C_n(\beta) \le nC_1(\beta)$$

4.4 信道容量_代价函数的性质

证明：(b)设一维信源X达到信道容量$C_1(\beta)$

即 $E[b(x)] \le \beta$

$I(X;Y)= C_1(\beta)$

设n_维信源$\mathbf{X}=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 离散无记忆

每一个分量与X同分布,则有

$$E[b(\mathbf{X})]=\sum_{i=1}^{n}E[b(X_i)]\le n\beta$$

根据定义4.1,有

$$C_n(\beta)\ge I(\mathbf{X};\mathbf{Y})$$

4.4 信道容量_代价函数的性质

证明：(b)（续）

根据定理2.8(DMS),有

$$I(\mathbf{X};\mathbf{Y}) \geq \sum_{i=1}^{n} I(X_i;Y_i)$$

因此 $C_n(\beta) \geq nC_1(\beta)$

综合(a),(b)有$C_n(\beta)=nC_1(\beta)$

4.4 信道容量_代价函数的性质

证明：（小结）

假设条件

定理2.9

$C_n(\beta)$ 的定义

$C_n(\beta)$ 的上凸/上升性

$$C_n(\beta)=I(\mathbf{X};\mathbf{Y})\le\sum_{i=1}^{n}I(X_i;Y_i)\le\sum_{i=1}^{n}C_1(\beta_i)\le nC_1(\beta)$$

$$C_n(\beta)\ge I(\mathbf{X};\mathbf{Y})\ge\sum_{i=1}^{n}I(X_i;Y_i)=nC_1(\beta)$$

$C_n(\beta)$ 的定义

定理2.8

假设条件

4.4 信道容量_代价函数的性质

- 推论4.1: 对于离散无记忆信道(DMC), 有$C(\beta) = C_1(\beta)$

4.4 信道容量_代价函数的性质

- $C(\beta)$的性质：
  - (1) $C(\beta)$是连续函数，对于$\beta \geq \beta_{min}$
  - (2) $C(\beta)$是上凸函数
  - (3) $C(\beta)$是上升函数

4.4 信道容量_代价函数的性质

- C(β)的性质:

(4) 当β增大到一定值时, C(β)变为常数.

定义信道容量 $C_{max} = \max\{C(\beta): \beta \geq \beta_{min}\}$

即 $C_{\max} = \max\limits_{p(x)}\{I(X;Y)\}$ 不受代价E[b(x)]限制.

定义 $\beta_{max} = \min\{E[b(X)]: I(X;Y) = C_{max}\}$

则

$$\boxed{C(\beta)=\begin{cases}\max\limits_{p(x)}\{I(X;Y):E[b(X)]=\beta\} & \beta_{\min}\leq\beta\leq\beta_{\max}\\ C_{\max} & \beta\geq\beta_{\max}\end{cases}}$$

4.4 信道容量_代价函数的性质

- C(β)的性质：

  (5) 定义$C_{min} = C(\beta_{min})$

  此时为了使$E[b(x)]=\beta_{min}$

  需要设定：

  当且仅当$b(x)>\beta_{min}$时, $p(x) = 0$

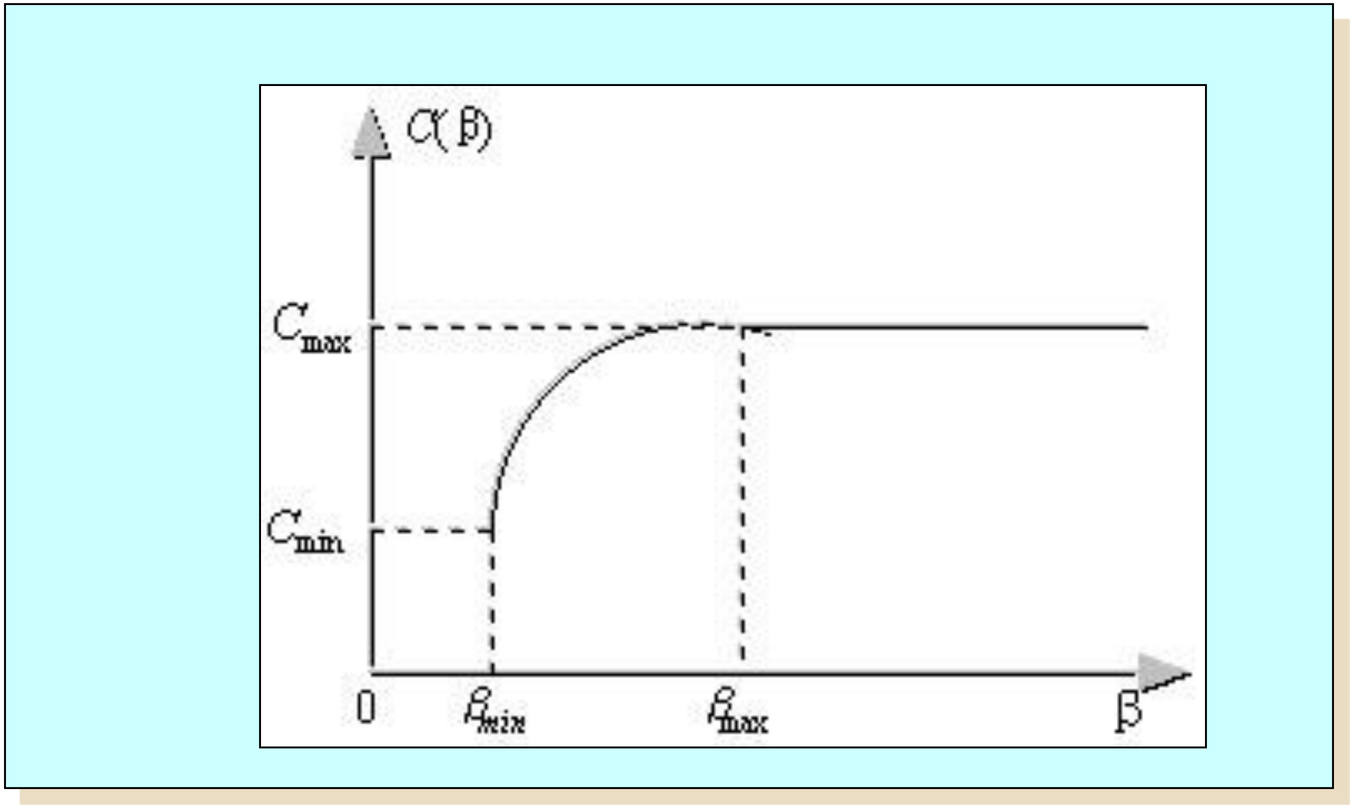
  而对应$b(x)=\beta_{min}$的x的概率分布

  应满足$\sum p(x)=1$

  即C_{min} 是简化信道的容量

4.4 信道容量_代价函数的性质

⊙C(β)的曲线：



目录

- 信道的分类
- 信道的数学描述
- 信道容量-代价函数的定义
- 信道容量-代价函数的性质
- 计算信道容量-代价函数C(β)
- 计算信道容量C_{max}
- 信道编码极限

4.5 计算信道容量_代价函数C(β)

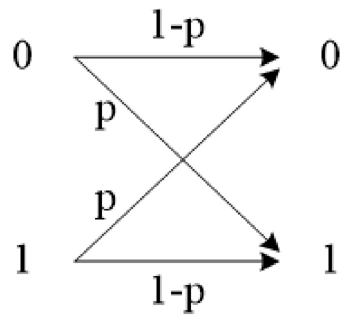
⊙利用对称性求信道的容量_代价函数

例4.1：二进制对称信道(BSC)，其转移概率分布和代价函数如下，求C(β).

p(y/x)	0	1
0	1-p	p
1	p	1-p

x	b(x)
0	0
1	1

例 4.1：



解： $\beta_{\min} = 0$

简化信道只有一个输入：0

因此 $C_{\min} = C(0) = 0$

设信源 X 在 $0 \le \beta \le \beta_{\max}$ 间达到 $C(\beta)$

并设 $P\{x=1\} = \beta$， $P\{x=0\} = \alpha = 1-\beta$

有 $E\left[b(x)\right] = \beta$

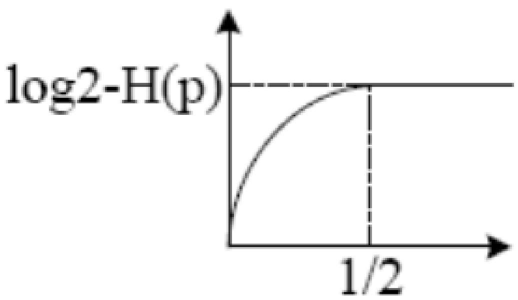
$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y \mid X) = H\left[(1-\beta)(1-p) + \beta p\right] - H(p)$$

当 $\beta = 1/2$ 时，

$H[\alpha(1-p)+\beta p]$ 达到极大值 $\log 2$

所以 $\beta_{\max} = 1/2$

$$C(\beta)=\begin{cases} H[(1-\beta)(1-p)+\beta p]-H(p) & 0\le\beta\le 1/2 \\ \log 2 - H(p) & \beta > 1/2 \end{cases}$$



4.5 计算信道容量_代价函数C(β)

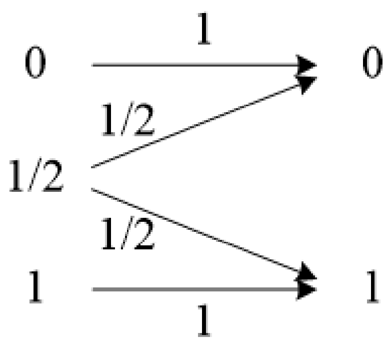
- 利用对称性求信道的容量_代价函数

例4.2: 已知A_x ={0, 1/2, 1}, A_y ={0, 1}. 转移概率分布和代价函数如下, 求C(β).

p(y/x)	0	1
0	1	0
1/2	1/2	1/2
1	0	1

x	b(x)
0	1
1/2	0
1	1

例 4.2：



解： $\beta_{\min} = 0$

$C(0) = 0$

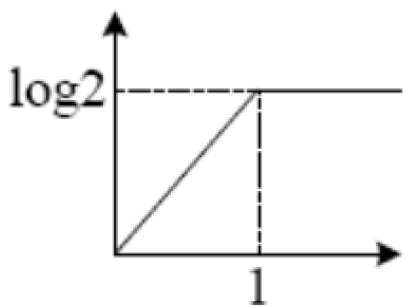
$E\left[b(x)\right] = p(0) + p(1) = \beta$

根据对称性，设 $p(0) = p(1) = \beta / 2$

则 $I(X;Y) = H(Y) - H(Y \mid X) = \log 2 - (1-\beta)\log 2 = \beta \log 2$

因此 $\beta_{\max} = 1$

$$C(\beta) = \begin{cases} \beta \log 2 & 0 \le \beta \le 1 \\ \log 2 & \beta > 1 \end{cases}$$



4.5 计算信道容量_代价函数C(β)

⊙利用对称性求信道的容量_代价函数

例4.3: 已知$A_x = A_y = \{0, 1, 2\}$. 转移概率函数和代价函数如下, 求C(β).

p(y/x)	0	1	2
0	1	0	0
1	0	1	0
2	0	0	1

x	b(x)
0	1
1	1
2	4

例 4.3：

$0 \longrightarrow 0$

$1 \longrightarrow 1$

$2 \longrightarrow 2$

解：设 $p(0)=\alpha_0$，$p(1)=\alpha_1$，$p(2)=\alpha_2$

当 $\beta_{\min} \le \beta \le \beta_{\max}$ 时，

$$E\left[b(x)\right]=\alpha_0+\alpha_1+4\alpha_2=\beta$$

$$C(\beta)=I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)=H(X)=H(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2)$$

$\beta_{\min}=1$，

简化信道 $Q'=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

则 $C(1)=\log 2$

同样，$C_{\max}=\max\left\{H(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2)\right\}=\log 3$

其中 $\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=1/3$

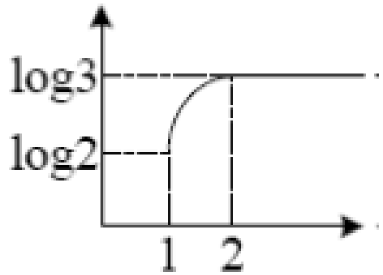
有 $\beta_{\max}=1/3+1/3+4/3=2$

根据对称性，设 $\alpha_0=\alpha_1=\alpha$， $\alpha_2=1-2\alpha$

有 $\alpha=2/3-\beta/6$

$$C(\beta)=H(2/3-\beta/6,2/3-\beta/6,\beta/3-1/3)\quad 1\le\beta\le 2$$

$$C(\beta)=\begin{cases} H(2/3-\beta/6,2/3-\beta/6,\beta/3-1/3) & 1\le\beta\le 2 \\ \log 3 & \beta>2 \end{cases}$$



4.5 计算信道容量_代价函数C(β)

- 利用拉格朗日乘子法求信道容量_代价函数
  - 求C(β) ($\beta_{min} \le \beta \le \beta_{max}$)

    实际是求等式约束条件下的极值问题

    根据定义：
    $$C(\beta) = \max_{p(x)} \{ I(X;Y) \}$$

    约束条件：
    $$\sum_x p(x) = 1$$
    $$\sum_x p(x) b(x) = \beta$$

4.5 计算信道容量_代价函数C(β)

- 利用拉格朗日乘子法求信道容量_代价函数
  - 引入参数λ_1, λ_2,

定义 $\varphi = I(X;Y) - \lambda_1\left[\sum_x p(x) - 1\right] - \lambda_2\left[\sum_x p(x)b(x) - \beta\right]$

实现极值的分布$p(x_i)$ 满足:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial p(x_i)} = 0 \\ \sum_{i=1}^{r} p(x_i) = 1 \\ \sum_{i=1}^{r} p(x_i)b(x_i) = \beta \end{cases}$$

其中 $i = 1, 2, \ldots r$.

4.5 计算信道容量_代价函数C(β)

- 利用拉格朗日乘子法求信道容量_代价函数
  - 上述方程可进一步化为：(其中i=1, 2, …, r)

$$
\begin{cases}
\sum_{j=1}^{s} p(y_j/x_i)\log\dfrac{p(y_j/x_i)}{p(y_j)} = I(X=x_i;Y) = \lambda_1 + \lambda_2 b(x_i) + \log e \\
\sum_{i=1}^{r} p(x_i) = 1 \\
\sum_{i=1}^{r} p(x_i) b(x_i) = \beta
\end{cases}
$$

4.5 计算信道容量_代价函数C(β)

- 利用拉格朗日乘子法求信道容量_代价函数
  - 由上述方程可确定$\lambda_1, \lambda_2, p(x_i)$,

  并由此确定C(β):

  (1) 当$\beta_{\min} \le \beta \le \beta_{\max}$时,

$$C(\beta) = \lambda_1 + \log e + \lambda_2 \sum_{i=1}^{r} p(x_i) b(x_i) = \lambda_1 + \lambda_2 \beta + \log e$$

  (2) $\beta_{\min} = \min_{x \in A_x} b(x), \quad C_{\min} = C(\beta_{\min})$

  (3) $\dfrac{\partial C(\beta)}{\partial \beta} = 0 \to \beta_{\max}, \quad C_{\max} = C(\beta_{\max})$

目录

- 信道的分类
- 信道的数学描述
- 信道容量-代价函数的定义
- 信道容量-代价函数的性质
- 计算信道容量-代价函数C(β)
- 计算信道容量C_{max}
- 信道编码极限

4.6 计算信道容量C_{MAX}

⊙利用对称性计算信道容量C_{max}

$$\mathbf{Q}=\left[\mathrm{p}(\mathrm{y_j}/\mathrm{x_i})\right]_{r\times s}=\begin{bmatrix} p(y_1/x_1) & p(y_2/x_1) & \cdots & p(y_s/x_1) \\ p(y_1/x_2) & p(y_2/x_2) & \cdots & p(y_s/x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p(y_1/x_r) & p(y_2/x_r) & \cdots & p(y_s/x_r) \end{bmatrix}$$

定义4.3：若信道转移概率分布矩阵中所有行都是第一行的一种置换，就称信道关于输入对称

定义4.4：若信道转移概率分布矩阵中所有列都是第一列的一种置换，就称信道关于输出对称

4.6 计算信道容量C_{MAX}

⦿利用对称性计算信道容量C_{max}

定义4.5: 若信道既是关于输入对称的，又是关于输出对称的，即信道转移概率分布矩阵具有下述性质:

(i) 每一行都是第一行的置换

(ii) 每一列都是第一列的置换

则称信道为对称信道

4.6 计算信道容量C_{MAX}

⊙利用对称性计算信道容量C_{max}

例：

$$Q=\begin{bmatrix}1/3 & 1/3 & 1/6 & 1/6\\ 1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/3\end{bmatrix}$$

$$Q'=\begin{bmatrix}1/3 & 1/3 & 1/6 & 1/6\\ 1/6 & 1/3 & 1/6 & 1/3\end{bmatrix}$$

4.6 计算信道容量C_{MAX}

⊙利用对称性计算信道容量C_{max}

定理4.4: 对于有r个输入，s个输出的离散无记忆对称信道，当信道输入等概时，

即$p(x_i) = 1/r \ (i=1, 2, \ldots, r)$ 时，

信道传输的信息量达到它的信道容量：

$$C = \log s - H(p_1, p_2, \ldots, p_s)$$

其中$p_1, p_2, \ldots, p_s$是信道的转移概率分布矩阵中的任意一行.

4.6 计算信道容量C_{MAX}

⊙利用对称性计算信道容量C_{max}

证明：$I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)$

$H(Y/X)=\Sigma_i p(x_i)H(Y/X=x_i)$

由转移概率矩阵中各行的对称性

即每一行都是其它行的置换

$$H(Y/X=x_i)=\sum_{y_j} p(y_j/x_i)\log\frac{1}{p(y_j/x_i)}$$

$$=H(p_1,p_2,\cdots,p_s)$$

其中$(p_1, p_2, \ldots, p_s)$为转移概率矩阵中任一行的元素

可见$H(Y/X=x_i)$与x_i无关

因此$H(Y/X)=H(p_1, p_2, \ldots, p_s)$

4.6 计算信道容量C_{MAX}

⊙利用对称性计算信道容量C_{max}

证明（续）：

根据定理2.1, $H(Y) \le \log s$

当且仅当对于所有j，$p(y_j)=1/s$时，等式成立

由转移概率矩阵各列的对称性可知：

当对于所有i，$p(x_i)=1/r$时，

有$p(y_j)=1/s$，$j=1, 2, \ldots, s$

因此，当信道输入等概时，

信道传输的信息量达到它的信道容量：

$$C= \log s - H(p_1, p_2, \ldots, p_s)$$

4.6 计算信道容量C_{MAX}

- 利用对称性计算信道容量C_{max}

例4.4: 设信道的转移概率分布矩阵如下，计算信道容量.

$$Q=\begin{bmatrix} 1-2\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-2\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1-2\varepsilon \end{bmatrix}$$

$$C_{\max}=\log 3-H(\varepsilon,\varepsilon,1-2\varepsilon)$$

4.6 计算信道容量C_{MAX}

◉ 利用对称性计算信道容量C_{max}

例4.5:设信道的转移概率分布矩阵如下，计算信道容量.

$$Q=\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$C_{\max}=\log 4-H(1/3,1/3,1/6,1/6)$$

4.6 计算信道容量C_{MAX}

- ⊙利用对称性计算信道容量C_{max}

定义4.5：若信道输出集Y可以划分成几个子集，而每个子集所对应的信道转移概率矩阵中的列所组成的子阵具有下述性质：

(i) 每一行都是第一行的置换

(ii) 每一列都是第一列的置换

则称信道为准对称信道

4.6 计算信道容量C_{MAX}

⊙ 利用对称性计算信道容量C_{max}

说明：

（1）准对称信道关于输入是对称的

（2）当输出集Y划分的子集只有一个，该信道为对称信道

例：

$$Q'=\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}$$

4.6 计算信道容量C_{MAX}

◉ 利用对称性计算信道容量C_{max}

定理4.5：实现准对称DMC信道容量的输入分布为等概分布.

C= logs - H(p_1, p_2, …, p_s)

$$C = \log r - H(p_1, p_2, \cdots p_s) - \sum_{k=1}^{n} N_k \log M_k$$

其中r是输入符号的个数

(p_1, p_2, …, p_s)为准对称转移概率矩阵中任一行的元素

N_k为第k个对称子阵中行元素之和，而M_k为第k个对称子阵中列元素之和

4.6 计算信道容量C_{MAX}

- 利用对称性计算信道容量C_{max}

例4.6:设信道的转移概率分布矩阵如下，计算信道容量.

$$Q'=\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$C_{\max}=\log 2-H(1/3,1/3,1/6,1/6)-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\log\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\log\frac{1}{3}$$

$$=\frac{5}{6}\log 2-\frac{1}{2}\log 3$$

4.6 计算信道容量C_{MAX}

⊙利用拉格朗日乘子法计算信道容量C_{max}

根据定义 $C_{\max}=\max\limits_{p(x)}\{I(X;Y)\}$

约束条件 $\sum\limits_{x}p(x)=1$

引入参数λ_1, 定义 $\varphi=I(X;Y)-\lambda_1\left[\sum\limits_{x}p(x)-1\right]$

实现极值的分布$p(x_i)$ 满足:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial p(x_i)}=0\\ \sum\limits_{i=1}^{r}p(x_i)=1\end{cases}$$

其中 i = 1, 2, …r.

4.6 计算信道容量C_{MAX}

⊙利用拉格朗日乘子法计算信道容量C_{max}

上述方程可进一步化为：（其中i=1, 2, …, r）

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{s} p(y_j/x_i)\log\frac{p(y_j/x_i)}{p(y_j)} = I(X=x_i;Y) = \lambda_1 + \log e \\ \sum_{i=1}^{r} p(x_i) = 1 \end{cases}$$

求得（当$p(x_i)>0$时）：

$$C = \lambda_1 + \log e = \sum_{y_j} p(y_j/x_i)\log\frac{p(y_j/x_i)}{p(y_j)}$$

4.6 计算信道容量C_{MAX}

◎利用拉格朗日乘子法计算信道容量C_{max}

定理4.6 给定离散无记忆信道(DMC)的概率转移分布$p(y_j/x_i)$，使信道传输的信息量达到信道容量的输入概率分布$p(x_i)$满足下述条件：

$$I(X=x_i;Y)=\sum_{y_j} p(y_j/x_i)\log\frac{p(y_j/x_i)}{p(y_j)}=C,\quad if\ p(x_i)>0$$

$$I(X=x_i;Y)=\sum_{y_j} p(y_j/x_i)\log\frac{p(y_j/x_i)}{p(y_j)}\le C,\quad if\ p(x_i)=0$$

其中C是信道容量，上述条件是充分必要的.

4.6 计算信道容量C_{MAX}

⊙利用拉格朗日乘子法计算信道容量C_{max}

说明：充分条件：用拉格朗日乘子法求极值，可以找到一组分布，满足上述条件.

必要条件：如果有一组分布满足上述条件，则使$I(X;Y)$达到极大.

证明：(必要条件)

如果有一组分布$p(x_i)$，使其信息量$I(X;Y)$达到：

$I(X=x_i;Y) = C$， 若 $p(x_i)>0$

$I(X=x_i;Y) \le C$， 若$p(x_i)= 0$

任找另一组分布$p'(x_i)$，对应信息量为$I'(X;Y)$

需证明$I'(X;Y)-I(X;Y)\le 0$

4.6 计算信道容量C_{MAX}

- 利用拉格朗日乘子法计算信道容量C_{max}

证明：(续)

$$I'(X;Y)-I(X;Y)=\sum_{x_i} p'(x_i)I'(x_i;Y)-\sum_{x_i} p(x_i)I(x_i;Y)$$

$$=\sum_{x_i} p'(x_i)I'(x_i;Y)-\sum_{x_i} p(x_i)C$$

$$=\sum_{x_i} p'(x_i)I'(x_i;Y)-\sum_{x_i} p'(x_i)C$$

$$\le\sum_{x_i} p'(x_i)I'(x_i;Y)-\sum_{x_i} p'(x_i)I(x_i;Y)$$

4.6 计算信道容量C_{MAX}

⊙利用拉格朗日乘子法计算信道容量C_{max}

证明:(续)

$$I'(X;Y)-I(X;Y) \le \sum_{x_i,y_j} p'(x_i)p(y_j/x_i)\log\frac{\sum_{x_k} p(y_j/x_k)p(x_k)}{\sum_{x_k} p(y_j/x_k)p'(x_k)}$$

利用 logx≤x-1

$$\le \sum_{x_i,y_j} p'(x_i,y_j)\frac{p(y_j)}{p'(y_j)} - \sum_{x_i,y_j} p'(x_i,y_j)$$

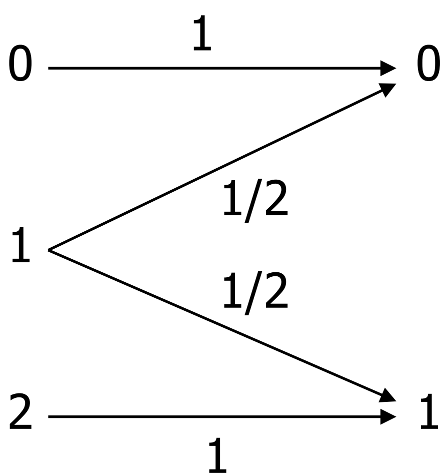
$$=1-1$$

$$=0$$

4.6 计算信道容量C_{MAX}

⊙ 利用拉格朗日乘子法计算信道容量C_{max}

例题4.7 设信道的转移概率分布矩阵如下，计算信道容量.(对比例题4.2)



$$Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.6 计算信道容量C_{max}

- 利用拉格朗日乘子法计算信道容量C_{max}

例题4.7（续）

设　$p(x=0) = p(x=2) = 1/2$，　$p(x=1) = 0$

则　$I(x=0;Y) = \log 2$

　　$I(x=2;Y) = \log 2$

而　$I(x=1;Y) = 0$

满足定理4.6，因此该信道的容量为

$$C=\log 2=1\text{bit}$$

4.6 计算信道容量C_{max}

⊙ 利用拉格朗日乘子法计算信道容量C_{max}

一般情况下（设r=s），可将$I(X=x_i;Y)=C$写作：

$$\sum_{y_j} p(y_j/x_i)\log p(y_j/x_i) - \sum_{y_j} p(y_j/x_i)\log p(y_j) = C$$

$$\sum_{y_j} p(y_j/x_i)\big(C+\log p(y_j)\big) = \sum_{y_j} p(y_j/x_i)\log p(y_j/x_i)$$

其中i=1,2,…,r.

这r个方程可看作是r个未知变量$C+\log p(y_j)$的线性方程.

4.6 计算信道容量C_{max}

⊙ 利用拉格朗日乘子法计算信道容量C_{max}

若信道转移概率矩阵是非异方阵，必有唯一解.

令$\alpha_j = C + \log p(y_j)$

则 $p(y_j) = 2^{-C} \cdot 2^{\alpha_j}$

由约束条件$\sum_{y_j} p(y_j) = 1$

有 $1 = 2^{-C} \cdot \sum_j 2^{\alpha_j}$

$$C = \log \sum_j 2^{\alpha_j}$$

4.6 计算信道容量C_{max}

⊙ 利用拉格朗日乘子法计算信道容量C_{max}

说明：

- 上述解是否成立需要验证
- 利用C计算所有的$p(y_j)$，再求得所有的$p(x_i)$
- 若每个$p(x_i)$都是概率分布，则所得解正确
- 否则解不正确，此时极值出现在边界上，应令某个$p(x_i)$为0，再进行计算

4.6 计算信道容量C_{max}

⊙ 利用拉格朗日乘子法计算信道容量C_{max}

例题4.8　设信道的转移概率分布矩阵如下，计算信道容量.

$$Q=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

4.6 计算信道容量C_{max}

⊙ 利用拉格朗日乘子法计算信道容量C_{max}

例题4.8（续）

$$由\sum_{y_j} p(y_j/x_i)\alpha_j = \sum_{y_j} p(y_j/x_i)\log p(y_j/x_i) \quad i=1,2,\cdots r$$

$$得 \quad \begin{cases} \frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{4}\alpha_2+\frac{1}{4}\alpha_4=\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\log\frac{1}{4} \\ \alpha_2=0 \\ \alpha_3=0 \\ \frac{1}{4}\alpha_1+\frac{1}{4}\alpha_3+\frac{1}{2}\alpha_4=\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} \end{cases}$$

4.6 计算信道容量C_{max}

⊙ 利用拉格朗日乘子法计算信道容量C_{max}

例题4.8（续）

$$C = \log \sum_j 2^{\alpha_j}$$

$$\alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 = \alpha_4 = -2$$

$$C = \log(2^{-2} + 2^0 + 2^0 + 2^{-2}) = \log 5 - 1$$

$$p(y_1) = p(y_4) = \frac{1}{10} \qquad p(x_1) = p(x_4) = \frac{4}{30}$$

$$p(y_2) = p(y_3) = \frac{4}{10} \qquad p(x_2) = p(x_3) = \frac{11}{30}$$

4.6 计算信道容量C_{max}

- 利用拉格朗日乘子法计算信道容量C_{max}

例题4.9

[习题4.4(2)] 给定信道转移概率分布

$$\begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

◎ 解： 由$\sum_{y_j} p(y_j/x_i)\alpha_j = \sum_{y_j} p(y_j/x_i)\log p(y_j/x_i) \quad i=1,2,\cdots r$

有
$$\begin{cases} \frac{3}{4}\alpha_1 + \frac{1}{4}\alpha_2 = \frac{3}{4}\log\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} \\ \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 + \frac{1}{3}\alpha_3 = \frac{1}{3}\log\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\log\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\log\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4}\alpha_2 + \frac{3}{4}\alpha_3 = \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\log\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -8\log 2 + 6\log 3 \\ \alpha_2 = -15\log 3 + 16\log 2 \\ \alpha_3 = 6\log 3 - 8\log 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C = \log\sum_j 2^{\alpha_j} \approx 2.51\text{bits}$$

⊙ 解：（续）

$$\begin{cases} p(y_1)=0.49965 \\ p(y_2)=8.015\times10^{-4} \\ p(y_3)=0.49965 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(x_1)=1.9874 \\ p(x_2)=-2.9817 \\ p(x_3)=1.9914 \end{cases}$$

可见这组解不符合题意，应该舍去！

令 $p(x_2)=0$

此时转移概率矩阵为 $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ 是准对称信道

$$C=\log 2-H(\frac{3}{4},\frac{1}{4},0)-\frac{3}{4}\log\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\log\frac{1}{2}$$

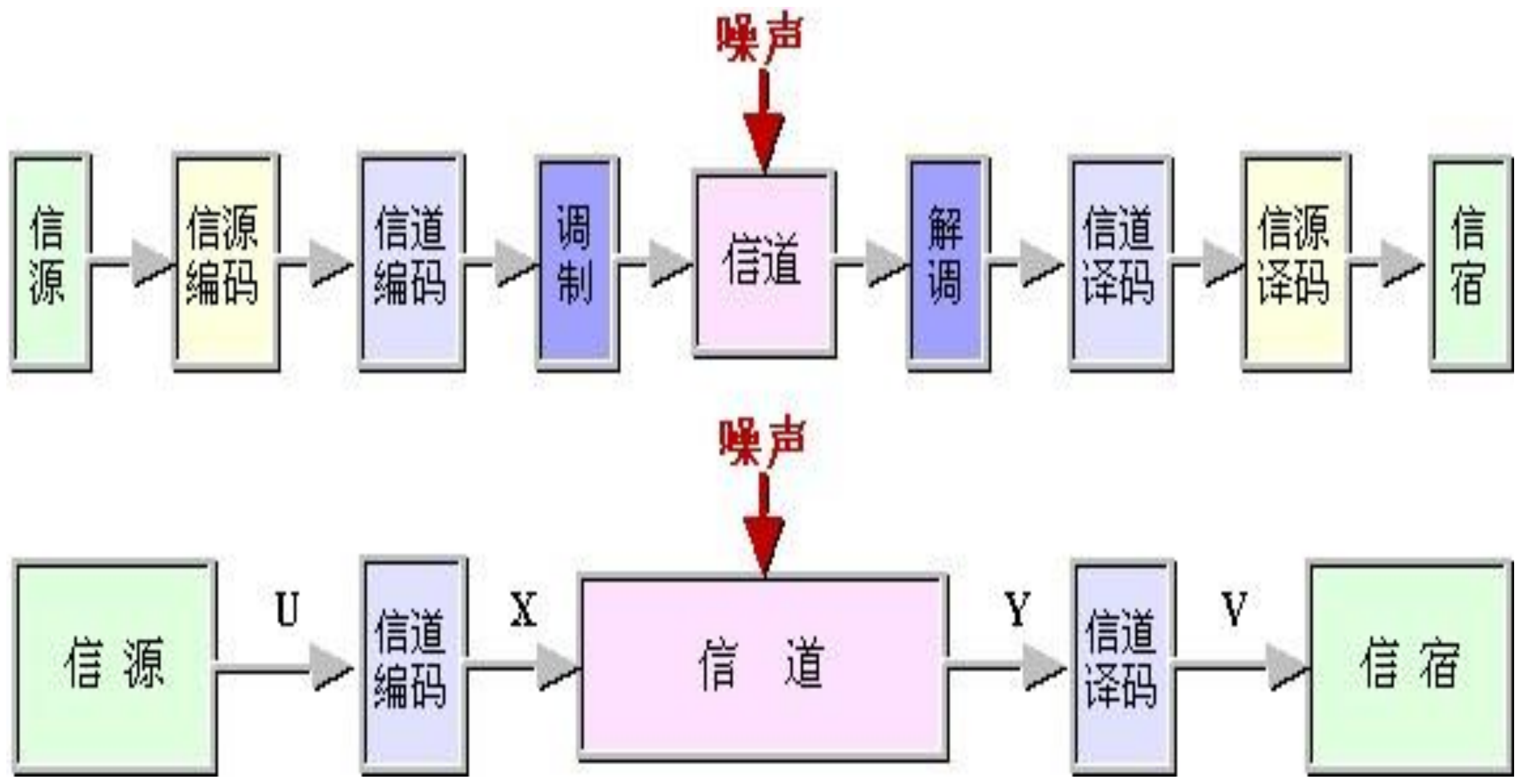
$$=\log 2-\frac{3}{4}\log\frac{4}{3}-\frac{1}{4}\log 4-\frac{3}{4}\log\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\log\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3}{4}\log 2=0.75bits$$

目录

4.7 信道编码极限

- 信道编解码模型



4.7 信道编码极限

◉ 信道编解码模型

说明：

信源序列： $\mathbf{u}=(u_0, u_1, \ldots, u_{k-1})$

编码输出： $\mathbf{x}=(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$

信道接收： $\mathbf{y}=(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$

译码输出： $\mathbf{v}=(v_0, v_1, \ldots, v_{k-1})$

编码速率： $R=k/n$

误码率： $P_e=P_r\{u_i \neq v_i\}$

4.7 信道编码极限

◉ 信道编码极限

分析：如果信源（信道输入）是离散无记忆的，

有 $I(\mathbf{U};\mathbf{V}) \geq \sum_{i=0}^{k-1} I(U_i;V_i)$

定理2.8

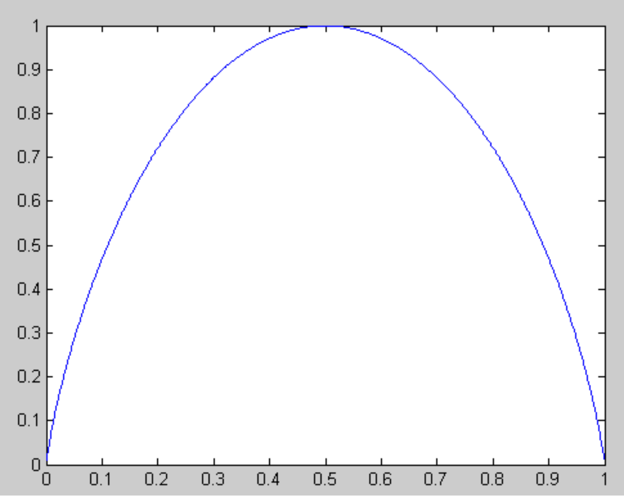
而 $I(U_i;V_i) = H(U_i) - H(U_i/V_i) = \log 2 - H(U_i/V_i)$

$\geq \log 2 - H(P_e)$　　($Fano$不等式）

$H(X/Y) \leq H(P_e) + P_e \log(r-1)$

因此 $I(\mathbf{U};\mathbf{V}) \geq k[1 - H(P_e)]$

4.7 信道编码极限



- 信道编码极限

分析（续）：根据数据处理定理，有

$$I(\mathbf{U};\mathbf{V}) \le I(\mathbf{X};\mathbf{Y})$$

根据定义 $I(\mathbf{X};\mathbf{Y}) \le C_n(\beta) = nC(\beta)$

有 $$\frac{k}{n} \le \frac{C(\beta)}{1-H(P_e)}$$

k/n随着P_e的下降而减小！

4.7 信道编码极限

◉ 信道编码极限

分析（续）：若$R=k/n>C(\beta)$,

则 $P_e \geq H^{-1}[1-C(\beta)/R]>0$

不考虑代价，若$R=k/n>C_{max}$

则 $P_e \geq H^{-1}[1-C_{max}/R]>0$

结论：速率超过信道容量时，不能可靠传输！

4.7 信道编码极限

- 信道编码定理

定理4.5: 设一个DMC的容量代价函数为$C(\beta)$.

则对于任意$\beta_0 \geq \beta_{min}$, 和$\beta > \beta_0$,

$R < C(\beta_0)$, $\varepsilon > 0$,

以及所有足够大的n值，

存在一个码长为n的码$C=\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_M\}$

和相应的译码规则，使得：

(a) 每一个码字$\mathbf{x}_i$都是β-容度

(b) $M \geq 2^{\lceil Rn \rceil}$

(c) $P_E^{(i)} < \varepsilon$ 对于所有$i=1, 2, \ldots, M$.

作业

习题4.1

习题4.2

习题4.3（2）

习题4.4（1）、（3）