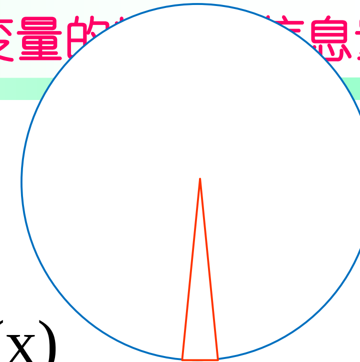
第八章 非离散信源和信道

- 非离散随机变量的熵和互信息量
  - 非离散随机变量的熵
  - 非离散随机变量的互信息量
  - 熵和互信息量的基本性质
  - 熵的条件极值
  - 微分熵及坐标变换
- 高斯信道容量及信道编码定理
- 高斯信源率失真函数及限失真信源编码定理



非离散随机变量的熵

设非离散随机变量 $X \in R$，其概率密度函数为 $p(x)$

量化 $\ldots < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$

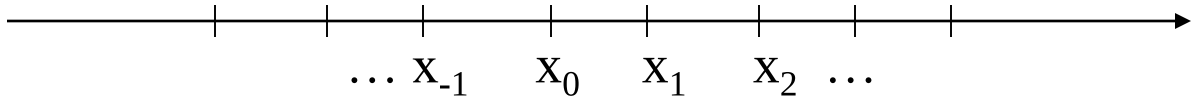
量化区间 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

量化值 $[X] = i$ 表示 X 落入某个量化区间 (x_{i-1}, x_i)

对应一个概率分布

$$p([X]=i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)dx = \Delta x_i p(s_i) = p(i)$$

思路：计算圆的面积（微积分）



非离散随机变量的熵（续）

量化后的熵:

$$H([X]) = \sum_i p(i)\log\frac{1}{p(i)}$$

$$= \sum p(s_i)\Delta x_i \log\frac{1}{p(s_i)\Delta x_i}$$

$$= \sum_i p(s_i)\Delta x_i \log\frac{1}{p(s_i)} + \sum_i p(s_i)\Delta x_i \log\frac{1}{\Delta x_i}$$

非离散随机变量的熵（续）

取参数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2>0$，满足$\varepsilon_1< \Delta x_i <\varepsilon_2$

即ε_1 是区间最小值，ε_2 是区间最大值

使 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$, 则

$$H(X) = \lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2 \to 0} H([X])$$

$$= \int p(x) \log \frac{1}{p(x)} dx + \infty$$

结论: 非离散随机变量的熵**趋于无穷大**

非离散随机变量的熵（续）

定义非离散随机变量的微分(相对)熵:

$$h(X) \equiv \int p(x) \log \frac{1}{p(x)} dx$$

非离散随机矢量的微分(相对)熵:

$$h(\mathbf{X}) = \int p(\mathbf{x}) \log \frac{1}{p(\mathbf{x})} d\mathbf{x}$$

非离散随机变量的熵（续）

例8.1: 某信源的输出信号在（-1, +1）取值范围内具有均匀的概率密度分布函数，求该信源的微分熵

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & x\in(-1,+1)\\ 0 & x\notin(-1,+1)\end{cases}$$

$$h(x)=-\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\log p(x)dx=-\int_{-1}^{+1}\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}dx=1bit$$

非离散随机变量的熵（续）

例8.2: 若将输出信号放大K倍，再求其微分熵

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2K} & x\in(-K,+K)\\ 0 & x\notin(-K,+K)\end{cases}$$

$$h(x)=-\int_{-K}^{+K}\frac{1}{2K}\log\frac{1}{2K}dx=1+\log K(bit)$$

$$K=2,\quad h(x)=2bit$$

$$K=\frac{1}{2},\quad h(x)=0bit$$

$$K=\frac{1}{4},\quad h(x)=-1bit$$

h(x)的值依赖于坐标系的选取，有可能小于0！

非离散随机变量的熵（续）

例8.3: 高斯随机变量的熵:

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$h(X)=\frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2)$$

h(*X*)与方差有关，与均值无关！

例8.4: 统计独立、同分布的n维高斯随机矢量的熵:

$$p(\mathbf{x})=\prod_i p(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x_i-m)^2}{2\sigma^2}}\right]$$

$$h(\mathbf{X})=\frac{n}{2}\log(2\pi e\sigma^2)$$

非离散随机变量的熵（续）

例8.5: 计算具有以下概率密度函数的随机变量的熵:

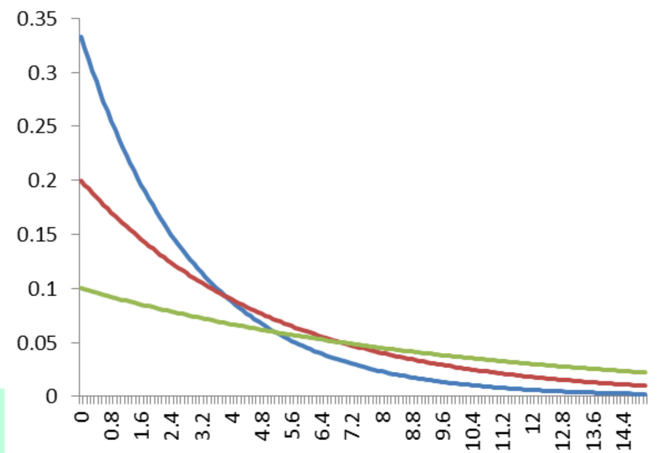
（1）指数分布： $p(x)=\lambda e^{-\lambda x},\qquad x\geq 0, \lambda>0$

$$
\begin{aligned}
h(X) &= -\int_0^\infty p(x)\log p(x)dx \\
&= -\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\log\left(\lambda e^{-\lambda x}\right)dx \qquad (\lambda>0) \\
&= -\log\lambda\cdot\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}dx+\lambda\log e\cdot\int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x}dx \\
&= -\log\lambda\cdot\int_0^\infty p(x)dx+\lambda\log e\cdot\int_0^\infty xp(x)dx \\
&= -\log\lambda+\frac{\lambda\log e}{\lambda} \\
&= \log\frac{e}{\lambda}
\end{aligned}
$$

其中 $\int_0^\infty xp(x)dx$

$=$ 均值

$$
=\int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x}dx
=\frac{1}{\lambda}
$$



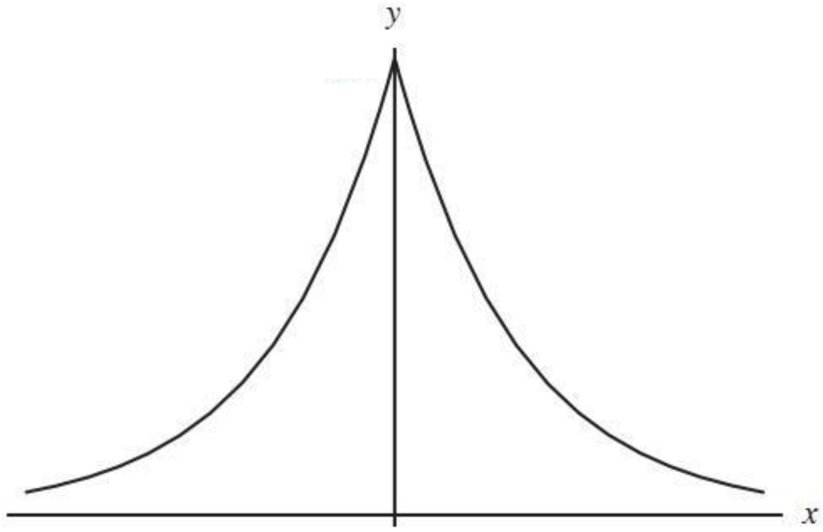
非离散随机变量的熵（续）

例8.5: 计算具有以下概率密度函数的随机变量的熵:

（2）拉普拉斯分布：

$$p(x)=\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}, \qquad -\infty < x < +\infty, \lambda > 0$$

$$h(X)=\log\frac{2e}{\lambda}$$



- 非离散随机变量的熵和互信息量
  - 非离散随机变量的熵
  - 非离散随机变量的互信息量
  - 熵和互信息量的基本性质
  - 熵的条件极值
  - 微分熵及坐标变换
- 高斯信道容量及信道编码定理
- 高斯信源率失真函数及限失真信源编码定理

非离散随机变量的互信息量

设非离散随机变量 $X \in R$, $Y \in R$

其概率密度函数分别为$p(x)$, $q(y)$

量化 $\ldots < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

$$\varepsilon_1 < \Delta x_i < \varepsilon_2$$

$\ldots < y_{-1} < y_0 < y_1 < y_2 < \ldots$

$$\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$$

$$\varepsilon_1 < \Delta y_j < \varepsilon_2$$

非离散随机变量的互信息量（续）

$$p([X]=i)=\int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)dx=\Delta x_i p(s_i)$$

$$q([Y]=j)=\int_{y_{j-1}}^{y_j} q(y)dy=\Delta y_j q(t_j)$$

$$p([X]=i,[Y]=j)=\int_{x_{i-1}}^{x_i}\int_{y_{j-1}}^{y_j} p(x,y)dxdy$$

$$=\Delta x_i \Delta y_j q(t_j)p(s_{ij}/t_{ij})$$

$$p([X]=i/[Y]=j)=\frac{p([X]=i,[Y]=j)}{q([Y]=j)}$$

$$=\Delta x_i p(s_{ij}/t_{ij})$$

非离散随机变量的互信息量（续）

$$H([X]/[Y])=\sum_{[X],[Y]} p([X],[Y])\log\frac{1}{p([X]/[Y])}$$

$$=\sum_{i,j}\Delta x_i\Delta y_j p(s_{ij}/t_{ij})q(t_j)\log\frac{1}{p(s_{ij}/t_{ij})}$$

$$+\sum_{i,j} p([X]=i,[Y]=j)\log\frac{1}{\Delta x_i}$$

$$=\sum_{i,j}\Delta x_i\Delta y_j p(s_{ij}/t_{ij})q(t_j)\log\frac{1}{p(s_{ij}/t_{ij})}$$

$$+\sum_{i}\left(\log\frac{1}{\Delta x_i}\right)\sum_{j} p([X]=i,[Y]=j)$$

$$=\sum_{i,j}\Delta x_i\Delta y_j p(s_{ij}/t_{ij})q(t_j)\log\frac{1}{p(s_{ij}/t_{ij})}+\sum_{i} p(s_i)\Delta x_i\log\frac{1}{\Delta x_i}$$

非离散随机变量的互信息量（续）

$$H([X])=\sum_i p(s_i)\Delta x_i \log\frac{1}{p(s_i)}+\boxed{\sum_i p(s_i)\Delta x_i \log\frac{1}{\Delta x_i}}$$

$$H([X]/[Y])=\sum_{i,j}\Delta x_i \Delta y_j p(s_{ij}/t_{ij})q(t_j)\log\frac{1}{p(s_{ij}/t_{ij})}$$

$$+\boxed{\sum_i p(s_i)\Delta x_i \log\frac{1}{\Delta x_i}}$$

$$I([X];[Y])=H([X])-H([X]/[Y])$$

$$=\sum_i p(s_i)\Delta x_i \log\frac{1}{p(s_i)}$$

$$-\sum_{i,j}\Delta x_i \Delta y_j p(s_{ij}/t_{ij})q(t_j)\log\frac{1}{p(s_{ij}/t_{ij})}$$

非离散随机变量的互信息量（续）

$$I(X;Y)=\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0} I([X],[Y])$$

$$=\int p(x)\log\frac{1}{p(x)}dx-\iint p(x,y)\log\frac{1}{p(x/y)}dxdy$$

$$=h(X)-h(X/Y)=h(Y)-h(Y/X)$$
$$=h(X)+h(Y)-h(XY)$$

非离散随机变量的互信息量（续）

例8.6: 设某信源发出恒定宽度，但不同幅度的脉冲，幅度值x在a_1和a_2之间. 此信源连至某信道，信道接收端接受脉冲的幅度y处在b_1和b_2之间. 已知随机变量x和y的联合概率密度函数为:

$$p(xy)=\frac{1}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}$$

计算h(x), h(y), h(xy), I(x;y).

非离散随机变量的互信息量（续）

例8.6解:

$$p(x)=\int_{b_1}^{b_2} p(xy)dy=\frac{1}{(a_2-a_1)}$$

$$p(y)=\int_{a_1}^{a_2} p(xy)dx=\frac{1}{(b_2-b_1)}$$

$$h(x)=\log(a_2-a_1)$$

$$h(y)=\log(b_2-b_1)$$

$$h(xy)=\log(a_2-a_1)+\log(b_2-b_1)$$

$$I(x;y)=0$$

- 非离散随机变量的熵和互信息量
  - 非离散随机变量的熵
  - 非离散随机变量的互信息量
  - 熵和互信息量的基本性质
  - 熵的条件极值
  - 微分熵及坐标变换
- 高斯信道容量及信道编码定理
- 高斯信源率失真函数及限失真信源编码定理

熵和互信息量的基本性质

性质1: 离散随机变量共有r种取值, 它的熵满足

$$0\le H(X) \le \log r$$

结论：此性质对于非离散随机变量的微分熵不成立

非离散随机变量的微分熵可以小于0

熵和互信息量的基本性质（续）

性质2:平均互信息量非负, 即$I\,(X;Y) \geq 0$

当且仅当X, Y相互独立时,

$I\,(X;\,Y) = 0$

结论：此性质对于非离散随机变量仍成立

熵和互信息量的基本性质（续）

性质3：设X, Y, Z是离散随机变量

定义 $$A(z)=\sum_{x,y} p(y)p(z/x,y)$$

则 H(X/Y) ≤ H(Z) + E[log A(z)]

结论：此性质对于非离散随机变量**不成立**

熵和互信息量的基本性质（续）

性质4: $I(X, Y; Z) \geq I(Y; Z)$

当且仅当$p(z/x, y) = p(z/y)$时, 等式成立

$I(X, Y; Z) \geq I(X; Z)$

当且仅当$p(z/x, y) = p(z/x)$时, 等式成立

结论：此性质对于非离散随机变量仍成立

熵和互信息量的基本性质（续）

性质5:设 (X, Y, Z) 是一个Markov链, 则有

$$I(X;Z) \le \begin{cases} I(X;Y) \\ I(Y;Z) \end{cases}$$

结论：此性质对于非离散随机变量**仍成立**

熵和互信息量的基本性质（续）

性质6: $I(X; Y)$是信道输入概率分布$p(x)$的上凸函数

结论：此性质对于非离散随机变量不成立

熵和互信息量的基本性质（续）

性质7: I(X; Y)是信道转移概率分布p(y/x)的下凹函数

结论：此性质对于非离散随机变量**不成立**

熵和互信息量的基本性质（续）

性质8: 若信道的输入是离散无记忆的(DMS),
则

$$I(\mathbf{X};\mathbf{Y}) \geq \sum_{i=1}^{N} I(X_i;Y_i)$$

结论：此性质对于非离散随机变量**仍成立**

熵和互信息量的基本性质（续）

性质9: 信道是离散无记忆的(DMC), 则

$$I(\mathbf{X};\mathbf{Y}) \le \sum_{i=1}^{N} I(X_i;Y_i)$$

结论：此性质对于非离散随机变量**仍成立**

- 非离散随机变量的熵和互信息量
  - 非离散随机变量的熵
  - 非离散随机变量的互信息量
  - 熵和互信息量的基本性质
  - 熵的条件极值
  - 微分熵及坐标变换
- 高斯信道容量及信道编码定理
- 高斯信源率失真函数及限失真信源编码定理

熵的条件极值

定理8.1: 如果$\mathbf{X}=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$有概率密度函数$p(\mathbf{x})$和方差$E[(x_i-m_i)^2]=\sigma_i^2$, $i=1, 2, \ldots, n$. 则

$$h(\mathbf{X}) \le \frac{n}{2}\log[2\pi e(\sigma_1^{\,2}\cdots\sigma_n^{\,2})^{1/n}]$$

等式成立的充要条件是:

$$p(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$$

$$g(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^{\,2}}}e^{-\frac{(x_i-m_i)^2}{2\sigma_i^{\,2}}}$$

熵的条件极值（续）

证明: (1) $h_g(\mathbf{X}) = \int_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}) \log \dfrac{1}{g(\mathbf{x})} d\mathbf{x}$

证明充分性

$$= \int_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}) \left\{ \sum_{i=1}^{n} \log \left[\sqrt{2\pi\sigma_i^2}\, e^{\frac{(x_i - m_i)^2}{2\sigma_i^2}} \right] \right\} d\mathbf{x}$$

$$= \int_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}) \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{2} \log\left(2\pi\sigma_i^2\right) + \frac{(x_i - m_i)^2}{2\sigma_i^2} \cdot \log e \right] \right\} d\mathbf{x}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left[\log\left(2\pi\sigma_i^2\right) + \log e \right]$$

$$= \frac{n}{2} \log[2\pi e (\sigma_1^2 \cdots \sigma_n^2)^{1/n}]$$

熵的条件极值（续）

证明: (2)

由于 $\int_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}) \log \frac{1}{g(\mathbf{x})} d\mathbf{x}$

证明充分性

$$= \int_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}) \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{2} \log\left(2\pi\sigma_i^2\right) + \frac{(x_i - m_i)^2}{2\sigma_i^2} \cdot \log e \right] \right\} d\mathbf{x}$$

$$= \frac{n}{2} \log[2\pi e (\sigma_1^2 \cdots \sigma_n^2)^{1/n}]$$

有 $h_g(\mathbf{X}) = \int_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}) \log \frac{1}{g(\mathbf{x})} d\mathbf{x}$

证明: (3)

熵的条件极值（续）

证明
充分性

因此$h_p(\mathbf{X})-h_g(\mathbf{X})$

$$=\int_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x})\log\frac{1}{p(\mathbf{x})}d\mathbf{x}-\int_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x})\log\frac{1}{\mathrm{g}(\mathbf{x})}d\mathbf{x}$$

$$=\int_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x})\log\frac{g(\mathbf{x})}{p(\mathbf{x})}d\mathbf{x}$$

$$\leq\log\int_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x})\frac{g(\mathbf{x})}{p(\mathbf{x})}d\mathbf{x}$$

$$=0$$

证明必要性----利用变分法！

熵的条件极值（续）

常用给定约束条件的微分熵极值问题:

(1) 给定方差 $\Rightarrow$ 高斯分布

(2) 给定功率 $\Rightarrow$ 高斯分布(零均值)

(3) 给定区间 $\Rightarrow$ 均匀分布

(4) 给定平均值的非负随机变量 $\Rightarrow$ 负指数分布

熵的条件极值（续）

算法: 变分法!

例8.7: 一维随机变量X, 它的概率密度函数为p(x),
均值为0, 方差为σ^2 ,
求达到微分熵极大值时的p(x)

熵的条件极值（续）

解: 已知 $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx - 1 = 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx - \sigma^2 = 0$$

求使 $h(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} dxp(x)\log\frac{1}{p(x)}$

达到最大的p(x)

熵的条件极值（续）

解:(续)设函数

$$\varphi(x)=h(X)+\lambda_1\left(\int p(x)dx-1\right)+\lambda_2\left(\int x^2 p(x)dx-\sigma^2\right)$$

假设已找到一个分布p(x), 满足上述条件
在这个分布上加一个扰动, 成为 $p(x)+\delta\varepsilon(x)$
再对δ微商求极值, 应满足

$$\frac{\partial}{\partial\delta}\left[\begin{array}{l}\int dx[p(x)+\delta\varepsilon(x)]\log\dfrac{1}{p(x)+\delta\varepsilon(x)}+\lambda_1\{\int dx[p(x)+\delta\varepsilon(x)]-1\}\\ +\lambda_2\{\int dx[p(x)+\delta\varepsilon(x)]x^2-\sigma^2\}\end{array}\right]\Bigg|_{\delta=0}=0$$

熵的条件极值（续）

解:(续)化简上式可得到

$$\int dx\varepsilon(x)\left[\log\frac{1}{p(x)}+(\lambda_1-1)+\lambda_2x^2\right]=0$$

即 $\log\frac{1}{p(x)}+(\lambda_1-1)+\lambda_2x^2=0$

唯一解为 $p(x)=c_1e^{c_2x^2}$

根据约束条件定出 $p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

$$h(X)=\frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2)$$

熵功率

定义8.1: 设某信源的熵为H_a, 则具有熵H_a的高斯分布信源的平均功率 $\overline{P}_a$，称为该信源的熵功率

$$\overline{P}_a=\frac{1}{2\pi e}e^{2H_a}$$

- 平均功率相同的条件下，高斯信源的熵最大
- 熵相同的条件下，高斯信源的平均功率最小

- 非离散随机变量的熵和互信息量
  - 非离散随机变量的熵
  - 非离散随机变量的互信息量
  - 熵和互信息量的基本性质
  - 熵的条件极值
  - 微分熵及坐标变换
- 高斯信道容量及信道编码定理
- 高斯信源率失真函数及限失真信源编码定理

微分熵与坐标变换

设　$x = g(y) \quad y = f(x)$

由　$p_x(x)dx = p_y(y)dy$

知

$$p_y(y) = p_x(x = g(y))\left|\frac{\partial x}{\partial y}\right|$$

$$h(Y) = \int dy p_y(y) \log \frac{1}{p_y(y)}$$

$$= \int dy p_y(y) \log \frac{1}{p_x(x)\left|\frac{\partial x}{\partial y}\right|}$$

微分熵与坐标变换

（续前）

$$=\int dy p_y(y)\log\frac{1}{p_x(x)}+\int dy p_y(y)\log\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right|$$

$$=\int dx p_x(x)\log\frac{1}{p_x(x)}+\int dx p_x(x)\log\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right|$$

$$=h(X)+E\left[\log\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right|\right]$$

注:微分熵与所选择的坐标系有关

而互信息量与所选择的坐标系无关

微分熵与坐标变换

例8.8：均匀分布随机变量x

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & x\in(a,b)\\ 0 & x\notin(a,b)\end{cases}$$

h(X) = log (b-a)

令y=Kx

$$p(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{K(b-a)} & y\in(Ka,Kb)\\ 0 & y\notin(Ka,Kb)\end{cases}$$

h(Y) = logK(b-a)

- 非离散随机变量的熵和互信息量
  - 非离散随机变量的熵
  - 非离散随机变量的互信息量
  - 熵和互信息量的基本性质
  - 熵的条件极值
  - 微分熵及坐标变换
- 高斯信道容量及信道编码定理
- 高斯信源率失真函数及限失真信源编码定理

定义8.2: 信道的n维容量代价函数为：

$$C_n(\beta) = \sup_{p(\mathbf{x})} \left\{ I(\mathbf{X};\mathbf{Y}) : \sum_{i=1}^{n} E(X_i^{\ 2}) \le n\beta \right\}$$

说明: (1) 信道：时间离散，取值连续

n个分量 (自由度)

(2) 约束条件：功率 $E(X_i^2) \rightarrow$ 代价

时间、频带 $\rightarrow$ 自由度 $n = 2TW$

(3) 极值：sup—上确界

穷尽所有可能的p(**x**)

定义8.2（续）：

说明：(4) 加性噪声: 信道输入**X**，输出**Y**，噪声**Z**

则 $\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{Z}$

$Y_i = X_i + Z_i \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

一般讨论噪声各分量是相互独立的

均值为0, 方差为σ^2

即 $E(Z_i, Z_j) = \sigma^2\delta_{ij}$

$E(Z_i) = 0$

$i, j = 1, 2, \ldots, n.$

噪声频带足够宽→白噪声

定义8.3:信道的容量代价函数为

$$C(\beta)=\sup_{n}\frac{1}{n}C_n(\beta)$$

定理8.2: **平均功率**限制条件下的**离散时间、无记忆、加性高斯噪声信道**的容量_代价函数为:

$$C_n(\beta) = \frac{n}{2}\log(1+\frac{\beta}{\sigma^2})$$

$$C(\beta) = \frac{1}{2}\log(1+\frac{\beta}{\sigma^2})$$

上式中β表示各信号分量功率(方差)

σ^2表示各噪声分量功率(方差)

定理8.2证明:设n维试验信源$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$,

相应的概率密度函数为$p(\mathbf{x})$，且满足

$$\sum_{i=1}^{n} E\left(X_i^2\right) \le n\beta$$

联合概率密度函数 $p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = p(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{z})$

其中 $\mathbf{z} = (y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n)$

$$g(\mathbf{z}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i^2\right)\right]$$

令$A_i = E(X_i^2)$

则$E(Y_i^2) = E[(X_i + Z_i)^2] = E(X_i^2) + E(Z_i^2) = A_i + \sigma^2$

定理8.2证(续): 根据**定理8.1**, 有

几何平均

$$h(\mathbf{Y}) \le \frac{n}{2}\log\left\{2\pi e\left[\prod_{i=1}^{n}(A_i+\sigma^2)\right]^{1/n}\right\}$$

算数平均

$$\le \frac{n}{2}\log\left\{2\pi e\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(A_i+\sigma^2)\right]\right\}$$

$$\le \frac{n}{2}\log\left[2\pi e(\beta+\sigma^2)\right]$$

而$h(\mathbf{Y}/\mathbf{X}) = h(\mathbf{X}+\mathbf{Z}/\mathbf{X}) = h(\mathbf{Z})$

$$= \frac{n}{2}\log\left[2\pi e\left(\prod_{i=1}^{n}\sigma^2\right)^{1/n}\right] = \frac{n}{2}\log\left(2\pi e\sigma^2\right)$$

定理8.2证(续): 有

$$I(\mathbf{X};\mathbf{Y}) = h(\mathbf{Y}) - h(\mathbf{Y}/\mathbf{X})$$
$$\le \frac{n}{2}\log\left[2\pi e(\beta+\sigma^2)\right] - \frac{n}{2}\log\left(2\pi e\sigma^2\right)$$
$$= \frac{n}{2}\log\left(1+\frac{\beta}{\sigma^2}\right)$$

等式成立条件: **X**是高斯信源, 各分量独立同分布, 且均值为0, 方差为β. 即

$$p(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}}\exp\left(-\frac{x_i^2}{2\beta}\right)$$

定理8.2证(续):此时信息量达到信道容量, 即

$$C_n(\beta) = \frac{n}{2}\log\left(1+\frac{\beta}{\sigma^2}\right)$$

$$C(\beta) = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\beta}{\sigma^2}\right)$$

信道容量又可表示为

$$C(\beta) = C = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{N}\right)$$

定理8.2:

假设信道带宽W, 时间T, 有 n = 2WT

$$C_n(\beta) = \frac{n}{2}\log\left(1+\frac{\beta}{\sigma^2}\right) \Longrightarrow C_T = WT\log\left(1+\frac{P}{N}\right)$$

$$C = W\log\left(1+\frac{P}{N}\right)(bits/s)$$

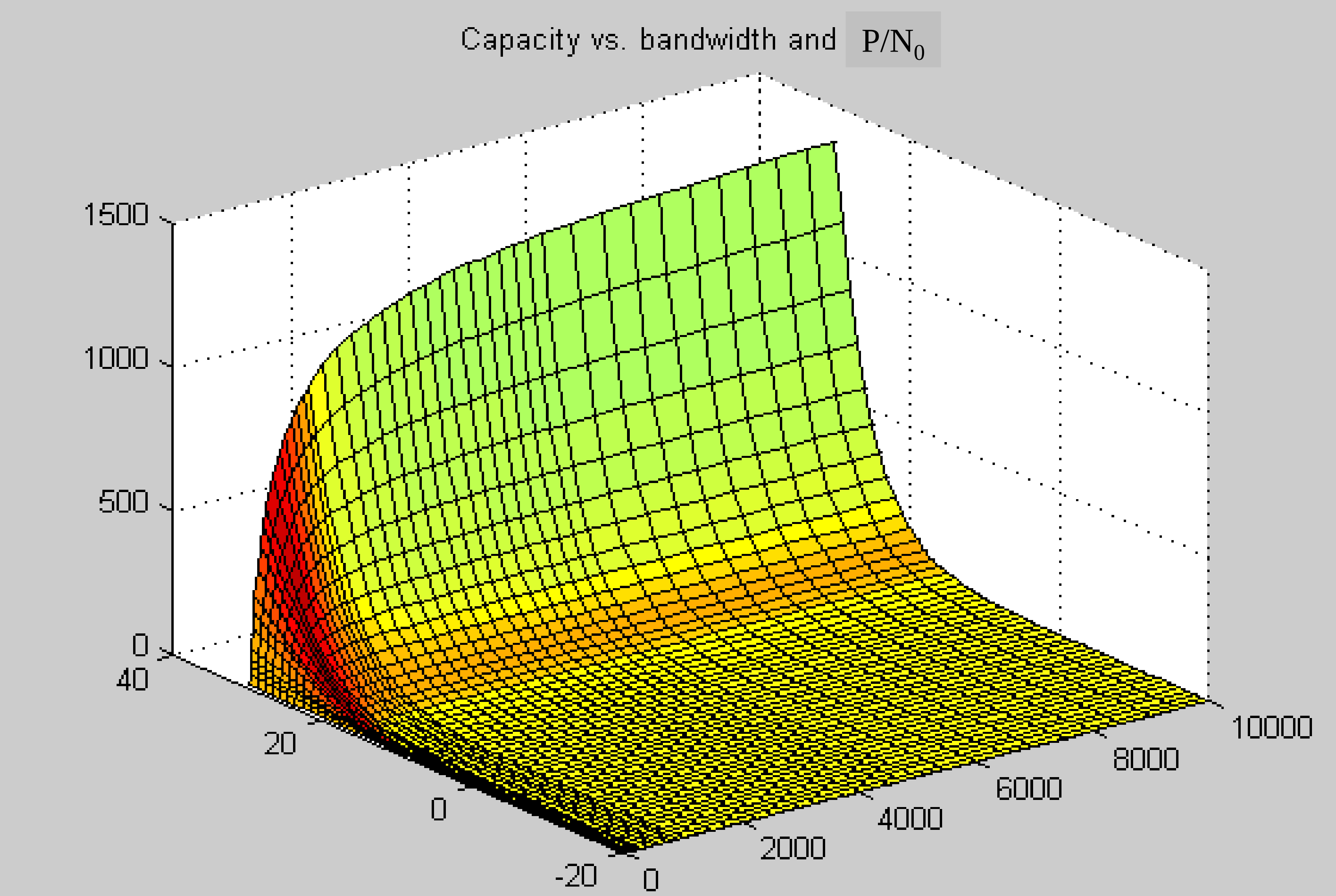
香农公式

式中T—波形持续时间

W—信道频带宽度

P—信号分量功率

N—噪声分量功率


Capacity vs. bandwidth and P/N0
1500
1000
500
0
40
20
0
-20
0
2000
4000
6000
8000
10000

注：$P/N=P/N_0W$，

香农公式的结论：

（1）提高信号与噪声功率之比能够增加信道容量

（2）当噪声功率N为0时，信道容量趋于无穷大，即无扰信道的容量无穷大！

（3）增加信道频带W并不能无限制地使信道容量增大

当噪声为高斯白噪声时，随着W增大，噪声功率 $N=Wn_0$ 也增大，在极限情况下

$$\lim_{W\to\infty} C = \lim_{W\to\infty} W\log\left(1+\frac{S}{n_0W}\right) = \frac{S}{n_0}\lim_{W\to\infty}\frac{n_0W}{S}\log\left(1+\frac{S}{n_0W}\right) = \frac{S}{n_0}\log e = 1.44\frac{S}{n_0}$$

（4）信道容量一定时，带宽W与信噪比S/N之间可以彼此互换！

例8.9 在视频传输中，每帧约为个像素2.25×10^6，为了能很好地重现图像，需分16个亮度电平. 假设亮度电平等概率分布，并假设信噪比为30dB. 试计算每秒传送30帧图片所需信道的带宽.

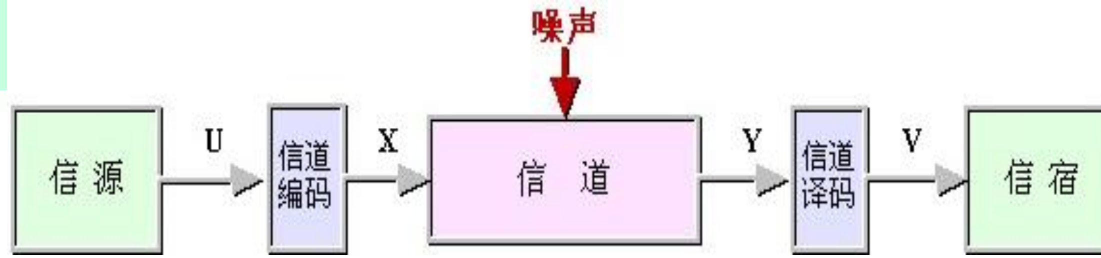
信息速率 $R = 30\times 2.25\times 10^6 \times \log_2 16$

$$\approx 2.7\times 10^8\,\text{bps}$$

信噪比 $10\log_{10}\dfrac{P_s}{P_N} = 30\text{dB} \quad \Rightarrow \dfrac{P_s}{P_N} = 10^3$

因此 $C = W\log_2(1+10^3) = 2.7\times 10^8$

$$W \approx 2.7\times 10^7\,\text{Hz}$$



定理8.3: (高斯信道编码定理)

给定 $\beta\geq 0$和$\varepsilon>0$, 则对任意 $\beta' > \beta$, 和

$$R < C(\beta) = \frac{1}{2}\log\left(1+\beta/\sigma^2\right)$$

存在码长为n的码C= ($\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_M$),

以及相应的译码准则, 使得

(a) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 \leq n\beta'$ 对于 i = 1, 2, …, M

及 $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$

(b) $M \geq 2^{\lceil Rn \rceil}$

(c) $P_E^{(i)} < \varepsilon$ 对于所有 i = 1, 2, …, M

- 非离散随机变量的熵和互信息量
  - 非离散随机变量的熵
  - 非离散随机变量的互信息量
  - 熵和互信息量的基本性质
  - 熵的条件极值
  - 微分熵及坐标变换
- 高斯信道容量及信道编码定理
- 高斯信源率失真函数及限失真信源编码定理

定义8.4:信源的k维率失真函数为

$$R_k(\delta) = \inf_{p(\mathbf{v}/\mathbf{u})} \left\{ I(\mathbf{U};\mathbf{V}) : E\left(\|\mathbf{U}-\mathbf{V}\|^2\right) \le k\delta \right\}$$

说明: (1) 信源: 时间离散，取值连续

各分量相互独立, 均值为0, 方差为σ^2

(2) 约束条件: 均方误差测度→失真测度

各分量之间独立、等权重, 即

$$E\left[\|\mathbf{U}-\mathbf{V}\|^2\right] = E\left[\sum_{i=1}^{k}(U_i - V_i)^2\right] = \sum_{i=1}^{k} E(U_i - V_i)^2$$

(3) 极值: inf—下确界

穷尽所有可能的p(**v**/**u**)

定义8.5: 信源的率失真函数为

$$R(\delta)=\inf_{k}\frac{1}{k}R_k(\delta)$$

定理8.4: 高斯信源的一维率失真函数为:

$$R_1(\delta)=\begin{cases}\frac{1}{2}\log\frac{\sigma^2}{\delta} & \sigma^2\geq\delta\\ 0 & \sigma^2\leq\delta\end{cases}$$

定理8.4证明:

(1) 根据率失真函数定义,

对于任意给定的δ, ε>0, 存在试验信道,

使得U、V之间的转移概率密度函数p(v/u)满足:

相应的失真测度 $E[(U-V)^2]\le\delta$

平均互信息量 $I(U;V)<R_1(\delta)+\varepsilon$

其中 $\delta\ge\iint dudvp(u,v)(u-v)^2$

$$=\int dvp(v)\boxed{\int dup(u/v)(u-v)^2}$$

定理8.4证明(续):

定义$\delta(v)=\int du p(u/v)(u-v)^2$

根据定理8.1, 有

$$h(U/V=v)\le\frac{1}{2}\log[2\pi e\delta(v)]$$

而$h(U/V)=\int h(U/V=v)p(v)dv$

$$\le\frac{1}{2}\int[\log(2\pi e\delta(v))]p(v)dv$$

Jensen不等式

$$\le\frac{1}{2}\log\left[\int 2\pi e\delta(v)p(v)dv\right]$$

$$\le\frac{1}{2}\log[2\pi e\delta]$$

定理8.4证明(续):

$$I(U;V)=h(U)-h(U/V)$$

$$\geq \frac{1}{2}\log\left[2\pi e\sigma^2\right]-\frac{1}{2}\log\left[2\pi e\delta\right]$$

$$=\frac{1}{2}\log\left[\frac{\sigma^2}{\delta}\right]$$

因此$R_1(\delta)+\varepsilon>\frac{1}{2}\log\frac{\sigma^2}{\delta}$

并且$R_1(\delta)\geq 0$

所以$R_1(\delta)\geq \max\left(\frac{1}{2}\log\frac{\sigma^2}{\delta},\quad 0\right)$

定理8.4证明(续):

(2) i)当 $\sigma^2 > \delta$时,

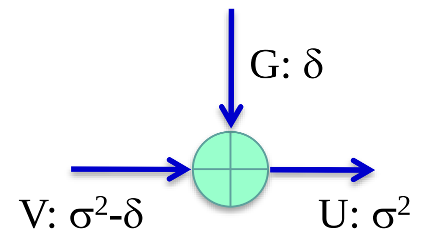
设高斯随机变量V的均值为0, 方差为σ^2-δ

高斯随机变量G的均值为0, 方差为δ

并设G与V相互独立

U= V+G

则$E\left[(U-V)^2\right] \le \delta$



$$R_1(\delta) \le I(U;V) = h(U) - h(U/V)$$

$$= h(U) - h(G) = \frac{1}{2}\log\frac{\sigma^2}{\delta}$$

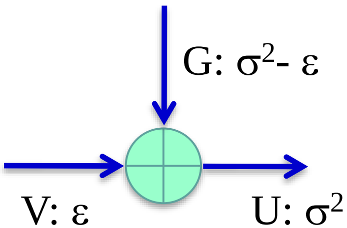
定理8.4证明(续):

ii) 当 $\sigma^2 \le \delta$时, 取任意$\varepsilon>0$,

设高斯随机变量V的均值为0, 方差为ε

高斯随机变量G的均值为0,方差为$\sigma^2-\varepsilon$

并设U=V+G



则$E[(U-V)^2] \le \delta$

$$R_1(\delta) \le I(U;V) = h(U) - h(U/V)$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{\sigma^2}{\sigma^2-\varepsilon} = \frac{1}{2}\log\left[1+\frac{\varepsilon}{\sigma^2-\varepsilon}\right]$$

上式对于所有的$\varepsilon > 0$都成立

所以$R_1(\delta) \le 0$ (当$\varepsilon \to 0$时, $I(U;V) \to 0$)

定理8.4证明(续):

所以$R_1(\delta) \le \max\left(\frac{1}{2}\log\frac{\sigma^2}{\delta},\quad 0\right)$

综合(1)、(2), 定理得证，即

$$R_1(\delta) = \begin{cases} \frac{1}{2}\log\frac{\sigma^2}{\delta} & \sigma^2 \ge \delta \\ 0 & \sigma^2 \le \delta \end{cases}$$

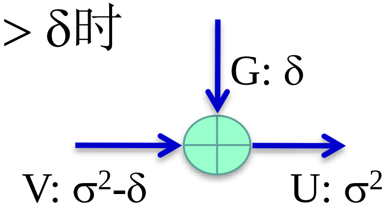
定理8.1证明小结

假设条件　I(U;V)定义　定理8.1及Jensen不等式

（1）$$R_1(\delta)+\varepsilon > I(U;V)=h(U)-h(U/V)\ge \frac{1}{2}\log\left[\frac{\sigma^2}{\delta}\right]$$

$$\Rightarrow R_1(\delta)\ge \max\left(\frac{1}{2}\log\frac{\sigma^2}{\delta},\quad 0\right)$$

（2）当 $\sigma^2>\delta$时



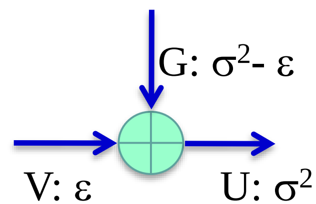
$$R_1(\delta)\le I(U;V)=h(U)-h(U/V)$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{\sigma^2}{\delta}$$

R(δ)定义

当 $\sigma^2\le\delta$时

R(δ)定义



$$R_1(\delta)\le I(U;V)=h(U)-h(U/V)$$

$$=\frac{1}{2}\log\left[1+\frac{\varepsilon}{\sigma^2-\varepsilon}\right]\xrightarrow{\varepsilon\to 0}0$$

$$\Rightarrow R_1(\delta)\le \max\left(\frac{1}{2}\log\frac{\sigma^2}{\delta},\quad 0\right)$$

定理8.5: 对于离散–时间无记忆高斯信源，有

$$R_k(\delta) = kR_1(\delta)$$

$$R(\delta) = R_1(\delta) = \max\left(\frac{1}{2}\log\frac{\sigma^2}{\delta}, 0\right)$$

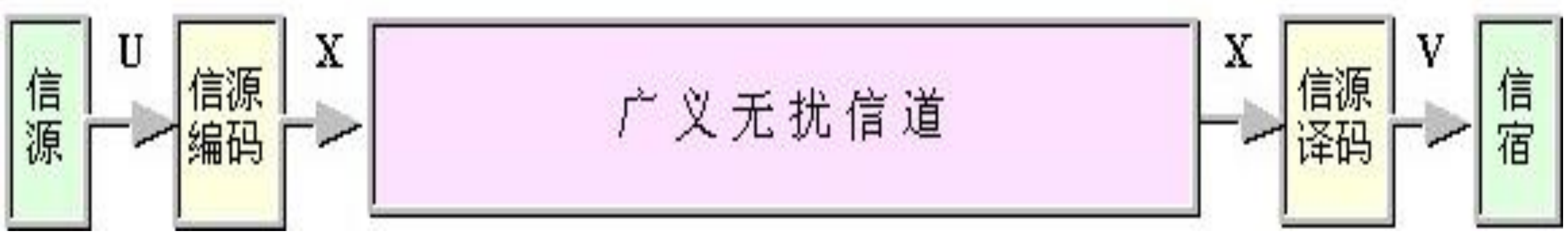
定理8.6:(高斯信源编码定理)

给定δ ≥0, 如果 $R' > R(\delta) = \max\left(\frac{1}{2}\log\frac{\sigma^2}{\delta}, 0\right)$

并且δ’ ≥δ, 则存在码长k足够长、包含M个码字的码C, 使得

(a) $M \le 2^{\lfloor kR' \rfloor}$

(b) d(C)<δ’



8.3 已知电话信道的带宽为3.4kHz。试求：
(1) 接收端信噪比为P/N=30dB时的信道容量；
(2) 若要求该信道能传输6800b/s的数据，则接收端要求最小信噪比P/N为多少dB.
（需计算出结果，计算信道容量时，对数运算以2为底. $\log_2 5 \cong 2.32$, $\lg 3 \cong 0.477$）

作业：习题8.1，8.2