6
信道编码定理

目　录

- 引　言
- 随机编码的信道传输错误概率
- 随机编码的DMC传输错误概率
- 讨论可靠性函数
- 信道编码定理（极限定理）

基本思想：直接求一个特定码C的误码率极为困难，而估计所有的码率为R、码长为N的**随机编码集合**的**平均**误码率则较为容易，后者可以作为前者的**上限**

↓

利用Gallager界，证明**定理6.1**：

$$\overline{P}_{e,m} \le M^{\rho} \sum_{\mathbf{y}} \left[\sum_{\mathbf{x}} Q(\mathbf{x}) p(\mathbf{y}/\mathbf{x})^{\frac{1}{1+\rho}} \right]^{1+\rho} \qquad 0 \le \rho \le 1$$

↓

对于DMC，证明**定理6.2**：

$$\overline{P}_{e,m} \le \exp\{-N[E_0(\rho,Q)-\rho R]\}$$

↓

定理6.3：**存在**码率为R、码长为N、个数为M的码C，满足

$$P_{e,m} < 4e^{-NE_r(R)}$$

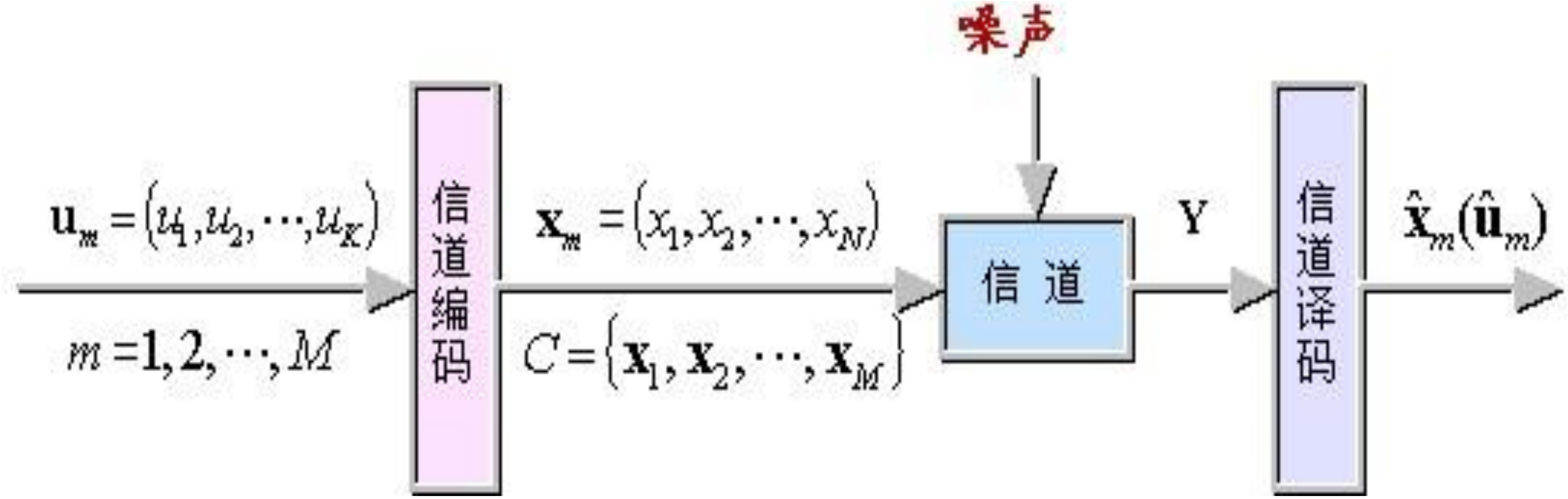
↓

$E_r(R)$性质：在$0 \le R \le C$ 范围内， 有界的、单调减的、正的下凹函数

↓

信道编码定理：当$R < C$ 时， 能够实现可靠传输！

6.1 引言



- 从2^N个矢量中选择M个码字，构成码C={$\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_1$,…, $\mathbf{x}_M$}，可选择的方式有2^{NM}种,称这2^{NM}个不同码的集合为**随机编码集合**.

6.1 引言

- 码集： $C_1, C_2, \cdots\cdots, C_m, \cdots\cdots, C_{2^{NM}}$
- 码： $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots\cdots, \mathbf{x}_m, \cdots\cdots, \mathbf{x}_M$
- 码字： $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_m, \cdots\cdots, x_N$
- 码元： $0, 1, \cdots\cdots, r-1$

  $0, 1$

6.1 引言

- 直接求一个特定码C(包含$M=2^{RN}$个码字)的信道传输错误概率极为困难
- 估计所有可能的编码速率为R、码长为N的随机编码集合的**平均**信道传输错误概率则较为容易
- 后者可以作为一个信道传输错误概率的**上限**

目 录

- 引 言
- 随机编码的信道传输错误概率
- 随机编码的DMC传输错误概率
- 讨论可靠性函数
- 信道编码定理（极限定理）

基本思想：直接求一个特定码C的误码率极为困难，而估计所有的码率为R、码长为N的**随机编码集合**的**平均**误码率则较为容易，后者可以作为前者的**上限**

↓

利用Gallager界，证明**定理6.1**：

$$\overline{P}_{e,m} \le M^{\rho} \sum_{\mathbf{y}} \left[\sum_{\mathbf{x}} Q(\mathbf{x}) p(\mathbf{y}/\mathbf{x})^{\frac{1}{1+\rho}} \right]^{1+\rho} \qquad 0 \le \rho \le 1$$

↓

对于DMC，证明**定理6.2**：

$$\overline{P}_{e,m} \le \exp\{-N[E_0(\rho, Q) - \rho R]\}$$

↓

定理6.3：**存在**码率为R、码长为N、个数为M的码C，满足

$$P_{e,m} < 4e^{-NE_r(R)}$$

↓

E_r(R)性质：在$0 \le R \le C$ 范围内， 有界的、单调减的、正的下凹函数

↓

信道编码定理：当$R < C$ 时， 能够实现可靠传输！

6.2 随机编码的信道传输错误概率

- 构造一个码 $\mathbf{C} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_M\}$，$\mathbf{x}_m \in \mathbf{C}$.

  其概率为：

$$Q(C) = \prod_{m=1}^{M} Q(\mathbf{x}_m)$$

  设码C中的每个码字$\mathbf{x}_m$按照某种概率$Q(\mathbf{x}_m)$相互独立地选择.

6.2 随机编码的信道传输错误概率

- 根据Gallage界，对于所构造的某个特定码**C**，第一个码字的信道传输错误概率上界为

$$P_{e,1} \le \sum_{\mathbf{y}} p(\mathbf{y}/\mathbf{x}_1)^{\frac{1}{1+\rho}} \left[\sum_{\substack{m' \\ m' \ne 1}} p(\mathbf{y}/\mathbf{x}_{m'})^{\frac{1}{1+\rho}} \right]^{\rho} \quad \rho \ge 0$$

6.2 随机编码的信道传输错误概率

- 对于**所有的码求平均**，则第一个码字的平均传输错误概率为：

$$\overline{P}_{e,1}=\sum_{C}Q(C)P_{e,1}=\sum_{\mathbf{x}_1}\sum_{\mathbf{x}_2}\cdots\sum_{\mathbf{x}_M}Q(\mathbf{x}_1)Q(\mathbf{x}_2)\cdots Q(\mathbf{x}_M)P_{e,1}$$

$$\le\sum_{\mathbf{y}}\sum_{\mathbf{x}_1}\sum_{\mathbf{x}_2}\cdots\sum_{\mathbf{x}_M}Q(\mathbf{x}_1)Q(\mathbf{x}_2)\cdots Q(\mathbf{x}_M)p(\mathbf{y}/\mathbf{x}_1)^{\frac{1}{1+\rho}}\left[\sum_{\substack{m'\\m'\neq 1}}p(\mathbf{y}/\mathbf{x}_{m'})^{\frac{1}{1+\rho}}\right]^{\rho}$$

$$=\sum_{\mathbf{y}}\sum_{\mathbf{x}_1}Q(\mathbf{x}_1)p(\mathbf{y}/\mathbf{x}_1)^{\frac{1}{1+\rho}}\boxed{\left\{\sum_{\mathbf{x}_2}\cdots\sum_{\mathbf{x}_M}Q(\mathbf{x}_2)\cdots Q(\mathbf{x}_M)\left[\sum_{\substack{m'\\m'\neq 1}}p(\mathbf{y}/\mathbf{x}_{m'})^{\frac{1}{1+\rho}}\right]^{\rho}\right\}}$$

6.2 随机编码的信道传输错误概率

- 若 ρ≤1， $\left[\sum_{\substack{m' \\ m'\neq 1}} p(\mathbf{y}/\mathbf{x}_{m'})^{\frac{1}{1+\rho}}\right]^{\rho}$ 是上凸函数,

  利用Jesson不等式，上式{}中的求和可以写为：

$$\sum_{\mathbf{x}_2}\cdots\sum_{\mathbf{x}_M} Q(\mathbf{x}_2)\cdots Q(\mathbf{x}_M)\left[\sum_{m'=2}^{M} p(\mathbf{y}/\mathbf{x}_{m'})^{\frac{1}{1+\rho}}\right]^{\rho}$$

$$\leq\left[\sum_{\mathbf{x}_2}\cdots\sum_{\mathbf{x}_M} Q(\mathbf{x}_2)\cdots Q(\mathbf{x}_M)\sum_{m'=2}^{M} p(\mathbf{y}/\mathbf{x}_{m'})^{\frac{1}{1+\rho}}\right]^{\rho}$$

$$=\left[\sum_{m'=2}^{M}\sum_{\mathbf{x}_{m'}} Q(\mathbf{x}_{m'})p(\mathbf{y}/\mathbf{x}_{m'})^{\frac{1}{1+\rho}}\right]^{\rho}=(M-1)^{\rho}\left[\sum_{\mathbf{x}} Q(\mathbf{x})p(\mathbf{y}/\mathbf{x})^{\frac{1}{1+\rho}}\right]^{\rho}$$

6.2 随机编码的信道传输错误概率

- 有 $\overline{P}_{e,1} \le \sum_{\mathbf{y}} \sum_{\mathbf{x}_1} Q(\mathbf{x}_1) p(\mathbf{y}/\mathbf{x}_1)^{\frac{1}{1+\rho}} (M-1)^{\rho} \left[\sum_{\mathbf{x}} Q(\mathbf{x}) p(\mathbf{y}/\mathbf{x})^{\frac{1}{1+\rho}} \right]^{\rho}$

$$= (M-1)^{\rho} \sum_{\mathbf{y}} \left[\sum_{\mathbf{x}} Q(\mathbf{x}) p(\mathbf{y}/\mathbf{x})^{\frac{1}{1+\rho}} \right]^{1+\rho}$$

对于**任意**码字$\mathbf{x}_{\mathrm{m}}$，有

$$\overline{P}_{e,m} \le M^{\rho} \sum_{\mathbf{y}} \left[\sum_{\mathbf{x}} Q(\mathbf{x}) p(\mathbf{y}/\mathbf{x})^{\frac{1}{1+\rho}} \right]^{1+\rho} \qquad 0 \le \rho \le 1$$

6.2 随机编码的信道传输错误概率

- **定理6.1：** 令信道转移概率为p(**y**/**x**)，令Q(**x**)是X^N上的任意概率分布. 以概率Q(**x**)随机地选择码长为N的码字，对M≥2个消息进行编码. 于是当传送任意码字$\mathbf{x}_m$（1≤ m ≤ M），并按**最大似然概率译码准则**译码时，此码字的平均传输错误概率的上限由下式给定：

$$\overline{P}_{e,m} \le M^{\rho} \sum_{\mathbf{y}} \left[\sum_{\mathbf{x}} Q(\mathbf{x}) p(\mathbf{y}/\mathbf{x})^{\frac{1}{1+\rho}} \right]^{1+\rho} \qquad 0 \le \rho \le 1$$

目　录

- 引　言
- 随机编码的信道传输错误概率
- 随机编码的DMC传输错误概率
- 讨论可靠性函数
- 信道编码定理（极限定理）

基本思想：直接求一个特定码C的误码率极为困难，而估计所有的码率为R、码长为N的**随机编码集合**的**平均**误码率则较为容易，后者可以作为前者的**上限**

利用Gallager界，证明**定理6.1**：

$$\overline{P}_{e,m} \le M^{\rho} \sum_{\mathbf{y}} \left[\sum_{\mathbf{x}} Q(\mathbf{x}) p(\mathbf{y}/\mathbf{x})^{\frac{1}{1+\rho}} \right]^{1+\rho} \qquad 0 \le \rho \le 1$$

对于DMC，证明**定理6.2**：

$$\overline{P}_{e,m} \le \exp\{-N[E_0(\rho,Q)-\rho R]\}$$

定理6.3：**存在**码率为R、码长为N、个数为M的码C，满足 $P_{e,m} < 4e^{-NE_r(R)}$

$E_r(R)$性质：在 $0 \le R \le C$ 范围内，有界的、单调减的、正的下凹函数

信道编码定理：当 $R < C$ 时，能够实现可靠传输！

6.3 随机编码的DMC传输错误概率

- 对于离散无记忆信道

$$p(\mathbf{y}/\mathbf{x})=\prod_{n=1}^{N}p(y_n/x_n)$$

- 假设

$$Q(\mathbf{x})=\prod_{n=1}^{N}Q(x_n)$$

6.3 随机编码的DMC传输错误概率

- 有

$$\overline{P}_{e,m} \le M^{\rho} \sum_{\mathbf{y}} \left[\sum_{\mathbf{x}} Q(\mathbf{x}) p(\mathbf{y}/\mathbf{x})^{\frac{1}{1+\rho}} \right]^{1+\rho} \qquad 0 \le \rho \le 1$$

$$= M^{\rho} \sum_{y_1} \cdots \sum_{y_N} \left[\sum_{x_1} \cdots \sum_{x_N} Q(x_1) p(y_1/x_1)^{\frac{1}{1+\rho}} \cdots Q(x_N) p(y_N/x_N)^{\frac{1}{1+\rho}} \right]^{1+\rho}$$

$$= M^{\rho} \prod_{n=1}^{N} \left\{ \sum_{y_n} \left[\sum_{x_n} Q(x_n) p(y_n/x_n)^{\frac{1}{1+\rho}} \right]^{1+\rho} \right\}$$

$$= M^{\rho} \left\{ \sum_{y} \left[\sum_{x} Q(x) p(y/x)^{\frac{1}{1+\rho}} \right]^{1+\rho} \right\}^{N}$$

6.3 随机编码的DMC传输错误概率

- 引入符号 $R=\dfrac{\log M}{N}$ 则 $M^{\rho}=e^{\rho RN}$

定义 $E_0(\rho,Q)=-\log\left\{\sum_y\left[\sum_x Q(x)p(y/x)^{\frac{1}{1+\rho}}\right]^{1+\rho}\right\}\quad 0\le\rho\le 1$

有 $\overline{P}_{e,m}\le\left\{e^{\rho R}\sum_y\left[\sum_x Q(x)p(y/x)^{\frac{1}{1+\rho}}\right]^{1+\rho}\right\}^N$

$$=\exp\{-N[E_0(\rho,Q)-\rho R]\}$$

6.3 随机编码的DMC传输错误概率

- **定理6.2:** 给定转移概率为p(y/x)的DMC，对任意正整数N和R>0，若以概率Q(x)构造速率为R的N长随机码, 则对每个码字$\mathbf{x}_m$ $(1 \le m \le \lceil e^{NR} \rceil)$ 和所有$\rho(0 \le \rho \le 1)$, 在**最大似然概率译码准则**下，传输错误概率的上限由下式给出:

$$\overline{P}_{e,m} \le \exp\{-N[E_0(\rho,Q)-\rho R]\}$$

6.3 随机编码的DMC传输错误概率

- 整个码的平均传输错误概率为:

$$\overline{P}_e = \sum_{m=1}^{M} p(\mathbf{x}_m)\overline{P}_{e,m} \le \exp\{-N[E_0(\rho,Q)-\rho R]\}$$

C_1	X_{11}	…	X_{1m}	…	X_{1M}
C_2	X_{21}	…	X_{2m}	…	X_{2M}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$C_{2^{\text{[illegible]}}}$	$X_{2^{\text{[illegible]}}1}$	…	$X_{2^{\text{[illegible]}}m}$	…	$X_{2^{\text{[illegible]}}M}$

2018/6/1

6.3 随机编码的DMC传输错误概率

- 定义**可靠性函数**:

$$E_r(R) = \max_{0\le\rho\le1} \max_Q \left[E_0(\rho, Q) - \rho R\right]$$

推论:DMC的平均错误概率为

$$\overline{P}_{e,m} \le \exp\left[-NE_r(R)\right], \quad 1 \le m \le M$$

$$\overline{P}_e \le \exp\left[-NE_r(R)\right]$$

6.3 随机编码的DMC传输错误概率

- **定理6.3:** 对于任意DMC, 存在速率为R、长度为N、码字个数为M的码**C**, 在按最大似然概率译码准则译码时, 有

$$P_{e,m} < 2e^{-NE_r[\log(2M)/N]} < 4e^{-NE_r(R)}$$

其中R=logM/N.

说明: 当N足够大, 且$E_r[\log M/N]>0$时,
误码率趋于零.

6.3 随机编码的DMC传输错误概率

- 证明：选择码C’, 包含2M个码字.

$$\overline{P_e(2M)} \le e^{-NEr\left[\frac{\log(2M)}{N}\right]}$$

即存在一个码C’，其码字的平均传输错误概率满足上述不等式.

将码C’中的2M个码字按其传输错误概率的大小重新排列, 满足

$$P_{e,1} \le P_{e,2} \le \ldots \le P_{e,2M}$$

6.3 随机编码的DMC传输错误概率

- 证明（续）：则它的前M个码字的传输错误概率必定都小于

$$2e^{-NEr\left[\frac{\log(2M)}{N}\right]}$$

用这前M个码字组成新的码C,
它的每个码字的传输错误概率满足：

$$P_{e,m} < 2e^{-NEr\left[\frac{\log(2M)}{N}\right]} < 4e^{-NEr\left[\frac{\log M}{N}\right]} = 4e^{-NEr[R]}$$

目 录

- 引 言
- 随机编码的信道传输错误概率
- 随机编码的DMC传输错误概率
- 讨论可靠性函数
- 信道编码定理（极限定理）

基本思想：直接求一个特定码C的误码率极为困难，而估计所有的码率为R、码长为N的**随机编码集合**的**平均**误码率则较为容易，后者可以作为前者的**上限**

利用Gallager界，证明**定理6.1**：

$$\overline{P}_{e,m} \le M^{\rho} \sum_{\mathbf{y}} \left[\sum_{\mathbf{x}} Q(\mathbf{x}) p(\mathbf{y}/\mathbf{x})^{\frac{1}{1+\rho}} \right]^{1+\rho} \qquad 0 \le \rho \le 1$$

对于DMC，证明**定理6.2**：

$$\overline{P}_{e,m} \le \exp\{-N[E_0(\rho,Q)-\rho R]\}$$

定理6.3：**存在**码率为R、码长为N、个数为M的码C，满足

$$P_{e,m} < 4e^{-NE_r(R)}$$

$E_r(R)$性质：在$0 \le R \le C$ 范围内，有界的、单调减的、正的下凹函数

信道编码定理：当$R < C$ 时，能够实现可靠传输！

6.4 讨论可靠性函数

- 可靠性函数$E_r(R)$是估计信道传输错误概率的关键.
- 当给定编码速率R时，$E_r(R)$的性质就完全取决于函数$E_0(\rho,\mathbf{Q})$

$$E_r(R)=\max_{0\le\rho\le1}\max_{Q}\left[E_0\left(\rho,Q\right)-\rho R\right]$$

6.4.1 $E_0(\rho,Q)$随参数ρ的变化规律

$$E_0(\rho,Q) = -\log\left\{\sum_y \left[\sum_x Q(x)p(y/x)^{\frac{1}{1+\rho}}\right]^{1+\rho}\right\} \quad 0 \le \rho \le 1$$

假设Q(x)、p(y/x)给定

当 $\rho > 0$时, $E_0(\rho,Q) > 0$.

当 $\rho < 0$时, $E_0(\rho,Q) < 0$.

当 $\rho = 0$时, $E_0(\rho,Q) = 0$.

6.4.1 $E_0(\rho,Q)$随参数ρ的变化规律

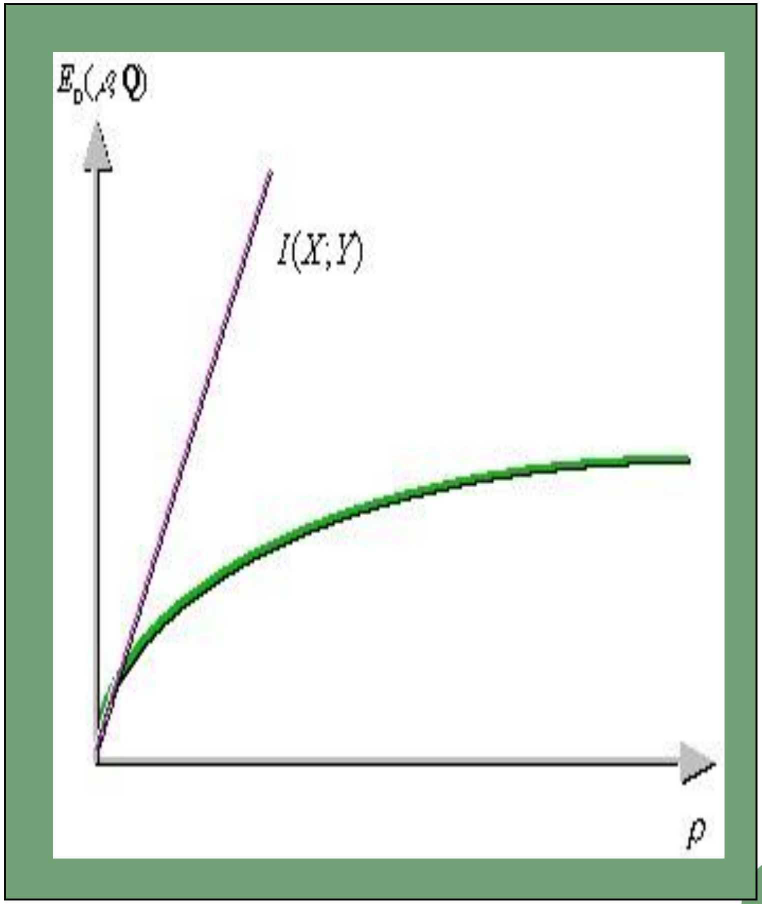
当ρ > -1时，$\frac{\partial}{\partial\rho}E_0(\rho,Q)>0$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}E_0(\rho,Q)\Big|_{\rho=0}=I(X;Y)=I(\mathbf{Q},\mathbf{p})$$

当ρ > -1时，$\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}E_0(\rho,Q)\le 0$

6.4.1 $E_0(\rho,Q)$随参数ρ的变化规律

- 在 $\rho>0$ 范围内，$E_0(\rho,Q)$是ρ的正的、单调上升的上凸函数；
- 在$\rho=0$处的斜率为$I(X;Y)$.



6.4.2 $E_R(R)$给定Q的极值变化规律

- 定义 $E_r(R,\mathbf{Q}) = \max\limits_{0\le\rho\le1}\left[E_0(\rho,\mathbf{Q}) - \rho R\right]$

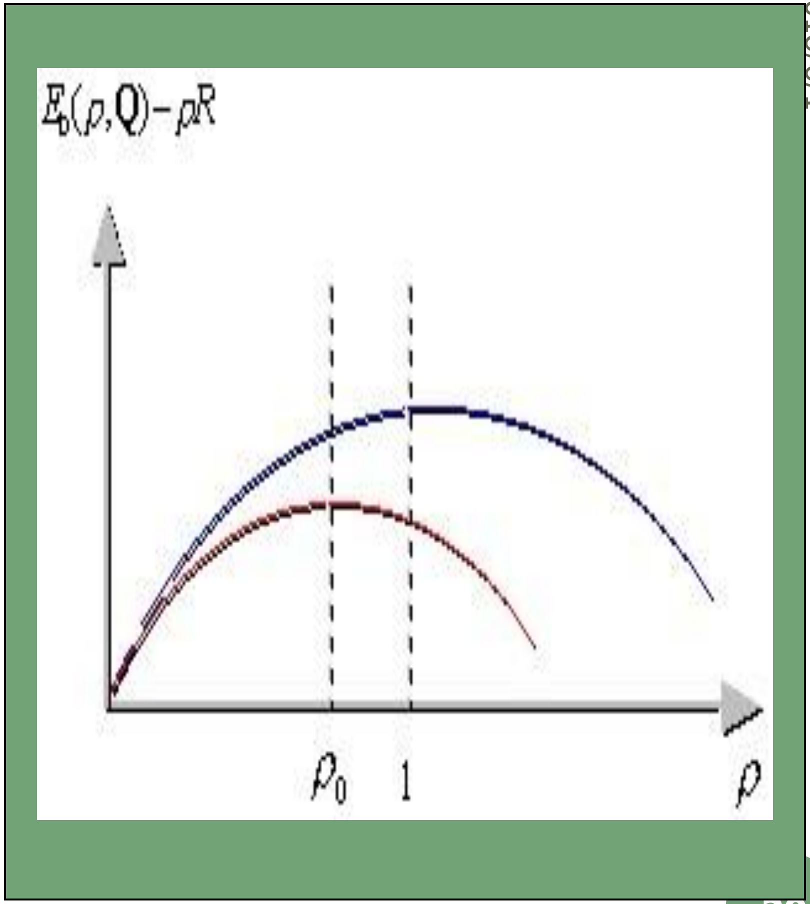
- 当$0 \le \rho \le 1$时, $E_0(\rho,Q)$是上凸的,

  而ρR是线性函数,

  因此$E_0(\rho,Q)$- ρR仍呈上凸性，有极大值.

6.4.2 $E_R(R)$给定Q的极值变化规律

- 当R过小时，
  极大值可能在ρ>1处；
- 若R足够大，
  极大值可能在ρ<1处；



6.4.2 $E_R(R)$给定Q的极值变化规律

令 $$\frac{\partial\left[E_0(\rho,\mathbf{Q})-\rho R\right]}{\partial\rho}=0$$

求得取极大值时的R值为：$R=\dfrac{\partial E_0(\rho,\mathbf{Q})}{\partial\rho}$

由 $$\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}E_0(\rho,Q)\le 0$$

知 $\dfrac{\partial}{\partial\rho}E_0(\rho,Q)$ 为减函数。

6.4.2 $E_R(R)$给定Q的极值变化规律

定义 $$R_{临界1}=\frac{\partial}{\partial\rho}E_0(\rho,Q)\Big|_{\rho=1}$$

$$R_{临界2}=\frac{\partial}{\partial\rho}E_0(\rho,Q)\Big|_{\rho=0}=I(X;Y)$$

在 $0\le\rho\le 1$ 区间，有

$$R_{临界1}\le\frac{\partial}{\partial\rho}E_0(\rho,Q)\le R_{临界2}=I(X;Y)$$

6.4.2 $E_R(R)$给定Q的极值变化规律

- 对于低编码速率，即 $0 \le R \le R_{临界1}$

  $E_0(\rho,Q)-\rho R$的极大值点在$\rho>1$处，

  当$\rho=1$时，取最大值。

  此时 $E_r(R, \mathbf{Q}) = E_0(1,\mathbf{Q})-R$

- 当$R_{临界1} \le R \le R_{临界2}$ 时，有

$$E_r(R,\mathbf{Q}) = E_0(\hat{\rho},\mathbf{Q}) - \hat{\rho}R$$

其中 $\hat{\rho}$ 满足 $R = \dfrac{\partial E_0(\hat{\rho},\mathbf{Q})}{\partial \hat{\rho}}$

6.4.2 $E_R(R)$给定Q的极值变化规律

- 当$0 \le R \le R_{临界1}$

  $E_r(R, \mathbf{Q})$是R的线性函数，斜率为-1；

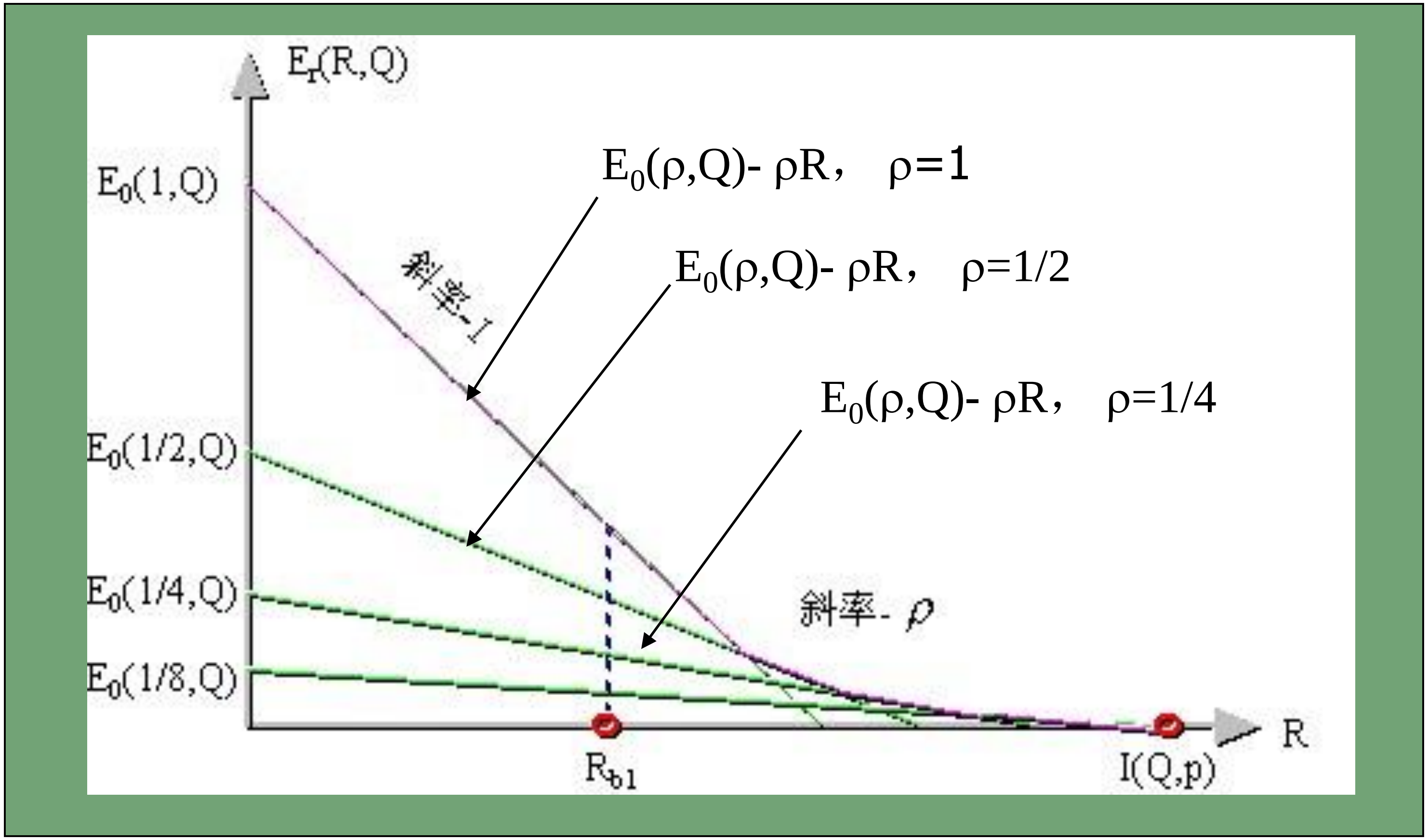
- $R_{临界1} \le R \le R_{临界2}$时，因为

$$\frac{dE_r(R,Q)}{dR} = -\rho \le 0$$

$$\frac{d^2E_r(R,Q)}{dR^2} = -\frac{1}{\dfrac{\partial^2 E_0(\rho,Q)}{\partial \rho^2}} \ge 0$$

$E_r(R, \mathbf{Q})$是R的正的、单调减的、下凹函数，斜率为-ρ。

6.4.2 $E_R(R)$给定Q的极值变化规律



6.4.3 $E_R(R)$的极值变化规律

由 $E_r(R) = \max_{\mathbf{Q}} E_r(R, \mathbf{Q})$

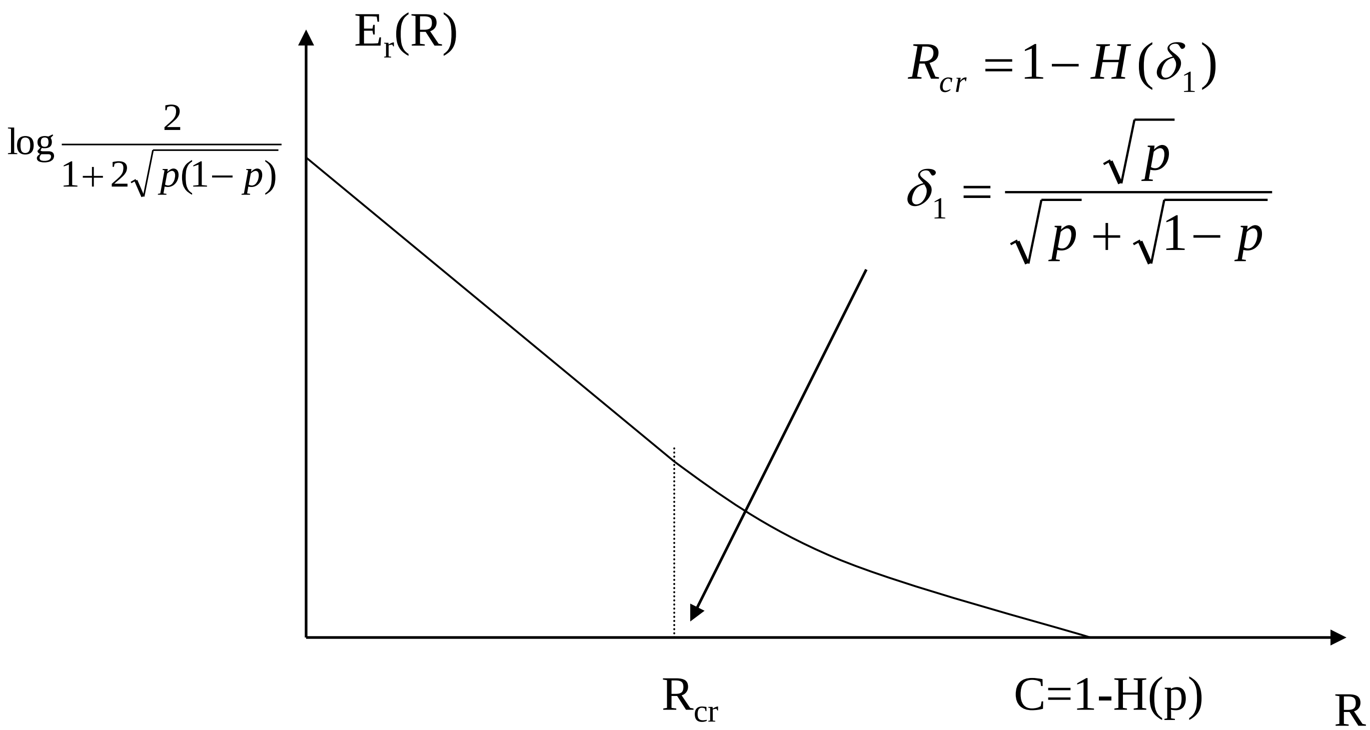
$C = \max_{\mathbf{Q}} I(\mathbf{Q}, \mathbf{p})$

及E_r(R, **Q**)的性质知：

- E_r(R)是对不同**Q**值下的一组有界的、单调减的、正的下凹函数E_r(R, **Q**)的包络；
- **在$0 \le R \le C$ 范围内， E_r(R)为有界的、单调减的、正的下凹函数.**

6.4.3 $E_R(R)$的极值变化规律

- 例6.1:求BSC的$E_r(R)$.



目　录

- 引　言
- 随机编码的信道传输错误概率
- 随机编码的DMC传输错误概率
- 讨论可靠性函数
- 信道编码定理（极限定理）

基本思想：直接求一个特定码C的误码率极为困难，而估计所有的码率为R、码长为N的**随机编码集合**的**平均**误码率则较为容易，后者可以作为前者的**上限**

↓

利用Gallager界，证明**定理6.1**：

$$\overline{P}_{e,m} \le M^{\rho} \sum_{\mathbf{y}} \left[\sum_{\mathbf{x}} Q(\mathbf{x}) p(\mathbf{y}/\mathbf{x})^{\frac{1}{1+\rho}} \right]^{1+\rho} \qquad 0 \le \rho \le 1$$

↓

对于DMC，证明**定理6.2**：

$$\overline{P}_{e,m} \le \exp\{-N[E_0(\rho, Q) - \rho R]\}$$

↓

定理6.3：**存在**码率为R、码长为N、个数为M的码C，满足

$$P_{e,m} < 4e^{-NE_r(R)}$$

↓

$E_r(R)$性质：在$0 \le R \le C$范围内， 有界的、单调减的、正的下凹函数

↓

信道编码定理：当$R < C$时， 能够实现可靠传输！

6.5 信道编码定理 极限定理

- Channel Coding Theorem

  Associated with each discrete memoryless channel, there is a nonnegative number C (called channel capacity) with the following property. For any $\varepsilon>0$ *and* $R<C$*, for large enough N, there exists a code of length N and rate* $\geq R$ *(i.e., with at least* 2^{RN} *distinct codewords), and an appropriate decoding algorithm, such that when the code is used on the given channel, the probability of decoder error is* $< \varepsilon$.

6.5 信道编码定理 极限定理

- Channel Coding Theorem
  - Weak converses theorem

    For $R>C$, the error probability of the best code does not approach 0 as $N\to\infty$.
  - Strong converses theorem

    For $R>C$, the error probability of the best code approaches 1 as $N\to\infty$.

总结

基本思想：直接求一个特定码C的误码率极为困难，而估计所有的码率为R、码长为N的**随机编码集合**的**平均**误码率则较为容易，后者可以作为前者的**上限**

利用Gallager界，证明**定理6.1**：

$$\overline{P}_{e,m} \le M^{\rho} \sum_{\mathbf{y}} \left[\sum_{\mathbf{x}} Q(\mathbf{x}) p(\mathbf{y}/\mathbf{x})^{\frac{1}{1+\rho}} \right]^{1+\rho} \qquad 0 \le \rho \le 1$$

对于DMC，证明**定理6.2**：

$$\overline{P}_{e,m} \le \exp\{-N[E_0(\rho,Q) - \rho R]\}$$

$$E_0(\rho,Q) = -\log\left\{ \sum_{y} \left[\sum_{x} Q(x) p(y/x)^{\frac{1}{1+\rho}} \right]^{1+\rho} \right\} \qquad 0 \le \rho \le 1$$

定理6.3：**存在**码率为R、码长为N、个数为M的码C，满足 $P_{e,m} < 4e^{-NE_r(R)}$

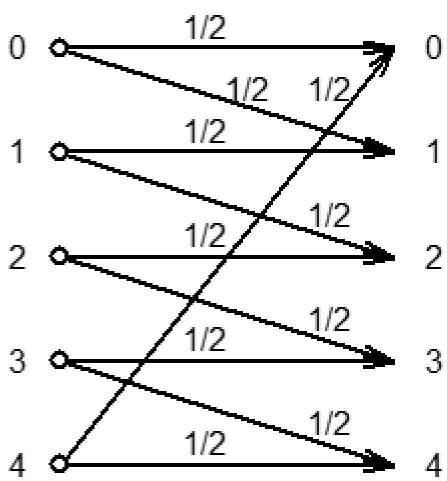
$$E_r(R) = \max_{0\le\rho\le1} \max_{Q} [E_0(\rho,Q) - \rho R]$$

$E_r(R)$性质：在$0 \le R \le C$ 范围内， 有界的、单调减的、正的下凹函数

信道编码定理：当$R < C$ 时， 能够实现可靠传输！

作业

- 习题6.2
- 习题6.5. 五进制信道转移概率如图, 求信道容量和可靠性函数$E_r(R)$.
  (a) 给出码长$N = 1$, $R = \log 2$且$p_e = 0$的编码.
  (b) 给出码长$N = 2$, $R = (\log 5)/2$且$p_e = 0$的编码.



根据信道的对称性可知，当信道输入等概时达到信道容量

$$C=\log\frac{5}{2}$$

（a）R=log2 < C，可实现无失真传输

有五组选择：{0，2} ???

（b）R=(log5)/2 < C，

可实现无失真传输

传输的码字为：

00，12，24，31，43

其他选择？