

1. 电磁媒质与物质方程(本构关系)

Maxwell方程组本身不涉及媒质,所以它适合任何情况。如果要在媒质中求解该方程组,则需要添加描述媒质电磁属性的方程,称为"本构"关系。

本构关系:如果对媒质施加电场强度 E 和磁感应强度 B,那么产生的电位移 矢量 D 和磁场强度 H 是什么?(E 是单位电荷受到的力,B 是单位电流元受到的力,是基本力学量)。在弱场情况下,他们应该是线性关系:

$$\begin{cases} D = \overline{a} \cdot E + \overline{b} \cdot B \\ H = \overline{c} \cdot E + \overline{d} \cdot B \end{cases} \implies \begin{cases} D = \overline{\varepsilon} \cdot E + \overline{\zeta} \cdot H \\ B = \overline{\zeta} \cdot E + \overline{\mu} \cdot B \end{cases}$$

可以根据本构参数的特点将媒质进行分类。



各向同性与各向异性: 如果本构参数矩阵 $\{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}},\bar{\boldsymbol{\xi}},\bar{\boldsymbol{\zeta}},\bar{\boldsymbol{\mu}}\}$ 退化为单位阵形式,则称为各向同性,否则为各向异性,如若 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}=\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{I}$,则为电各向同性。

均匀与非均匀:如果本构参数与空间位置无关,称为均匀,否则为非均匀。

色散与非色散:如果本构参数与频率有关(反映媒质分子的频响特性),称为色散,否则为非色散。事实上,所有媒质都是色散的,但是在某个较小的频率范围内可认为媒质电磁参数与频率无关。

- ◆ 本构参数反映物质分子结构对电磁波的响应;因此,如果知道分子/原子结构,则可以从理论推出本构参数。
- ◆ 根据物质分子的响应特性,可以将媒质进行各种分类:无耗和有耗、互易与非互易、单轴与双轴各向异性、旋性媒质、手征媒质、超导媒质、左手媒质 , 。



分子模型:可以把电磁媒质归纳为各种"模型"。例如,水分子可以认为适合 '**德拜**分子模型':

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \varepsilon = \varepsilon^{\infty} + \frac{\varepsilon^{0} - \varepsilon^{\infty}}{1 + j\omega\tau} = \varepsilon' - j\varepsilon'', \quad \varepsilon' = \varepsilon^{\infty} + \frac{\varepsilon^{0} - \varepsilon^{\infty}}{1 + (\omega\tau)^{2}}, \quad \varepsilon'' = \frac{\varepsilon^{0} - \varepsilon^{\infty}}{1 + (\omega\tau)^{2}}(\omega\tau)$$

其中 ε^0 和 ε^∞ 分别是 $\omega=0$ (对频率变化无反应)和 $\omega=\infty$ (对频率具有无限的快速反应)时的介电常数值, τ 称为'弛豫'时间(反映物质分子对电磁波的响应速度)。

另一种常见分子模型:洛仑兹媒质

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon^{\infty} + \sum_{p=1}^{P} \frac{(\varepsilon_p^0 - \varepsilon^{\infty})\omega_p^2}{\omega_p^2 + 2j\omega\delta_p - \omega^2}$$

 (ω_p,δ_p) 分别反映物质分子的谐振特性和振动衰减特性。



2. 平面波在特定媒质中的传播

平面波:有限尺度的波源在非常远的地方产生球面波。如果被研究的区域尺寸 与到波源的距离相比非常小,则可以认为是平面波。

平面波表达式:
$$E(r) = E_0 e^{-jk \cdot r}$$
 $D(r) = D_0 e^{-jk \cdot r}$ 且 $k \cdot D_0 = 0$ ($\because \nabla \cdot D = 0$)
$$H(r) = H_0 e^{-jk \cdot r} \quad B(r) = B_0 e^{-jk \cdot r} \quad \text{且 } k \cdot B_0 = 0 \quad (\because \nabla \cdot B = 0)$$

◆ 在各向同性均匀有耗媒质中传播

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_0 = E_{v}\hat{v} + E_{h}\hat{h} \\ k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon^* \end{cases}$$



设 \hat{a} 是一个"参考方向矢量",定义两个与传播方向 \hat{k} 垂直的极化方向矢量:

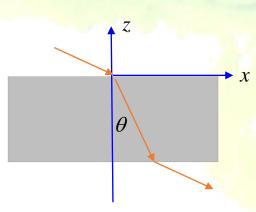
是一个 多考力问天里 , 足又两个 写传播力问
$$k$$
 垂直的极化力问天里:
$$\begin{cases} \hat{h} = \frac{\hat{k} \times \hat{d}}{|\hat{k} \times \hat{d}|} & \text{ 因此,只要给定一个"参考方向} \hat{d}\text{",} \\ \hat{v} = \hat{h} \times \hat{k} & \text{ 那么沿 } \hat{k} \text{ 方向传播的平面波通式为:} \end{cases} \mathbf{E} = \left(E_{v}\hat{v} + E_{h}\hat{h}\right)e^{-jk\hat{k}\cdot\mathbf{r}}$$

例: 若
$$\hat{d} = \hat{x}$$
, $\hat{k} = \hat{z}$, 则 $\hat{h} = \hat{y}$, $\hat{v} = \hat{x}$, $E = (E_x \hat{x} + E_y \hat{y})e^{-jkz}$, $k = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon^*}$

◆ 在各向异性单轴晶体媒质中的传播

$$\begin{cases}
\mathbf{D} = \overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{E} \\
\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}
\end{cases}
\qquad
\Rightarrow
\begin{cases}
j\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = -j\omega \mathbf{B}_0 = -j\omega \mu_0 \mathbf{H}_0 \\
j\mathbf{k} \times \mathbf{H}_0 = +j\omega \mathbf{D}_0 = j\omega \overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{E}_0
\end{cases}
\qquad
\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} =
\begin{bmatrix}
\varepsilon_{\perp} & 0 & 0 \\
0 & \varepsilon_{\perp} & 0 \\
0 & 0 & \varepsilon_{\parallel}
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \omega^{2} \mu_{0} \varepsilon_{\perp} - k^{2} \cos^{2} \theta & 0 & -\frac{1}{2} k^{2} \sin 2\theta \\ 0 & \omega^{2} \mu_{0} \varepsilon_{\perp} - k^{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} k^{2} \sin 2\theta & 0 & \omega^{2} \mu_{0} \varepsilon_{\parallel} - k^{2} \sin^{2} \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{bmatrix} = 0$$





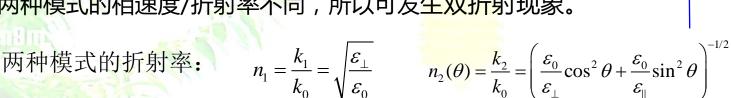
要使得方程有非零解,则系数行列式必须为零:

$$\begin{vmatrix} \omega^2 \mu_0 \varepsilon_{\perp} - k^2 \cos^2 \theta & 0 & -\frac{1}{2} k^2 \sin 2\theta \\ 0 & \omega^2 \mu_0 \varepsilon_{\perp} - k^2 & 0 \\ -\frac{1}{2} k^2 \sin 2\theta & 0 & \omega^2 \mu_0 \varepsilon_{\parallel} - k^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix} = 0 \implies \begin{cases} k^2 = k_1^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_{\perp} \\ k^2 = k_2^2 = \omega^2 \mu_0 \left(\frac{\cos^2 \theta}{\varepsilon_{\perp}} + \frac{\sin^2 \theta}{\varepsilon_{\parallel}} \right)^{-1} \end{cases}$$

若
$$k = k_1$$
 可得 $E_{0x} = E_{0z} = 0$, 因此 $\mathbf{E} = \hat{y}E_{0y}e^{-jk_1(x\sin\theta - z\cos\theta)}$ 若 $k = k_2$ 可得 $E_{0y} = 0$, $\frac{E_{0z}}{E_{0x}} = \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \tan\theta$, 因此 $\mathbf{E} = \left(\hat{x} + \hat{z}\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \tan\theta\right) E_{0x}e^{-jk_2(\theta)(x\sin\theta - z\cos\theta)}$

波在晶体中可以以两种模式传播,取决与来波的极化方式:

- 如果来波电场只有 y 分量, 将以第一种模式传播;
- 如果来波电场没有 y 分量, 将以第二种模式传播;
- 如果电场三个分量均存在,则分解成以上两种模式分别传播。
- 因为两种模式的相速度/折射率不同,所以可发生双折射现象。





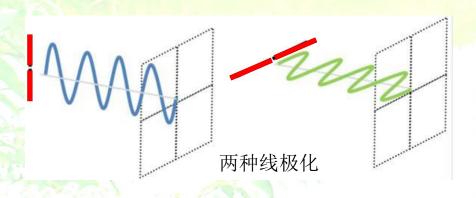
从以上晶体中的平面波传播例子可以看出,当媒质为各向异性时,波可能以多种模式传播,每种模式的波数(传播常数/波速/折射率)不同,极化方式也有特定形式。

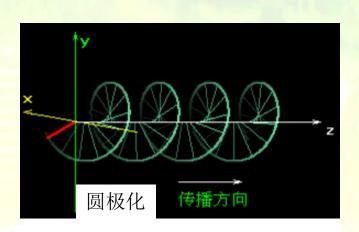
电磁波的极化:电场矢量末端随时间的变化特性。右手拇指指向传播方向,如果电场矢量旋转方向与四指弯曲方向一致,称为右手极化;相反则为左手极化;若电场矢量方向不旋转则为线极化。

◆ 线极化:电场矢量方向不变,但是大小可变化;

◆ 圆极化:电场矢量大小不变,但是方向随时间旋转;

◆ 椭圆极化:电场矢量大小和方向都随时间变化。

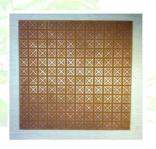




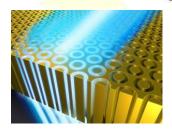


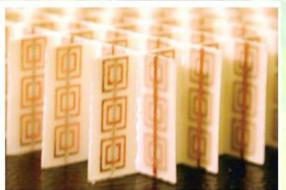
其他典型的电磁媒质:

- ◆ 磁化等离子体:处于电离状态的物质,并且被外加磁场磁化;是一种各向异性、 旋性、非互易的电磁媒质。波在其中以多种模式传播(各向异性所致),一般以 圆极化或椭圆极化波传播(旋性),波沿相反方向传播过程不可逆(非互易)。
- ◆ 磁化铁氧体:含铁磁质的材料。波在其中传播的特性与等离子体媒质相同。
- ◆ **手征媒**质:由手性分子组成的材料。波在其中主要以圆极化方式传播,但是具有 互易性。。
- ◆ 左手媒质(负折射率媒质):一种由人工设计的电磁媒质,介电常数和磁导率均为负数,折射率为负值。波在其中传播以及在界面上反射与投射与通常的媒质不同。电磁超材料(包含负折射率)是当前的研究热点之一。









负折射率人工设计材料



3. 电磁波通过导波结构传输

导波: 电磁波被结构牵引或限制沿特定方向传输。输送电系统、有线电视、电路/微波电路芯片、电子器件..... 中的电磁信号/能量都要求沿设定的方向传输。

一般的导波结构:双线传输线、同轴线、微带传输线、金属/介质波导、光纤。

◆ 电磁波在金属波导内的传输

金属波导:一般的金属波导是矩形或圆形。

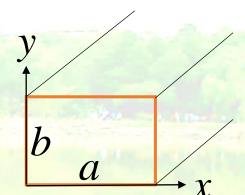
考虑如图矩形波导,假设电场没有 z 分量,而磁场 z 分量需要满足的波方程和边界条件为:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) H_z(x, y, z) = 0 \qquad \frac{\partial H_z}{\partial x} \bigg|_{x=0,a} = \frac{\partial H_z}{\partial y} \bigg|_{y=0,b} = 0$$

它的解是:
$$H_z(x, y, z) = A_{m,n} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta_{m,n}z}$$

$$\begin{cases} m, n = 1, 2, 3, \cdots \\ \beta_{m,n} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \end{cases}$$

这样的一个解称为一个"导波模式",总场是所有模式的叠加。





这种"导波模式"的传输特性为:

相速:
$$v_{p,m,n} = \frac{\omega}{\beta_{m,n}} = \frac{\omega}{k} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{m\pi}{ka}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{kb}\right)^2}}$$
 群速: $v_{g,m,n} = \frac{d\omega}{d\beta_{m,n}} = \frac{\omega}{k} \sqrt{1 - \left(\frac{m\pi}{ka}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{kb}\right)^2}$

截止条件: $\beta_{m,n}$ 必须为实数,不然波以指数衰减,不能实现有效传输,即

$$\beta_{m,n} > 0 \quad \text{IV} \quad k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 > 0 \qquad \left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2 > \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = \left(\frac{2\pi f_{c,m,n}}{c}\right)^2$$

$$f > f_{c,m,n} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$
 所以,只有频率大于 $f_{c,m,n}$ 的电磁波才能以该种模式传输,或者说能以该模式传输的电磁波最低频率是 $f_{c,m,n}$ 。

总结:在导波结构中,电磁波以各种离散的"导波模式"进行传播,每种模式的传输速度不同,能够传输的电磁波最低频率也不同。对实际应用来说,需要选取特定的模式作为"工作模式"。

例子: 矩形波导的最低模式是 TE_{10} 模(m=1, n=0),假设波导尺寸是 a=4cm, b=2cm,那么能传输的电磁波最低频率是多少? [答] $f > f_{c,1,0} = \frac{c}{2a} = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 0.04} = 3.75 \times 10^9 \text{ Hz}$



4. 电磁波散射

- ◆ 散射: 电磁波在传播/传输过程中如果遇到阻碍,会发生反射、折射、绕射、 衍射、透射等行为,把它们统称为"散射"。
- ◆ 入射场: 把阻碍物或研究对象不存在时的空间电磁场分布称为"入射场"。
- ◆ 散射场: 把阻碍物存在时空间场分布发生的变化量称为"散射场"。

电磁散射研究是电波传播(如信道建模)、电磁探测和成像(如微波遥感、雷达目标探测)、微波与射频器件分析(如介质加载和多端口连接)等的重要基础。

◆ 平面波从分层介质中的反射与透射

平面分层介质在地层探测(地质/资源)、多层微波电路分析设计、电离层探测等领域具有广泛应用背景。

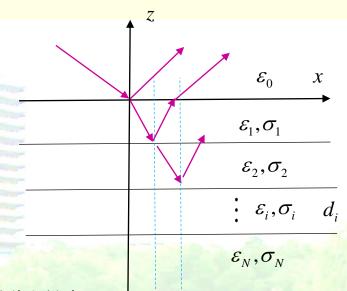


考虑如图多层介质的反射与透射问题。 设入射波为水平极化波:

$$E_y^i = E_0 e^{jk_{0z}z} e^{-jk_0x\sin\theta_0}, \quad k_{0z} = \sqrt{k_0^2 - (k_0\sin\theta_0)^2}$$

从地面上的反射波:

$$E_{y}^{r} = \Gamma_{0} E_{0} e^{-jk_{0}z^{z}} e^{-jk_{0}x\sin\theta_{0}}$$



目 的:通过在多个频率下测量地面反射系数 $r_o(f)$ 推测分层厚度和电参数(进一步推测物质成分)。为此,我们可推导出:

$$\Gamma_{0} = \frac{\tilde{Z}_{1}^{\text{TE}} - Z_{0}^{\text{TE}}}{\tilde{Z}_{1}^{\text{TE}} + Z_{0}^{\text{TE}}}$$
 with
$$\tilde{Z}_{i}^{\text{TE}} = Z_{i}^{\text{TE}} \frac{\tilde{Z}_{i+1}^{\text{TE}} + Z_{i}^{\text{TE}} \tan(k_{iz}d_{i})}{Z_{i}^{\text{TE}} + \tilde{Z}_{i+1}^{\text{TE}} \tan(k_{iz}d_{i})}, \quad i = N-1, N-2, \cdots, 1$$

$$\begin{cases} k_i^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_i - j\omega \mu_0 \sigma_i \\ k_{iz} = \sqrt{k_i^2 - (k_0 \sin \theta_0)^2} \\ Z_i^{TE} = \frac{\omega \mu_0}{k_{iz}}, \ \tilde{Z}_N^{TE} = Z_N^{TE} \end{cases}$$

我们看到,所有的地层信息(分层厚度和电参数)都已加载到反射系数 Γ_0 ,通过某种优化算法可以解出这些参数(可能不唯一),实现地层探测/反演。



金属球的散射

金属球是最简单的三维物体,它的解析解具有极为重 要的意义: 因为我们不能得到一般的三维物体的理论解, 势必要用数值求解或直接测量,它们是否准确就需要验证, 金属球的解析解就扮演这样的"定标"角色:

 $j_n(k_0r), h_n^{(2)}(k_0r) = 球贝塞尔、$ 球汉克尔函数

设入射波为 $E^i = \hat{x}E_0e^{jk_0z}$, 散射波为 (意外地复杂啊!):

$$\mathbf{E}^{s} = E_{0} \sum_{n=1}^{\infty} (-\mathbf{j})^{n} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(A_{n} \mathbf{M}_{n} + \mathbf{j} B_{n} \mathbf{N}_{n} \right)$$

$$\mathbf{E}^{s} = E_{0} \sum_{n=1}^{\infty} (-\mathbf{j})^{n} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(A_{n} \mathbf{M}_{n} + \mathbf{j} B_{n} \mathbf{N}_{n} \right)$$

$$\mathbf{M}_{n} = \hat{\theta} \frac{m}{\sin \theta} h_{n}^{(2)}(k_{0}r) P_{n}^{1}(\cos \theta) \cos \phi - \hat{\phi} h_{n}^{(2)}(k_{0}r) \frac{\partial P_{n}^{1}(\cos \theta)}{\partial \theta} \sin \phi$$

$$A_{n} = -\frac{j_{n}(k_{0}a)}{h_{n}^{(2)}(k_{0}a)}$$

$$B_{n} = -\frac{\frac{d}{d(k_{0}a)} [(k_{0}a) j_{n}(k_{0}a)]}{\frac{d}{d(k_{0}a)} [(k_{0}a) h_{n}^{(2)}(k_{0}a)]}$$

$$\mathbf{N}_{emn} = \hat{r} \frac{n(n+1)}{k_0 r} h_n^{(2)}(k_0 r) P_n^m(\cos \theta) \cos \phi - \hat{\theta} \frac{1}{k_0 r} \frac{\partial}{\partial r} [r h_n^{(2)}(k_0 r)] \frac{\partial P_n^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \cos \phi - \hat{\phi} \frac{1}{k_0 r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} [r h_n^{(2)}(k_0 r)] P_n^1(\cos \theta) \sin m\phi$$

总结:一般结构物体的电磁场边值问题没有解析解,必须开发数值求解方法。



5. 计算电磁学

◆ 什么是计算电磁学?

"实验"电磁学 (1864年之前)



"数理"电磁学 (1960年代之前)



"计算"电磁学 (1960年代之后) 实验为主要手段 →

→ 发现电磁学 "定律"

数理推演 为主要方式→

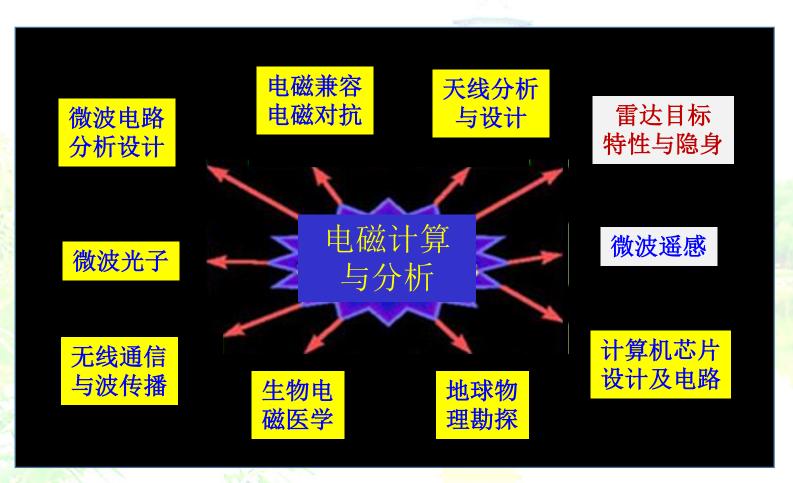
→ 获得电磁场"原理、方法"

计算机 为主要工具 →

→解决实际"工程应用问题"



◆ 计算电磁学有什么用?



计算电磁学在一切宏观电磁工程应用中处于中心地位



雷达截面(RCS): 衡量一个目标对雷达波散射能力的物理量,与入射波频率、 入射和散射方向、极化方式有关。

$$\sigma_{pq}(f, \hat{k}^i, \hat{k}^s) = \lim_{R \to \infty} \left[(4\pi R^2) \frac{\left| E_p^s \right|^2}{\left| E_q^i \right|^2} \right]$$
 散射波电场 入射波电场

典型目标的后向雷达散射截面为:

大型喷气客机 ~ 100 m²

大型战机 ~ 10 m²

成人 ~1 m²

传统导弹 ~ 0.5 m²

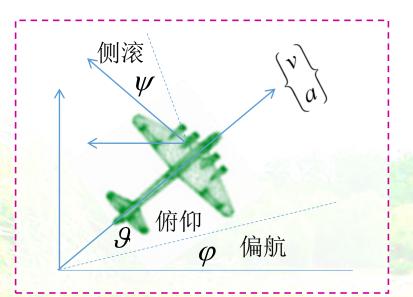
~ 0.01 m²

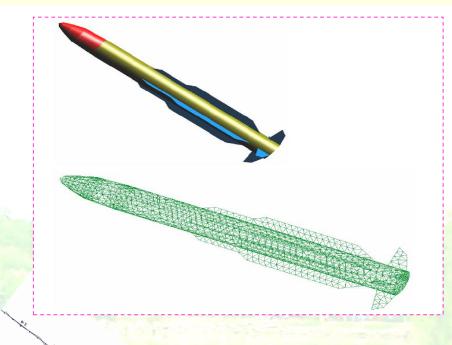
昆虫 ~ 0.0000<mark>1 m²</mark>

隐身战机: F117=0.065 m², F22=0.0065 m², B-2=0.0014 m²



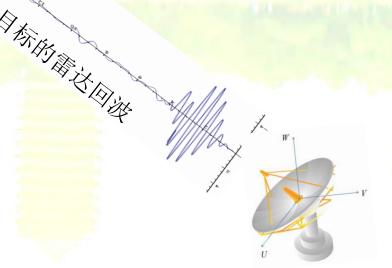
◆ 雷达目标电磁响应特性分析





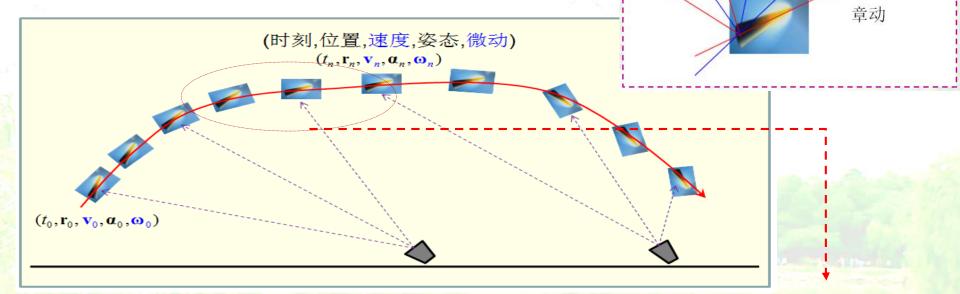
通过计算获得目标雷达回波,用于:

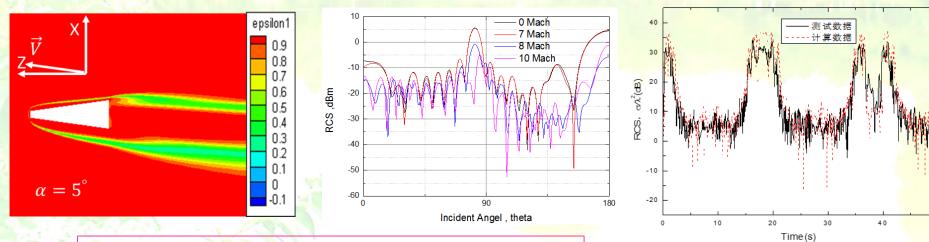
- 1) 优化目标设计实现隐身效果
- 2) 使用回波数据进行目标成像
- 3) 提取特征参数用于目标鉴别
- 4) 提取运动信息用于目标区分





◆ 超高声速目标的雷达散射特性分析





等离子体鞘套/黑障对探测、通信和控制的影响分析

自旋

锥旋

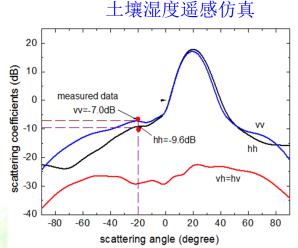
 y_{T}

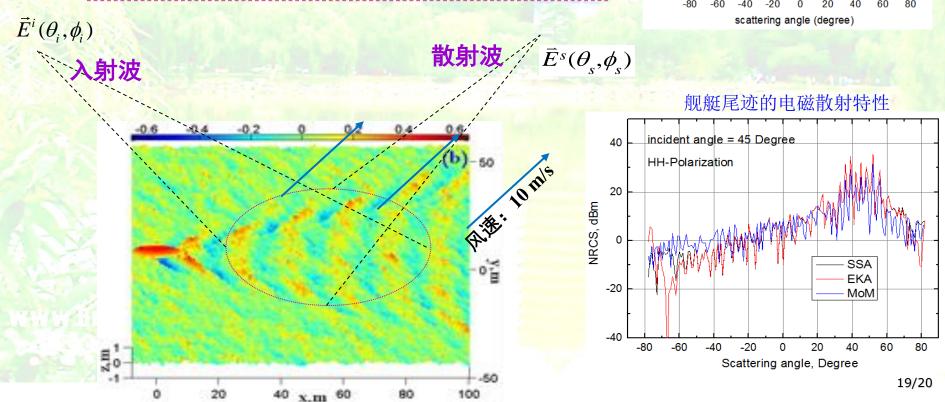


◆ 计算电磁学与微波散射遥感

通过计算获得遥感区域的散射波,经处理获得:

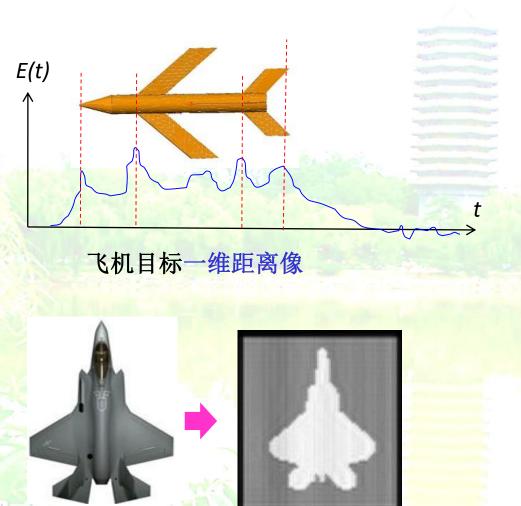
- ◆ 海洋风速、风向、盐度、油污等信息
- ◆ 海面目标、船只 /潜艇 尾迹信息获取
- ◆ 土壤湿度、植被类型、冰雪厚度及年份等
- ◆ 模拟SAR图像,系统设计/定标/矫准等



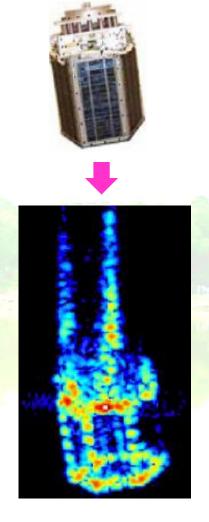




◆ 雷达目标成像仿真模拟



F35 的模拟合成孔径雷达 二维像



卫星目标三维像