

旋律与对称

Melody and Symmetry

王杰

北京大学数学科学学院

2017 – 2018 学年 • 第二学期

复习

如何变化一小段旋律？用数学语言：可以对旋律做哪些 **变换**
(transformation)？

最简单的方法就是移动它们的音高，称为 **移调 (transposition)**。

例如：贺敬之词、马可曲的《南泥湾》



A musical score in G major, 2/4 time. The melody consists of two parts. The first part (measures 1-2) has lyrics: '好地方来 好风光' (Hǎo dìfāng lái hǎo fēngguāng). The second part (measures 3-4) has lyrics: '好地方来 好风光' (Hǎo dìfāng lái hǎo fēngguāng). The melody starts on a high note and descends through various intervals.

第 3、4 两个小节把前两个小节的旋律严格地降低了一个纯五度。

复习



好地方来 好风光 好地方来 好风光

第一小节	B	B	#G	#F	#F	#G
音程	P5	P5	P5	P5	P5	P5
第三小节	E	E	#C	B	B	#C

1 = E:

| 553 223 | 553 2 | \Rightarrow | 116 556 | 116 5 |

复习

秦鹏章、罗忠镕编配的民族管弦乐曲《春江花月夜》，其第三段“花影层叠”中连续运用了移调手法



1 = G:

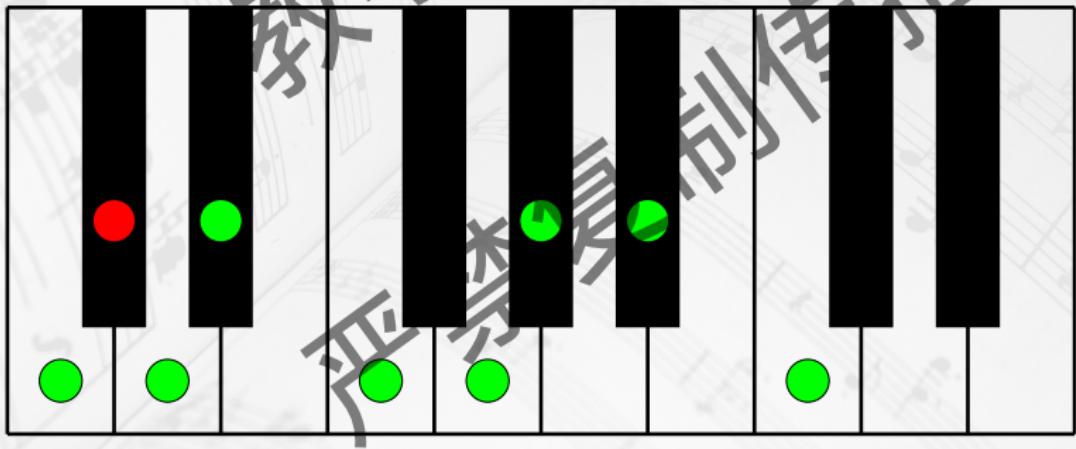
| 56756567 3 | 35635356 2 | 23523235 1 | 12312123 6 |

严格移调 vs 调性移调

严格移调 (exact transposition): 把一段旋律中的每个音级升高
(降低) 相同的半音数.

调性移调 (tonal transposition): 适当调整升高 (降低) 的半音
数, 使得移调后得到的各个音级仍然在调式音阶中.

c 小调命运交响曲



严格移调 vs 调性移调

对于音级 C, E, G 做升高 4 个半音的 **严格移调**, 得到 E, \sharp G, B.

如果这三个音级分别属于 C 大调音阶和 F 大调音阶时, 对其做相应的 **调性移调**, 得到的结果分别为 E, G, B 和 E, G, \flat B.





何占豪(1933 -)



陈钢(1935 -)

小提琴协奏曲《梁山伯与祝英台》(1959)





悲情地
(Patinimento) $\text{♩} = 126$

哀傷地 倾訴地
(Lagrimoso) $\text{♩} = 48$

22

p *f*

乐音体系的数字化

假定以 Imperial 290 钢琴 97 个键的乐音构成乐音体系

$$\mathbb{M} = \{ C_0, \dots, B_0, C_1, \dots, B_1, \dots, C_7, \dots, B_7, C_8 \}.$$

可以把这 97 个音级与数字 0, 1, 2, \dots, 96 相对应，即

$$C_0 \longleftrightarrow 0, \#C_0/\flat D_0 \longleftrightarrow 1, \dots, B_0 \longleftrightarrow 11,$$

$$C_1 \longleftrightarrow 12, \#C_1/\flat D_1 \longleftrightarrow 13, \dots, B_1 \longleftrightarrow 23,$$

$$\vdots \\ C_7 \longleftrightarrow 84, \#C_7/\flat D_7 \longleftrightarrow 85, \dots, B_7 \longleftrightarrow 95,$$

$$C_8 \longleftrightarrow 96.$$

移调变换

给定正整数 n . 把升高 n 个半音的移调变换记作 T_n , 降低 n 个半音的移调变换记作 T_{-n} . 对任一音级 $x \in \mathbb{M}$,

$$T_n(x) = x + n, \quad T_{-n}(x) = x - n.$$

一般地, 对任意整数 $z \in \mathbb{Z}$, 可以把移调变换统一记作

移调变换

$$T_z(x) = x + z.$$

特别地, 把升高 0 个半音的移调变换记作 T_0 .

移调变换

对任意整数 $m, n \in \mathbb{Z}$, 把两个移调变换 T_m, T_n 相继作用到某个音级上, 得到的效果仍然是对该音级的一个移调. 我们用记号

$$T_n * T_m$$

表示先用 T_m 作用, 然后再用 T_n 作用.

移调变换相继作用

$$T_n * T_m = T_{m+n}, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

例

移调变换 T_7 作用到 C_4 (中央 C) 上, 对应于 $48 \in \mathbb{M}$, 所以

$$T_7(C_4) = T_7(48) = 48 + 7 = 55 = G_4.$$

移调变换 T_{-5} 作用到 G_4 上, 有

$$T_{-5}(55) = 55 - 5 = 50 = D_4.$$

$$(T_{-5} * T_7)(C_4) = T_2(C_4) = D_4.$$

移调变换的性质

▶ 移调变换群

- (交换律) 对任意 $m, n \in \mathbb{Z}$, 有 $T_m * T_n = T_n * T_m$.

- (结合律) 任意给定正整数 $l, m, n \in \mathbb{Z}$, 有

$$(T_l * T_m) * T_n = T_l * (T_m * T_n).$$

- (单位元) 对任意 $n \in \mathbb{Z}$, 有

$$T_n * T_0 = T_n = T_0 * T_n.$$

- (逆变换) 对于任意 T_n ($n \in \mathbb{Z}$), 都唯一存在一个整数 $m = -n$, 使得

$$T_n * T_m = T_m * T_n = T_{n+m} = T_0.$$

The saddest music ever written

《野战排》(Platoon), Hemdale Film Corporation, 1986

导演: 奥利弗·斯通 (Oliver Stone)

1987 年获得第 59 届奥斯卡最佳影片、最佳导演、最佳音响、最佳剪辑四项大奖

“越战三部曲”之一. 其他两部是: 《生于七月四日》(Born on the Fourth of July, 1989), 《天与地》(Heaven & Earth, 1993).

Samuel Osborne Barber

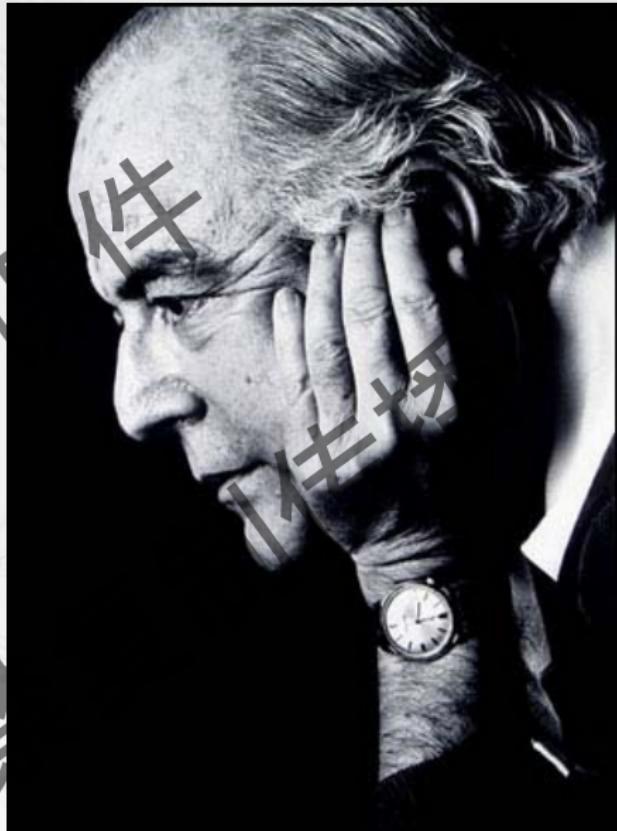
1910.3.9 – 1981.1.23

美国作曲家

♭B 小调弦乐柔版

Adagio for Strings

Op. 11 (1936) 



关于水平方向直线的对称



这种变换称为 **倒影 (inversion)**. 直观地看, 倒影就是把一段旋律上下颠倒. 严格讲, 就是把旋律中的上升音程用相同半音数的下降音程代替, 把下降音程用相同半音数的上升音程代替.

倒影

这种对称不仅从乐谱上可以明显地看出来，演奏时大多数人凭借听觉也都可以容易地分辨出来。例如，在苏萨的《雷神》进行曲中，一开始就将上行的旋律和它的倒影同时呈现。

A musical score for piano, featuring two staves. The treble staff is in C major (one sharp) and common time. The bass staff is in G major (one sharp) and common time. The score consists of two measures. In measure 1, the treble staff has a dotted half note followed by a quarter note. The bass staff has a dotted half note followed by a quarter note. In measure 2, the treble staff has a dotted half note followed by a quarter note. The bass staff has a dotted half note followed by a quarter note.



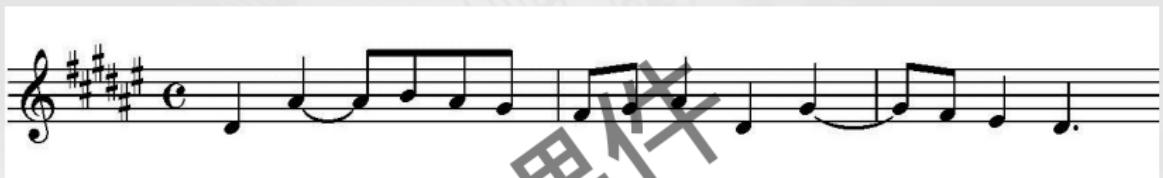
John Philip Sousa

1854.11.6 ~ 1932.3.6

美国作曲家、指挥家

The Thunderer

巴赫的升D小调赋格 (WTK I-8, BWV 853) 主题



第一次倒影变换：



第二次倒影变换：



主
题

↑P5 ↑m2 ↓m2 ↓M2 ↓M2 ↑M2 ↑M2 ↓P5 ↑P4 ↓M2 ↓M2 ↓M2

第
一
倒
影

↓P4 ↓M2 ↑M2 ↑M2 ↑M2 ↓M2 ↓M2 ↑P5 ↓P5 ↑M2 ↑M2 ↑m2

第
二
倒
影

↓P5 ↓m2 ↑m2 ↑M2 ↑m2 ↓M2 ↓M2 ↑P5 ↓P5 ↑M2 ↑M2 ↑m2

巴赫的升D小调赋格 (WTK I-8, BWV 853) 主题

到第 62 小节在低音部对主题做了展开变换



A musical score excerpt in bass clef, 6 sharps, common time. Measure 62 begins with a sustained note followed by a series of eighth notes. The basso continuo line is introduced here.

A musical score excerpt in bass clef, 6 sharps, common time. Measure 65 continues the basso continuo line with a sustained note followed by a series of eighth notes.





Béla Viktor János Bartók

1881.3.25 – 1945.9.26

匈牙利作曲家、钢琴家

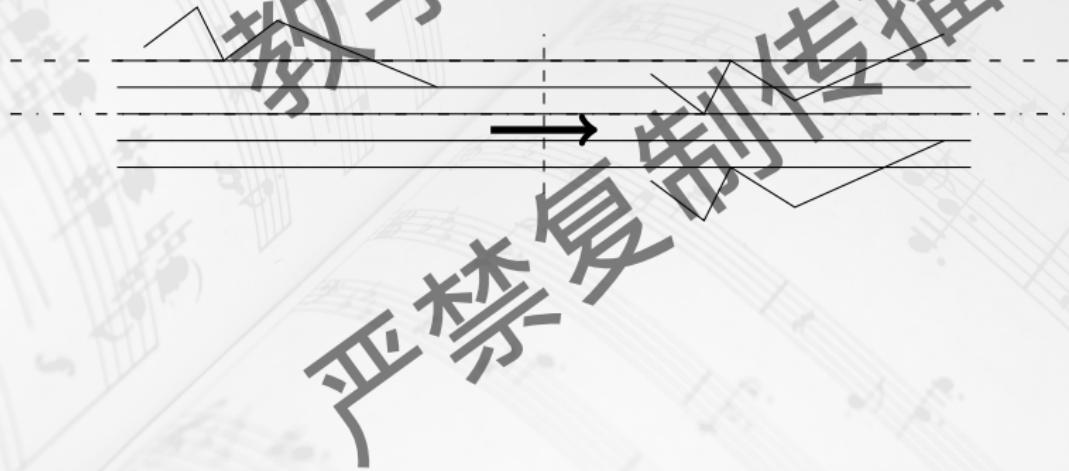
Mikrokosmos

作品写于 1926 – 1939 年期间，共分为 6 卷，包含 153 首钢琴曲。

第 6 卷 no. 141 题为“Subject and Reflection”。

倒影

选取不同的水平直线做对称轴，会得到不同的倒影。



倒影

用 I 表示关于 $C_4 = 48$ 所在直线的倒影变换, 就得到对应关系

$$\begin{array}{llll} \dots & \dots & \flat B_3 \longleftrightarrow D_4 & B_3 \longleftrightarrow \sharp C_4 \\ C_4 \longleftrightarrow C_4 & \sharp C_4 \longleftrightarrow B_3 & D_4 \longleftrightarrow \flat B_3 & \sharp D_4 \longleftrightarrow A_3 \\ E_4 \longleftrightarrow \flat A_3 & F_4 \longleftrightarrow G_3 & \sharp F_4 \longleftrightarrow \flat G_3 & G_4 \longleftrightarrow F_3 \\ \sharp G_4 \longleftrightarrow E_3 & A_4 \longleftrightarrow \flat E_3 & \sharp A_4 \longleftrightarrow D_3 & B_4 \longleftrightarrow \flat D_3 \\ C_5 \longleftrightarrow C_3 & \sharp C_5 \longleftrightarrow B_2 & \dots & \dots \end{array}$$

▶ 音类空间上的倒影变换

倒影变换 I 的数字表达式

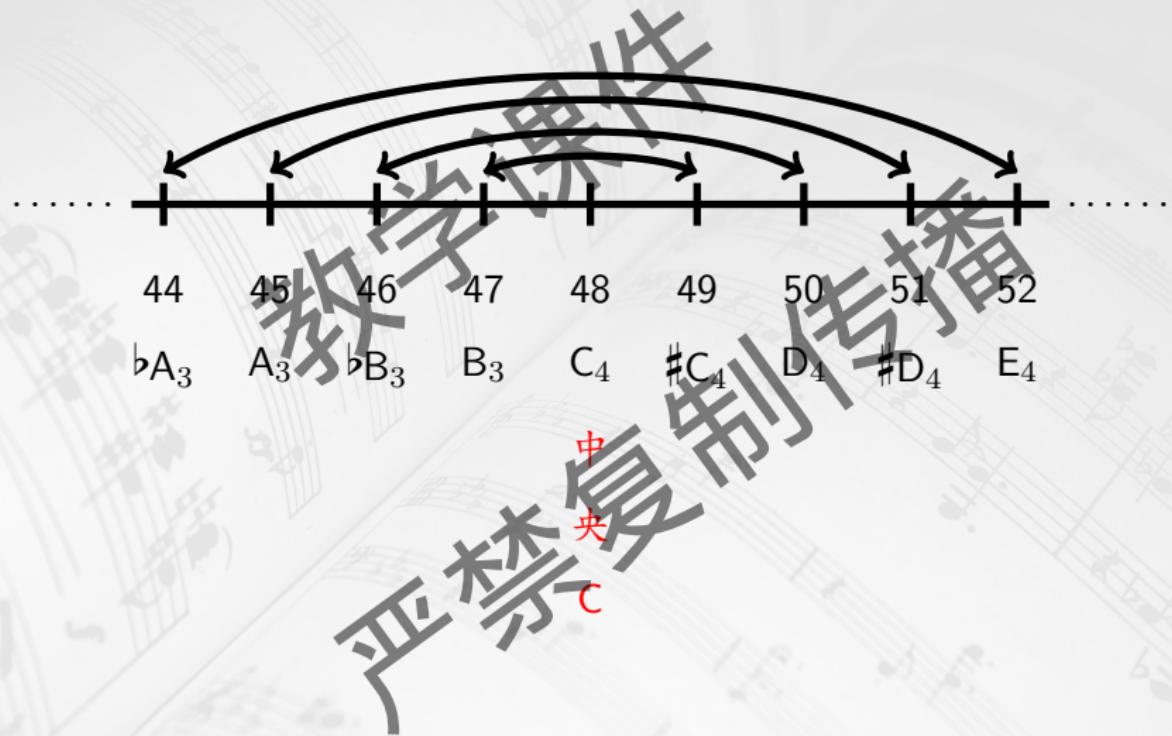
$$\begin{array}{ccccccc} & \cdots & & 46 \longleftrightarrow 50 & 47 \longleftrightarrow 49 \\ 48 \longleftrightarrow 48 & 49 \longleftrightarrow 47 & 50 \longleftrightarrow 46 & 51 \longleftrightarrow 45 \\ 52 \longleftrightarrow 44 & 53 \longleftrightarrow 43 & & & \cdots & \cdots \end{array}$$

即有

$$I(x) = 96 - x, \quad \forall x \in \mathbb{M}.$$

C_4 的确是中央 C!

倒影变换 I 的图形表达式



I 的性质

- $I^2 \triangleq I * I = T_0;$
- $T_n * I = I * T_{-n}.$

证明：对任意音级 $x \in \mathbb{M}$ 和整数 $n \in \mathbb{Z}$,

$$(T_n * I)(x) = T_n(96 - x) = 96 - x + n,$$

$$(I * T_{-n})(x) = I(x - n) = 96 - (x - n) = 96 - x + n.$$

关于垂线的对称



这相当于把一段旋律依照相反的次序“从尾到头”地重复一遍，音乐术语称为 **逆行** (retrograde).

倒影是上下颠倒，而逆行是左右互换。

逆行

贝多芬的第 29 号钢琴奏鸣曲 (Piano Sonata #29, Op. 106,
Große Sonate für das Hammerklavier) 第四乐章:

Allegro risoluto

The musical score shows a single staff of music. The key signature is one flat. The time signature is 3/4. The dynamic is "Allegro risoluto". The melody is composed of eighth and sixteenth notes, starting with a dotted quarter note followed by a sixteenth note.

经过一系列的发展与冲突, 到第 155 小节出现了这个主题的完整逆行

The musical score shows a single staff of music. The key signature is one sharp. The time signature is 3/4. The dynamic is "tr.....". The melody is composed of eighth and sixteenth notes, continuing the pattern from the previous system but in reverse direction.

音乐的奉献

下面节选了巴赫《音乐的奉献》(The Musical Offering, Das Musikalische Opfer, BWV 1079) 中的 18 小节乐谱，其第一行最后的 9 小节是第二行开始 9 小节的逆行，与此同时，第二行的最后一 9 小节也是第一行开始 9 小节的逆行。

A musical score for piano, consisting of four staves of music. The music is in common time and uses a key signature of two flats (F major or A minor). The score is divided into measures by vertical bar lines. Measures 1-5 show a melodic line in the treble clef staff with various note values (quarter notes, eighth notes, sixteenth notes) and rests. Measures 6-10 continue this pattern. Measure 11 begins a new section with a different melodic line in the bass clef staff, featuring eighth-note patterns. Measures 12-14 conclude the piece with a return to the treble clef staff and a final melodic line.

在三维
空间中
将这两
个声部
交叉连
接，使
之合二
为一。



这样的拓扑结构就是只有一个面的 Möbius 带 (Möbius strip).



逆行

一段旋律可以表示成一个由音级构成的序列. 用 R 记逆行变换,
对一个音级序列

$$x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k, \quad x_i \in M$$

做逆行变换, 得到一个新的音级序列

$$R(x_1 x_2 \dots x_k) = x_k x_{k-1} \dots x_2 x_1.$$

逆行的性质

- $R^2 = R * R = T_0;$
- $R * T_i = T_i * R, \forall i;$
- $R * I = I * R.$

数学课件
严禁复制传播

字母与音名的对应

A	B	C	D	E	F	G
a	b	c	d	e	f	g
h	i	j	k	l	m	n
o	p	q	r	s	t	u
v	w	x	y	z		



海顿

Franz Joseph Haydn

1732.3.31 –

1809.5.31

奥地利作曲家

纪念海顿

1909 年, 为纪念海顿逝世 100 周年, 当时法国顶级音乐杂志 *Revue musicale mensuelle de la S.I.M* 的主编 Jules Écorcheville 向一批著名作曲家发出邀请, 要求他们以 Haydn 的名字作为主题提供作品.



Jules Écorcheville

1872.3.17 -

1915.2.19

死于第一次世界大

战 Perthes-les-Hurlus

战场

法国音乐理论家、

批评家

A	B	C	D	E	F	G
a	b	c	d	e	f	g
h	i	j	k	l	m	n
o	p	q	r	s	t	u
v	w	x	y	z		

由于 a 和 h 都对应于音名 A, d 和 y 又都对应于 D, 这样得出来的主题会显得旋律过于单调。于是 Jules Écorcheville 把 h 改为对应于音名 B. 这样一来, Haydn 就变成了

B、A、D、D、G

拉威尔的小步舞曲

应邀提供作品的包括德彪西 (Claude-Achille Debussy, 1862.8.22 – 1918.3.25)、圣桑 (Charles-Camille Saint-Saëns, 1835.10.9 – 1921.12.16)、拉威尔等大家。下面的乐谱节选自拉威尔的小步舞曲 (*Menuet sur le nom d'Haydn*)。一开始拉威尔就把海顿主题 B、A、D、D、G 单独标了出来，随后拉威尔自己又把海顿主题及其逆行、倒影等都一一标注了出来。

拉威尔

Joseph-Maurice Ravel

(1875.3.7 -

1937.12.28)

法国作曲家、钢琴

家、指挥



Menuet sur le Nom d'Haydn

H A Y D N

Mouv^t de Menuet

R A Y D N

p f

p mf

H A Y D N A H

p pp

N D A V H

This musical score consists of three staves of music. The top staff is in treble clef, the middle staff is in bass clef, and the bottom staff is also in bass clef. The music is in common time, indicated by a 'C' at the beginning of each staff. The key signature changes from G major (one sharp) to F# major (two sharps) and then to E major (three sharps). The score features various dynamics such as 'p' (piano), 'f' (forte), 'mf' (mezzo-forte), and 'pp' (pianissimo). There are also slurs and grace notes. The letters 'H', 'A', 'Y', 'D', 'N' are placed under specific notes across the staves, likely indicating a cipher or a specific performance technique. The title 'Mouv^t de Menuet' is centered above the first staff.



B A C H Motif

把名字嵌入音乐中的最著名的例子莫过于“B A C H 动机”

德文音名：

C D E F G A \flat B B
C D E F G A B H

B L

巴赫动机

巴赫的姓 BACH 对应于 $\flat B \ A \ C \ B$



这就是著名的 巴赫动机 (B A C H Motif).

► 赫伯格 Op. 25

巴赫动机

巴赫多次将这个动机用于其作品的低音声部。不过最具戏剧性的作品是他未完成的《赋格的艺术》(Die Kunst der Fuge, BWV 1080)。

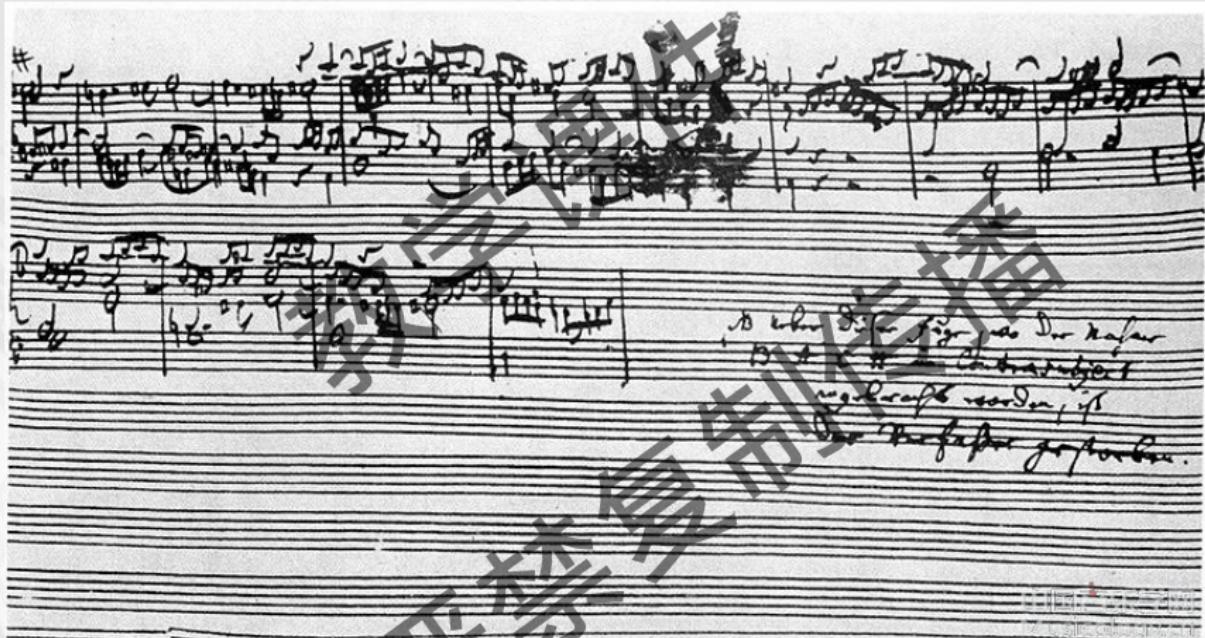
根据巴赫死后 1751 年出版的版本，作品包括 14 首赋格曲和 4 首卡农。

赋格的艺术

在最后一首赋格中，巴赫把 B-A-C-H Motif 写入乐谱，位于第 235 小节，而乐谱中断于 239 小节。



巴赫的手稿



巴赫的手稿

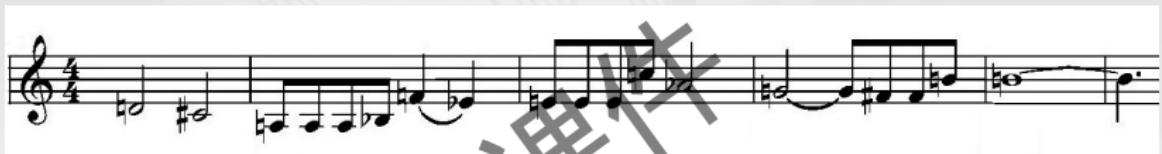
手稿的后面有巴赫的第三个儿子 Carl Philipp Emanuel Bach 加的几行字：

Über dieser Fuge, wo der Name B A C H im Contrasubject
angebracht worden, ist der Verfasser gestorben.

在作曲家将 BACH 这个名字引入这首赋格的对题之处时，作者去世了。



勋伯格第4弦乐四重奏 (Op. 37, 1936)



教学课件
音乐复制传播



八度关系

在乐音体系中，称两个音级具有 **八度关系**，如果它们或者是相等的，或者相差若干个八度。

等音的音级视为相等：

$$\#B = C = \flat D, \#C = \flat D, *C = D = \flat E, \dots, *A = B = \flat C.$$

勋伯格《三首钢琴曲》

Drei Klavierstücke Op. 11 (1909, 1924 年修订), no. 1



旋律: B \sharp G \sharp G

第 4-5 小节的持续音: \sharp G B \sharp G

韦伯恩

Anton Friedrich Wilhelm

von Webern

1883.12.3 – 1945.9.15

奥地利作曲家，指挥家

第二维也纳学派代表人

物之一



韦伯恩《5乐章弦乐四重奏》

Fünf Sätze für Streichquartett Op. 5 (1909), no. 2



Sehr langsam ($\text{♩} = \text{ca } 56$)
mit Dämpfer

rit.

mit Dämpfer

p p p mit Dämpfer *p p* *p p* *p p* *p p* *pizz.*

pp mit zartestem Ausdruck mit Dämpfer *p* *pp* *pp* *pp* *pp* *pizz.*

pp *pp* *pp* *pp* *pp* *pizz.*

中提琴旋律: G B G \sharp C

第 2 小提琴、大提琴和弦: \sharp C B G

《后调性理论导引（第三版）》



Joseph Straus

*Introduction to post-tonal
theory (3rd Edition)*

Pearson Education, Inc.

New Jersey, 2005

中译本：齐研译

人民音乐出版社

北京，2014

等价关系与音类

设 S 是一个集合. 给定 S 上的一个(二元)关系 (**binary relation**) 就是指定了由其元素的全体有序对构成的笛卡尔积

$$S \times S = \{ (x, y) \mid x, y \in S \}$$

中的一个子集合 $R \subset S \times S$. 对于 $\forall a, b \in S$, 称 a 与 b 有关系, 当且仅当 $(a, b) \in R$.

集合 S 上的一个关系就是指定一个规则, 对于集合中的任意两个元素 $a, b \in S$, 都可以判定 a 与 b 有关系还是没有关系.

- ① **自反性 (reflexivity)**: 任意 $x \in S$ 都与自己有关系, 即 R 要满足

$$(x, x) \in R, \quad \forall x \in S;$$

- ② **对称性 (symmetry)**: 如果 x 与 y 有关系, 则 y 与 x 也有关系, 即有

$$(x, y) \in R \iff (y, x) \in R, \quad \forall x, y \in S;$$

- ③ **传递性 (transitivity)**: 如果 x 与 y 有关系, y 和 z 有关系, 则 x 与 z 也有关系, 即有

$$(x, y) \in R \text{ 且 } (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R, \quad \forall x, y, z \in S.$$

等价关系

如果一个关系 R 同时具备上述三个性质，就称 R 是集合 S 上的一个等价关系 (equivalence relation).

例 1. 设 S 是全校同学的集合。“同班”就是集合 S 上的一个等价关系.

例 2. 设 \mathbb{M} 是乐音体系的集合. 八度关系 就是 \mathbb{M} 上的一个等价关系.

等价类

给定集合 S 上的一个等价关系，对于任意两个元素 $x, y \in S$ ，如果 x 与 y 有关系，就称 x 与 y 等价，记作 $x \sim y$ 。进一步，可以定义 S 的子集

$$\bar{x} = \{y \in S \mid y \sim x\},$$

即全体与 x 等价的元素构成的子集合，称为包含 x 的 等价类
(equivalence class)。

操场上的等价类



等价类的性质

- 任意两个等价类或者相等，或者互不相交。即有

$$\bar{y} \neq \bar{x} \iff \bar{y} \cap \bar{x} = \emptyset, \quad \forall x, y \in S.$$

- 集合 S 可以表示成若干互不相交的等价类之并

$$S = \bigcup_{x \in S} \bar{x}.$$

换言之，给定 S 上的一个等价关系，就得到集合中全部元素的一个分类 (classification).

音类

在乐音体系中，根据八度关系形成的等价类称为 音类 (pitch class). 八度关系把所有的音级分成 12 个音类：

$$\overline{C}, \quad \overline{\sharp C} = \overline{\flat D}, \quad \overline{D}, \quad \overline{\sharp D} = \overline{\flat E}, \quad \overline{E}, \quad \overline{F}, \quad \overline{\sharp F} = \overline{\flat G},$$

$$\overline{G}, \quad \overline{\sharp G} = \overline{\flat A}, \quad \overline{A}, \quad \overline{\sharp A} = \overline{\flat B}, \quad \overline{B}.$$

音类

pitch class 被译作“音级”不妥：

- 中文术语“音级”通常指乐音体系中的各音，也就是乐音体系这个集合中的元素；
- pitch class 源于数学上的“等价类”，将其译作“音类”能够更加准确地反映这个概念的本质；
- 20世纪西方音乐理论中重要的基本概念：pc set (pitch class set) 即可译作“音类集合”，似乎也比“音级集合”更顺。

音类空间

把 12 个音类放在一起，构成一个集合

$$\mathcal{PC} = \{\overline{C}, \overline{\#C}, \overline{D}, \dots, \overline{A}, \overline{\#A}, \overline{B}\},$$

称作 音类空间 (pitch class space).

等音的音级属于同一个音类：

$$\overline{\#B} = \overline{C} = \overline{\flat D}, \overline{\#C} = \overline{\natural D}, \overline{\times C} = \overline{D} = \overline{\flat E}, \dots, \overline{\times A} = \overline{B} = \overline{\flat C}.$$

音类空间



↓
数学课件制作传播



带余除法

定理

任意给定正整数 $m > 0$. 对任意整数 z , 唯一存在整数 q, r , 满足

$$z = qm + r, \quad 0 \leq r < m.$$

其中的 q 称为商, r 称为余数.

定 义

记全体整数的集合为 \mathbb{Z} . 给定正整数 m .

(1) 任意整数 $x \in \mathbb{Z}$ 对于 m 做带余除法, 得到的余数记作

$$x \pmod{m}.$$

显然有 $0 \leq x \pmod{m} < m$.

(2) 任意 $x, y \in \mathbb{Z}$ 称作模 m 同余的, 如果在对 m 的带余除法

$$x = q_1m + r_1, \quad y = q_2m + r_2, \quad 0 \leq r_1, r_2 < m$$

中, 它们的余数相等 $r_1 = r_2$. 这时记作 $x \equiv y \pmod{m}$.

同余关系

给定一个正整数 m , 则 \mathbb{Z} 中任意两个数 a, b 模 m 同余 的关系是一个等价关系:

$$a \text{ 与 } b \text{ 有关系} \iff a \equiv b \pmod{m},$$

这时也记作 $a \sim b$.

例如当 $m = 12$ 时, $13 \sim 1$, 因为

$$13 = 1 \cdot 12 + 1, \quad 1 = 0 \cdot 12 + 1,$$

所以有 $13 \equiv 1 \pmod{12}$.

同余类集合

取定正整数 m . 对于模 m 的同余关系, 任意整数 a 所在的等价类

$$\bar{a} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b \text{ 和 } a \text{ 模 } m \text{ 同余}\},$$

称为模 m 的一个同余类.

当 $m = 12$ 时全体整数的集合 \mathbb{Z} 被分成 12 个同余类的并集合

$$\mathbb{Z} = \overline{0} \cup \overline{1} \cup \overline{2} \cup \cdots \cup \overline{10} \cup \overline{11}.$$

模 12 的同余类集合

全体模 12 的同余类构成一个集合

$$\mathbb{Z}_{12} = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{11}\}.$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$\mathbb{Z}_{12} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$$

模 12 的加法

对于任意两个同余类 $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_{12}$, 定义它们的和

$$\bar{x} \oplus \bar{y} = \overline{x+y} \in \mathbb{Z}_{12}. \quad (1)$$

例如:

$$\bar{5} \oplus \bar{8} = \overline{5+8} = \overline{13}.$$

而 $13 \equiv 1 \pmod{12}$, 所以得到

$$\bar{5} \oplus \bar{8} = \bar{1} \in \mathbb{Z}_{12}.$$

乐音体系的列队

乐音体系 \mathbb{M} 中的 97 个音级与数字 $0, 1, 2, \dots, 96$ 相对应:

$$C_0=0 \quad \#C_0/\flat D_0=1 \quad D_0=2 \quad \dots \quad \#A_0/\flat B_0=10 \quad B_0=11$$

$$C_1=12 \quad \#C_1/\flat D_1=13 \quad D_1=14 \quad \dots \quad \#A_1/\flat B_1=22 \quad B_1=23$$

$$C_7=84 \quad \#C_7/\flat D_7=85 \quad D_7=86 \quad \dots \quad \#A_7/\flat B_7=94 \quad B_7=95$$

$$C_8=96$$



$$\overline{C} = \overline{0}$$

$$\overline{\#C} = \overline{1}$$

$$\overline{D} = \overline{2}$$

$$\dots$$

$$\overline{\#A} = \overline{10}$$

$$\overline{B} = \overline{11}$$

音类空间 $\mathcal{P}\mathcal{C}$ 与 \mathbb{Z}_{12} 之间的 1-1 对应

把 \bar{C} 对应于 $\bar{0}$, $\#\bar{C}$ 对应于 $\bar{1}, \dots, \bar{B}$ 对应于 $\bar{11}$, 就可以通过这种对应在音级之间做运算.

例如: 把 $\flat E$ 升高 14 个半音. 因为 $\flat E$ 所在的等价类 $\flat E = \# D$ 对应于模 12 同余 3 的等价类 $\bar{3}$, 而

$$\bar{3} + \bar{14} = \bar{5},$$

所以 $\flat E$ 升高 14 个半音后所属的等价类对应于 $\bar{5}$, 应该是 \bar{F} .

音类空间 $\mathcal{P}\mathcal{C}$ 与 \mathbb{Z}_{12} 之间的 1-1 对应

又如, 把 $\#F$ 降低 7 个半音. 因为 $\#F$ 对应于等价类 $\bar{6}$, 而

$$6 - 7 = -1 \equiv 11 \pmod{12},$$

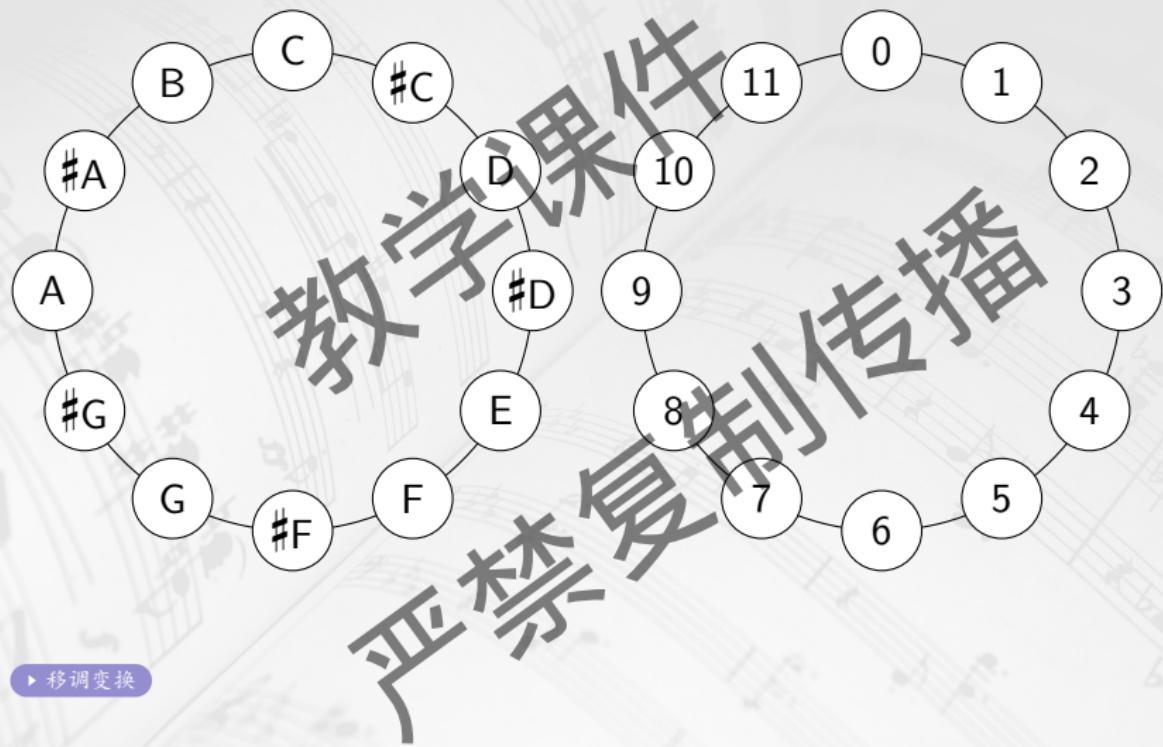
即知

$$\bar{6} \oplus \bar{-7} = \bar{11},$$

所以 $\#F$ 降低 7 个半音后所属的等价类是对应于 $\bar{11}$ 的 B .

总之, 乐音体系中的 12 个音类与整数模 12 同余的等价类之间存在 1-1 对应, 从而可以在音类之间引入模 12 的加法.

音类空间 $\mathcal{P}\mathcal{C}$ 与 \mathbb{Z}_{12} 之间的 1-1 对应



回看移调变换

把升高 n 个半音的移调变换 T_n 看做是在 12 个音类上的变换

定 义

$$T_n(\bar{x}) = \overline{T_n(x)}, \quad \forall \bar{x} \in \mathcal{PC}.$$

例如：

$$T_3(\overline{C}) = \overline{T_3(C)} = \overline{\sharp D}, \quad T_{-4}(\overline{C}) = \overline{T_{-4}(C)} = \overline{\flat A}.$$

利用 \mathcal{PC} 与模12的同余类集合 \mathbb{Z}_{12} 之间的1-1对应，任一音类 \bar{x} 对应于集合 $\{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{11}\}$ 中的某一个同余类，于是有

移调变换的公式

$$T_n(\bar{x}) = \overline{T_n(x)} = \overline{x + n}, \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{Z}_{12}.$$

音类的这种数字表达式更加便于计算。例如：

$$T_3(\bar{C}) = T_3(\bar{0}) = \overline{T_3(0)} = \overline{3} = \overline{\sharp D},$$

$$T_{-4}(\bar{C}) = T_{-4}(\bar{0}) = \overline{T_{-4}(0)} = \overline{-4} = \overline{8} = \overline{\flat A}.$$

音类空间上的移调变换

按照上述方式,原来作用在乐音体系 \mathbb{M} 上的移调变换 T_n 被改造成为音类空间 $\mathcal{PC} = \{\overline{C}, \overline{\#C}, \dots, \overline{B}\}$ 到自身的 **映射** (**mapping**). 

命 题

对任意整数 m, n , $T_m = T_n$ 当且仅当 $m \equiv n \pmod{12}$.

移调变换 T_7 把 G B D' 升高 7 个半音, T_{-5} 把 G B D' 降低 5 个半音, 分别得到

$$T_7(G B D') = D' F' A'; \quad T_{-5}(G B D') = D F A.$$

$D' F' A'$ 和 $D F A$ 分别相差八度, 在八度关系下分别属于相同的等价类: $\overline{D'} = \overline{D}$, $\overline{F'} = \overline{F}$, $\overline{A'} = \overline{A}$,



音类空间上的移调变换

总之，在音类空间 $\mathcal{PC} = \{\overline{C}, \overline{\sharp C}, \dots, \overline{B}\}$ 上，可以只考虑 12 个移调变换

$$T_0, T_1, \dots, T_{11}.$$

它们把音类空间中的任意一个音类变成 \mathcal{PC} 中的另一个音类。

利用 \mathcal{PC} 与模 12 的同余类集合 \mathbb{Z}_{12} 之间的 1-1 对应，这 12 个移调变换也是 \mathbb{Z}_{12} 上的变换

$$T_n(\bar{x}) = \overline{x + n}, \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{Z}_{12}.$$

群的定义

设 G 是一个非空集合, 具有一个二元运算 $*$, 满足

- ① 结合律: $(a * b) * c = a * (b * c)$, $\forall a, b, c \in G$;
- ② G 中存在单位元 e , 满足 $a * e = e * a = a$, $\forall a \in G$;
- ③ 对任意 $a \in G$, 存在逆元素 $b \in G$, 使得 $a * b = b * a = e$,

就称代数结构 $(G, *)$ 是一个群 (group).

通常把群中的运算称作“乘法”, 因此把 a 的逆元素记作 a^{-1} .

群的例子

例 1. 全体整数的集合 \mathbb{Z} , 关于整数的加法构成一个群 $(\mathbb{Z}, +)$.

例 2. 记整数模 12 的同余类集合 $\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{11}\}$, 关于模 12 的加法 \oplus 构成一个群 $(\mathbb{Z}_{12}, \oplus)$:

$$\bar{a} \oplus \bar{b} = \overline{a + b}.$$

例如, 由 $5 + 7 \equiv 0 \pmod{12}$ 知在 \mathbb{Z}_{12} 中有 $\bar{5} \oplus \bar{7} = \bar{0}$.

更多的例子

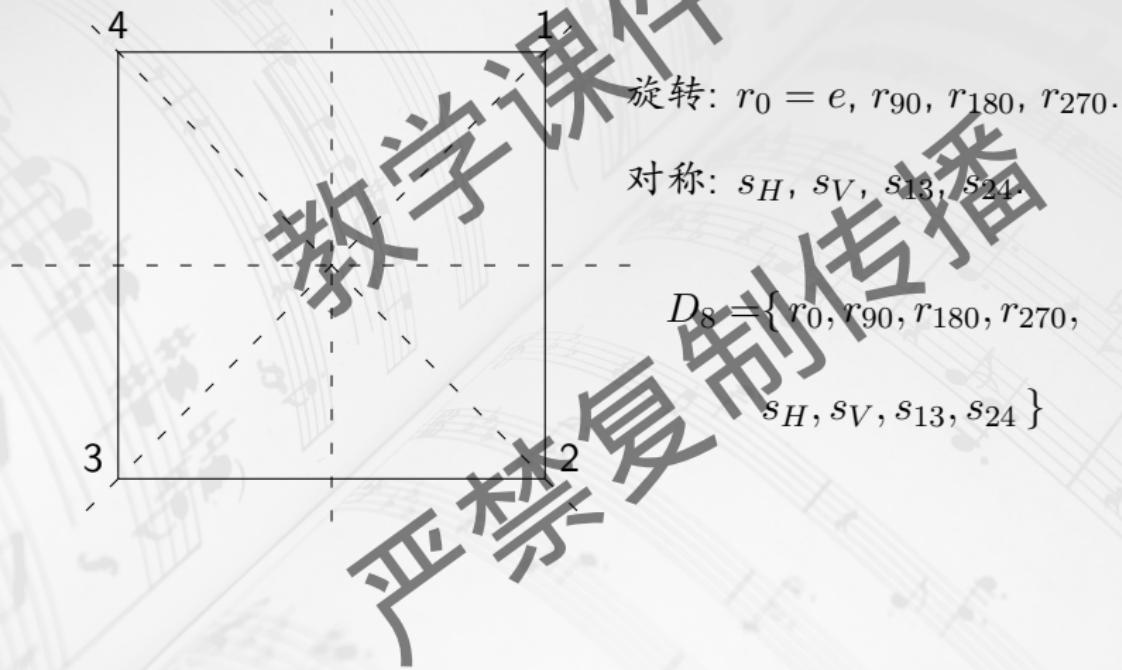
(\mathbb{Z}, \times) 不是群.

(\mathbb{Q}, \times) 不是群.

记 $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, 则 (\mathbb{Q}^*, \times) 是一个群.

数学课件 严禁复制传播

二面体群 (dihedral group)



二面体群 (dihedral group)

记 $r = r_{72}$.

旋转: $r, r^2, r^3, r^4, r^5 = e$.

对称: s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 .

$$D_{10} = \{ r, r^2, r^3, r^4, r^5,$$

$$s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \}$$



对称群

设集合 $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Ω 到自身的一个可逆变换 α 可以表示为

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix},$$

其中 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 是 $1 2 \cdots n$ 的一个排列. 称 α 为一个 n 次置换 (permutation).

全体 n 次置换关于映射的复合构成一个群, 称作 n 次对称群 (symmetric group), 记作 S_n .

3 次对称群 S_3

$$S_3 = \{ e, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \} \text{ 其中}$$

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

群的基本概念

G 中元素的个数 $|G|$ 称作这个群的 阶 (order).

$(\mathbb{Z}_{12}, \oplus)$ 是 12 阶的.

正 n 边形的二面体群 $|D_{2n}| = 2n$.

n 次对称群 $|S_n| = n!$

$(\mathbb{Z}, +), (Q^*, \times)$ 是 无限群.

移调变换群

把音类空间 \mathcal{PC} 上的全体移调变换构成的集合记作

$$\mathcal{T} = \{ T_i \mid 0 \leq i \leq 11 \}.$$

作为音类空间上的变换, \mathcal{T} 中的任意两个移调变换 T_m, T_n 也可以做复合 $T_m * T_n$.

移调变换群

根据移调变换的性质 [▶ 移调变换性质](#), $(\mathcal{T}, *)$ 满足结合律; 有单位元 T_0 ; 每个 T_n 有逆元素

$$T_n^{-1} = T_{-n} \pmod{12}.$$

因此 $(\mathcal{T}, *)$ 构成一个群.

不仅如此, \mathcal{T} 中元素之间的运算还满足交换律 (commutative law)

$$T_m * T_n = T_n * T_m,$$

这样的群称作 交换群 或者 **Abel 群 (abelian group)**.

Niels Henrik Abel
(1802.8.5 – 1829.4.6)
挪威数学家



\mathcal{T} 的乘法表

	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}
T_0	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}
T_1	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0
T_2	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1
T_3	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2
T_4	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3
T_5	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4
T_6	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
T_7	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
T_8	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7
T_9	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8
T_{10}	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9
T_{11}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}

循环群

事实上, \mathcal{T} 可以由一个移调变换 T_1 生成:

$$T_i = T_1^i \neq e, \quad 1 \leq i \leq 11, \quad T_{12} = T_1^{12} = T_0 = e,$$

其中 e 是群中的单位元. 把群 \mathcal{T} 的生成元记作 $T = T_1$, 则有

$$\mathcal{T} = \langle T \rangle,$$

是一个 12 阶的 循环群 (cyclic group). 这时群中的任意元素都是生成元 T 的方幂:

$$\mathcal{T} = \{T, T^2, \dots, T^{11}, T^{12} = e\}.$$

同构的群

设 $(G, *)$ 和 (H, \star) 是两个群. 映射 $\alpha: G \rightarrow H$ 如果满足

$$\alpha(a * b) = \alpha(a) \star \alpha(b), \quad \forall a, b \in G,$$

就称 α 是一个从 G 到 H 的 同态 (**homomorphism**).

如果群同态 α 是一个 双射 (**bijection**), 则称 α 是一个 同构映射 (**isomorphic mapping**), 这时也称群 G 和 H 是 同构的, 记作

$$G \cong H.$$

同构的群

全体实数关于实数的加法构成一个群 $(\mathbb{R}, +)$. 全体正实数关于实数的乘法构成一个群 (\mathbb{R}^+, \cdot) .

映射 $\alpha: x \mapsto \log_{10} x$ 是 \mathbb{R}^+ 到 \mathbb{R} 的双射, 并且满足

$$\alpha(x \cdot y) = \log_{10}(x \cdot y) = \log_{10} x + \log_{10} y = \alpha(x) + \alpha(y).$$

这说明 α 是一个同构映射. 其逆映射为

$$\alpha^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto 10^x.$$

定理: $(\mathcal{T}, *) \cong (\mathbb{Z}_{12}, \oplus)$.

证明. 定义映射 $\alpha: \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$

$$\alpha(T_i) = i, \quad 0 \leq i \leq 11,$$

则对任意 $1 \leq i, j \leq 11$,

$$\alpha(T_i * T_j) = \alpha(T_{i+j \pmod{12}}) = \overline{i + j} = i \oplus j = \alpha(T_i) \oplus \alpha(T_j).$$

这说明 α 是群 $(\mathcal{T}, *)$ 到 $(\mathbb{Z}_{12}, \oplus)$ 的一个同态.

进一步, α 既是单射, 又是满射, 从而是一个同构映射. □

$$\mathcal{T} \cong \mathbb{Z}_{12}$$



倒影变换 I 在音类空间上的作用

倒影变换 I 原本是定义在乐音体系 \mathbb{M} 上的.

▶ 乐音体系中的倒影

音类空间 \mathcal{PC} 的本质是把 \mathbb{M} 中所有的音级按照八度等价关系分成了 12 个音类. 与移调变换的情形一样, 倒影变换也可以作用到音类空间上去.

定 义

$$I(\bar{x}) = \overline{I(x)}, \forall \bar{x} \in \mathcal{PC}.$$

倒影变换 I 在音类空间上的作用

在八度等价关系下，处在不同八度但又具有相同音名的音级都属于同一个音类

$$\overline{\flat B_4} = \overline{\flat B_2} = \overline{\flat B_7} = \overline{\flat B}.$$

因此讨论 I 在音类空间 \mathcal{PC} 上的作用时，可以忽略不同八度的差别。例如：

$$I(\overline{C}) = \overline{I(C)} = \overline{C},$$

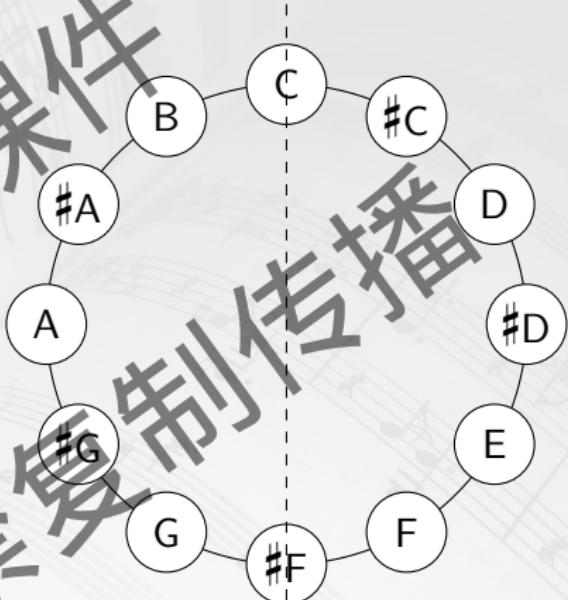
$$\overline{I(\sharp G)} = \overline{(I(\sharp G))} = \overline{E}.$$

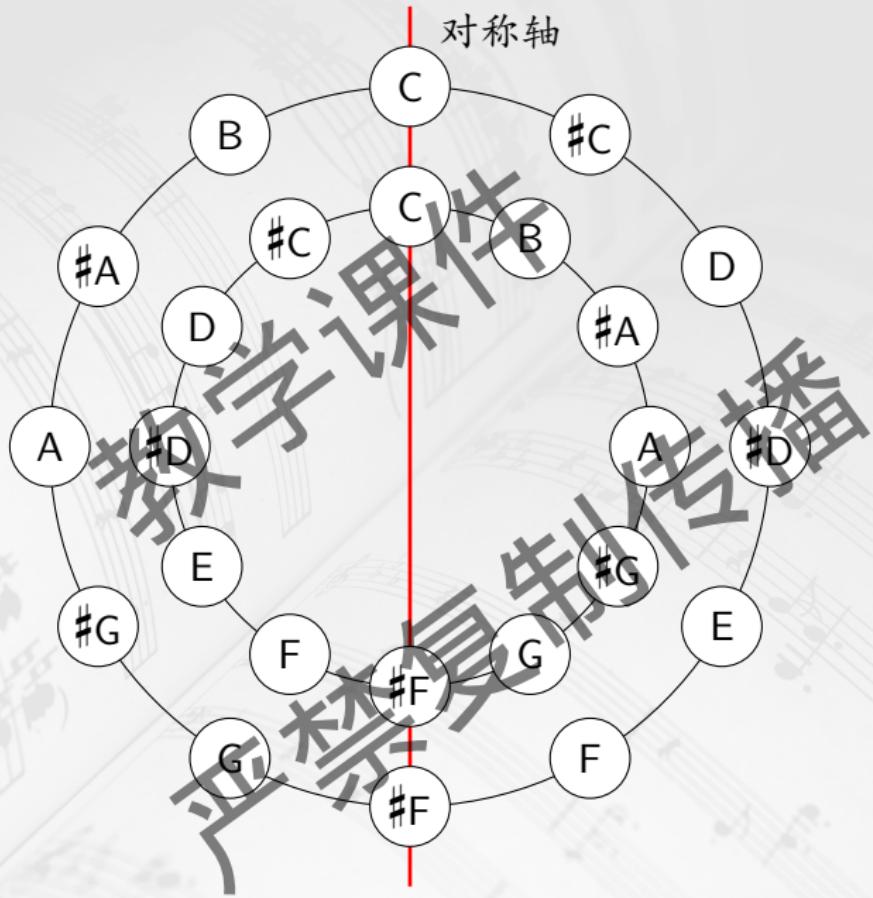
倒影变换 I 在音类空间上的作用

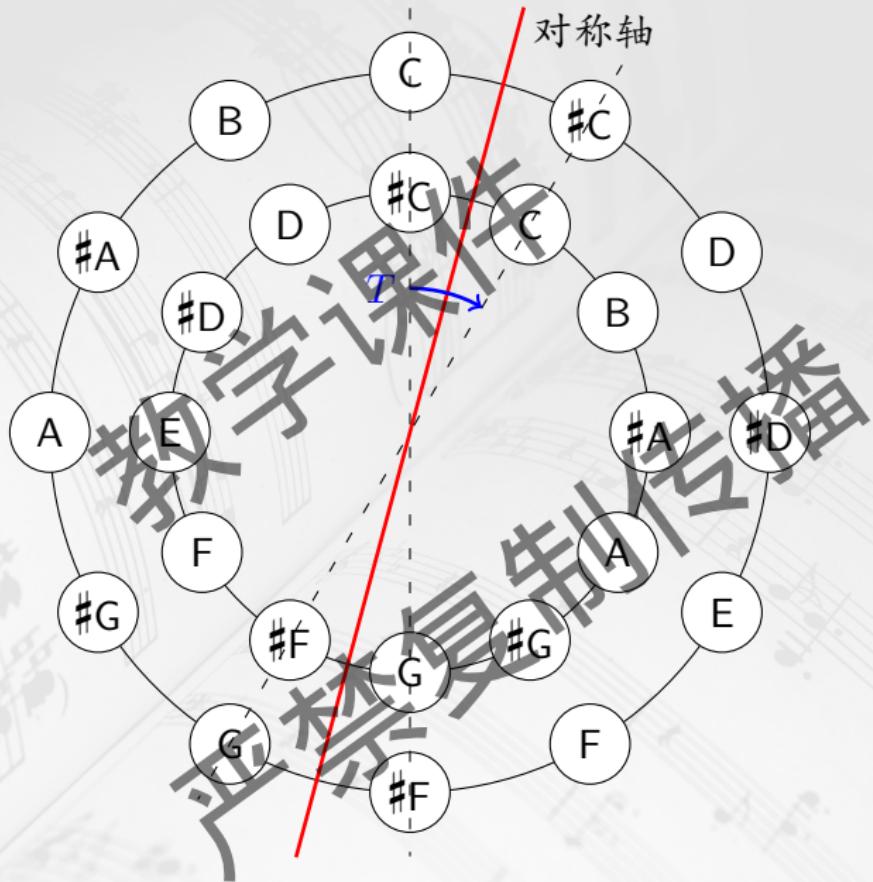
按照音类空间 \mathcal{PC} 与
 \mathbb{Z}_{12} 之间的 1-1 对应, 倒
影变换 I 可以表示为

$$I : x \mapsto -x \pmod{12},$$

$$0 \leq x \leq 11.$$







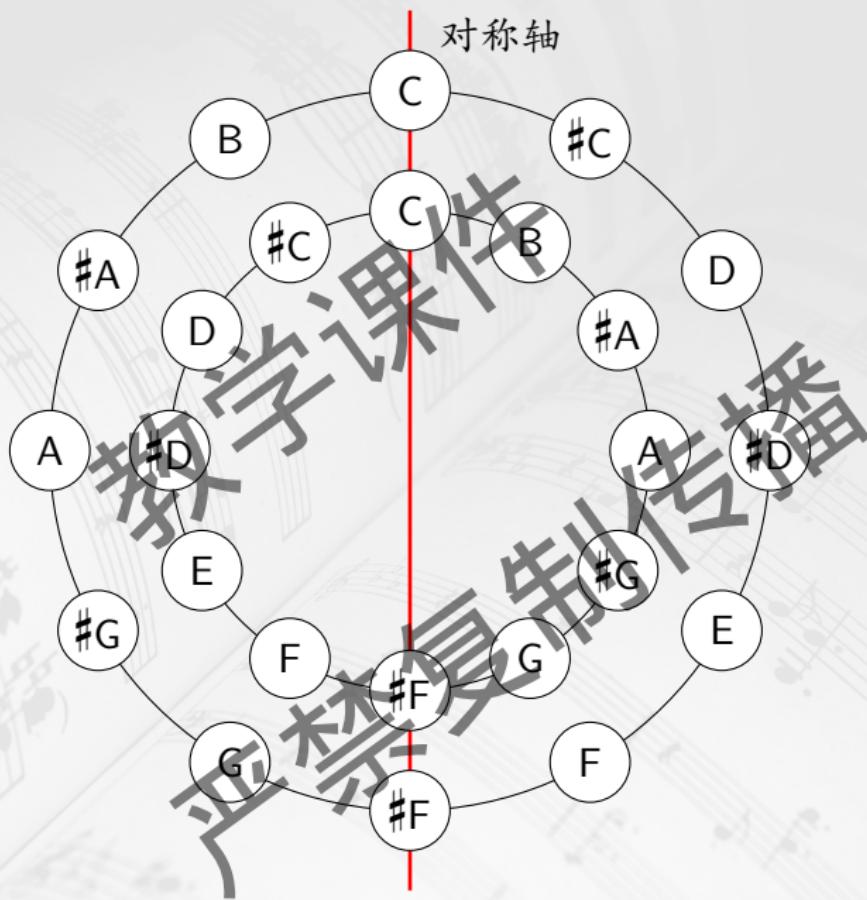
变换的乘法

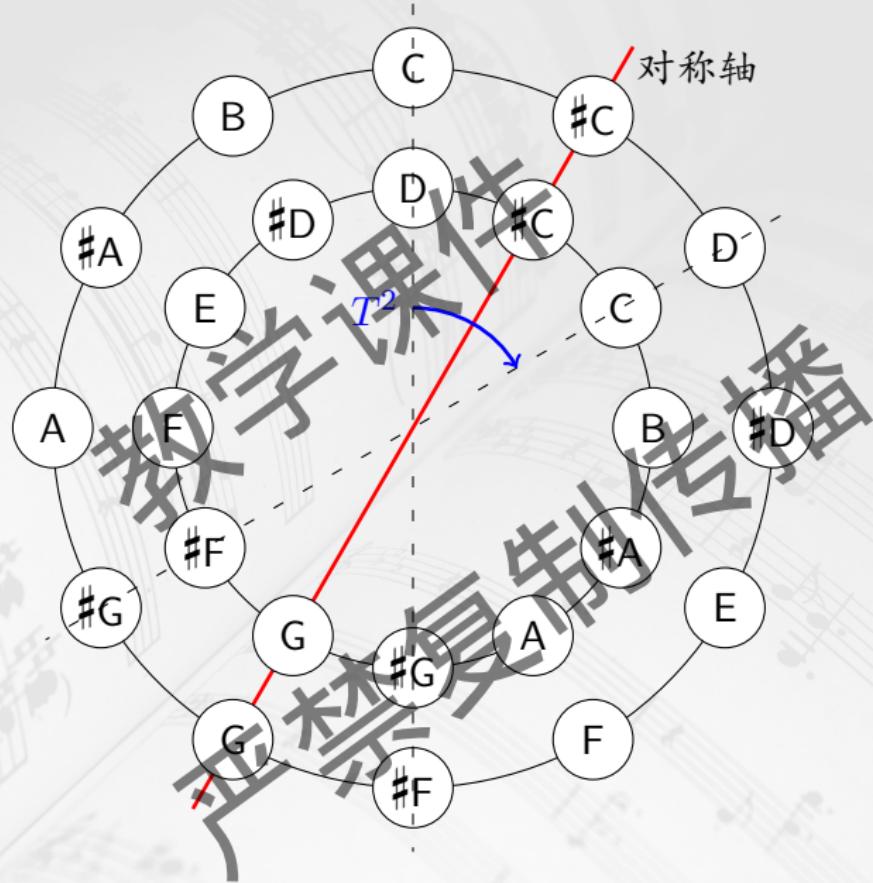
同样都是音类空间 \mathcal{PC} 到自身的变换, 倒影变换 I 与移调变换
 T 就可以做复合

$$T * I : x \mapsto 1 - x \pmod{12},$$

$$0 \leq x \leq 11.$$

对称轴





变换的乘法

倒影变换 I 与移调变换 T^2 的复合

数字课件
正襟冠制传播

$$T^2 * I : x \mapsto 2 - x \pmod{12},$$

$$0 \leq x \leq 11.$$

猜 想

i 很可能有?

对任意 $k = 0, 1, 2, \dots, 11$,

$$T^k * I: x \mapsto k - x \pmod{12},$$

$$0 \leq x \leq 11.$$

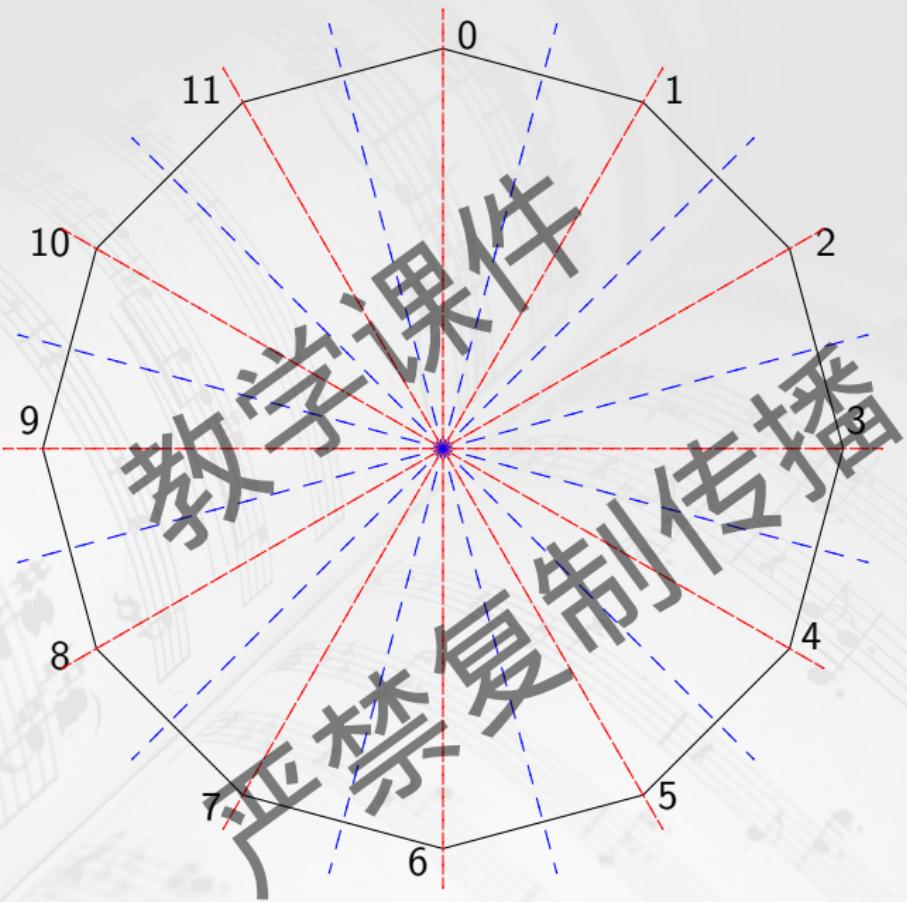
证明之!

更大的变换群

倒影变换 I 与移调变换 T^k ($0 \leq k \leq 11$) 复合就可以得到以任意一条水平直线为对称轴的对称.

由移调变换 T 和倒影变换 I 生成的群记作

$$\mathcal{D} = \langle I, T \rangle.$$



群同构

定理

音类空间 \mathcal{PC} 上由移调变换 T 和倒影变换 I 生成的变换群

$$\mathcal{D} = \langle T, I \rangle$$

同构于正 12 边形的变换群 (二面体群), 即有

$$\mathcal{D} \cong D_{24}$$

音乐变换群

如果再把逆行变换 R 也添进来，最终就得到一个更大的群

$$\mathcal{M} = \langle T, I, R \rangle.$$

可以证明，音乐变换群 \mathcal{M} 的阶

$$|\mathcal{M}| = 48.$$

作曲家用群论来作曲吗？

“群” (group) 的概念是何时形成的？

数学界一般都认可“群”的概念肇始于 Galois 关于方程代数解的工作。1829 年，年仅 18 岁的 Galois 首次将其关于方程代数解的论文提交给法国科学院 (Académie des Sciences)，但未被接受。后来 Galois 又向 Fourier 提交了论文的第二稿。Fourier 于 1830 年 5 月 16 日去世，Galois 的稿子也丢失了。

Évariste Galois

1811.10.25 – 1832.5.31

法国数学家





Siméon Denis Poisson

1781.6.21 – 1840.4.25

法国数学家、物理学家

Galois 的论文

1831 年 1 月 17 日, 应 Poisson 的邀请, Galois 再次向法国科学院提交了论文的第三稿. 但是 Poisson 未能理解 Galois 的工作, 退回了稿子, 建议 Galois 进一步完善其论证. 直到 1846 年, Galois 的文章才被 Liouville 出版.

1832 年 5 月 29 日 Galois 给

朋友 Auguste Chevalier 的信：

"Ask Jacobi or Gauss publicly to

give their opinion, not as to the

truth, but as to the importance

of these theorems. Later there

will be, I hope, some people who

will find it to their advantage to

decipher all this mess".

On vous voit rire - que l'on peut toujours transformer une intégrale
d'une certaine sorte de celle qu'il faut à la première et il n'est pas
pas le même sens - je, et ~~que~~ les deux autres restent la même.

Il se voit bien à ce sujet que les intégrales ont le pouvoir de donner
les mêmes à part d'un signe, et cette propriété qui a trouvée le
nom d'opposition entre les équations qui sont dans l'égalité, mais auquel de ces
de deux est désigné. Je vous en dirai plus tard.

Le tiers, nous devons regarder, que ces intégrales ne sont pas toutes qui sont
exprimées. ~~Il y a plusieurs~~ des principaux méthodes qui sont toutes
étant dirigées vers l'application à l'analyse harmonique. Il y a trois :
l'analytique. Il suffisant de voir à propos des fonctions entières ou de la
ou quelques fonctions harmoniques quelle intégrale ou pourtant quelle
quelle quantité a pourtant addition deux quantités données. Cela a été fait
par une variété de personnes. Cela fait immédiatement que l'intégration
d'expression qui l'on trouve dans les deux premiers cas de l'analyse, que nous
devons faire pour faire avec les intégrales de la troisième quantité
harmonique.

Je vous dis, sans être obligé de me déguiser, que
ce que j'ai écrit à ce sujet n'est pas tout à fait exact mais au moins assez
exact, jusqu'à ce que je ne puisse pas me rappeler pour quelle
de ces personnes. Cela suffit pour montrer que l'analyse peut être étendue
en dehors.

La ~~quatrième~~ quatrième, parfaitement faite de plusieurs de deux harmoniques
qui sont les deux, mais pas l'application de l'analyse.

Vous allez à la tombe, j'espère, de gens qui connaissent les propriétés
et développées telles que je garde.

Je finirai une édition de Galois le 29 Mai 1832.
Fait à Paris.



Joseph Liouville

1809.3.24 – 1882.9.8

法国数学家



Augustin-Louis Cauchy

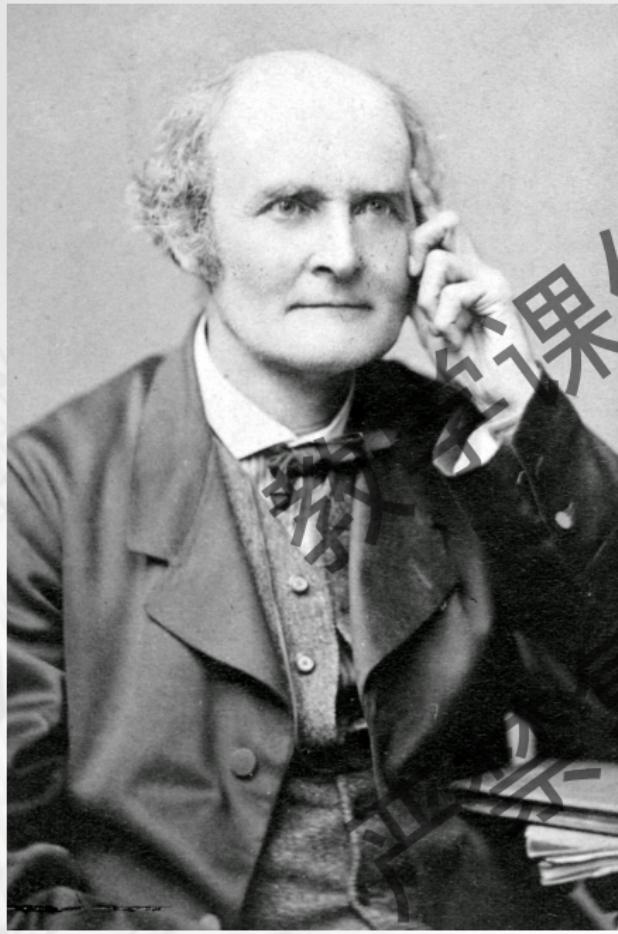
1789.8.21 – 1857.5.23

法国数学家

1845 年, Cauchy 给出了“群”的一个定义, 但是他把群称为“替换的共轭系” (conjugate system of substitutions). 直到 1854 年, 群的抽象定义才最先出现在 Cayley 的论文

On the theory of groups, as depending on the symbolic equation
 $\theta^n = 1$, *Philosophical Magazine, 4th Series, 7 (42)* (1854), 40–47.

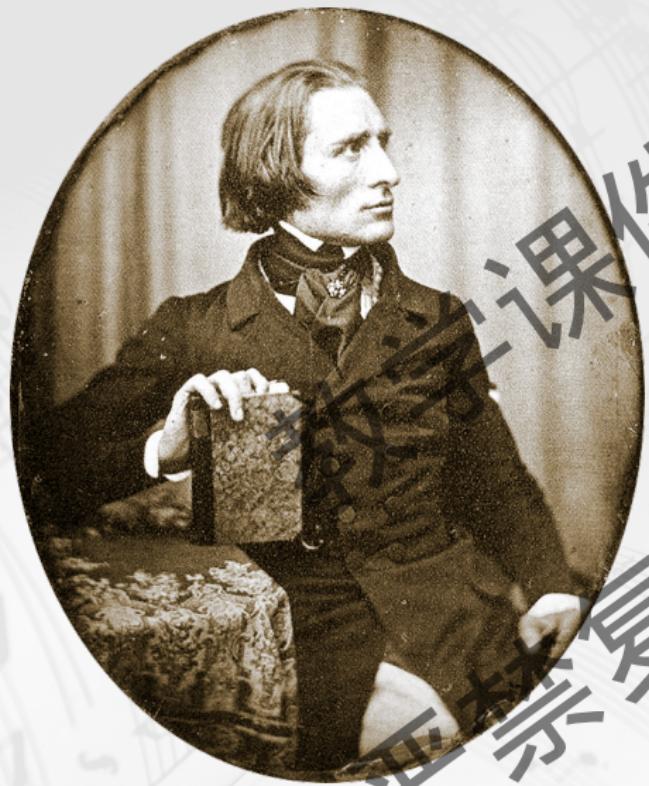
由此可见, 群的概念逐步形成并被人们广泛接受, 应不早于十九世纪五十年代. 在此之前的音乐家应该不会知道群论.



Arthur Cayley

1821.8.16 – 1895.1.26

英国数学家



李斯特

Franz Liszt

1811.10.22 – 1886.7.31

匈牙利作曲家，钢琴大师

匈牙利狂想曲第二号

Hungarian Rhapsody # 2

stringendo

8

f

I II III IV V VI VII

p

I II III IV V VI VII

V

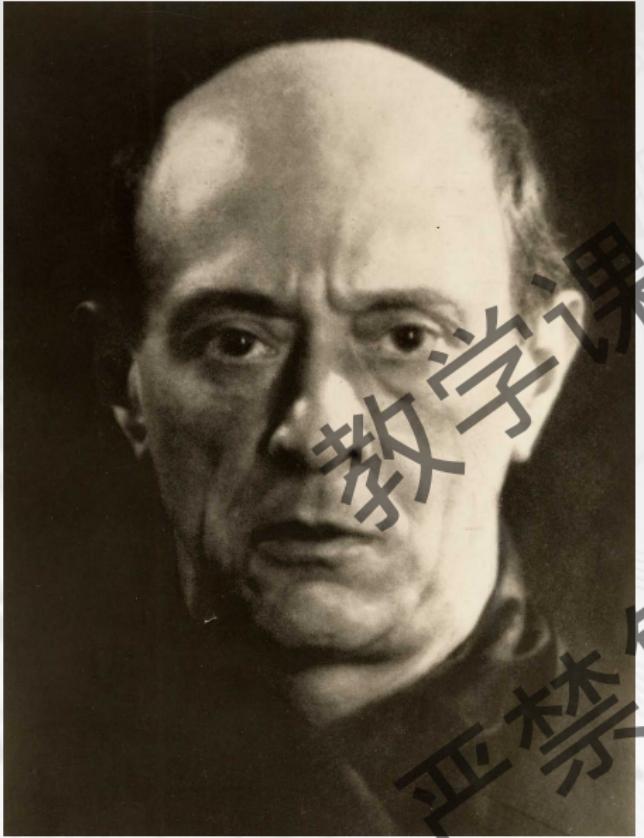
V

每个音符生而平等

传统的音乐大多属于调性音乐 (tonal music), 其中不同音级的地位和作用是不同的. 调性音乐中总有一个主音 (**tonic**). 其他的音与主音之间形成一定的关系, 例如主从关系、稳定非稳定关系等等. 人们在欣赏音乐的时候是可以感受到这些关系的. 然而也正是由于这种关系的存在, 使得严格的移调和倒影变换在调性音乐中使用时往往受到限制.

十二音技术

从 1908 年开始，奥地利作曲家勋伯格在其音乐创作中逐步建立和发展了十二音技术 (**twelve-tone technique**)，以期打破传统调性音乐对作曲家自由发挥的桎梏。



Arnold Schönberg (1874.9.13 – 1951.7.13), 犹太裔奥地利作曲家、音乐理论家、音乐教育家，第二维也纳学派 (The Second Vienna School) 的创立者和领导者。20世纪30年代，由于其犹太人身份，其作品被纳粹判定为“颓废音乐”(Entartete Musik). 1934年移居美国。

十二音技术的出发点是 十二音序列 (twelve-tone series). 乐音体系中的所有音级依照八度关系被分成 12 个音类

$$\overline{C}, \overline{\#C} = \overline{\flat D}, \overline{D}, \overline{\#D} = \overline{\flat E}, \overline{E}, \overline{F}, \overline{\#F} = \overline{\flat G},$$

$$\overline{G}, \overline{\#G} = \overline{\flat A}, \overline{A}, \overline{\#A} = \overline{\flat B}, \overline{B}.$$

而一个 音列 (tone row) 就是这 12 个音类的一个排列.

勋伯格的钢琴协奏曲 (Concerto for piano and orchestra, Op. 42, 1942), 其基本音列为 (省略表示等价类的上划线)

$$\flat E, \flat B, D, \overline{F}, \overline{E}, \overline{C}, \overline{\#F}, \overline{\flat A}, \overline{\flat D}, \overline{A}, \overline{B}, \overline{G}.$$

钢琴协奏曲

以音列中的第一个音类为起点, 令其对应于 \mathbb{Z}_{12} 中的 $\bar{0}$. 即 $\flat E$ 对应 $\bar{0}$, E 对应 $\bar{1}$, F 对应 $\bar{2}$, ..., $\sharp C$ 对应 $\bar{10}$, D 对应 $\bar{11}$.

同样省略表示同余类的上划线, 就得到音类与同余类之间的一个
1-1 对应关系

$\flat E$	E	F	$\sharp F$	G	$\sharp G$	A	$\sharp A$	B	C	$\sharp C$	D
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

钢琴协奏曲

于是一个音列(音类的排列)就可以表示成 $\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{11}\}$

中元素的一个排列. 勋伯格钢琴协奏曲的基本音列

$\flat E, \flat B, D, F, E, C, \sharp F, \flat A, \flat D, A, B, G$

就可以写成

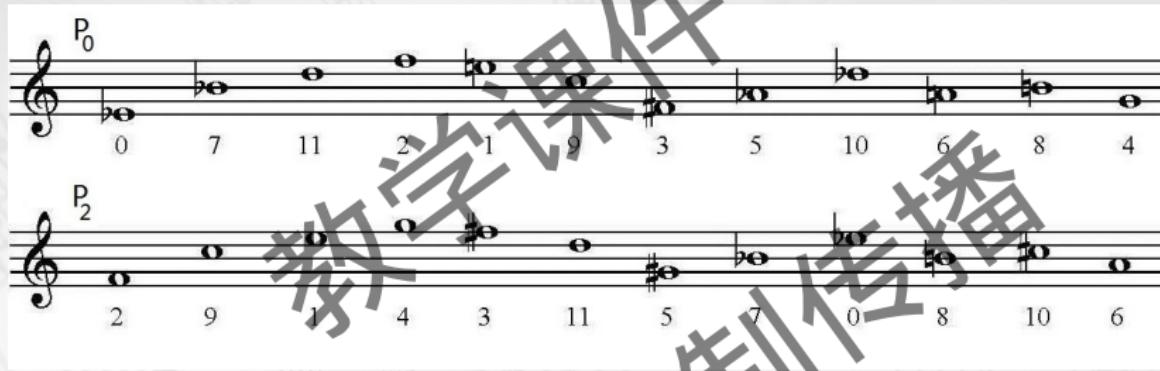
0, 7, 11, 2, 1, 9, 3, 5, 10, 6, 8, 4

十二音技术

给定一个音列，可以对其进行各种变换，得到一系列新的音列。作为出发点的这个音列称作 **初始音列 (primary tone row)**，记作 P_0 。对其进行移调变换，上升 n 个半音，就得到一个新的 移调音列，记作 P_n 。例如

$P_0 =$	$\flat E$	$\flat B$	D	F	E	C	$\sharp F$	$\flat A$	$\flat D$	A	B	G
$=$	0	7	11	2	1	9	3	5	10	6	8	4
$P_2 =$	2	9	1	4	3	11	5	7	0	8	10	6
$=$	F	C	E	G	$\sharp F$	D	$\sharp G$	$\flat B$	$\flat E$	B	$\sharp C$	A

十二音技术



因为移调变换是作用在音类上的, 所以共有 12 个移调音列, 即
 P_0, P_1, \dots, P_{11} .

十二音技术

对 P_n 做关于其第一个音类的倒影变换，得到一个 倒影音列，记作 I_n . 例如对 P_0 做倒影变换，保持其第一个音类 $\flat E=0$ 不变，相当于对音列中每一项做变换 $x \mapsto -x \pmod{12}$ ，于是得到

$I_0 =$	0	5	1	10	11	3	9	7	2	6	4	8
=	$\flat E$	$\flat A$	E	$\flat D$	D	$\sharp F$	C	$\flat B$	F	A	G	B



十二音技术

又如对 P_2 做倒影变换, 保持其第一个音类 $F (= 2)$ 不变, 相当于对音列中每一项做变换 $x \mapsto 4 - x \pmod{12}$, 于是得到

$I_2 =$	2	7	3	0	1	5	11	9	4	8	6	10
=	F	#A	#F	#D	E	#G	D	C	G	B	A	#C

A musical staff with 13 positions, numbered 2 through 10 below the staff. The notes are: 2 (open circle), 7 (filled circle), 3 (filled circle), 0 (open circle), 1 (open circle), 5 (filled circle), 11 (open circle), 9 (open circle), 4 (filled circle), 8 (open circle), 6 (filled circle), A (open circle), and 10 (filled circle). The staff has four ledger lines extending downwards from the 0 position.

十二音技术

对 P_n 做逆行变换，得到一个逆行音列 R_n . 例如

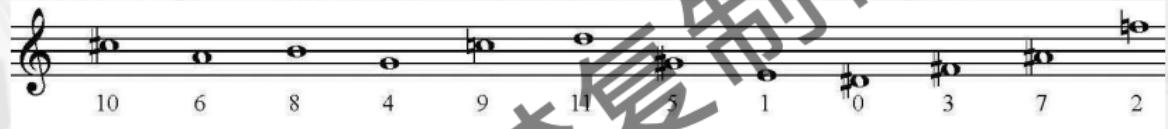
R_2 : A, \sharp C, B, \flat E, \flat B, \sharp G, D, \sharp F, G, E, C, F.



十二音技术

对 I_n 做逆行变换, 就得到 逆行倒影音列 RI_n . 例如

RI_2 : #C, A, B, G, C, D, #G, E, #D, #F, #A, F.



十二音技术

可见从初始音列 P_0 出发，通过移调、倒影、逆行和逆行倒影变换，可以得到 48 个音列

$$\begin{aligned} & P_0, P_1, \dots, P_{11}, \quad I_0, I_1, \dots, I_{11}, \\ & R_0, R_1, \dots, R_{11}, \quad RI_0, RI_1, \dots, RI_{11}. \end{aligned}$$

这 48 个音列组成一个 音列矩阵 (**tone row matrix**). 它是一个 12×12 的方阵. 其第一行为初始音列 P_0 , 第一列为初始音列的倒影 I_0 .

	I_0	I_7	I_{11}	I_2	I_1	I_9	I_3	I_5	I_{10}	I_6	I_8	I_4
P_0	bE	#A	D	F	E	C	#F	#G	#C	A	B	G
P_5	#G	bE	G	#A	A	F	B	#C	#F	D	E	C
P_1	E	B	bE	#F	F	#C	G	A	D	#A	C	#G
P_{10}	#C	#G	C	bE	D	#A	E	#F	B	G	A	F
P_{11}	D	A	#C	E	bE	B	F	G	C	#G	#A	#F
P_3	#F	#C	F	#G	G	bE	A	B	E	C	D	#A
P_9	C	G	B	D	#C	A	bE	F	#A	#F	#G	E
P_7	#A	F	A	C	B	G	#C	bE	#G	E	#F	D
P_2	F	C	E	G	#F	D	#G	#A	bE	B	#C	A
P_6	A	E	#G	B	#A	#F	C	D	G	bE	F	#C
P_4	G	D	#F	A	#G	E	#A	C	F	#C	bE	B
P_8	B	#F	#A	#C	C	#G	D	E	A	F	G	bE
	RI_0	RI_7	RI_{11}	RI_2	RI_1	RI_9	RI_3	RI_5	RI_{10}	RI_6	RI_8	RI_4

	I_0	I_7	I_{11}	I_2	I_1	I_9	I_3	I_5	I_{10}	I_6	I_8	I_4	
P_0	0	7	11	2	1	9	3	5	10	6	8	4	R_0
P_5	5												R_5
P_1	1												R_1
P_{10}	10												R_{10}
P_{11}	11												R_{11}
P_3	3												R_3
P_9	9												R_9
P_7	7												R_7
P_2	2												R_2
P_6	6												R_6
P_4	4												R_4
P_8	8												R_8
	RI_0	RI_7	RI_{11}	RI_2	RI_1	RI_9	RI_3	RI_5	RI_{10}	RI_6	RI_8	RI_4	

	I_0	I_7	I_{11}	I_2	I_1	I_9	I_3	I_5	I_{10}	I_6	I_8	I_4	
P_0	0	7	11	2	1	9	3	5	10	6	8	4	R_0
P_5	5	0	4	7	6	2	8	10	3	11	1	9	R_5
P_1	1												R_1
P_{10}	10												R_{10}
P_{11}	11												R_{11}
P_3	3												R_3
P_9	9												R_9
P_7	7												R_7
P_2	2												R_2
P_6	6												R_6
P_4	4												R_4
P_8	8												R_8
	RI_0	RI_7	RI_{11}	RI_2	RI_1	RI_9	RI_3	RI_5	RI_{10}	RI_6	RI_8	RI_4	

	I_0	I_7	I_{11}	I_2	I_1	I_9	I_3	I_5	I_{10}	I_6	I_8	I_4	
P_0	0	7	11	2	1	9	3	5	10	6	8	4	R_0
P_5	5	0	4	7	6	2	8	10	3	11	1	9	R_5
P_1	1	8	0	3	2	10	4	6	11	7	9	5	R_1
P_{10}	10												R_{10}
P_{11}	11												R_{11}
P_3	3												R_3
P_9	9												R_9
P_7	7												R_7
P_2	2												R_2
P_6	6												R_6
P_4	4												R_4
P_8	8												R_8
	RI_0	RI_7	RI_{11}	RI_2	RI_1	RI_9	RI_3	RI_5	RI_{10}	RI_6	RI_8	RI_4	

	I_0	I_7	I_{11}	I_2	I_1	I_9	I_3	I_5	I_{10}	I_6	I_8	I_4	
P_0	0	7	11	2	1	9	3	5	10	6	8	4	R_0
P_5	5	0	4	7	6	2	8	10	3	11	1	9	R_5
P_1	1	8	0	3	2	10	4	6	11	7	9	5	R_1
P_{10}	10	5	9	0	11	7	1	3	8	4	6	2	R_{10}
P_{11}	11	6	10	1	0	8	2	4	9	5	7	3	R_{11}
P_3	3	10	2	5	4	0	6	8	1	9	11	7	R_3
P_9	9	4	8	11	10	6	0	2	7	3	5	1	R_9
P_7	7	2	6	9	8	4	10	0	5	1	3	11	R_7
P_2	2	9	1	4	3	11	5	7	0	8	10	6	R_2
P_6	6	1	5	8	7	3	9	11	4	0	2	10	R_6
P_4	4	11	3	6	5	1	7	9	2	10	0	8	R_4
P_8	8	3	7	10	9	5	11	1	6	2	4	0	R_8
	RI_0	RI_7	RI_{11}	RI_2	RI_1	RI_9	RI_3	RI_5	RI_{10}	RI_6	RI_8	RI_4	

钢琴组曲 (Suite für Klavier, Op. 25, 1921 – 1923)

这是勋伯格的第一部完全用 12 音技术谱写的作品。在前奏曲 (*Präludium*) 一开始处，勋伯格就在右手部分给出了初始音列 P_0 :

E	F	G	\flat D	\flat G	\flat E	\flat A	D	B	C	A	\flat B
0	1	3	9	2	11	4	10	7	8	5	6

而左手部分弹奏的是移调音列 P_6 ，并且把音列的 5 – 8 项与 9 – 12 项并行呈现。

钢琴组曲 (Suite für Klavier, Op. 25, 1921 – 1923)



需要指出的是，音列中的元素代表的是音类，在乐曲中具体使用该音类中哪个八度的音符是由作曲家自由决定的。

钢琴组曲 (Suite für Klavier, Op. 25, 1921 – 1923)

全曲中只使用了 P_0 , P_6 , I_6 , I_0 , R_6 和 RI_6 六个音列: 

▶ 巴赫动机



The image shows four staves of musical notation on a staff system. Each staff consists of five horizontal lines. The notes are represented by circles with stems, some with accidentals like flats or naturals. The sets are:

- P_0 : 0, 1, 3, 9, 2, 11, 4, 10, 7, 8, 5, 6
- P_6 : 0, 11, 9, 3, 10, 1, 8, 2, 5, 4, 7, 6
- I_6 : 6, 7, 9, 3, 8, 5, 10, 4, 1, 2, 11, 0
- I_0 : 6, 5, 3, 9, 4, 7, 2, 8, 11, 10, 1, 0
- R_6 : 6, 5, 3, 9, 4, 7, 2, 8, 11, 10, 1, 0
- RI_6 : 6, 7, 9, 3, 8, 5, 10, 4, 1, 2, 11, 0

进一步的阅读书目

George Perle, *Serial composition and atonality: An introduction to the music of Schoenberg, Berg, and Webern* (6th, revised edition), University of California Press, Berkeley, 1991.

第四版中译本：《序列音乐写作与无调性—勋伯格、贝尔格与韦伯恩音乐介绍》，罗忠镕译，中央音乐学院出版社，北京，2006.

郑英烈，《序列音乐写作教程》(第二版)，上海音乐出版社，上海，2007.

有多少互不相同的音列?

从一个初始音列出发可以得到 48 个不同的音列. 但是这 48 个音列中可能有相等的, 因此实际得到的互不相同的音列可能少于 48 个.

例. 设 P_0 是一个全半音音阶 (chromatic scale)

$P_0 =$	F	#F	G	#G	A	#A	B	C	#C	D	#D	E
=	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

有多少互不相同的音列?

于是有

$$I_0 = 0, 11, 10, \dots, 2, 1 = R_1,$$

是一个下行的全半音音阶, 由此可得

$$I_1 = R_2, I_2 = R_3, \dots, I_{10} = R_{11}, I_{11} = R_0.$$

再对上式用逆行变换, 得到

$$RI_0 = P_1, RI_1 = P_2, \dots, RI_{10} = P_{11}, RI_{11} = P_0.$$

因此, 从初始音列 P_0 出发, 恰得到 24 个互异的音列, 其中 12 个是上行的全半音音阶, 12 个是下行的全半音音阶.

有多少互不相同的音列?

设

$$P_0 = 0, a_1, a_2, \dots, a_{11},$$

其中 a_1, a_2, \dots, a_{11} 是 $1, 2, \dots, 11$ 的一个排列. 直接验证可得,

对于 $0 \leq n \leq 11$,

$$P_n = n, a_1 + n, a_2 + n, \dots, a_{11} + n, \quad (2)$$

$$I_n = n, n - a_1, n - a_2, \dots, n - a_{11}.$$

注意其中的加法是模 12 的.

有多少互不相同的音列?

容易看出, P_0, P_1, \dots, P_{11} 互不相同, 从而其倒影 I_0, I_1, \dots, I_{11} 也互不相同.

如果对某个 $0 \leq k \leq 11$ 有 $I_k = P_n$, 则可由 (2) 式推出 $k = n$, 进而得出

$$n - a_1 = a_1 + n, \quad n - a_2 = a_2 + n, \quad \dots, \quad n - a_{11} = a_{11} + n,$$

但这导致一个矛盾:

$$a_1 = -a_1, \quad a_2 = -a_2, \quad \dots \quad a_{11} = -a_{11}.$$

这就证明了 P_0, \dots, P_{11} 与 I_0, \dots, I_{11} 这 24 个音列是互不相同

有多少互不相同的音列?

定理 A

给定音列

$$P_0 = 0, a_1, a_2, \dots, a_{10}, a_{11}$$

存在 $k: 1 \leq k \leq 11$, 使得 $I_k = R_0$ 的充要条件是

$$0 + a_{11} = a_1 + a_{10} = a_2 + a_9 = \dots = a_5 + a_6 = k \pmod{12}.$$

有多少互不相同的音列?

对音列 $I_k = R_0$ 做逆行变换, 就得到 $RI_k = P_0$. 因此, 上述定理给出了 $P_0 = RI_k$ 的充分必要条件.

习题. 证明: 上述定理中的 k 必为奇数.

有多少互不相同的音列?

满足定理 A 条件的音列有多少?

音列的第一项显然可以取 12 个音类中的任意一个, 故有 12 种取法. 第一项取定之后, 最后一项 a_{11} 要满足 $0 + a_{11} = k$, 只能有 6 种取法.

第二项 a_1 可以从剩下的 10 个音类中任取, 它取定后倒数第二项 a_{10} 也就确定了. 以此类推, 可知满足定理 A 条件的音列共有

$$12 \times 6 \times (10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2) = 276,480 \text{ 个.}$$

勋伯格完成于 1923 年 4 月 14 日的《小夜曲》(Serenade, Op. 24) 的第五乐章“舞蹈场景”(Tanzscene) 采用的初始音列为

$P_0 =$	A	\flat B	C	\sharp D	E	\sharp F	F	G	\flat A	\sharp B	\sharp C	\sharp D
$=$	0	1	3	6	7	9	8	10	11	2	4	5

容易看出这个音列满足上述定理的条件

$$0+a_{11} = a_1+a_{10} = a_2+a_9 = a_3+a_8 = a_4+a_7 = a_5+a_6 = 5 \pmod{12}$$

因此有 $I_5 = R_0$.

TANZSCENE

Sehr lebhaft $\text{d} = 152-160$

Kl 1 3 5 7 9 11
 Bkl 2 4 6 8 10 12
 Md 3 5 7 9 11 13
 Gt 2 4 6 8 10 12
 Gg 3 5 7 9 11 13
 Br 3 5 7 9 11 13
 Vcl 2 4 6 8 10 12

Kl 1 3 5 7 9 11 13 15 17
 Bkl 2 4 6 8 10 12 14 16 18
 Md 3 5 7 9 11 13 15 17 19
 Gt 2 4 6 8 10 12 14 16 18
 am French pizz.
 Gg 3 5 7 9 11 13 15 17 19
 Br 3 5 7 9 11 13 15 17 19
 Vcl 2 4 6 8 10 12 14 16 18

Kl 12 13 14 15 16
 Bkl 13 14 15 16
 Md 12 13 14 15 16
 Gt 12 13 14 15 16
 Gg 12 13 14 15 16
 Br 12 13 14 15 16
 Vcl 12 13 14 15 16

有多少互不相同的音列？

由于移调音列 P_i 与倒影音列 I_j 是互异的，因此要讨论从 P_0 出发，何时会得到少于 48 个互异音列，就只需要再讨论 $P_0 = R_k$ 的情形。

定理 B

给定音列

$$P_0 = 0, a_1, a_2, \dots, a_{10}, a_{11}.$$

存在 $k: 1 \leq k \leq 11$, 使得 $P_0 = R_k$ 的充分必要条件是 $k = 6$, 且有

$$a_6 = a_5 + 6$$

$$a_7 = a_4 + 6$$

$$\dots \dots \quad (\text{mod } 12).$$

$$a_{10} = a_1 + 6$$

$$a_{11} = 6$$

有多少互不相同的音列?

满足定理 B 条件的音列有多少?

音列的第一项显然可以取 12 个音类中的任意一个, 故有 12 种取法. 第一项取定之后, 哪一个音类对应 $a_{11} \in \mathbb{Z}_{12}$ 就确定了, 故最后一项 a_{11} 只有 1 种取法.

第二项 a_1 可以从剩下的 10 个音类中任取, 它取定后倒数第二项 a_{10} 也就确定了. 以此类推, 可知满足定理 B 条件的音列共有

$$12 \times (10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2) = 46,080 \text{ 个.}$$

有多少互不相同的音列？

要计算有多少互不相同的音列，就要严格定义什么时候两个音列是“相同”的，什么时候是“不同”的。

记全体音列构成的集合为 \mathbb{T} ：

$$\mathbb{T} = \{ \text{全体音列} \}.$$

因为全体音列可以与 $0, 1, \dots, 11$ 的全体排列成 1-1 对应关系，所以有

$$|\mathbb{T}| = 12! = 479001600.$$

有多少互不相同的音列?

在 \mathbb{T} 中的音列之间定义一个二元关系 \sim :

任意给定两个音列 $X, Y \in \mathbb{T}$, $X \sim Y$ 当且仅当音列 Y 出现在以 X 为初始音列的音列矩阵中.

换言之, $X \sim Y$ 的充分必要条件是: Y 等于从初始音列 $P_0 = X$ 导出的某个移调音列 P_n , 倒影音列 I_n , 逆行音列 R_n 或者逆行倒影音列 RI_n .

习题. 证明 \sim 是集合 \mathbb{T} 上的一个等价关系.

有多少互不相同的音列?

定 义

两个音列 $X, Y \in \mathbb{T}$ 称为是 不同的, 如果它们分别属于 \mathbb{T} 中不同的等价类.

计算不同音列的数目就是要计算 \mathbb{T} 中等价类的数目.

有多少互不相同的音列?

定理

共有 9,985,920 个音列的等价类

证明:

$$276480 + 46080 = 322560,$$

$$\frac{12! - 322560}{48} + \frac{322560}{24} = 9985920.$$

有多少互不相同的音列?

定理 A 和 B 中给出的条件本质上都是刻画了音列的某种对称性.
而具有这种对称性的音列是非常稀少的.

$$\frac{322560}{12!} = \frac{1}{1485} \approx 0.0006734,$$

即不到万分之七!

十二音技术

勋伯格自己曾说过：

People accuse me of being a mathematician, but I am not a
mathematician, I am a geometer.

数学课件
严禁复制传播

十二音技术

法国音乐学家 Roland de Candé (1986):

The 12-tone music was condemned by the Nazis (and forbidden in the occupied Europe) because its author was a Jew; by the Stalinists for having a bourgeois cosmopolitan formalism; by the public for being different from everything else.

十二音技术

美国作曲家约翰·亚当斯（John Coolidge Adams, 1947.2.15 – , 三幕歌剧《尼克松在中国》(Nixon in China, 1987) 的作者）曾经指出：

Something tremendously powerful was lost when composers moved away from tonal harmony and regular pulses . . . among other things the audience was lost.

于润洋

1932.7.17 – 2015.9.23

音乐学家



现代音乐的社会功能

人们在聆听勋伯格的音乐时，绝不是使自己沉浸 在一种娱乐和享受之中。这里没有愉悦可言，相反，音乐给聆听者以惊愕，随之而产生一种精神震撼，在这一瞬间人与音乐融合在一起，主体意识到自身的力量和存在，自觉、清醒、而且充实。对这样的音乐，不仅需要感官的感受，而且需要理性去领悟和理解，需要哲学的反思。

于润洋：《现代西方音乐哲学导论》，人民音乐出版社，
北京，2012，p. 367 – 368