

音乐与数学

Music and Mathematics

王 杰

北京大学数学科学学院

2017 – 2018 学年 • 第一学期

音乐与数学

音乐与数学之间有什么关系？先请大家看一段视频—电影《2001太空漫游》（1968）的片头。请注意听所配的音乐。



[德] 理查德·施特劳斯 (Richard Georg

Strauss, 1864.6.11 - 1949.9.8) 的交响诗:《查拉图斯特拉如是

说》(Also sprach Zarathustra,

Op. 30, 1896). 全曲

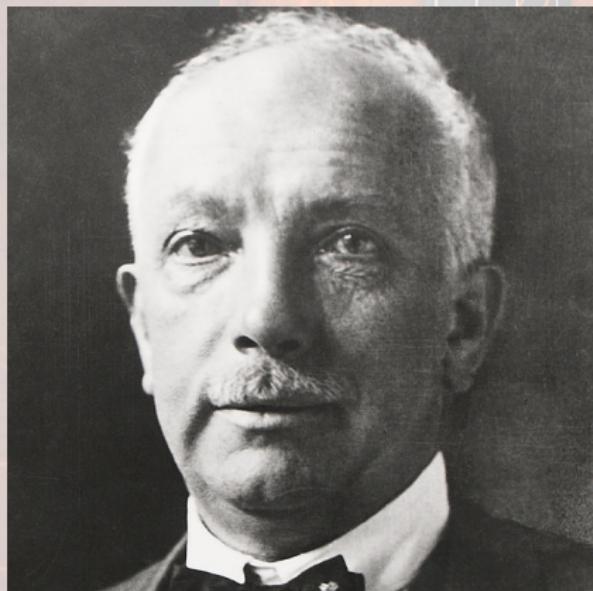
分为九段: “日出”、“隐居

人”、“极度的渴望”、“欢

乐与热情”、“死亡之歌”、

“科学”、“康复”、“舞

之歌”和“夜游者之歌”。 



音乐与数学

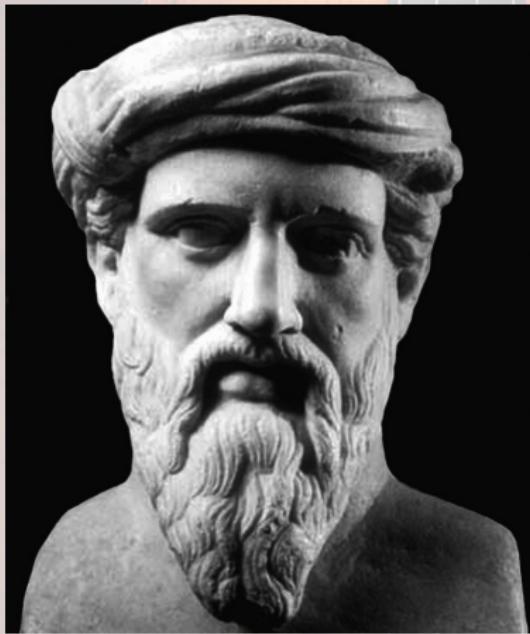
在乐曲中可以清楚地听到由小号吹奏出的主旋律：



首先是一个纯五度音程 C — G

然后是一个纯四度音程 G — C', 其中 C' 代表高八度的 C.

古希腊学者毕达哥拉斯认为“万物皆数”。数与几何图形、与音乐的和谐、与天体的运行都有密切关系。音乐不过是数的应用，是从属于数学的学科，因为宇宙和谐的基础是完美的数的比例。最和谐的音程为：同度（1:1）、八度（2:1）、纯五度（3:2）和纯四度（4:3）。



Pythagoras of Samos

公元前约570 — 约495

毕达哥拉斯的“四艺 (quadrivium)”

Proclus: The Pythagoreans considered all mathematical science to be divided into four parts: one half they marked off as concerned with *quantity*, the other half with *magnitude*; and each of these they posited as twofold. A quantity can be considered in regard to its character *by itself* or *in its relation to another quantity*, magnitudes as either *stationary* or *in motion*. Arithmetic, then, studies quantity as such, music the relations between quantities, geometry magnitude at rest, spherics magnitude inherently moving.

中国的六艺

《周礼·保氏》：礼、乐、射、御、书、数。

其中的乐指“六乐”：《云门大卷》《大咸》《大韶》《大夏》
《大濩(hù)》《大武》六套乐舞。

20世纪80年代开始发掘的河南省舞阳县贾湖新石器时代遗址的墓葬群中，先后发现了数十支骨笛。这些骨笛大多为7孔，可以吹奏出完整的六声和七声音阶。经过碳-14测定和树轮校正，



骨笛的年代约为公元前7000~5800。特别地，“不少骨笛的音孔旁尚存钻孔时设计音孔位置的横线刻记。可以看出，开孔前的刻线显然是根据某种特定的比例关系计算好了的”。

童忠良：中国音乐学，1992（3）：43—51

九九八十一以為宮

三分去一五十四以為徵

三分益一七十二以為商

三分去一四十八以為羽

三分益一六十四以為角

黃鍾長八寸七分一宮

大呂長七寸五分三分一

太簇長七寸七分二角

夾鍾長六寸一分三分一

姑洗長六寸七分四羽

仲呂長五寸九分三分二徵

蕤賓長五寸六分三分一

林鍾長五寸七分四角

夷則長五寸四分三分二商

南呂長四寸七分八徵

《史記卷二十五·律書第三》中的一頁，描述了用“三分損益”法得到

宮商角(jué)徵(zhǐ)羽

“五音”以 及“黃 鍾”、“大呂”等十二律的尺寸



Gottfried Wilhelm
Leibniz

1646.7.1 – 1716.11.14

德国数学家、哲学家、
科学家和历史学家

音乐与数学

1712 年 4 月 17 日，莱布尼茨在给普鲁士数学家哥德巴赫 (Christian Goldbach, 1690.3.18 – 1764.11.20) 的信中写道：

The pleasure we obtain from music comes from counting, but counting unconsciously. Music is nothing but unconscious arithmetic.

James Joseph Sylvester

1814.9.3 - 1897.3.15

英国数学家



音乐与数学

英国数学家西尔维斯特说过：

May not Music be described as the Mathematic of sense,
Mathematics as the Music of reason? The soul of each the same!

J. J. Sylvester, Algebraical researches, containing a disquisition on
Newton's rule for the discovery of imaginary roots, *Philosophical
Transactions of the Royal Society*, Vol. 154 (1864), 579 - 666.



Music is the arithmetic of
sounds as optics is the
geometry of light.

Claude-Achille Debussy

1862.8.22 – 1918.3.25

法国印象主义作曲家



Igor Fyodorovich Stravinsky (1882.6.17 – 1971.4.6), 俄罗斯作曲

家、钢琴家、指挥

音乐与数学

俄罗斯作曲家斯特拉文斯基在回答“Do you regard musical form as in some degree mathematical?”的问题时说过：

It is, at any rate, far closer to mathematics than to literature – not perhaps to mathematics itself, but certainly to something like mathematical thinking and mathematical relationships.

Conversations with Igor Stravinsky, Doubleday & Company, Inc., New York, 1959, p. 17

音乐与数学

- 本课程通过介绍音乐和数学中的一些理论和实际例子，展示二者之间内在的相互关系，探讨音乐这门抽象的艺术与数学和自然科学之间的互动。
- 希望帮助同学打通文理界限，提高艺术修养和分析能力，进而提升自己的综合素养。
- 不要求音乐或者数学方面的先修课程，而是会随着课程的进行陆续引入相关的基本概念。

音乐与数学

重点: 音乐 —— 介绍音乐基本知识, 乐律, 调式, 旋律, 节奏, 和声 (和弦)

数学 —— 介绍描述、分析、理解音乐的数学方法和工具, 例如模 12 的加法、几何模型、群论、组合计数、随机过程

音乐与数学 —— 了解两者之间的联系与互动, 比较其表达方式和内在发展逻辑、思想方法之异同, 提升欣赏和理解音乐的能力

成绩评定办法: 平时作业 20 分、期中论文 30 分、期末考试 (闭卷) 50 分

参考书籍

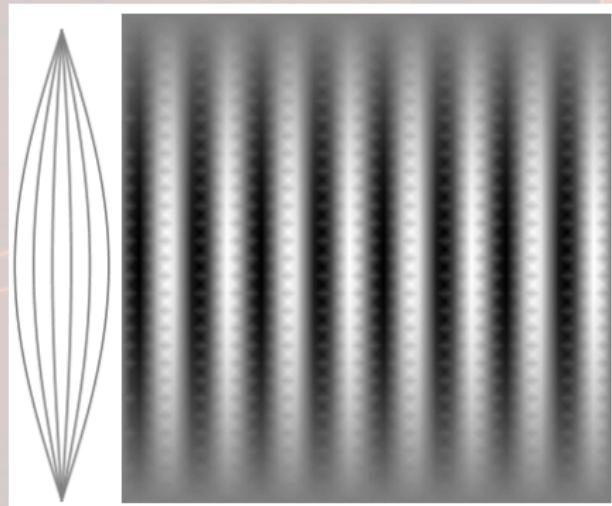
1. 基本乐理通用教材, 李重光, 高等教育出版社, 北京, 2004
2. 数学与音乐, 周明儒, 高等教育出版社, 北京, 2015
3. Music: A Mathematical Offering, David J. Benson, Cambridge University Press, Cambridge, 2007

参考书籍

4. Mathematics and Music, David Wright, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 2009
5. Godfried T. Toussaint, The geometry of musical rhythm, CRC Press, Boca Raton, 2013.
6. Gareth E. Roberts, From Music to Mathematics, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 2016

音乐基本知识

声音 (**sound**) 是音乐的载体, 它是由振动产生的. 物体振动引起周围空气的疏密变化, 形成声波. 声波是 **纵波** (**longitudinal wave**).



音乐基本知识

声音的物理属性主要有四个：

- ① 声音的高低是由 **振动频率** 决定的, 对应于音乐中的 **音高 (pitch)**;
- ② 声音的强弱是由 **空气压力** 决定的, 对应于音乐中的 **力度 (dynamics)**;
- ③ 声音持续的 **时间长度**, 对应于音乐中的 **时值 (duration)**;
- ④ 不同声音的特点是由其 **振动频谱** 决定的, 对应于音乐中的 **音色 (timbre)**.



Heinrich Rudolf Hertz

1857.2.22 – 1894.1.1

德国物理学家

频率—音高

通常人耳能够听见的声音，其振动频率范围为 20–20000 赫兹 (Hz)，即每秒振动 20 次–2 万次。

“音乐会音高” (concert pitch): 中央 C 上方的 A 定义为 440 Hz，即每秒振动 440 次。 (双簧管)

钢琴弹奏的 C 大调音阶：

C (262) D (294) E (330) F (349) G (392) A (440) B (494) C' (523)

Blaise Pascal

1623.6.19 – 1662.8.19

法国数学家、物理学
家、哲学家、作家



声压—力度

在国际单位制中，压力的单位是 帕斯卡 (**pascal, Pa**)，

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ kg/m} \cdot \text{s}^2.$$

人耳对于空气压力的感觉是非常灵敏的。当频率为 1 KHz 时，人耳的 听觉下限阈值 是 20 微帕

$$20 \mu\text{Pa} = 2 \times 10^{-5} \text{ Pa}.$$

声压一分贝

人耳对于声音强弱的感觉并不是线性的。在声学中，用 **声压水平** (**sound pressure level, SPL**) 来度量，定义为

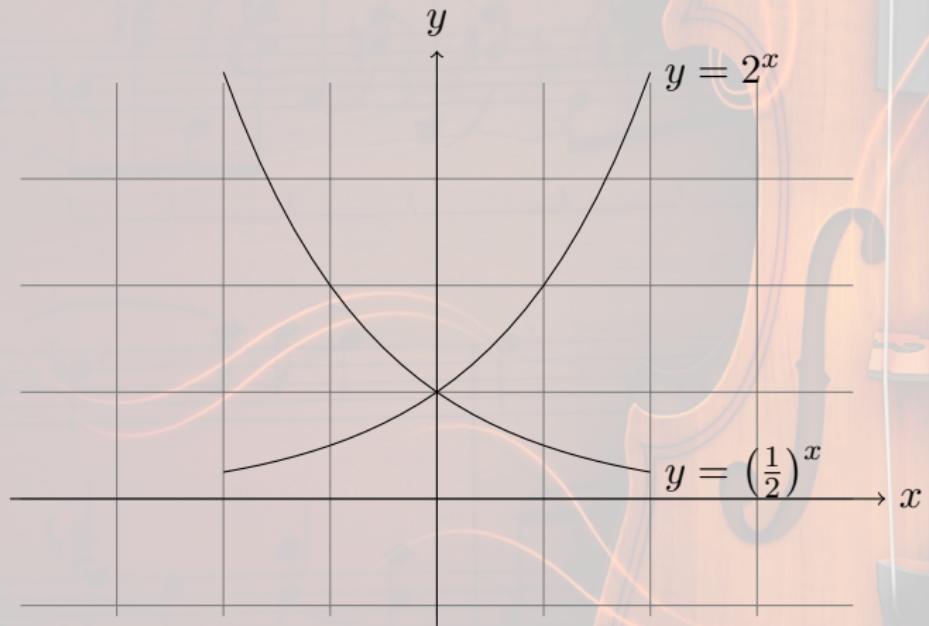
$$L_p = 20 \log_{10} \left(\frac{p}{p_0} \right),$$

其中 p_0 是听觉下限阈值 ($20 \mu Pa$)， p 是实际声压。这样定义的声压水平，其单位是 **分贝** (**decibel, dB**)。

场 景	距 离	分 贝
非常安静的房间	周 围	20 – 30
正常谈话	1 米	40 – 60
公共汽车	10米	60 – 80
油 锯	1米	110
小 号	0.5米	130
最 响 的 人 声	0.25米	135
痛 痛 阈 值	耳 边	130 – 140
喷 气 飞 机 引 擎	100米	110 – 140
7.62毫 米 口 径 步 枪	距 射 手 1 米	150 – 170

指数函数 (exponential function) $y = a^x$

其中的常数 $a > 0$, 且 $a \neq 1$, 称为指数函数的 底.



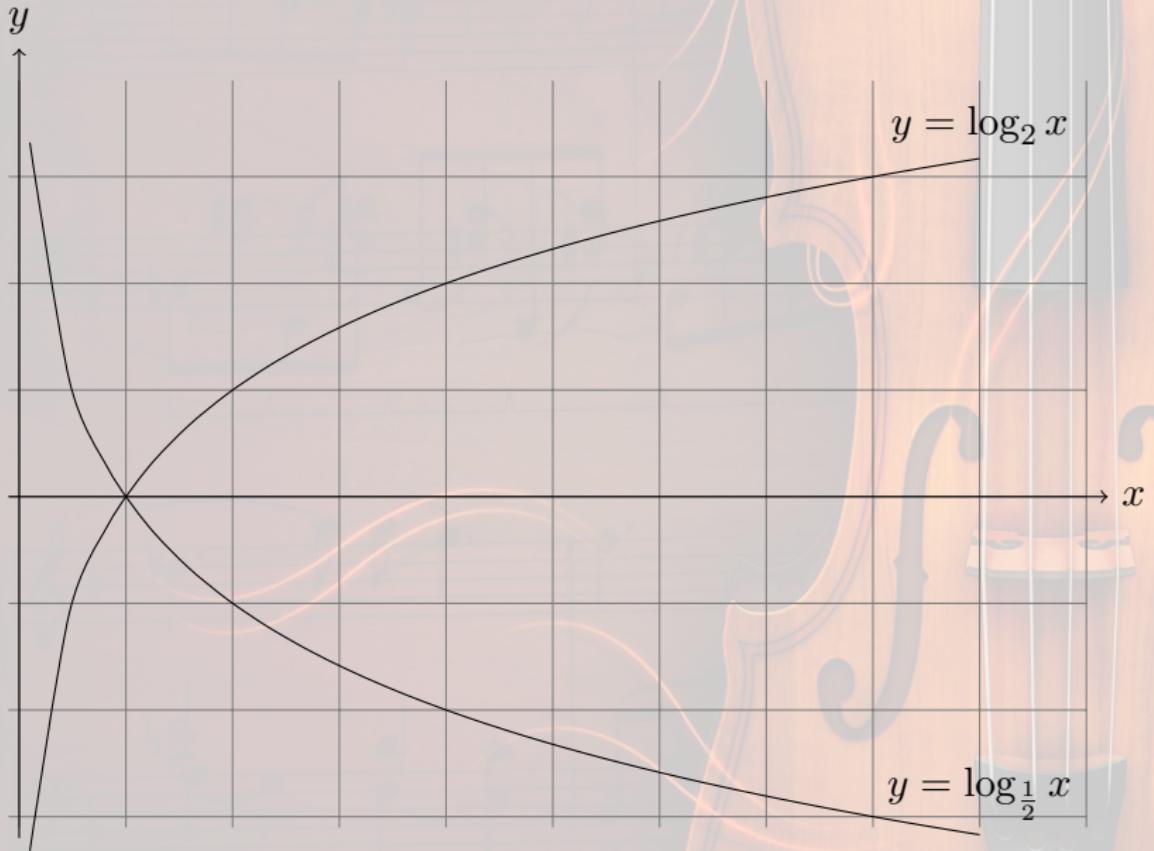
对数函数(logarithmic function)

对数函数是指数函数的反函数，如果 $y = a^x$ ，则称 x 为以 a 为底 y 的对数，记作

$$x = \log_a y,$$

其中 a 称为对数的 底数， y 称为 真数.

与指数函数一样，这里同样要求 $a > 0$ 且 $a \neq 1$.



对数函数的基本性质

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y,$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y.$$

假设常数 b 也满足 $b > 0, b \neq 1$, 则有对数函数的 换底公式:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

声压水平是声压比的对数函数

例：声压水平从 10 分贝变到 100 分贝，两者相差 10 倍。记 10 分贝时的声压为 p_1 , 100 分贝时的声压为 p_2 , $p_0 = 20 \mu Pa$, 则有

$$20 \log_{10} \left(\frac{p_1}{p_0} \right) = 10, \quad 20 \log_{10} \left(\frac{p_2}{p_0} \right) = 100.$$

根据对数的性质，我们有

$$\log_{10} p_2 - \log_{10} p_0 = 5, \quad \log_{10} p_1 - \log_{10} p_0 = 0.5,$$

声压水平是声压比的对数函数

由此得出

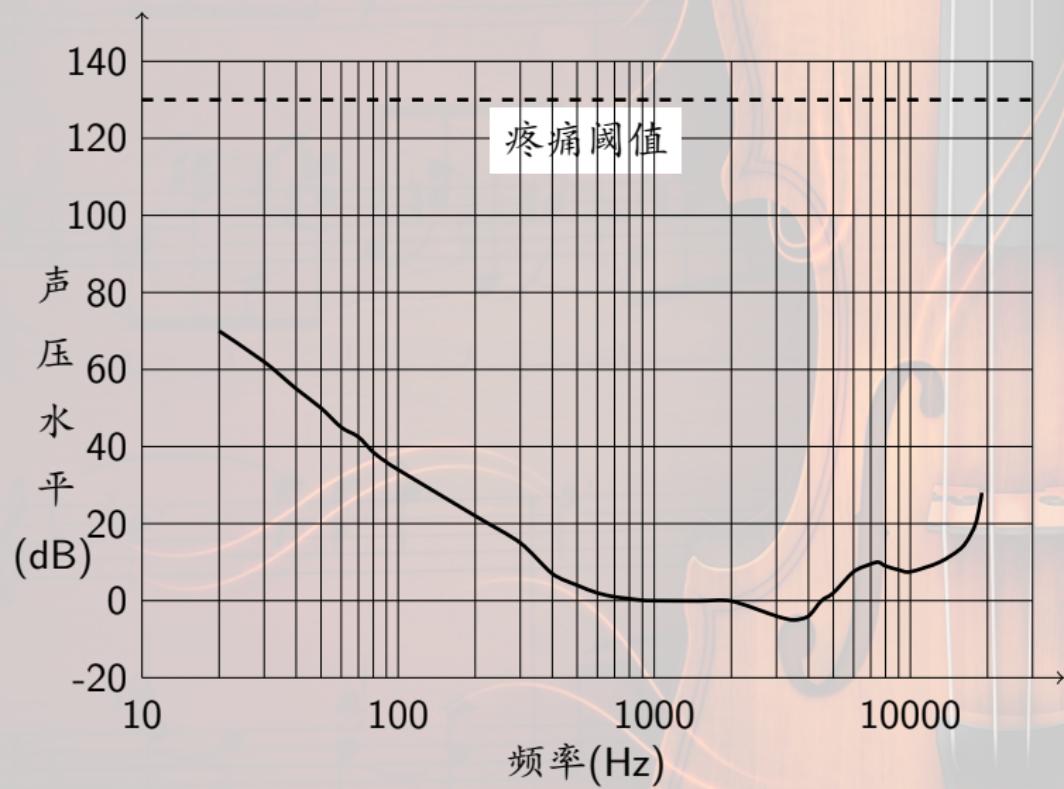
$$\log_{10}(p_2/p_1) = \log_{10} p_2 - \log_{10} p_1 = 4.5,$$

这说明 p_2 与 p_1 之比

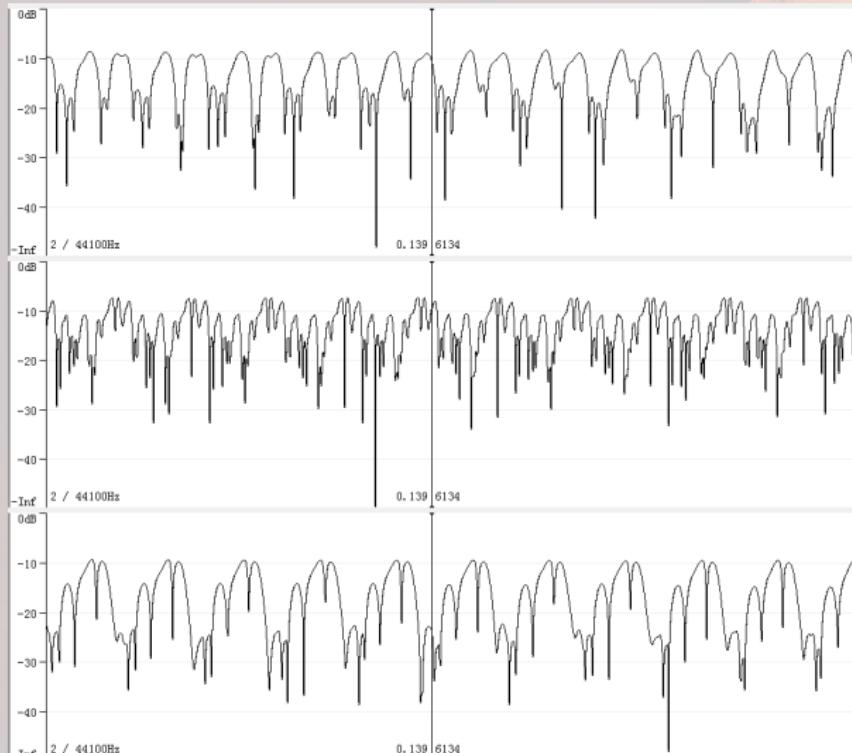
$$\frac{p_2}{p_1} = 10^{4.5} \approx 31623.$$

换言之, 声压水平增加 10 倍, 实际的声压增加了 3 万多倍.

人耳对于不同频率的声音有着不同的听觉下限阈值



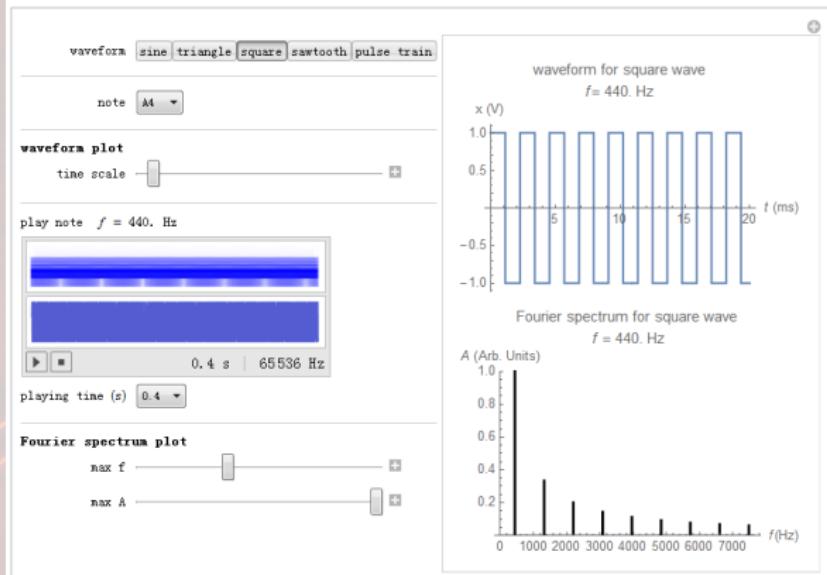
不同的乐器能够发出不同的声响，因为它们各自具有不同的音色。在左图中，自上而下分别显示了钢琴、小提琴和小号演奏 A₄ 音



符 (440 Hz) 时发出声音的波形. 钢琴 小提琴 小号

我们再来做一个实验： Sounds of Waveforms，体验一下频率相同，但是其波形（频谱）不同的声音。

Sounds of Waveforms



傅里叶分析 (Fourier Analysis)



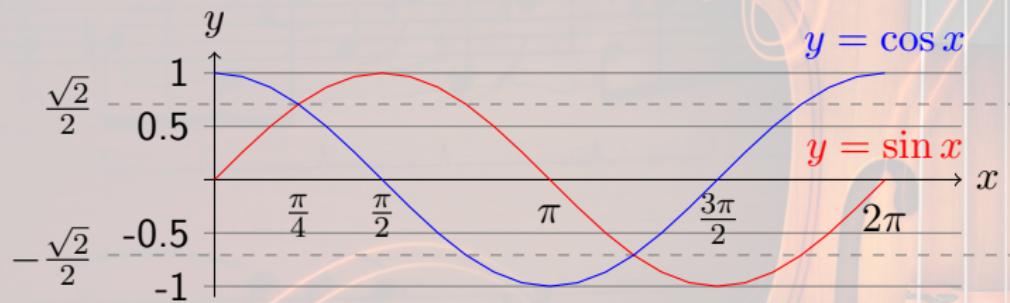
Jean-Baptiste Joseph

Fourier

1768.3.21 – 1830.5.16

法国数学家、物理学家

正弦函数与余弦函数

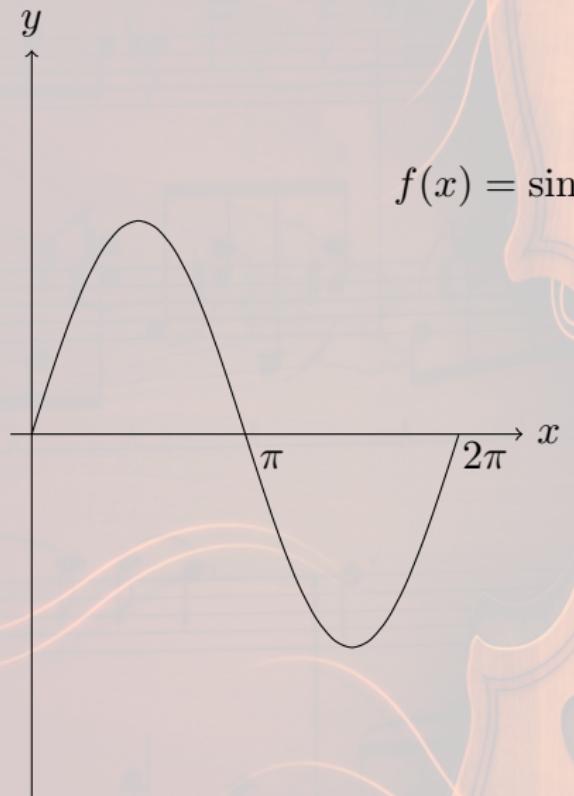


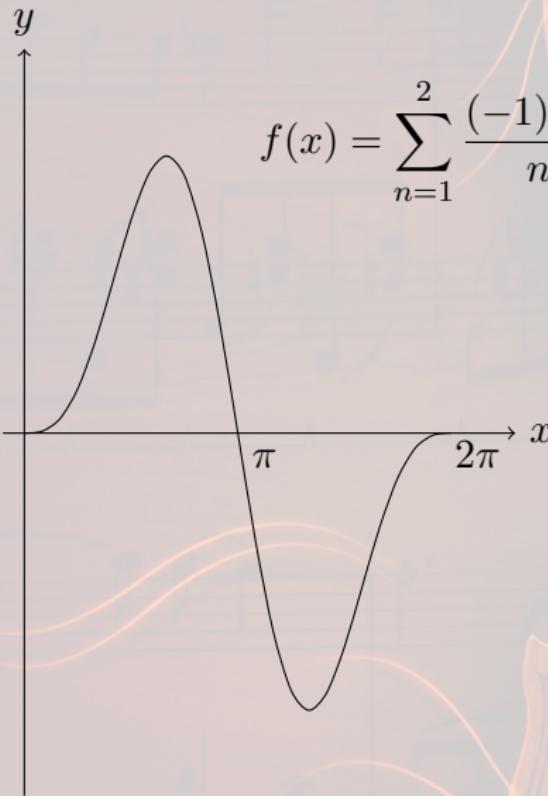
傅里叶级数

满足一定条件的周期函数 $f(x)$ 可以表示成正弦函数 \sin 和余弦函数 \cos 的无穷级数

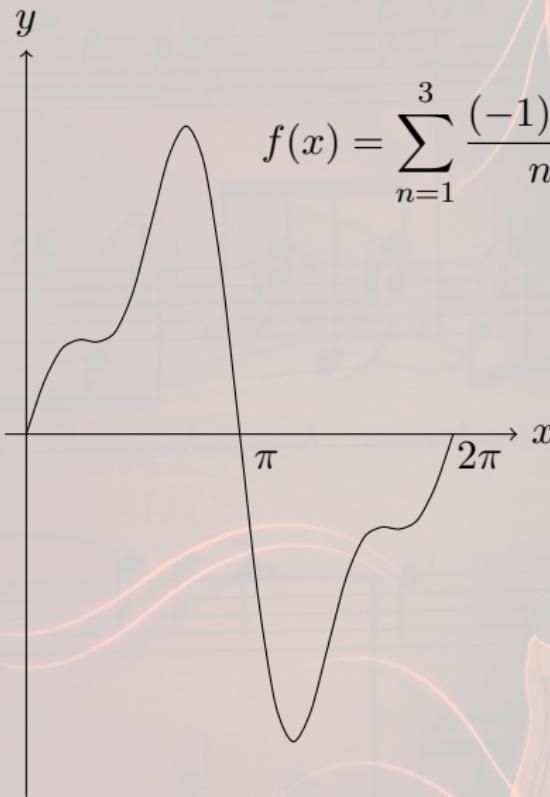
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

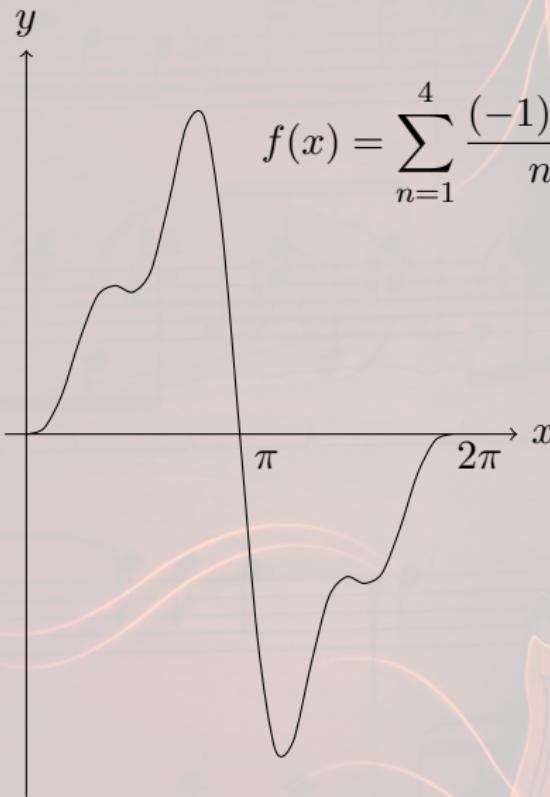
其中的 a_n, b_n 是常系数.



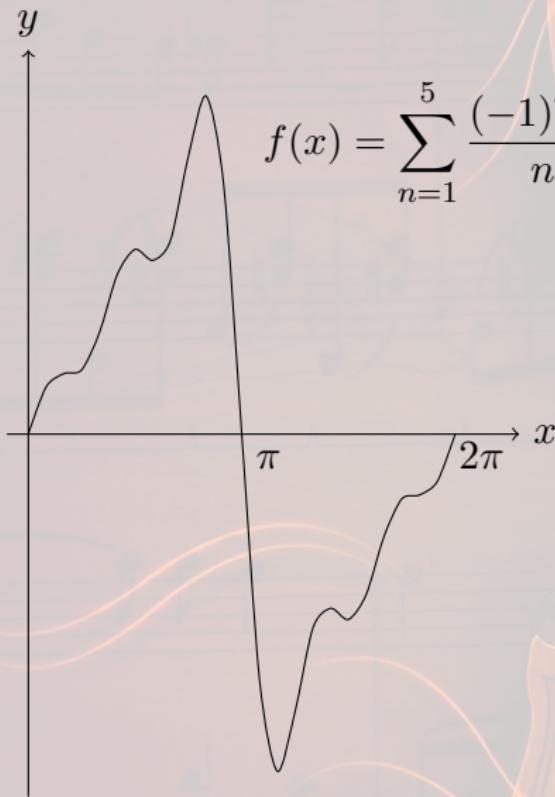


$$f(x) = \sum_{n=1}^2 \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx$$



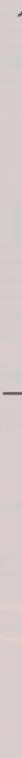


$$f(x) = \sum_{n=1}^4 \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx$$



$$f(x) = \sum_{n=1}^5 \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx$$

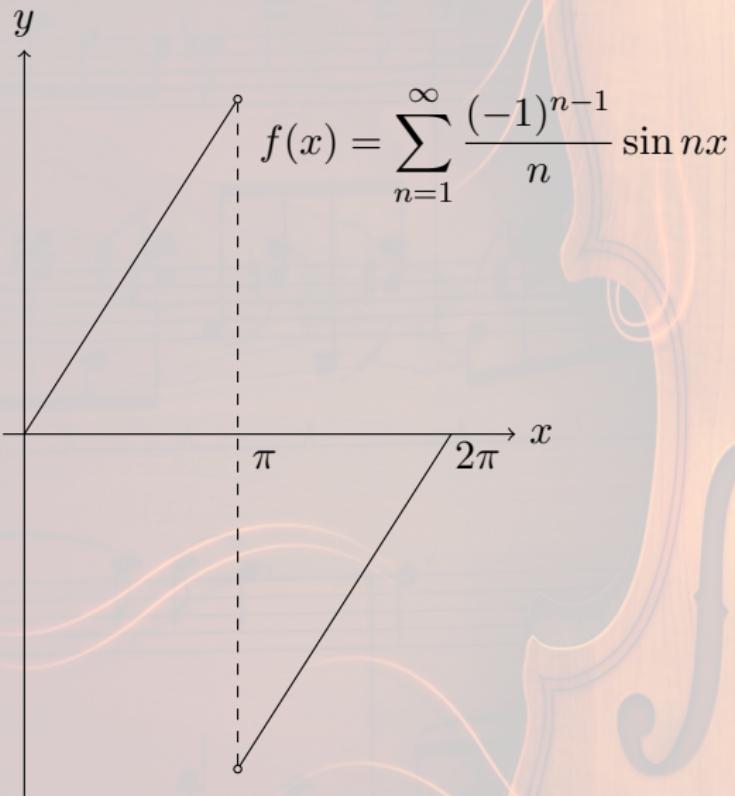
y



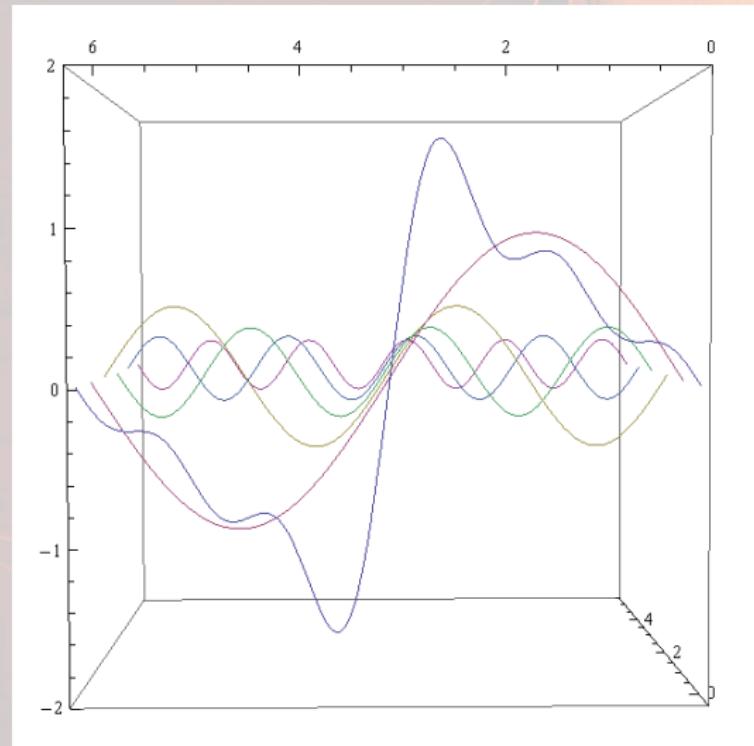
$$f(x) = \sum_{n=1}^{10} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx$$

π

2π

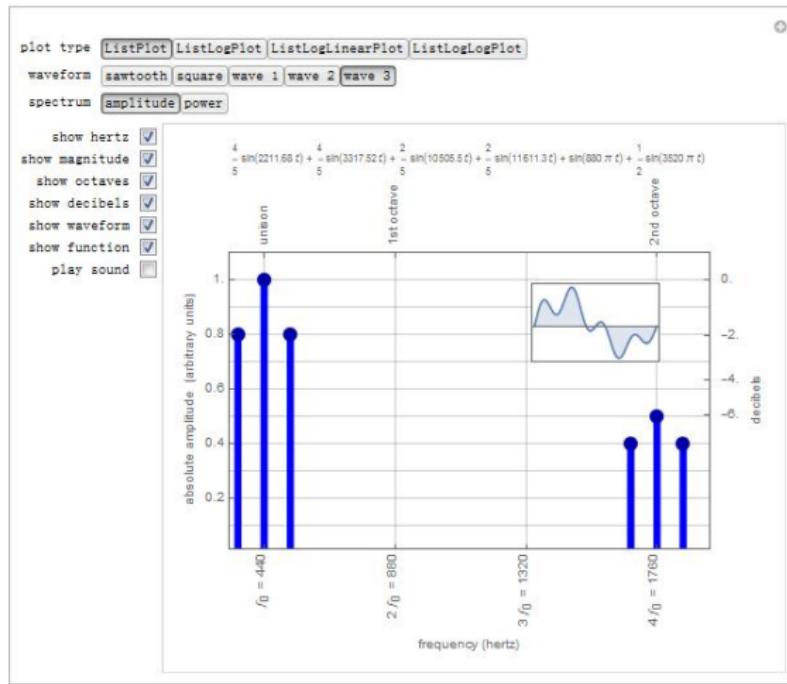


时域(time domain)、频域(frequency domain)



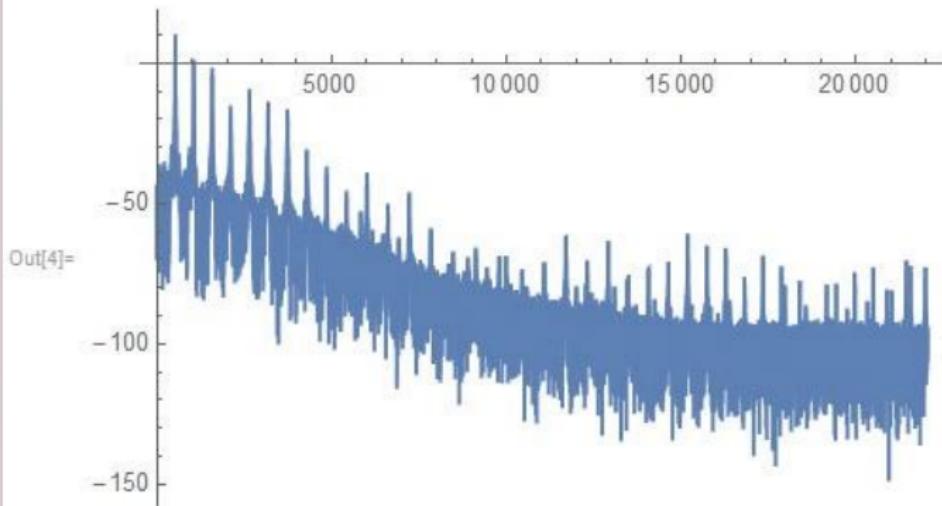
谱 (Spectrums)

Logarithmic Scales in Acoustic Spectra: Decibels and Octaves



谱 (Spectrums)

In[4]:= **Periodogram[piano]**



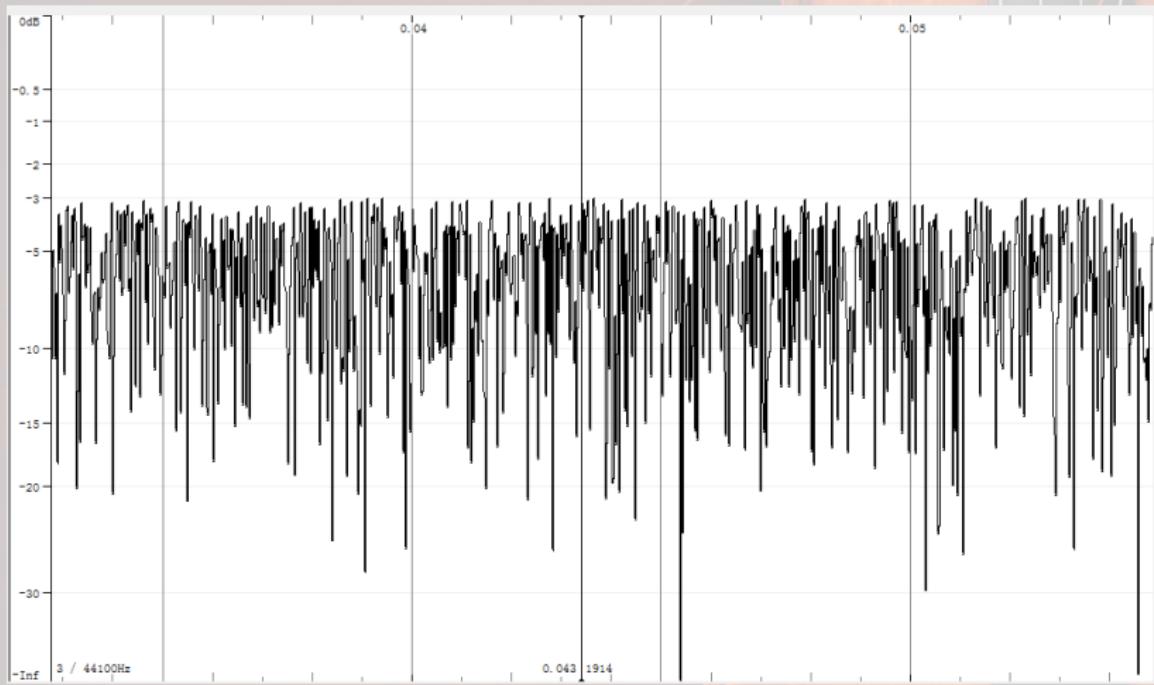
乐音体系

声音可以分成 **乐音 (musical tone)** 和 **噪音 (noise)** 两大类，它们之间的区别在于发出声音的物体振动规律的不同。

乐音是持续有规律的振动产生的声音；

噪音是由无规律的、起伏不定的振动产生的声音。

下图显示了一段“白噪声”(white noise)的声音波形，它是电视接收机在没有信号时发出的声音。✿

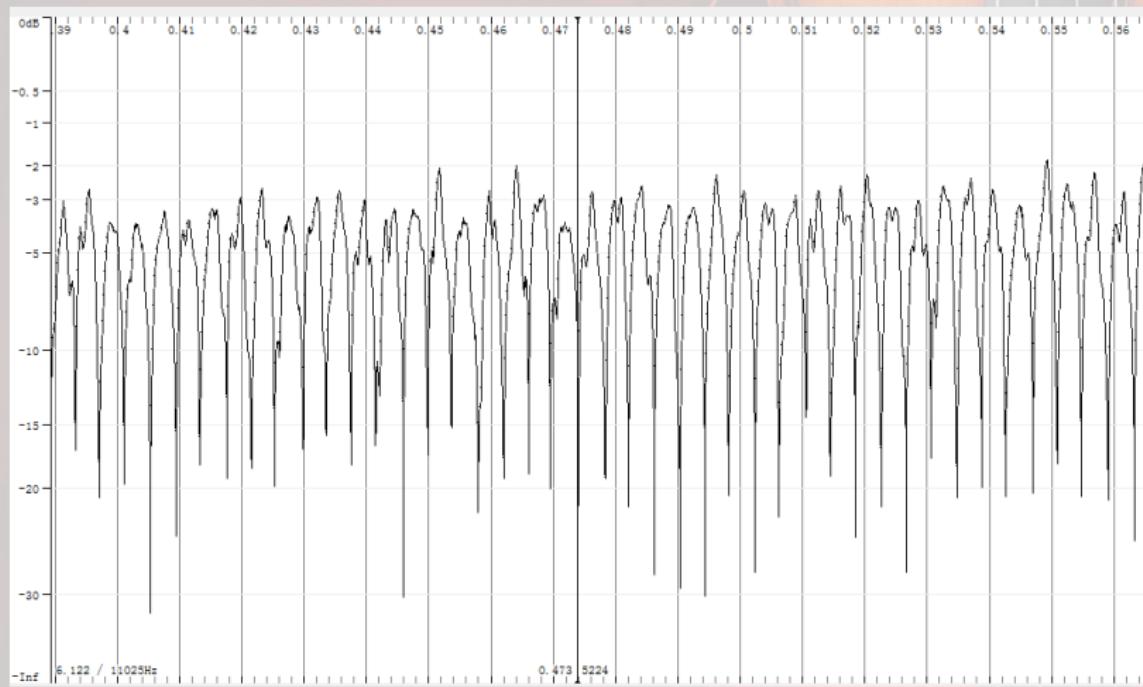


乐音体系

在音乐中所使用的主要还是乐音，但是对于“噪音”的使用也是相当重要的。

打击乐器 (percussion instrument). 在打击乐器中，有一类是具有 固定音高的 (definitely pitched)，例如木琴 (xylophone)、定音鼓 (timpani) 等。还有一类是 无固定音高的 (indefinitely pitched)，例如小军鼓 (snare drum)、大镲 (cymbal) 等。

大锣的声音波形



比才

Georges Bizet

1838.10.25 – 1875.6.3

法国作曲家

四幕歌剧《卡门》

Lucero Tena

响板(castanet)



土家族“打溜子”

舞台表演形态



现代+原生态

谭盾 (1957.8.18 -), 《地图》第三乐章—打溜子





柴可夫斯基

Пётр Ильич

Чайковский

1840.5.7 – 1893.11.6

俄罗斯作曲家

《1812序曲》

1812 Overture

(降E大调 Op. 49)

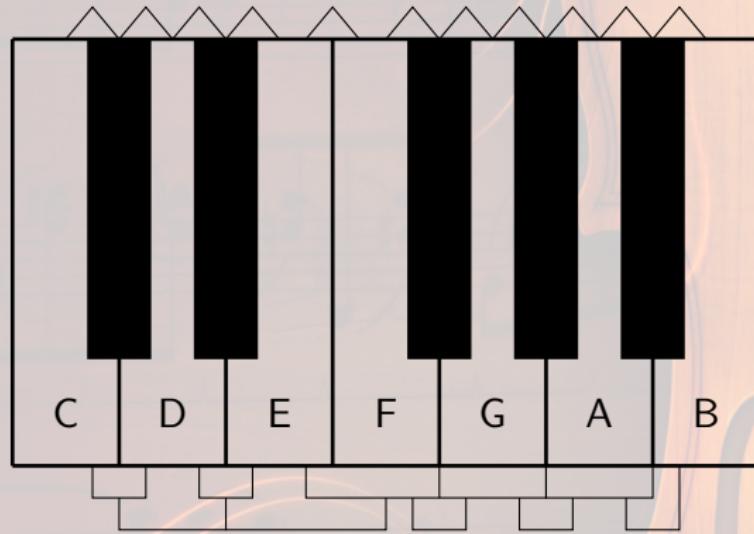


乐音体系

音乐中所使用的、具有固定音高的全体乐音构成一个集合，称作乐音体系，其中的元素（乐音）称作 音级（**scale step**）。

由于乐音体系中的元素具有不同的音高，因此可以把全体音级从低到高排列起来，得到 音列。

音列中相邻的两个音级之间相差一个 半音（**semitone**）。在钢琴键盘上，任意两个相邻的琴键（包括白键和黑键）发出的声音都相差一个半音。隔开一个键的两个琴键发出的声音都相差一个 全音（**whole tone**）。

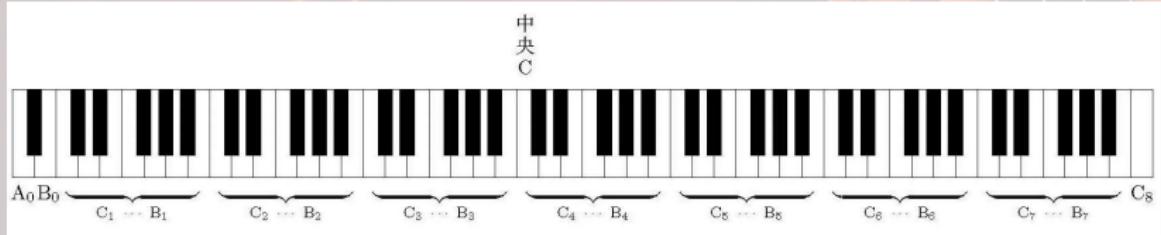


钢琴键盘(图中 \wedge 表示半音, \sqcup 表示全音)

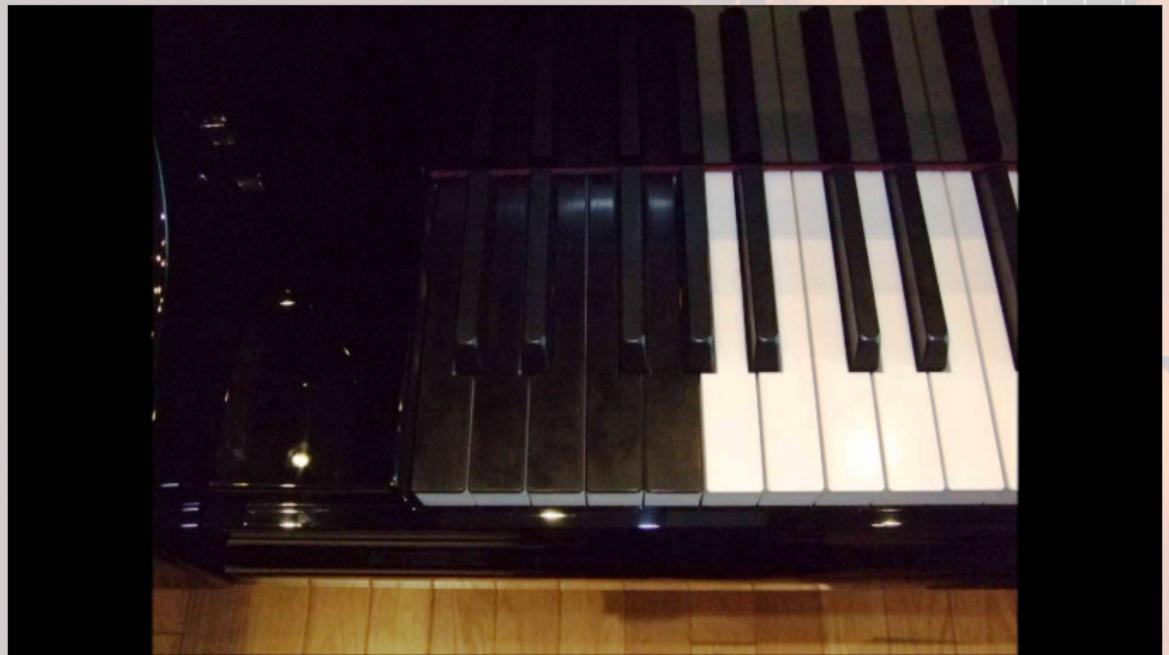
乐音体系

每个音级有一个名字，称为 **音名 (pitch name)**。基本的音名只有 7 个，就是 C、D、E、F、G、A、B。

在每一个 **八度 (octave)** 中，相应位置的音循环重复使用这 7 个 音名，这就产生了重名的音。为了区别不同八度之间同名的音，人们把这些音级分成若干 音组。



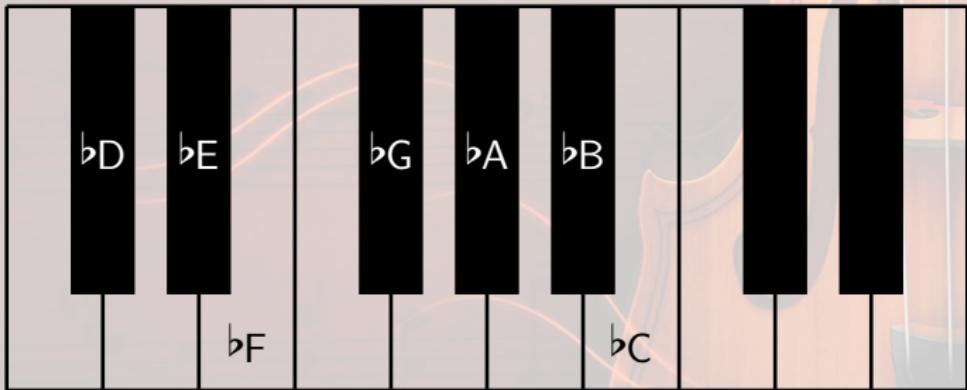
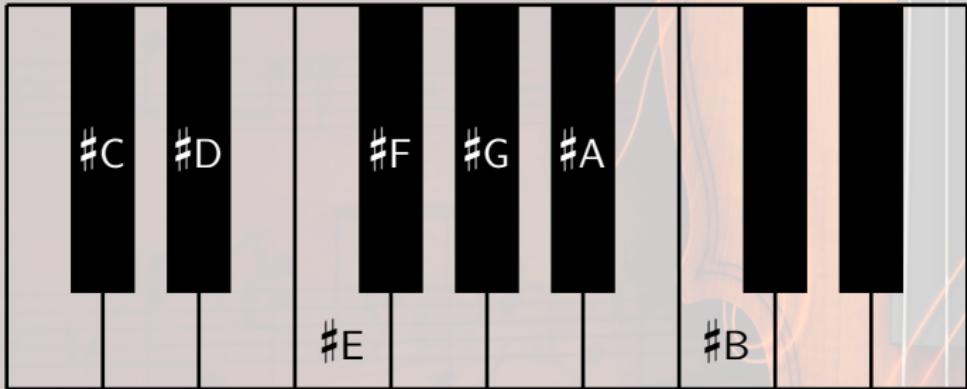
97 个音级的乐音体系



Bösendorfer 制造的 Imperial 290 型钢琴

C, D, E, F, G, A, B 称为 基本音级. 将基本音级加以升高或降低所得到的音称为 变化音级, 其记号是在基本音级字母的前面添加变音记号 (**accidental**):

- 升号 (sharp $\#$) 表示把基本音级升高半音;
- 降号 (flat \flat) 表示把基本音级降低半音;
- 重升号 (double sharp \times) 表示把基本音级升高一个全音;
- 重降号 (double flat $\flat\flat$) 表示把基本音级降低一个全音;
- 还原号 (natural \natural) 表示把已升高 (包括重升) 或降低 (包括重降) 的音还原成基本音级.



唱 名

除了音名，人们还使用其他方法给乐音起名字。例如，曾经广为流传的电影《音乐之声》(The Sound of Music, 20th Century Fox, 1965) 中的那首“Do re mi”，就给出了另一种被广泛采用的命名法：唱名法。它用 7 个音节

do re mi fa sol la si

来命名乐音，其中 mi fa 之间和 si do 之间是半音，其他相邻的唱名之间是全音。



固定唱名法

这时 7 个唱名与 7 个音名 1-1 对应:

do = C re = B mi = E fa = F sol = G la = A si = B.

因此这 7 个唱名在钢琴键盘上的位置是固定的.



首调唱名法

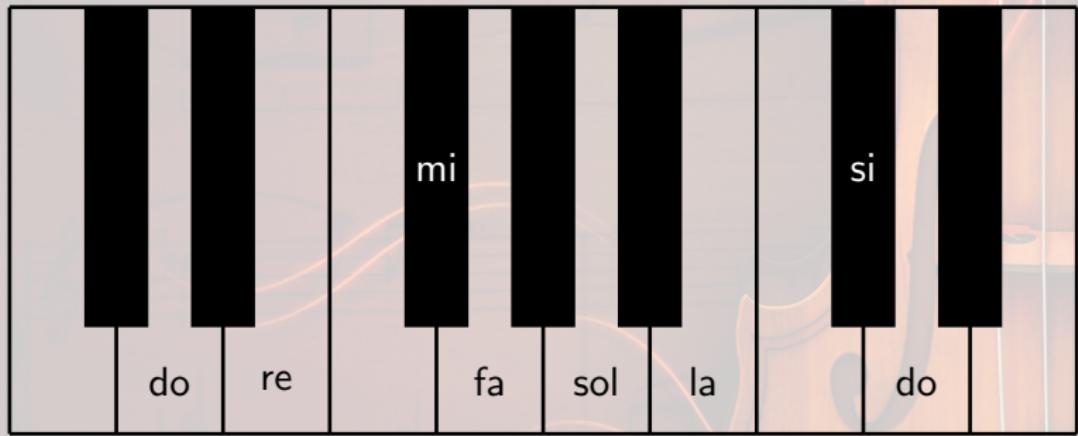
又称移动唱名法。这时唱名 do 可以是音列中任意一个音级（包括变化音级），其后的

re mi fa sol la si

按照 mi fa 之间和 si do 之间是半音，其他相邻的唱名之间是全音的规则依次排列。

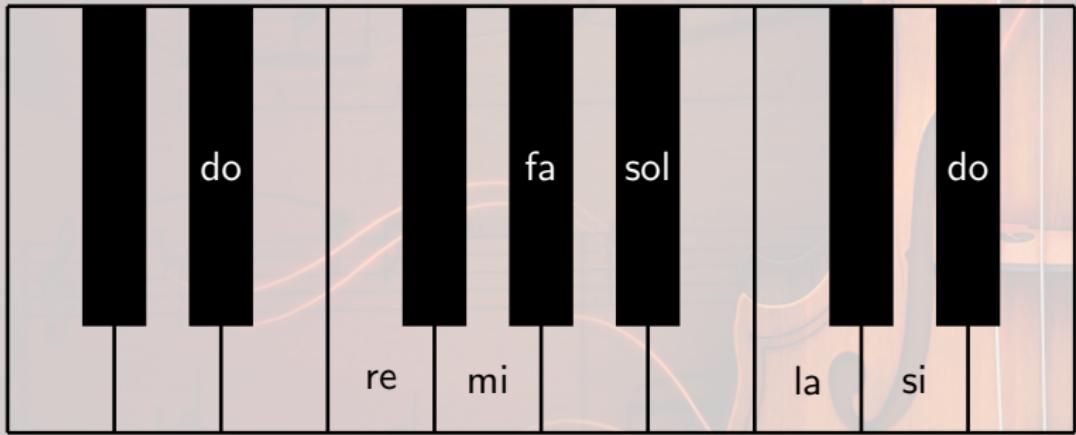
例如，当 do 为 D 时 (1=D)，唱名与音名有下列对应关系：

do = D, re = E, mi = \sharp F, fa = G, sol = A, la = B, si = \sharp C'

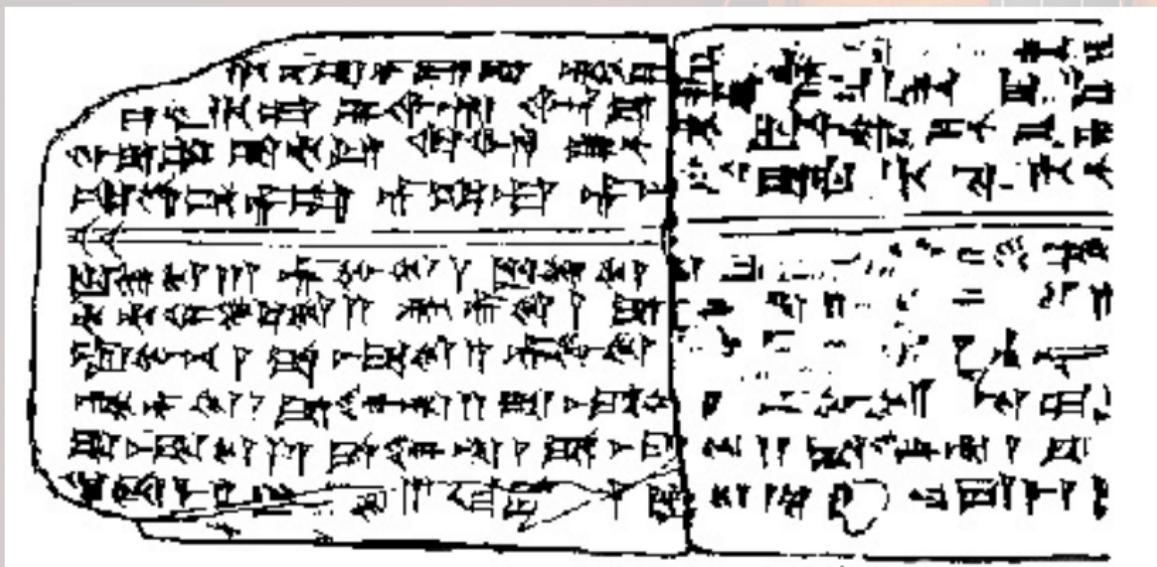


又如，当 do 为 $\flat E$ 时 ($1 = \flat E$)，唱名与音名有下列对应关系：

do = $\flat E$, re = F, mi = G, fa = $\flat A$, sol = $\flat B$, la = C', si = D'

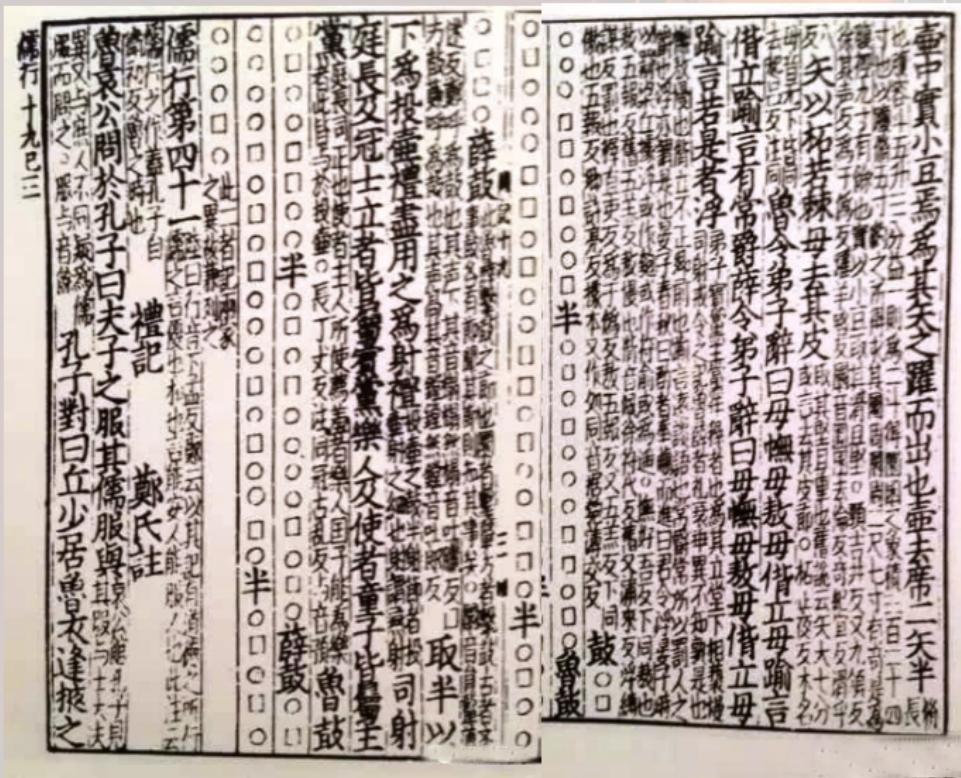


以书面的形式将音乐记录下来的方法叫 记谱法 (notation).



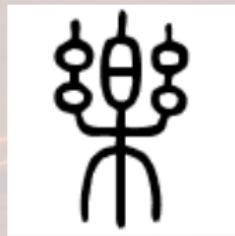
公元前 2000 年的楔形文字泥版, 尼普尔 (Nippur) 遗址, 苏美尔 (Sumer, 属今伊拉克).

《礼记·投壶》中的鼓谱



《礼记·投壶》中的鼓谱

东汉末年儒学家郑玄（公元127年—200年）注：“此鲁、薛击鼓之节也，圆者击鼙（pí），方者击鼓。”



『說文解字注』：中象鼓。兩旁象鼙也。

碣石調幽蘭序一名倚瀨
丘黎嗣會稽人也果木隱於九疑山妙絕楚調於幽
蘭一曲尤精絕以其聲微而志遠而不堪授人以陳
楨明三聖受宣帝王叔明隨開皇十年於丹陽縣卒
享九十七祀子傳之其聲遂簡可

幽蘭第五

耶臥中指上半寸許葉面食指中指雙季宮面中
指恩下与拘依下十三下一寸許住末曲起食指散緩半
扶宮商一指桃面又半扶宮面縱容下無名於十三外一
寸許葉七角於面角即住兩半扶接桃聲一句緩起
止指宜十門葉面緩散厯羽徵無名打面食指桃徵
一百大指當八葉面無名打面大指徐抑上八上一寸
葉宮無名打宮徵今一百大指當九葉宮面疾金扶宮
商移大指當八葉面無名打面大指徐抑上八上一寸
許急求取聲枝打宮無名當十葉徵食指桃徵應一百
無名不動下大指當九葉徵却轉徵羽食指節過
後大指急蹴徵上至八指徵起無名不動無名散打宮
食指桃徵應一百無名不動又下大指當九葉徵無名散
打宮徵大指不動食指桃文中指無名閒拘時徵桃文無
名散摘徵食指應武文徵徵大指不動急全扶文武大
指當八葉武食指桃武大指緩抑上半寸許一百大指當
八上一寸許葉羽無名打羽大指拘羽起無名當十葉徵大
指當九葉徵羽即於徵羽作緩全扶無名打徵大指急
感至九指徵起無名疾退下十一還上至十住散桃文

驪仙神奇秘譜

下卷



譜譜外神品

黃鍾調

即無射 4 譜五品一文一山
芭箏加芭箏

神品無射意

芭箏

省同

芭箏五七箏七箏六箏六箏

芭箏

芭箏

芭箏

大字

芭箏芭箏上九箏

芭箏

芭箏

芭箏

芭箏

芭箏

芭箏

芭箏

塞

二中已下十

塞

塞

塞

塞

塞

塞

塞

塞

黃雲秋塞

驪仙曰。是曲者。置古曲也。言塞上胡沙漠。
迢遞萬里。黃雲蔽天。破風射人。滿目淒然。閱
山南北。其悲愴之意。寂寥蕭索。觀景傷懷。是
以含情寄意。付諸徽軫者。可以起營州之秋
思。而感五闋之懷。故鄉也。

一芭箏

二下

芭箏

三下

芭箏

四下

芭箏

五下

芭箏

六下

芭箏

七下

芭箏

可

序

芭箏

合

芭箏

合

芭箏

合

芭箏

合

芭箏

合

芭箏

李

中

芭箏

合

芭箏

合

芭箏

合

芭箏

合

芭箏

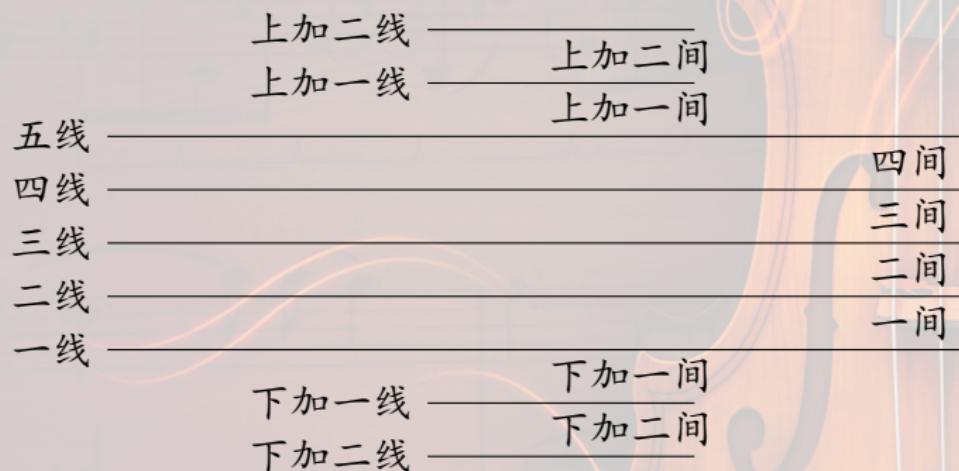
合

芭箏

将古琴的指法名称和弦序、徽位结合为文字的减字谱

音乐的坐标系——五线谱

目前音乐理论中普遍采用的记谱法是 **五线谱**.



音乐的坐标系一 五线谱

在五线谱中，用不同的音符表示乐音的不同长度。音符所代表的时值是一个相对长度。例如：假定以四分音符为一拍，则一个全音符的时值为 4 拍，一个二分音符的时值为 2 拍，一个八分音符的时值为 $1/2$ 拍，一个十六分音符的时值为 $1/4$ 拍。



全音符

二分音符

四分音符

八分音符

十六分音符

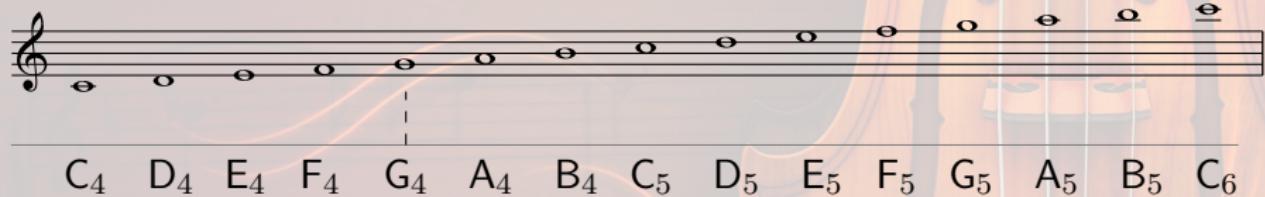
谱号

在五线谱上，音的高低是根据音符的符头在五线谱上的位置而定的。位置越高音越高，位置越低音越低。因此可以把五线谱看作是一个坐标系，其横轴代表时间，而纵轴代表音高。

五线谱上某一条线或者某一个间到底代表哪个音，需要通过 谱号 (clef) 来确定。常用的有 高音谱号 (treble clef)、低音谱号 (bass clef) 和 中音谱号 (alto clef)。

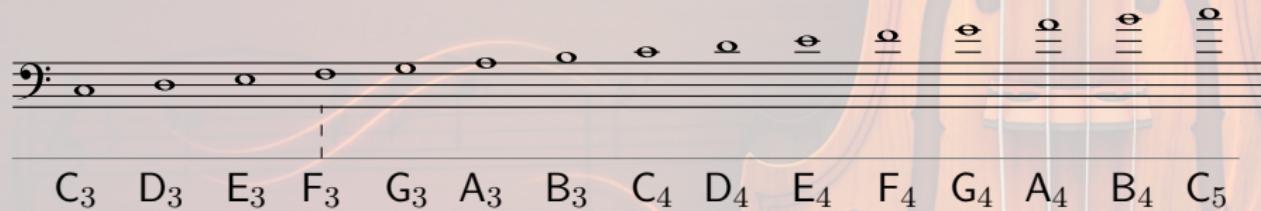
高音谱号

高音谱号  也称为 G 谱号，其大圆圈位于二线，指明中央 C 上方纯五度的音级 G₄ 的位置，其他音级的位置也就相应地确定了。



低音谱号

低音谱号  也称为 F 谱号，其“冒号”的中心位于四线，指明中央 C 下方纯四度音级 F_3 所在的位置。

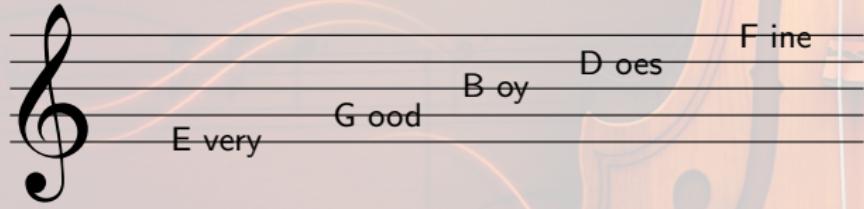
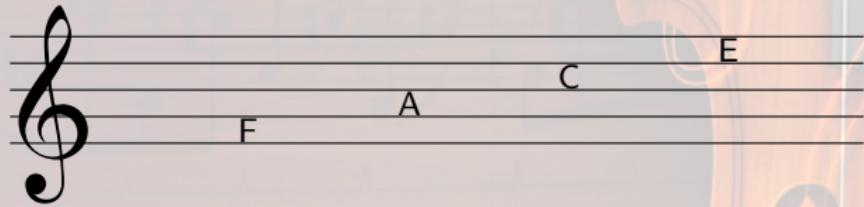


谱表

中音谱号  也称为 C 谱号，其中心位于三线，指明中央 C (即 C₄) 的位置。也有将其中心置于四线的，这时称其为 次中音谱号 (tenor clef)。

记有谱号的五线谱称为 谱表 (staff)，如高音谱表、低音谱表、中音谱表、次中音谱表等。

高音谱表



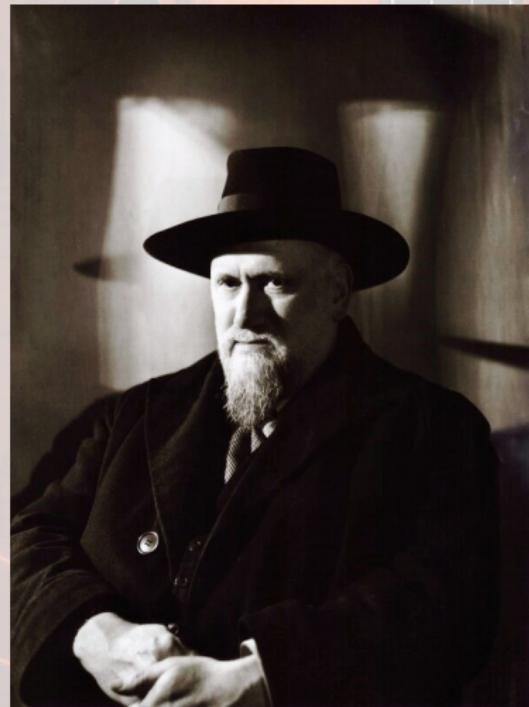
音 程

Music is, however, an art not
of notes but of intervals.

Edwin Evans

1874.9.1 – 1945.3.3

英国音乐评论家



音 程

在乐音体系中，两个音级之间的距离称为 音程 (**interval**)。在音程中，高的音称为 上方音，也称为 冠音；低的音称为 下方音，也称为 根音。

音程中的两个音可以先后发声，称为 旋律音程；也可以同时发声，称为 和声音程。

音程的名称由两个参数：“度数” 和 “半音数” 共同确定，缺一不可。

音 程

度数 是与两个音级对应的音符在五线谱上包括的线和间的数目.

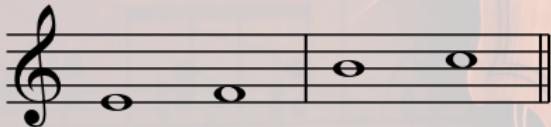
例如: C — E 包含两线一间或者两间一线, 故其音程是三度的.

半音数 是音程所包含半音的数目. 例如: D — F 包含 3 个半音,

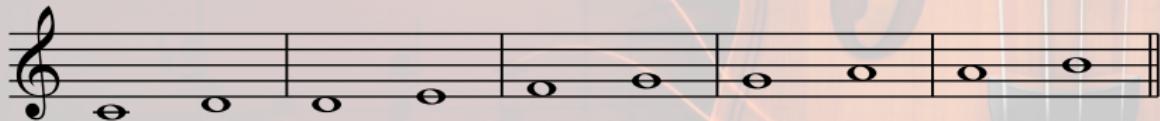
故其半音数为 3.

仅仅单独依靠度数或者半音数, 都无法确定音程.

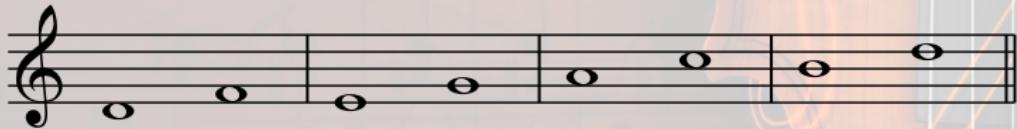
半音数为 1 的二度音程称为 小二度 (the minor second). 在基本音级之间有两个小二度: E₄ - F₄ 和 B₄ - C₅.



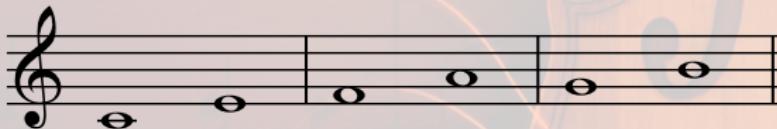
半音数为 2 的二度音程称为 大二度 (the major second). 在基本音级之间有五个大二度: C₄ - D₄, D₄ - E₄, F₄ - G₄, G₄ - A₄ 和 A₄ - B₄,



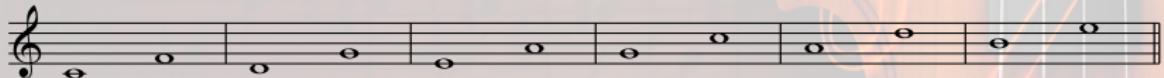
半音数为 3 的三度音程称为 小三度 (the minor third). 在基本音级之间有四个小三度: D₄ - F₄, E₄ - G₄, A₄ - C₅ 和 B₄ - D₅,



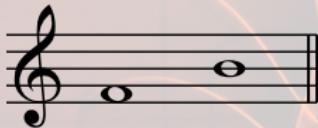
半音数为 4 的三度音程称为 大三度 (the major third). 在基本音级之间有三个大三度: C₄ - E₄, F₄ - A₄ 和 G₄ - B₄,



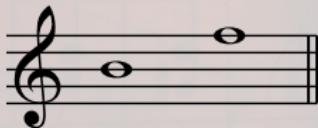
半音数为 5 的四度音程称为 纯四度 (**the perfect fourth**). 在基本音级之间有六个纯四度: $C_4 - F_4$, $D_4 - G_4$, $E_4 - A_4$, $G_4 - C_5$, $A_4 - D_5$ 和 $B_4 - E_5$,



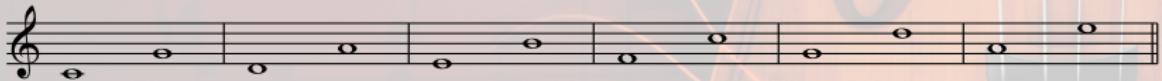
半音数为 6 的四度音程称为 增四度 (**the augmented fourth**).
在基本音级之间有一个增四度: $F_4 - B_4$,



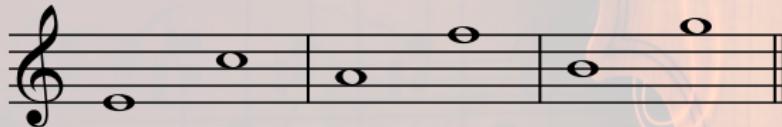
半音数为 6 的五度音程称为 **减五度** (**the diminished fifth**). 在基本音级之间有一个减五度: $B_4 - F_5$,



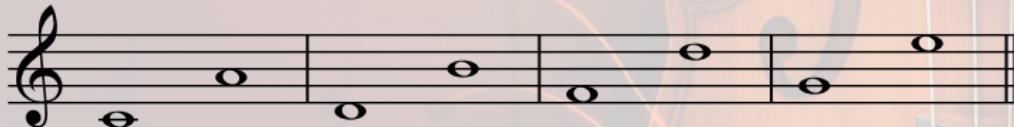
半音数为 7 的五度音程称为 **纯五度** (**the perfect fifth**). 在基本音级之间有六个纯五度: $C_4 - G_4$, $D_4 - A_4$, $E_4 - B_4$, $F_4 - C_5$, $G_4 - D_5$ 和 $A_4 - E_5$,



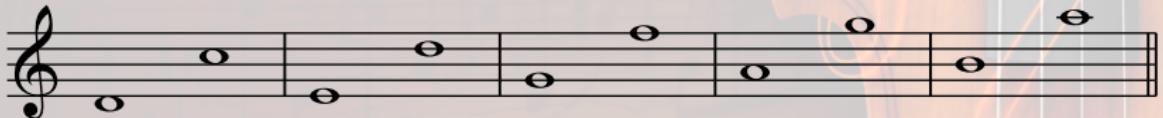
半音数为 8 的六度音程称为 小六度 (the minor sixth). 在基本音级之间有三个小六度: E₄ - C₅, A₄ - F₅ 和 B₄ - G₅,



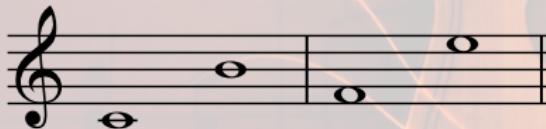
半音数为 9 的六度音程称为 大六度 (the major sixth). 在基本音级之间有四个大六度: C₄ - A₄, D₄ - B₄, F₄ - D₅ 和 G₄ - E₅,



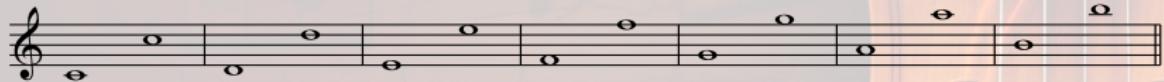
半音数为 10 的七度音程称为 小七度 (the minor seventh). 在基本音级之间有五个小七度: D₄ - C₅, E₄ - D₅, G₄ - F₅, A₄ - G₅ 和 B₄ - A₅,



半音数为 11 的七度音程称为 大七度 (the major seventh). 在基本音级之间有两个大七度: C₄ - B₄ 和 F₄ - E₅,



半音数为 12 的八度音程称为 **纯八度** (**the perfect octave**). 在基本音级之间有七个纯八度: $C_4 - C_5$, $D_4 - D_5$, \dots , $B_4 - B_5$,



半音数为 0 的一度音程称为 **纯一度**.

自然音程与变化音程

大小二度、大小三度、大小六度、大小七度音程，以及纯一度、纯四度、纯五度、纯八度、增四度、减五度音程统称为 **自然音程 (diatonic interval)**.

从自然音程出发，改变其半音数，可以得到 **变化音程**. 在一个音程中升高根音或者降低冠音，都可以减少其半音数. 反之，升高冠音或者降低根音可以增加音程的半音数.

变化音程

大音程和纯音程增加 1 个半音数，得到的是增音程。例如， $\flat G - A$ 和 $G - \sharp A$ 都把大二度 $G - A$ 增加了 1 个半音数，它们都是 **增二度 (the augmented second)**。

小音程和纯音程减少 1 个半音数，得到的是减音程。例如，把小七度 $E - D'$ 减少 1 个半音数，得到 $\sharp E - D'$ 或者 $E - \flat D'$ ，它们称为 **减七度 (the diminished seventh)**。

自然音程与变化音程 (括号中是半音数)

	减音程	小音程	纯音程	大音程	增音程
一度			C - C (0)		C - $\#$ C (1)
二度	$\#$ C - \flat D (0)	C - \flat D (1)		C - D (2)	C - $\#$ D (3)
三度	$\#$ C - \flat E (2)	C - \flat E (3)		C - E (4)	C - $\#$ E (5)
四度	$\#$ C - F (4)		C - F (5)		C - $\#$ F (6)
五度	$\#$ C - G (6)		C - G (7)		C - $\#$ G (8)
六度	$\#$ C - \flat A (7)	C - \flat A (8)		C - A (9)	C - $\#$ A (10)
七度	$\#$ C - \flat B (9)	C - \flat B (10)		C - B (11)	C - $\#$ B (12)
八度	$\#$ C - C' (11)		C - C' (12)		C - $\#$ C' (13)

音 程

Musical Interval Recognition

instrument: Piano ▾

pitch order: ascending descending any

octave range: 1 2 3 4

note duration:

show interval by default:

all intervals with current root note:

m2 M2 m3 M3 P4 TT P5 m6 M6 m7 M7 P8

协和音程与不协和音程

不同的音程给人的听觉感受是不同的，在音乐中的作用也是不同的。通常认为：纯四度、纯五度和纯八度音程以及大小三度、大小六度音程属于 **协和音程 (consonant interval)**；二度、七度音程和其他所有增、减音程都属于 **不协和音程 (dissonant interval)**。

在协和音程中，三度和六度音程与纯音程有很大不同，所以进一步把协和音程分为完全协和音程（纯音程）和不完全协和音程（大小三度、大小六度音程）。

协和音程与不协和音程

音乐给人以和谐之美。不同的声音放在一起是否协和的问题自古以来就是音乐中的一个重要问题，相关的研究汗牛充栋。另一方面，音程是否协和又带有一定的主观性。同一个音程，在不同的历史时期，对于不同民族、文化背景的人群，引起的感觉可能是不同的。因此要给协和音程和不协和音程下一个科学客观的定义并不容易。

Paul Hindemith

(1895.11.16 – 1963.12.28)

德国作曲家、小提琴演奏
家、指挥



协和音程与不协和音程

The two concepts have never been completely explained, and for a thousand years the definition have varied.

The Craft of Music Composition, Vol. 1, 1942, p. 85.

《长征组歌》3 —遵义会议放光辉（女声二重唱部分）

苗 岭 秀 来 旭 日 升 哎

百 鸟 啼 来 哎 报 新

毕达哥拉斯 (约公元前 569 – 475) 理论

在弦乐器中，弦的长度与音高成反比例关系，弦长缩短 $1/2$ ，音高相差八度。

进一步：长度成简单整数比的弦能够发出和谐的声音。这就导出了毕达哥拉斯对于协和音程的认识：两个声音的振动频率之比越简单，相应的音程就越协和。

一度 ($1:1$)、八度 ($1:2$)、五度 ($2:3$) 和四度 ($3:4$) 是完全协和音程。六度 ($3:5$) 和三度音程 ($4:5$) 是不完全协和音程。二度 ($8:9$) 和七度音程 ($8:15$) 以及一切增减音程都是不协和音程。



Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz,
1821.8.31 – 1894.9.8,
德国生理学家、物理学家.

赫尔姆霍茨理论

赫尔姆霍茨认为：两个音之间不含拍音的为协和音程，实际中每秒少于 6 个拍音或者多于 120 个拍音的也算作协和音程；含有拍音的为不协和音程，特别是每秒含 33 个拍音的最不协和。

赫尔姆霍茨理论

假设一个声音的频率是 ω , 另一个是 $\omega + \delta$, 则它们的叠加为

$$\sin(2\pi(\omega + \delta)t) + \sin(2\pi\omega t). \quad (*)$$

根据三角函数的和差化积公式

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

(*) 式化为

$$2 \sin \left(2\pi \left(\omega + \frac{\delta}{2} \right) t \right) \cdot \cos (\pi \delta t).$$

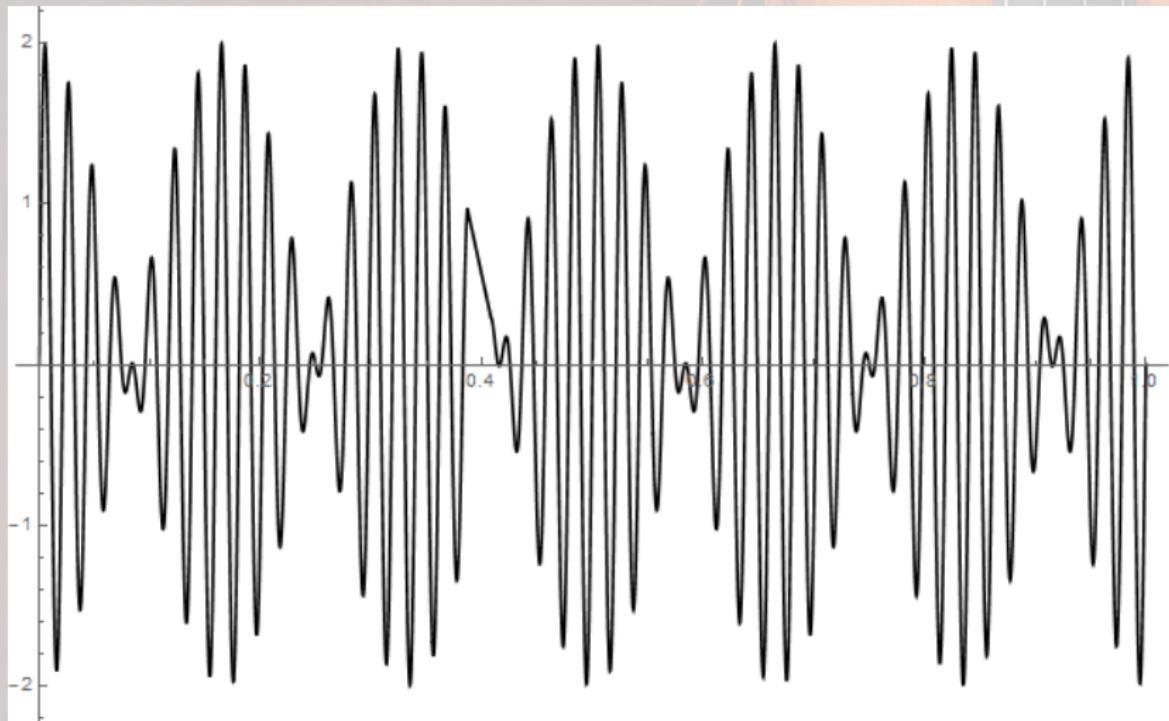
赫尔姆霍茨理论

这说明：两个频率分别是 ω 和 $\omega + \delta$ 的声音叠加，得到的是一个比 ω 稍高一些的音，其频率为 $\omega + \delta/2$ ，但是其音量以 δ 为周期变化，使得人们听上去产生 **拍 (beats)** 的感觉。

下面是

$$\sin(100\pi t) + \sin(88\pi t), \quad (0 \leq t \leq 1)$$

的图像，代表了频率为 44 Hz 和 50 Hz 的两个声音叠加，相应的 $\delta = 6$ 。在图中可以明显地看出最终的叠加效果在 1 秒钟里形成了 6 个拍。



小二度与增四度

小二度 ($E_4 - F_4$) 音程, 频率分别为 329.63 Hz 和 349.23 Hz

增四度 ($C_4 - \sharp F_4$) 音程, 频率分别为 261.63 Hz 和 370.0 Hz

小七度 ($C_4 - \flat B_4$) 音程, 频率分别为 261.63 Hz 和 466.17 Hz

泛音列重合

八度音程：

f $2f$ $3f$ $4f$ $5f$ $6f$ $7f$ $8f$ $9f$ $10f$ $11f$ $12f$
 $2f$ $4f$ $6f$ $8f$ $10f$ $12f$ $14f$ $16f$ $18f$ $20f$ $22f$ $24f$

纯五度音程：

f $2f$ $3f$ $4f$ $5f$ $6f$ $7f$ $8f$ $9f$ $10f$ $11f$ $12f$
 $\frac{3}{2}f$ $3f$ $\frac{9}{2}f$ $6f$ $\frac{15}{2}f$ $9f$ $\frac{21}{2}f$ $12f$ $\frac{27}{2}f$ $15f$ $\frac{33}{2}f$ $18f$

泛音列重合

五度相生或者纯律的大二度音程：

$$\begin{array}{cccccccccccc} f & 2f & 3f & 4f & 5f & 6f & 7f & 8f & 9f & 10f & 11f & 12f \\ \frac{9}{8}f & \frac{9}{4}f & \frac{27}{8}f & \frac{9}{2}f & \frac{45}{8}f & \frac{27}{4}f & \frac{63}{8}f & 9f & \frac{81}{8}f & \frac{45}{4}f & \frac{99}{8}f & \frac{27}{2}f \end{array}$$

Carl Stumpf (1848.4.21

– 1936.12.25), 德国哲学家、心理学家.



心理学实验结果

在大规模心理学实验的基础上, Stumpf 给出了一个关于协和音程的心理学解释. 他向没有音乐训练的被试同时播放两个不同音高的声音, 要被试回答听到的是一个声音、还是两个声音.

Stumpf 的实验结果显示, 对于不同的音程, 回答是一个声音的比例如下:

八度	五度	四度	三度	增四度/减五度	二度
75%	50%	33%	25%	20%	10%

这与毕达哥拉斯的观点比较契合.

Perception of music by infants

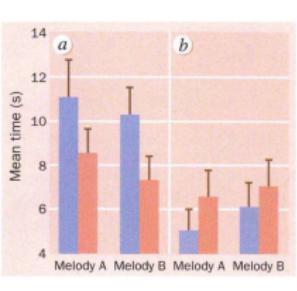
SIR — The origins of the perception of consonance and dissonance in music are a matter of debate, well-illustrated by the difficulty in assimilating contemporary atonal music, where dissonance is prominent. Here we suggest that infants are prepared to find consonance perceptually more attractive than dissonance.

Consonance and dissonance are concepts that refer to the pleasingness of two

music theorists⁸.

By exposing young infants to consonant and dissonant music, we tested the hypothesis of an innate bias favouring consonance over dissonance. We presented a sample of 32 4-month-old infants (16 males, 16 females) with two different, unfamiliar melodies of 35-second duration in a consonant and a dissonant version for a total of four trials. We created

a. Mean total visual fixation time to music source during the consonant and dissonant versions of two melodies. Infants displayed significantly longer fixation times during the consonant (blue boxes) compared to the dissonant (red boxes) versions of the melodies (Repeated measures analysis of variance on square-root of data: $F(1,24) = 11.50$; $P < 0.005$). b. Mean time of motor movement during the consonant and dissonant versions of the two melodies. Infants showed less motor activity during the consonant compared to the dissonant versions of the melodies (Statistics as above: $F(1,24) = 6.64$; $P < 0.02$). Full details of methodology and other results are available on request from M. R. Z.



or more frequencies occurring together. The most basic example is an interval, which is the difference in pitch (frequency of vibration) between two tones. Some intervals are considered dissonant, others

the stimuli using a computer program that controlled an attached music synthesizer. We manipulated consonance and dissonance by composing the dissonant version in parallel minor seconds, the consonant

to the dissonant versions of each melody (see figure). We believe these data suggest that the infants prefer the consonant to the dissonant versions of the melodies.

Two main factors control duration of visual fixation in the infant: preference and discrepancy¹¹. The dissonant versions of the melodies deviate from what the infant is used to hearing and therefore can be considered discrepant events. However, because the infants do not show longer fixations to the dissonant stimuli, it is fair to assume that it is preference, and not discrepancy, controlling the infants' fixation time. Motor activity reflects arousal, but arousal can be pleasant or distressed. Because the dissonant versions elicited increased motor activity but less fixation time, motor activity probably reflects a distressed state rather than a pleasant one.

There is no relation between infants' previous exposure to music (as assessed by a questionnaire) and their behaviour in the experiment. Although less extreme forms of consonance/dissonance might be subject to cultural influence, we suggest that the human infant may possess a biological preparedness that makes consonance perceptually more attractive than dissonance.

Marcel R. Zentner*
Jerome Kagan

Department of Psychology,
Harvard University, Kirkland Street 33,
Cambridge, Massachusetts 02138, USA

M. R. Zentner & J. Kagan, Perception of music by infants, *Nature* **383**

(1996), p. 29.