和 弦 与 音 网

Chords and Tonnetz

王 杰

北京大学数学科学学院

2017 – 2018 学年 • 第二学期

目录

Tristan Chord

瓦格纳的特里斯坦和弦 $\{F, B, \sharp D, \sharp G\}$ 引起了众多研究者的兴趣和关注. 这个和弦在其他音乐家的作品中也出现过.

- 莫扎特的 ♭E 大调弦乐四重奏 (K. 428);
- 肖邦 (Fryderyk Franciszek Chopin, 1810.3.1 – 1849.10.17, 波兰作曲家) 的 f 小调玛祖卡 (Mazurkas, Op. 68 no. 4);
- 李斯特的歌曲 *Ich möchte hingehn* (S. 296) 和 *Die Loreley* (S. 273) 等.

李斯特: Ich möchte hingehn

♯f 小调:　　i={♯F, A, ♯C}, 　iv={B, D, ♯F}

李斯特使用的特里斯坦和弦分别解决到正和弦 i 和 iv.

音网 (Tonnetz)

瓦格纳从传统的调性和谐前进了一步, 强调和弦本身的声音效果, 而非传统的和声功能 (function). 因此, 特里斯坦和弦应当被看作是有别于传统和声进行方式的一系列和弦的连接.

与音程之间的线性关系相比, 和弦之间呈现出更加复杂的网络关系.

最先注意到和弦之间存在抽象的网络关系的是欧拉

Leonhard Euler

1707.4.15 –

1783.9.18

瑞士数学家、物理学家

音网 (Tonnetz)

Euler, *Tentamen novae theoriae musicae ex certississmis harmoniae principiis dilucide expositae* (An attempt at a new theory of music, exposed in all clearness according to the most well-founded principles of harmony), Saint Petersburg Academy, 1739.

到了 19 世纪, 黎曼等人在纯律的框架内发展了音网的理论. 进入 20 世纪下半叶, 一些音乐家在平均律框架内进一步利用和发展了音网的理论和分析工具, 形成了 **新黎曼理论** (Neo-Riemannian Theory).

Karl Wilhelm Julius

Hugo Riemann

1849.7.18 – 1919.7.10

德国音乐理论家、作曲家

Georg Friedrich

Bernhard Riemann

1826.9.17 –

1866.7.20

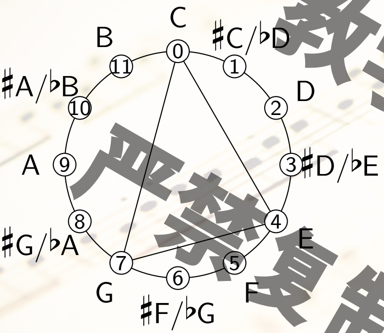
德国数学家

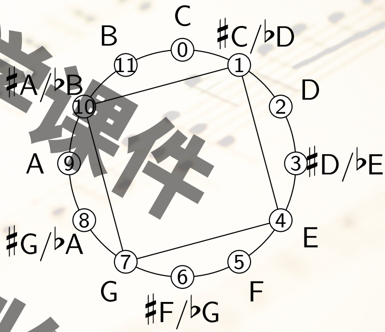
音类圆周

现代音乐理论中, 往往将三和弦、七和弦等推广到一般的 n-和弦. 一个 n-**和弦** 就是音类空间 $\mathscr{PC}$ 的一个 n-元子集合, 即 **音类集合 (pitch class set)**. 我们已经看到, 在 12 个音类与整数模 12 的同余类之间存在 1-1 对应. 据此可以把 12 个音类图解为一个圆周上均匀分布的 12 个点, 分别标号为 0, 1, ..., 11, 称作 **音类圆周**. 一个 n-和弦可以表示成音类圆周中的一个内接 n-边形.

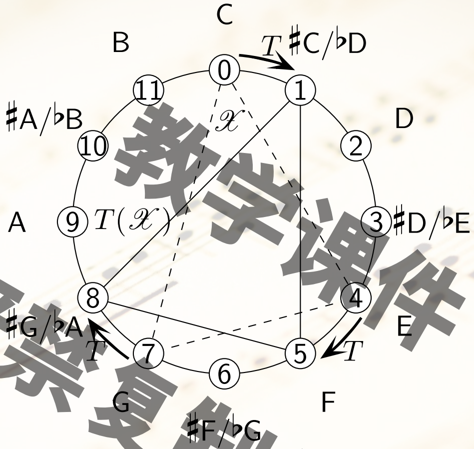
为简化符号, 省略音类符号 $\overline{\mathrm{C}}, \ldots, \overline{\mathrm{B}}$ 和同余类符号 $\overline{0}, \ldots, \overline{11}$ 的上划线.

音类圆周





大三和弦 {C, E, G} ▸ 距离 ▸ 例 减七和弦 {E, G, ♭B, ♭D}



记大三和弦 $\mathscr{X}=\{$C, E, G$\}$. 对 $\mathscr{X}$ 做移调变换 T, 得到一个新的大三和弦 $T(\mathscr{X})=\{T(\text{C}), T(\text{E}), T(\text{G})\}=\{$♯C, ♯E, ♯G$\}$, 相当于把 $\mathscr{X}$ 所对应的三角形按顺时针方向旋转 $30°$.

音类圆周

12 阶循环群 $\mathscr{T} = \langle T \rangle$ 作用在 $\mathscr{X}$ 上可以得到以任意一个音级为根音的 12 个大三和弦.

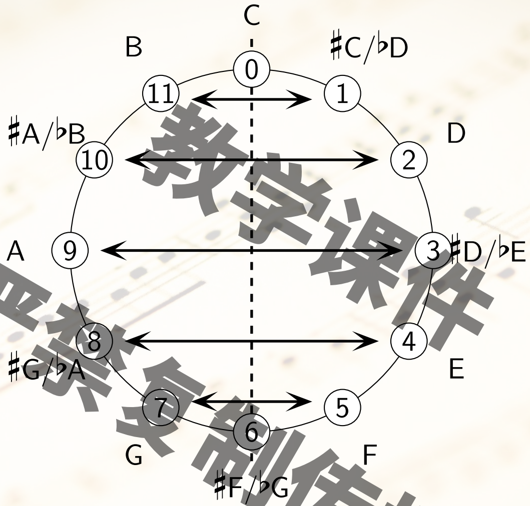
另一方面, 七和弦 $\mathscr{Y} = \{$ E, G, ♭B, ♭D $\}$ 的图形是一个正方形, 将其旋转 $0°, 90°, 180°, 270°$, 正方形都保持整体不变, 即移调变换 T^0, T^3, T^6, T^9 保持 $\mathscr{Y}$ 不动, 因此从 $\mathscr{Y}$ 出发, 移调变换只能变出 3 个不同的七和弦.

倒影变换

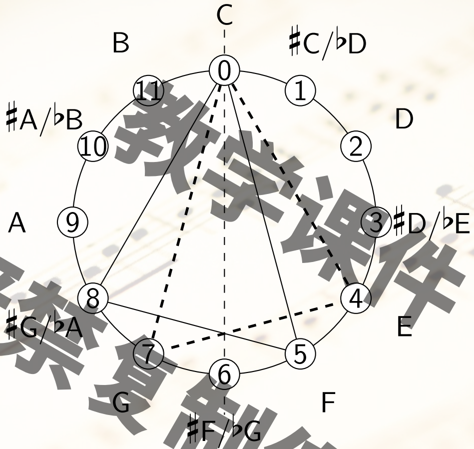
不仅移调变换可以作用在 12 个音类上, 倒影变换也可以作用在 12 个音类上.

在音类圆周上, 倒影变换 I 相当于作关于 C $-$ ♯F 轴的反射. 进一步, I 和 T 共同生成一个 24 阶群, 它同构于二面体群

$$\mathscr{D} = \langle T, I \rangle \cong D_{24}.$$



倒影变换 I: $x \mapsto -x \pmod{12}$



对大三和弦 $\mathscr{X} = \{\text{C, E, G}\}$ 做倒影变换 I，得到一个**小三和弦**

$$I(\mathscr{X}) = \{I(\text{C}), I(\text{E}), I(\text{G})\} = \{\text{C}, \flat\text{A}, \text{F}\}.$$

艾伦・福特 (Allen Forte)

1926.12.23 – 2014.10.16

美国音乐理论家

The structure of atonal music, Yale University Press, New Haven, 1973.

中译本: 无调性音乐的结构, 罗忠镕译, 上海音乐出版社, 上海, 2009.

音类集合之间的等价

音类集合的数目是很大的: $\mathscr{PC}$ 的 3-元子集合共有

$$C_{12}^{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot} = 220 \text{ 个}.$$

另一方面, 经过某些变换可以互相得到的音类集合具有一定的相似性. 例如三和弦

$$\{\mathsf{C},\ \mathsf{E},\ \mathsf{G}\} \xrightarrow{T} \{\sharp\mathsf{C},\ \sharp\mathsf{E},\ \sharp\mathsf{G}\} \xrightarrow{I} \{\mathsf{B},\ \mathsf{G},\ \mathsf{E}\}$$

轨道与稳定化子

设 $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ 是一个有限集合. Ω 到自身的全体可逆变换构成 n **次对称群** S_n. S_n 的任一子群 $G \leq S_n$ 称为 Ω 上的一个**置换群 (permutation group)**.

给定 Ω 上的一个置换群 $G \leq S_n$, 定义 Ω 中元素之间的一个等价关系:

$$\alpha \sim \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, g \in G \ \text{使得}\ g(\alpha) = \beta.$$

轨道与稳定化子

对于 $\alpha \in \Omega$, 把 α 所在的等价类记作

$$\mathrm{Orb}(\alpha) = \{\, \beta \in \Omega \mid \beta \sim \alpha \,\},$$

称为包含 α 的 **轨道 (orbit)**. 记 G 的子集合

$$G_\alpha = \{\, g \in G \mid g(\alpha) = \alpha \,\},$$

称为 α 的 **稳定化子 (stabilizer)**.

轨道与稳定化子

命　题 1.

(1) $\mathrm{Orb}(\alpha) = \{\, g(\alpha) \mid \forall g \in G \,\}$.

(2) G_α 是 G 的子群.

(3) 对于 $\alpha, \beta \in \Omega$, 已知存在 $g \in G$ 使得 $g(\alpha) = \beta$, 则有

$G_\beta = g G_\alpha g^{-1}$.

命题 2.

对任意 $g, h \in G$ 和 $\alpha \in \Omega$,

$$g(\alpha) = h(\alpha) \iff h^{-1}g \in G_\alpha.$$

推论

$$|\mathrm{Orb}(\alpha)| = |G : G_\alpha| = |G|/|G_\alpha|.$$

音类集合的分类

在群 $\mathscr{D}=\langle T,\ I\rangle$ 的作用下，音类集合就按照 $\mathscr{D}$ 的轨道被分成了若干等价类. 例如 220 个包含 3 个音类的集合被分成了 12 个等价类 (轨道).

按照一定的方法在每个等价类里取一个音类集合作为**代表**，就得到了**音类集合表 (The list of pitch class sets)**. 由大、小三和弦构成的等价类在表中被标记为 3-11.

音类之间的距离

给定两个音类 $\mathrm{X} \neq \mathrm{Y}$. 在音类圆周上连接 X, Y, 得到弦 $\overline{\mathrm{XY}}$. 定义 X, Y 之间的 **距离** 为弦 $\overline{\mathrm{XY}}$ 所对应的劣弧中包含的音类数目 -1. 例如, 音类 C 和 E 之间的距离为 4, E, G 之间的距离为 3, 而 G, C 间的距离等于 5. ▸ 音类圆周

在减七和弦 $\mathscr{Y} = \{$E, G, ♭B, ♭D$\}$ 中, ♭B 和 ♭D 之间的距离为 3, 而 ♭B, E 之间的距离等于 6.

显然, 对于任意两个不同的音类, 它们之间的距离 d 满足 $1 \leq d \leq 6$.

距离向量

在音类圆周上, 一个 n-和弦表示成一个 n-边形, 具有

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

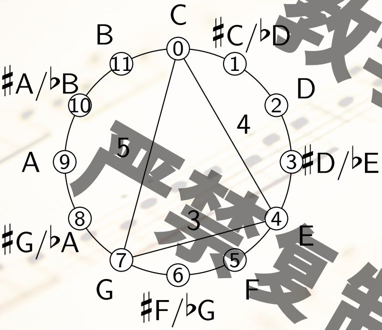
对顶点. 把这 C_n^2 对顶点用直线相连, 则这些连线分别构成 n-边形的边和对角线. n-边形中的每一对顶点代表了 n-和弦中的两个音类, 它们之间的距离 d 满足 $1 \le d \le 6$.

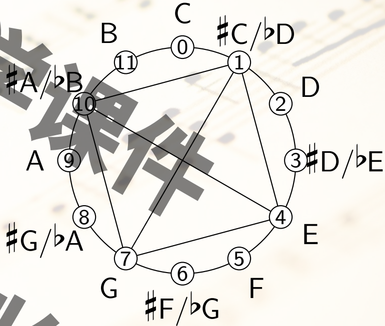
定义这个 n-和弦的 **距离向量**

$$\delta = (d_1, d_2, \ldots, d_6),$$

其中 d_i 等于距离为 i 的顶点对的数目.

距离向量





$\delta = (0, 0, 1, 1, 1, 0)$

$\delta = (0, 0, 4, 0, 0, 2)$

给定正整数 $k<6$, 对于每一对距离为 k 的音类 X 和 Y, 移调变换 T^k 或者 T^{-k} 恰保持其中的一个音类不变. 即有

$$|\{\mathrm{X},\ \mathrm{Y}\}\cap\{T^k(\mathrm{X}),\ T^k(\mathrm{Y})\}|=1,$$

同理有

$$|\{\mathrm{X},\ \mathrm{Y}\}\cap\{T^{-k}(\mathrm{X}),\ T^{-k}(\mathrm{Y})\}|=1.$$

而对于距离不等于 k 的音类对 X 和 Y,

$$|\{\mathrm{X},\ \mathrm{Y}\}\cap\{T^k(\mathrm{X}),\ T^k(\mathrm{Y})\}|=0,$$

$$|\{\mathrm{X},\ \mathrm{Y}\}\cap\{T^{-k}(\mathrm{X}),\ T^{-k}(\mathrm{Y})\}|=0.$$

当 $k=6$ 时, 对于每一对距离为 6 的音类 X 和 Y, 移调变换 T^6 互换这两个音类, 故有

$$|\{\,\mathrm{X},\ \mathrm{Y}\,\}\cap\{\,T^6(\mathrm{X}),\ T^6(\mathrm{Y})\,\}|=2.$$

而对于距离不等于 6 的音类对 X 和 Y, 仍然有

$$|\{\,\mathrm{X},\ \mathrm{Y}\,\}\cap\{\,T^6(\mathrm{X}),\ T^6(\mathrm{Y})\,\}|=0.$$

定 理

设一个 n-和弦 $\mathscr{X}$ 的距离向量为 $\delta = (d_1, d_2, \ldots, d_6)$. 对于 $1 \le k \le 5$,

$$|\mathscr{X} \cap T^k(\mathscr{X})| = d_k = |\mathscr{X} \cap T^{-k}(\mathscr{X})|.$$

而对于 $k = 6$, 有

$$|\mathscr{X} \cap T^6(\mathscr{X})| = 2d_6.$$

例: 减七和弦

考虑减七和弦 $\mathscr{Y}=\{\mathrm{E},\mathrm{G},\flat\mathrm{B},\flat\mathrm{D}\}$, 其距离向量 ▸ 音类圆周

$$\delta=(0,0,4,0,0,2).$$

根据定理, 移调变换 T^3 和 $T^{-3}=T^9$ 保持 4 个音类不变, 即保持 $\mathscr{Y}$ 整体不变. 同理, 移调变换 T^6 保持 $2d_6=4$ 个音类不变, 所以也保持 $\mathscr{Y}$ 整体不变.

因此, 保持 $\mathscr{Y}$ 整体不变的移调变换有 T^3, T^6, T^9 和 $T^0=e$.

例: 减七和弦

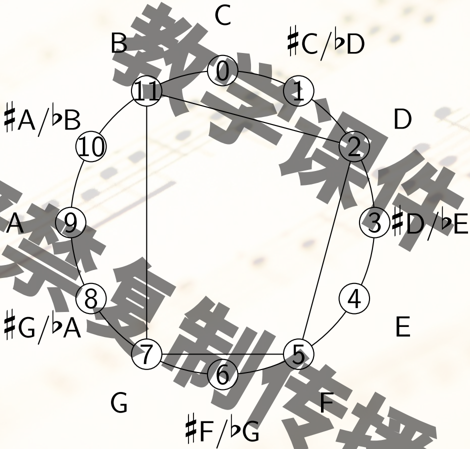
在音类圆周上, $\mathscr{Y}$ 是一个正方形, 所以在 $\mathscr{D}$ 中的 12 个倒影变换, 恰有 4 个保持 $\mathscr{Y}$ 整体不变. 于是群 $\mathscr{D}=\langle T,\ I\rangle$ 中保持 $\mathscr{Y}$ 不变的稳定化子是 8 阶子群, 进而得到 $\mathscr{D}$ 作用在和弦 $\mathscr{Y}$ 上的轨道长度等于

$$|G|/|G_\alpha| = 24/8 = 3,$$

即共有 3 种不同的减七和弦.

事实上, 从图中容易看出, 另外两个减七和弦为 $\{\mathrm{B},\ \mathrm{D},\ \mathrm{F},\ {}^\flat\mathrm{A}\}$ 和 $\{{}^\sharp\mathrm{D},\ {}^\sharp\mathrm{F},\ \mathrm{A},\ \mathrm{C}\}$. 这个等价类在音类集合表中的标号为 4-28.

例 2



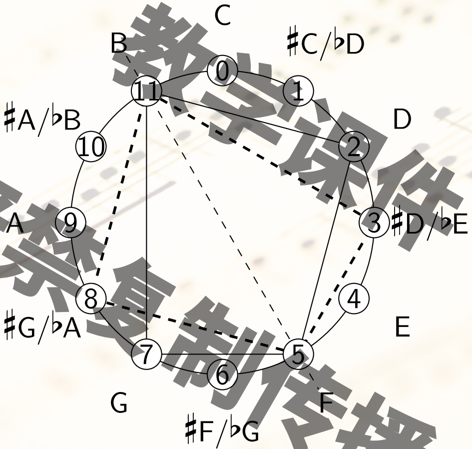
大小七和弦 $\mathscr{X} = \{\mathrm{G},\ \mathrm{B},\ \mathrm{D},\ \mathrm{F}\}$, 距离向量 $\delta = (0, 1, 2, 1, 1, 1)$

例 2

大小七和弦 $\mathscr{X}=\{\mathrm{G},\ \mathrm{B},\ \mathrm{D},\ \mathrm{F}\}$ 的距离向量 $\delta=(0,1,2,1,1,1)$. 根据定理, 不存在移调变换 T^k 保持 4 个音类不变.

另一方面, 从图中可以看出 $\mathscr{X}$ 上没有对称轴, 这说明 12 个倒影变换都不能保持它整体不变. 换言之, 大小七和弦 $\mathscr{X}$ 在 $\mathscr{D}$ 中的稳定化子是平凡子群 $\langle e\rangle$, 因此在 $\mathscr{D}$ 作用下可以得到 24 个互不相同的七和弦. 这个等价类在音类集合表中的标号为 4-27.

例 2



减小七和弦 $\mathscr{X}' = \{\mathrm{F}, \flat\mathrm{A}, \flat\mathrm{C}, \flat\mathrm{E}\}$, $\delta = (0, 1, 2, 1, 1, 1)$

全音程和弦 (all-interval chord)

一个 n-和弦 $\mathscr{A}$ 称为是**全音程和弦**, 如果其距离向量

$\delta = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$. 可见 $\mathscr{A}$ 包含 6 对距离互不相同的音类. 根据

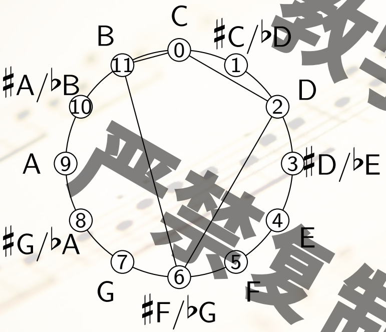
$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} = 6$$

可以得出 $n = 4$. 例如

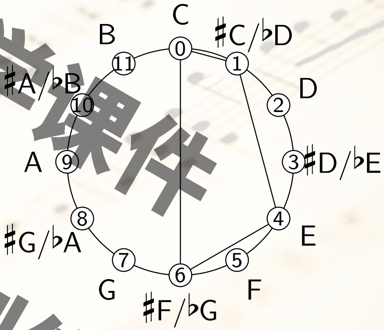
$$\mathscr{A}_1 = \{\mathrm{B},\ \mathrm{C},\ \mathrm{D},\ \sharp\mathrm{F}\},\quad \mathscr{A}_2 = \{\mathrm{C},\ \sharp\mathrm{C},\ \mathrm{E},\ \sharp\mathrm{F}\}$$

都是全音程和弦.

全音程和弦 (all-interval chord)



$\mathscr{A}_1$



$\mathscr{A}_2$

全音程和弦 (all-interval chord)

全音程和弦的构成不满足三度叠置原则, 从而不是传统的七和弦, 在调性音乐中只有在极特殊的情形才会出现. 但是在无调性音乐的创作中, 全音程和弦具有重要的地位.

勋伯格《空中花园篇》

Das Buch der hängenden Gärten (Op. 15, 1908–1909) 是作曲家为人声和钢琴写的 15 首歌曲, 歌词选自德国诗人施特凡・格奥尔格 (Stefan Anton George, 1868.7.12 – 1933.12.4) 的同名诗作. 其第一首歌的结束和弦为 $\{\sharp \mathrm{D}, \sharp \mathrm{E}, \sharp \mathrm{G}, \mathrm{A}\}$.

韦伯恩

Anton Friedrich Wilhelm

von Webern

1883.12.3 – 1945.9.15

奥地利作曲家，指挥家

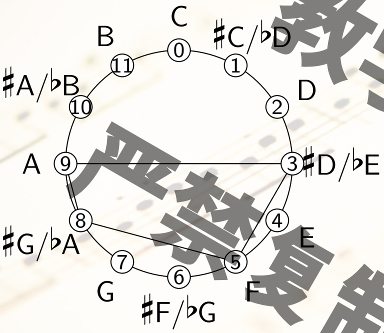
第二维也纳学派代表人

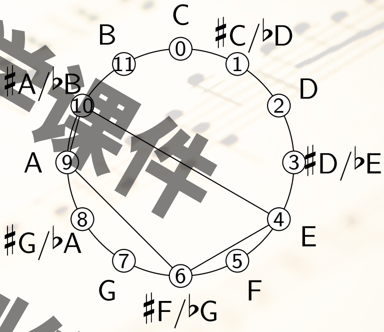
物之一

韦伯恩《管弦乐曲六首》

6 Pieces for Large Orchestra (Op. 6, 1928 修订版) 中第三首的一个和弦 { E, ♯F, A, ♭B }.

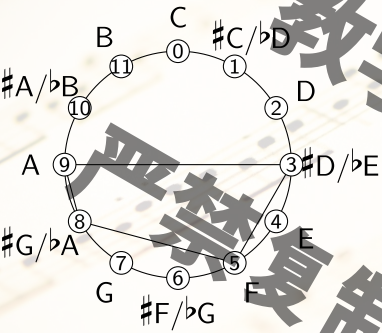
全音程和弦 (all-interval chord)



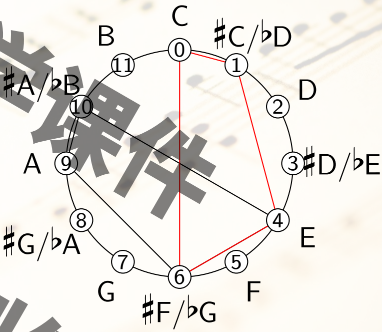


$\{\sharp D, \sharp E, \sharp G, A\}$ $\{E, \sharp F, A, \flat B\}$

全音程和弦 (all-interval chord)



$\{ \sharp D, \sharp E, \sharp G, A \}$

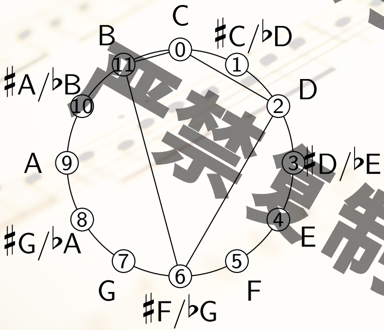


$\mathscr{A}_2$ 与 $\{ E, \sharp F, A, \flat B \}$

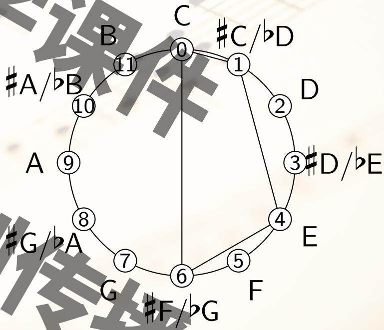
定　理

在群 $\mathscr{D}=\langle T,\ I\rangle$ 的作用下，只有两类互不等价的全音程和弦：

$\mathscr{A}_1$ 和 $\mathscr{A}_2$，在音类集合表中分别标为 4-Z29 和 4-Z15.



$\mathscr{A}_1$



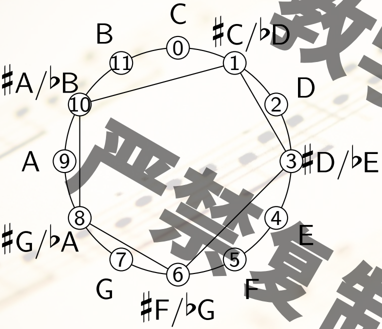
$\mathscr{A}_2$

定义与例子

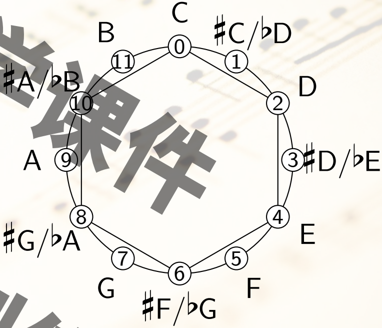
我们先对音阶给出一个几何化的定义：由音类圆周上若干顶点按照顺时针方向排序构成的 **有序集合 (ordered set)** 称作一个 **音阶** (scale).

- $[\sharp\mathrm{F},\ \sharp\mathrm{G},\ \sharp\mathrm{A},\ \sharp\mathrm{C},\ \sharp\mathrm{D}]$ 称为 **五声音阶** (pentatonic scale);
- $[\mathrm{C},\ \mathrm{D},\ \mathrm{E},\ \sharp\mathrm{F},\ \sharp\mathrm{G},\ \sharp\mathrm{A}]$ 称为 **全音音阶** (whole tone scale);
- $[\mathrm{C},\ \sharp\mathrm{C},\ \mathrm{D},\ \sharp\mathrm{D},\ \mathrm{E},\ \mathrm{F},\ \sharp\mathrm{F},\ \mathrm{G},\ \sharp\mathrm{G},\ \mathrm{A},\ \sharp\mathrm{A},\ \mathrm{B}]$ 称为 **半音音阶** (chromatic scale).

音阶的圆周表示

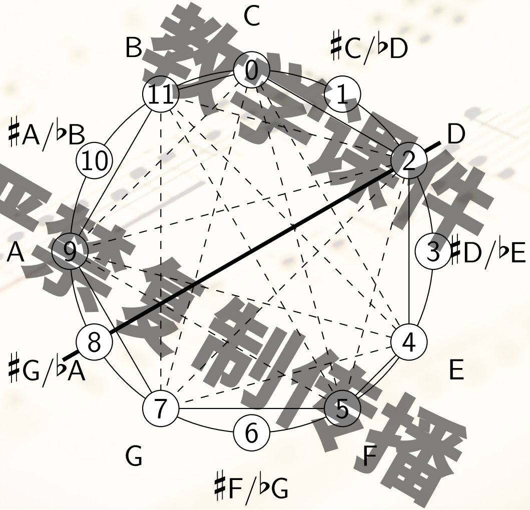


五声音阶



全音音阶

C 大调音阶 $\mathcal{C} = [\mathrm{C},\ \mathrm{D},\ \mathrm{E},\ \mathrm{F},\ \mathrm{G},\ \mathrm{A},\ \mathrm{B}]$ ▸ 自然大调



自然大调音阶

对音阶 C 做移调变换得到的音阶都是 **自然大调音阶** (diatonic scale). 音阶中的第一项称作 **主音**, 并以它来命名这个音阶. 例如, 将 C 上升 3 个半音, 就得到 ♭E 大调音阶

$$[\flat\mathrm{E},\ \mathrm{F},\ \mathrm{G},\ \flat\mathrm{A},\ \flat\mathrm{B},\ \mathrm{C},\ \flat\mathrm{D}].$$

把音阶表示成音类圆周上的若干顶点之后, 这些顶点两两之间都有确定的距离, 进而可以得到这个音阶的距离向量. 图给出了音阶 C 的几何表示, 从中不难求出其距离向量

$$\delta = (2, 5, 4, 3, 6, 1).$$

自然大调音阶

因为 δ 中没有等于 7 的分量，所以根据定理，没有非平凡的移调变换 T^k 保持 $\mathcal{C}$ 不变，于是在移调变换群 $\mathscr{T}=\langle T\rangle$ 的作用下，总共得到 12 个自然大调音阶.

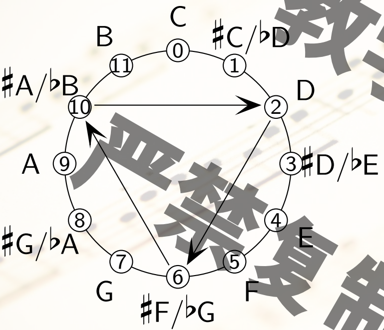
另一方面，$\mathcal{C}$ 的图形有对称轴 D — ♯G/♭A，因此增添倒影变换 I 后，相应的变换群 $\mathscr{D}=\langle T, I\rangle$ 作用到 $\mathcal{C}$ 上，不会产生新的自然大调音阶. ▸ C 大调音阶

T^5 的特殊性

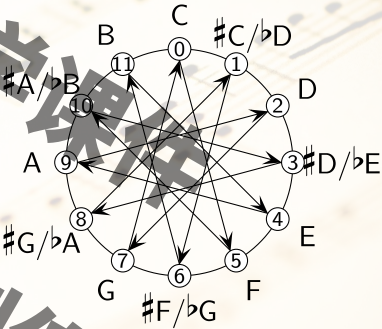
给定 k: $1 \le k \le 4$, 从任一音类出发, 连续进行移调变换 T^k, 相应地在音类圆周上把变换所得到音类连起来, 所形成的图形是一个 $12/k$ 边的凸多边形. 如果 $k = 5$, 移调变换 T^5 产生的图形会经过圆周上的每一个音类, 呈现出一个“十二角形”.

从任意一个音类出发, 每次升高 k 个半音 $(1 \le k \le 4)$, 经过 $12/k$ 次后会回到出发时的音类. 如果每次升高 5 个半音, 则须经过其他 11 个音类才能最终回到起点.

k-步移动的轨迹



$k = 4$



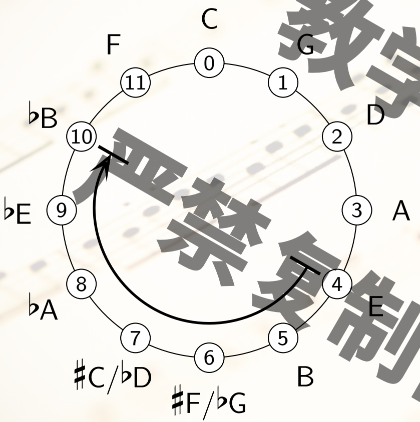
$k = 5$

五度圆周

在音类圆周上，根据五度相生原则重新排列 12 个音类，可以得到一个新的音类圆周，称为 **五度圆周**.

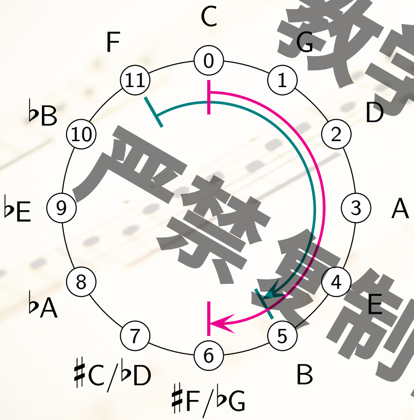
五度圆周上每一个半圆弧都对应于一个自然大调音阶，其主音是这个半圆弧上顺时针方向的第二项.

五度圆周上的自然大调音阶



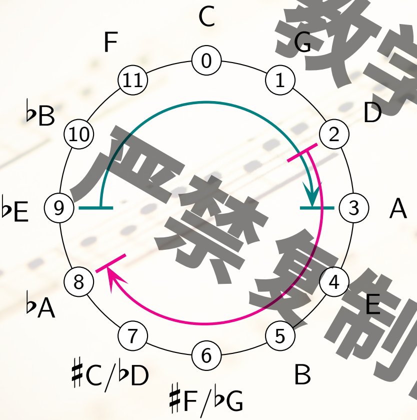
从 E 开始的半圆弧, 其第二项是 B. 把这个半圆弧上的音类重新排列, 就得到 B 大调的音阶 B, ♯C, ♯D=♭E, E, ♯F, ♯G=♭A, ♭B

调关系



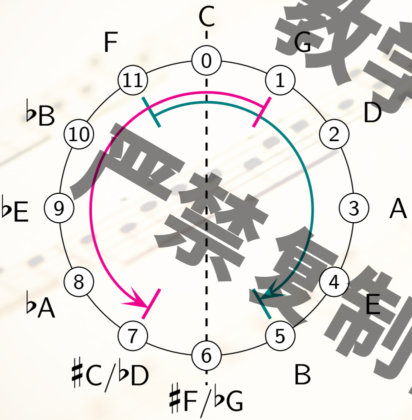
C 大调和 G 大调关系密切，因为它们的音阶有 6 个相同的音类 C, G, D, A, E, B.

调关系



A 大调与 ♭B 大调之间关系较远，它们的音阶只有两个共同的音类 D, A.

反问题



哪些大调音阶包含音类 C? 以过 C 的直径为对称轴, 做 C 大调音阶所在半圆弧的对称, 得到的半圆弧中所包含的点 G, C, F, ♭B, ♭E, ♭A, ♯C/♭D 就是包含 C 的大调音阶.

和弦出现在哪几个大调音阶中？

给定小三和弦 $\{C, \flat E, G\}$. 包含 C 的大调音阶有 7 个，其中 6 个同时包含 G，它们是

$$\flat A,\ \flat E,\ \flat B,\ F,\ C,\ G$$

而包含 $\flat$E 的大调音阶有

$$E,\ B,\ \sharp F,\ \sharp C,\ \flat A,\ \flat E,\ \flat B$$

它们之间的交为 $\flat$A, $\flat$E, $\flat$B. 所以小三和弦 $\{C, \flat E, G\}$ 只出现在上述 3 个大调音阶中.

三和弦

下面我们总假定采用平均律. 这时 12 个音类与 $\mathbb{Z}_{12}$ 中的元素之间存在 1-1 对应

$$\overline{\mathrm{C}} \longleftrightarrow \overline{0},\ \overline{\sharp\mathrm{C}}/\overline{\flat\mathrm{D}} \longleftrightarrow \overline{1},\ \ldots,\ \overline{\sharp\mathrm{A}}/\overline{\flat\mathrm{B}} \longleftrightarrow \overline{10},\ \overline{\mathrm{B}} \longleftrightarrow \overline{11}$$

为了简化符号, 下面我们省略表示等价类的上划线记号. 以 C 为根音的大三和弦记作 $\{\mathrm{C},\ \mathrm{E},\ \mathrm{G}\} = \{0,\ 4,\ 7\}$; 以 ♯F=♭G 为根音的大三和弦记作 $\{\sharp\mathrm{F},\ \sharp\mathrm{A},\ \sharp\mathrm{C}\} = \{6,\ 10,\ 1\}$.

一般地, 用大写字母 X 记以 X 为根音的大三和弦, 用小写字母 x 记以 x 为根音的小三和弦.

24 个大、小三和弦

C={0, 4, 7}	♯C=♭D={1, 5, 8}	D={2, 6, 9}
♯D=♭E={3, 7, 10}	E={4, 8, 11}	F={5, 9, 0}
♯F=♭G={6, 10, 1}	G={7, 11, 2}	♯G=♭A={8, 0, 3}
A={9, 1, 4}	♯A=♭B={10, 2, 5}	B={11, 3, 6}
c={0, 3, 7}	♯c=♭d={1, 4, 8}	d={2, 5, 9}
♯d=♭e={3, 6, 10}	e={4, 7, 11}	f={5, 8, 0}
♯f=♭g={6, 9, 1}	g={7, 10, 2}	♯g=♭a={8, 11, 3}
a={9, 0, 4}	♯a=♭b={10, 1, 5}	b={11, 2, 6}

集合 $\mathscr{S}$ 上的三个变换

把 24 个大、小三和弦构成的集合记作 $\mathscr{S}$. 引入 $\mathscr{S}$ 上的三个变换.

大三和弦 C 和小三和弦 c 的根音是相同的, 具有相同根音的大三和弦和小三和弦称作 平行的 (parallel) 大小三和弦.

定义**平行变换** $P: \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S}$, 把任意一个三和弦变成与之平行的三和弦. 例如 $P(\mathrm{C}) = \mathrm{c}$, $P(\flat\mathrm{a}) = \flat\mathrm{A}$.

平行变换 P 把小三和弦的三音升高半音, 把大三和弦的三音降低半音.

集合 $\mathscr{S}$ 上的三个变换

称大三和弦 C 与小三和弦 a 是**关系三和弦** (relative triads), 大三和弦 ♯F/♭G 与小三和弦 ♯d/♭e 也是关系三和弦.

定义**关系变换** $R: \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S}$, 把任意一个三和弦变成其关系三和弦. 例如: $R(\mathrm{F}) = \mathrm{d}$, $R(\mathrm{f}) = \sharp\mathrm{G}/\flat\mathrm{A}$.

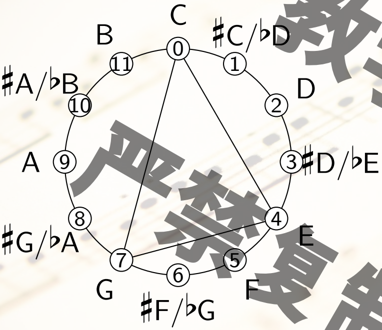
集合 $\mathscr{S}$ 上的三个变换

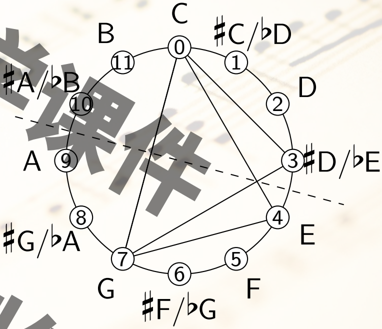
导音交换 L: 把大三和弦的根音降低一个半音, 如将大三和弦 C={ C, E, G } 变成小三和弦 e={ E, G, B }; 与此同时, L 把小三和弦的冠音升高一个半音, 如将小三和弦 e 变成大三和弦 C.

进一步的例子:

$$L: \begin{array}{l} \mathrm{G} = \{\mathrm{G},\ \mathrm{B},\ \mathrm{D}\} \mapsto \{\sharp\mathrm{F},\ \mathrm{B},\ \mathrm{D}\} = \mathrm{b} \\ \sharp\mathrm{c} = \{\sharp\mathrm{C},\ \mathrm{E},\ \sharp\mathrm{G}\} \mapsto \{\sharp\mathrm{C},\ \mathrm{E},\ \mathrm{A}\} = \mathrm{A} \end{array}$$

平行变换 P 的几何解释

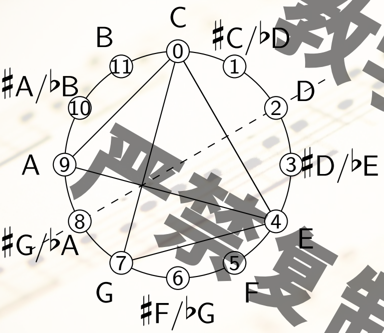


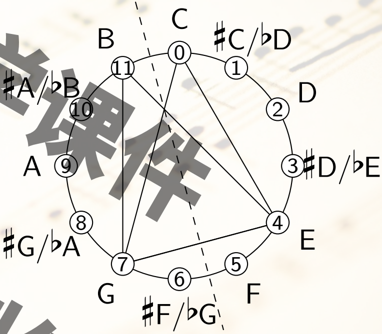


C 大三和弦

P(C)=c

关系变换 R 和导音交换 L 的几何解释





R(C)=a L(C)=e

三个变换的共同特点

从几何上看，这三个对称都只改变三角形的一个顶点，保持另外两个顶点不动.

从音乐上看，这三个变换都只改变三和弦中的一个音级，保持其他两个音级不变. 这个特点使得变换前后的和弦连接在音乐作品中屡屡出现.

音乐实例

在 16 — 18 世纪西方音乐中，有许多小调式的作品都使用平行的大三和弦作为终止. 例如巴赫的康塔塔 *Gottlob! nun geht das Jahr zu Ende* (BWV 28), 最后一段合唱是 a 小调的, 但其结尾用 A 大三和弦终止, 相当于把小三和弦 $\mathrm{a} = \{\mathrm{A}, \mathrm{C}, \mathrm{E}\}$ 中的三音升高了一个半音, 成为 $\mathrm{A} = \{\mathrm{A}, \sharp\mathrm{C}, \mathrm{E}\}$. 小三和弦中这个被升高半音的三音也被称作 Picardy 三度 (Picardy third). 我们可以将其视为平行变换 P 作用的结果: $P(\mathrm{a}) = \mathrm{A}$.

音乐实例

贝多芬第九交响曲第二乐章・谐谑曲 (scherzo) 的弦乐组第 143 – 146 小节. 其和弦进行为

$$C \xrightarrow{R} a \xrightarrow{L} F \xrightarrow{R} d$$

拓　展

瓦格纳的歌剧《女武神》(*Die Walküre*, WWV 86B) 第二幕第二场, 众神之王沃坦 (Wotan) 的唱段.

《女武神》

前两个小节的旋律从 $\flat\mathsf{A}_2$ 开始, 围绕着小三和弦 $\flat\mathsf{a}$ 的三个音级 $\flat\mathsf{A}_2$, $\flat\mathsf{C}_3$ 和 $\flat\mathsf{E}_3$ 起伏. 第三小节的前 5 个音符为

$$\flat\mathrm{A}_2,\ \flat\mathrm{C}_3,\ \flat\mathrm{F}_3,\ \flat\mathrm{F}_3,\ \flat\mathrm{F}_3,$$

构成大三和弦 $\flat\mathsf{F}$. 尔后的旋律从 $\flat\mathsf{E}_3$ 出发, 围绕着 $\flat\mathsf{C}_3$起伏, 最后终止于主音 $\flat\mathsf{A}_2$, 形成小三和弦 $\flat\mathsf{a}$. 因此整体的旋律和声可以看做是应用变换 L 的结果

$$\flat\mathrm{a} \xrightarrow{L} \flat\mathrm{F} \xrightarrow{L} \flat\mathrm{a}$$

P, R, L 循环

从大三和弦 C 出发, 相继用 P, R, L 依次作用, 可得

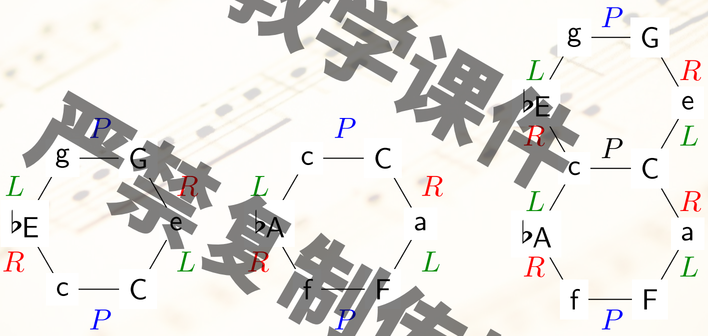
$$\mathrm{C} \xrightarrow{P} \mathrm{c} \xrightarrow{R} \flat\mathrm{E} \xrightarrow{L} \mathrm{g} \xrightarrow{P} \mathrm{G} \xrightarrow{R} \mathrm{e} \xrightarrow{L} \mathrm{C},$$

形成一个循环.

同理, 从大三和弦 F 出发, 依次用变换 P, R, L 作用, 可以得到另一个循环

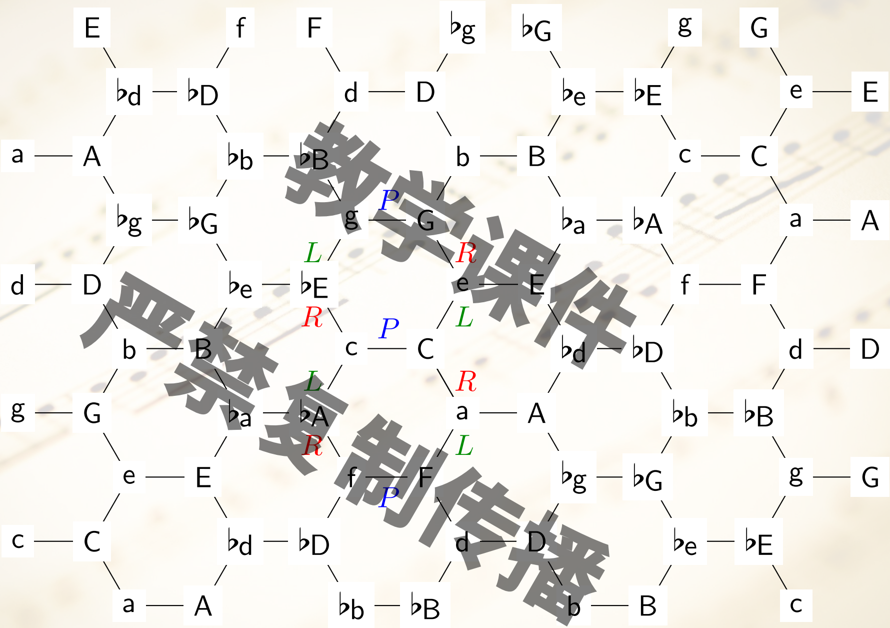
$$\mathrm{F} \xrightarrow{P} \mathrm{f} \xrightarrow{R} \flat\mathrm{A} \xrightarrow{L} \mathrm{c} \xrightarrow{P} \mathrm{C} \xrightarrow{R} \mathrm{a} \xrightarrow{L} \mathrm{F}.$$

P, R, L 循环



音　网

共有 12 个大三和弦，因此可以产生 12 个正六边形．将这些正六边形按照其公共边重合起来，就得到一个网状的图，称为 **音网** (Tonnetz).


E f F ♭g ♭G g G
♭d ♭D d D ♭e ♭E e E
a A ♭b ♭B b B c C
♭g ♭G g G ♭a ♭A a A
d D ♭e ♭E e E f F
b B c C ♭d ♭D d D
g G ♭a ♭A a A ♭b ♭B
e E f F ♭g ♭G g G
c C ♭d ♭D d D ♭e ♭E
a A ♭b ♭B b B c
P L R

带标号的音网

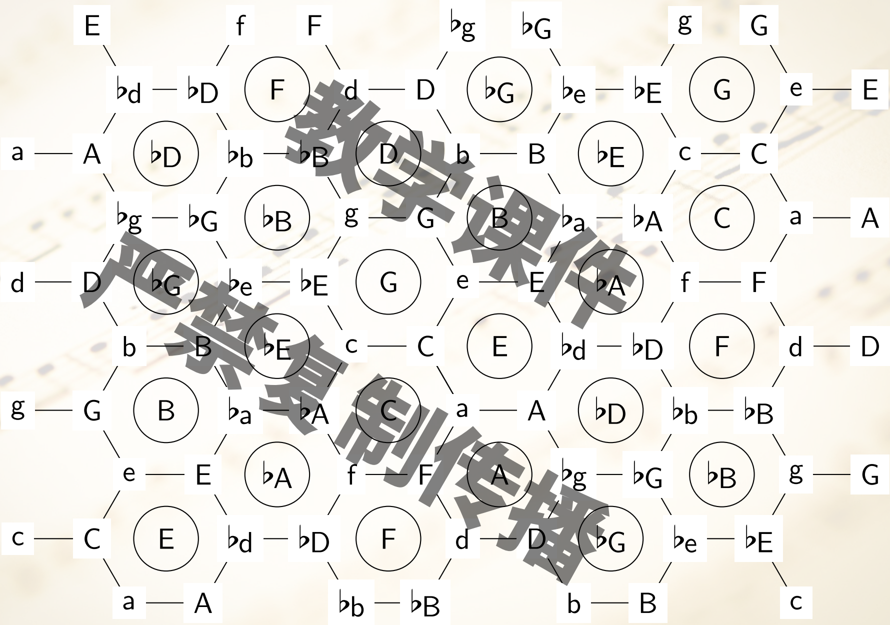
从大三和弦 C 出发，相继用 P, R, L 依次作用，可得循环

$$\mathrm{C} \xrightarrow{P} \mathrm{c} \xrightarrow{R} \flat\mathrm{E} \xrightarrow{L} \mathrm{g} \xrightarrow{P} \mathrm{G} \xrightarrow{R} \mathrm{e} \xrightarrow{L} \mathrm{C},$$

它们唯一包含同一个音类 G.

在音网中，就可以用六个三和弦共同包含的这个唯一的音类作为相应的正六边形的标号，于是把音网表示成若干带标号的正六边形构成的图形.

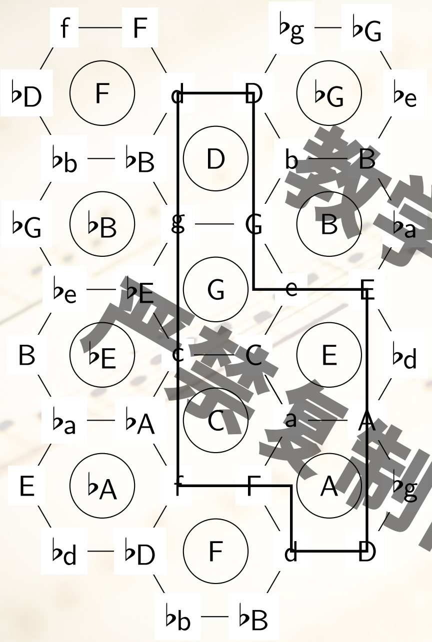
▸ 对偶


E f F ♭g ♭G g G
♭d ♭D F d D ♭G ♭e ♭E G e E
a A ♭D ♭b ♭B D b B ♭E c C
♭g ♭G ♭B g G B ♭a ♭A C a A
d D ♭G ♭e ♭E G e E ♭A f F
b B ♭E c C E ♭d ♭D F d D
g G B ♭a ♭A C a A ♭D ♭b ♭B
e E ♭A f F A ♭g ♭G ♭B g G
c C E ♭d ♭D F d D ♭G ♭e ♭E
a A ♭b ♭B b B c

音网中的协和音程

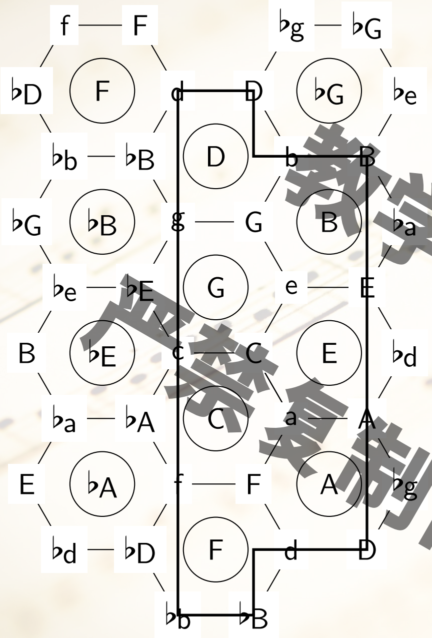
与标号为 C 的正六边形相邻的六个正六边形的标号分别为 G, F, E, $\flat$A, $\flat$E 和 A.

换言之, 与 C 相邻的正六边形所代表的音级都与 C 构成协和音程. 反之, 与 C 不相邻的正六边形, 其所代表的音级都与 C 构成不协和音程.



粗实线围成的区域是五声音阶 $\mathcal{P} = [\mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{G}, \mathrm{A}]$ 中各音级在音网中的位置.

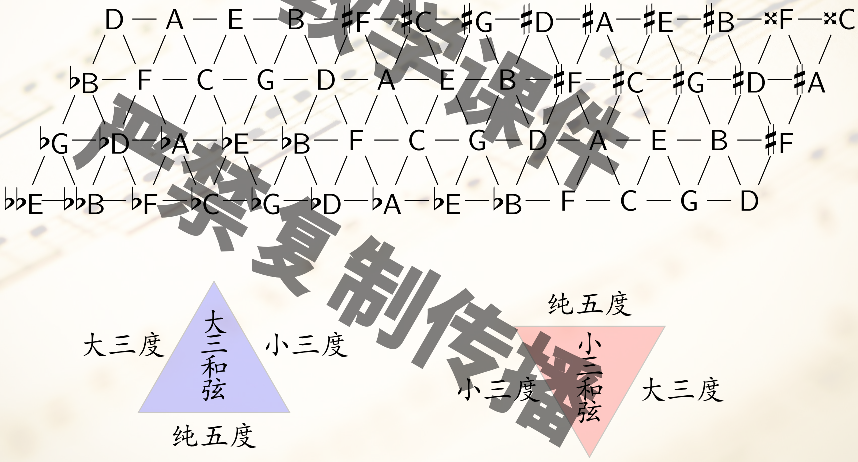
除了 D, 其他四个音级所在的正六边形都是相邻的, 换言之它们之间的音程都是协和的.



C 大调音阶 $\mathcal{M}$ = [C, D, E, F, G, A, B] 对应的图中有更多的正六边形互不相邻，说明大调音阶 $\mathcal{M}$ 包含更多的不协和音程.

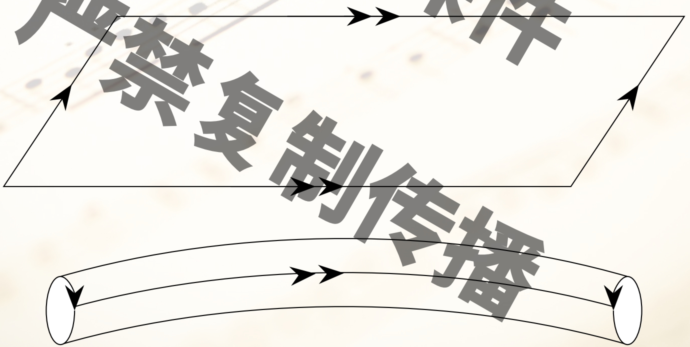
音网的对偶形式

▸ 带标号的音网　▸ 新黎曼群

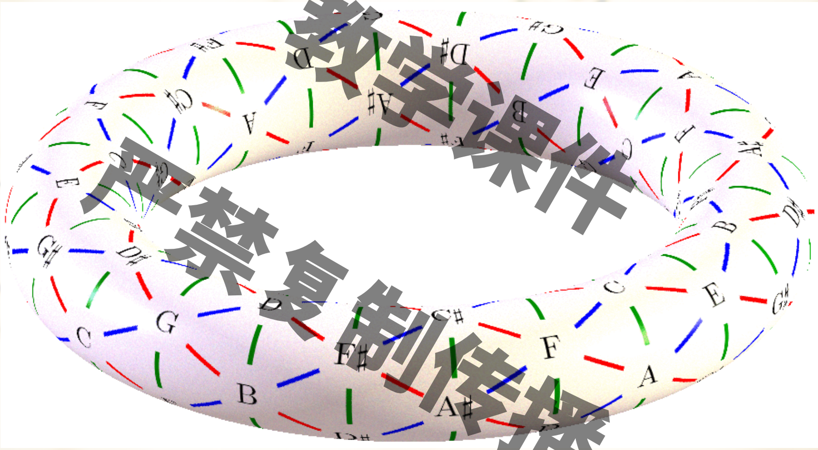


环面上的音网

在十二平均律体系内，音网实际上并不是无限延展的，而是在水平和垂直两个方向出现周期性的重复. 在几何上，这样的一个具有双周期的图形构成一个 **环面 (torus)**.

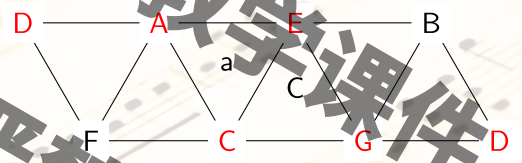


环面上的音网

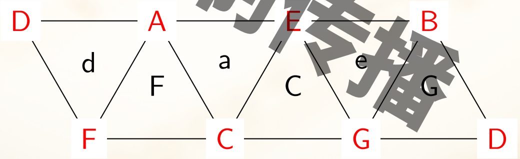


音阶包含的三和弦

五声音阶 $\mathcal{P} = [\ \mathrm{C, D, E, G, A}\ ]$



C 大调音阶 $\mathcal{M} = [\ \mathrm{C, D, E, F, G, A, B}\ ]$

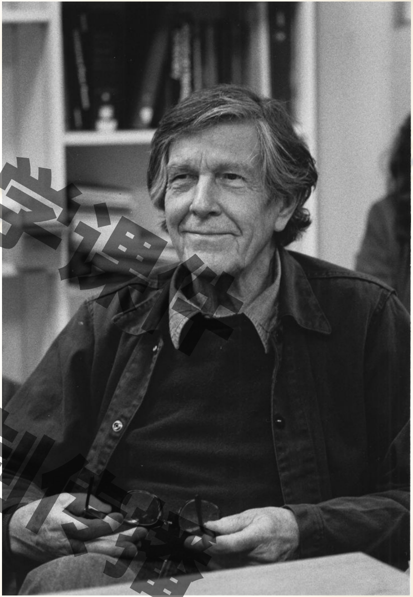


约翰·凯奇

John Milton Cage Jr.

1912.9.5 – 1992.8.12

美国作曲家，音乐理论家



钢琴曲《梦》(dream, 1948)

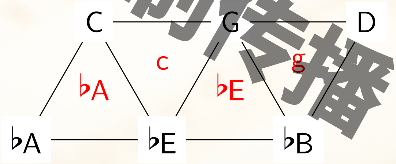
乐曲使用的是六声音阶

$$\mathcal{H} = [\mathrm{C},\ \mathrm{D},\ \flat\mathrm{E},\ \mathrm{G},\ \flat\mathrm{A},\ \flat\mathrm{B}],$$

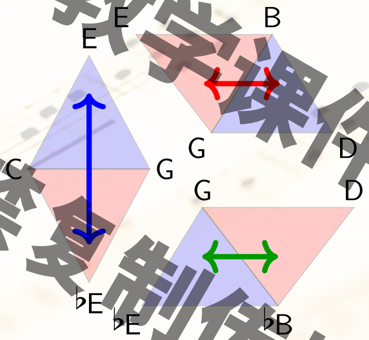
它是在 c 自然小调音阶

$$[\mathrm{C},\ \mathrm{D},\ \flat\mathrm{E},\ \mathrm{F},\ \mathrm{G},\ \flat\mathrm{A},\ \flat\mathrm{B}]$$

中去掉了 F 而得到的.



P, R, L 变换



新黎曼群

大、小三和弦的集合 $\mathscr{S}$ 上的平行变换 L, 关系变换 R 和导音交换 L 关于变换的复合 $*$ 构成一个群

$$\mathscr{N} = \langle\, P,\ R,\ L\,\rangle,$$

称作 **新黎曼群** (neo-Riemannian group).

事实上, 新黎曼群 $\mathscr{N}$ 可以由 R, L 生成, 因为有关系式

$$R * L * R * L * R * L * R = R * (L * R)^3 = P.$$

新黎曼群

从音网的任一小三和弦 $\triangledown$ 出发，依次用 R, L 作用，相当于每次向右移动一个三角形，移动 7 次后，最终得到的大三和弦 $\triangle$ 必定等于平行变换 P 对于出发时的小三和弦 $\triangledown$ 的作用. ▸ 对偶的音网

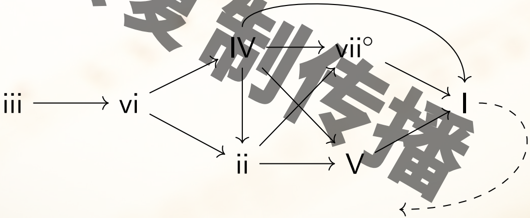
可以证明：新黎曼群同构于 24 阶二面体群

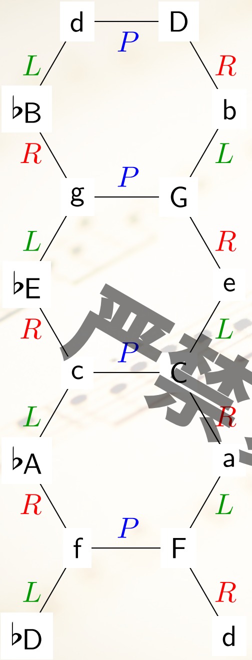
$$\mathcal{N} = \langle R, L \rangle \cong D_{24}.$$

和弦进行与新黎曼群 $\mathcal{N}$ 中的字

和弦的进行与新黎曼群 $\mathcal{N}$ 中的元素乘积密切相关. 我们以 C 大调为例, 这时各级和弦为

级	I	ii	iii	IV	V	vi	vii°
和弦	C	d	e	F	G	a	/





vi $\longrightarrow$ IV : a $\xrightarrow{L}$ F

IV $\longrightarrow$ ii : R $\xrightarrow{R}$ F

iii $\longrightarrow$ vi : e $\xrightarrow{R*L}$ a

vi $\longrightarrow$ ii : a $\xrightarrow{R*L}$ d

ii $\longrightarrow$ V : $\begin{cases} \text{d} \xrightarrow{L*R*P} \text{G} \\ \text{d} \xrightarrow{P*R*L} \text{G} \end{cases}$

群中的字

设 G 是一个群, 子集合 $S \subset G$ 是 G 的一个生成元集合. S 上的一个 **字** (word) 是一个形如

$$s_1^{\varepsilon_1} * s_2^{\varepsilon_2} * \cdots * s_k^{\varepsilon_k}$$

的表达式, 其中 $s_i \in S$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $1 \leq i \leq k$.

在新黎曼群 $\mathscr{N}$ 中, $S = \{P, R, L\}$ 是一个生成元集合,

$$R * P * R * L * R, \quad L * R * L * R * L * R * L * R * L * R * L$$

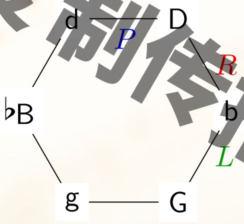
等都是 S 上的字.

新黎曼群中的字、和弦序列、音网上的路径

给定 $\mathscr{N}$ 中一个字, 从音网中某个三和弦(三角形) X 出发, 用这个字中的变换依次作用到三和弦上, 就得到三和弦的一个序列. 而在音网上就形成一条从 X 出发的路径.

给定字 $L*R*P$, 从小三和弦 d 出发, 就得到三和弦的序列

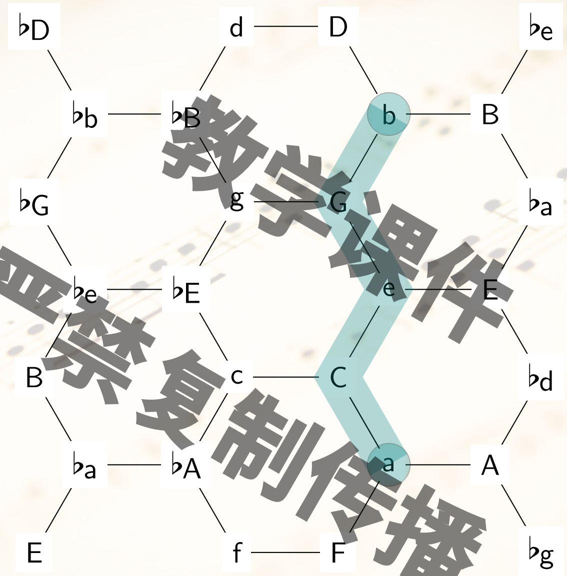
$$\mathsf{d} \xrightarrow{P} \mathsf{D} \xrightarrow{R} \mathsf{b} \xrightarrow{L} \mathsf{G}$$



作品实例 1.

海顿的 E 小调钢琴奏鸣曲 (Piano Sonata in E-minor, Hob XVI:34) 第 72 – 76 小节

$$b \xrightarrow{L} G \xrightarrow{R} e \xrightarrow{L} C \xrightarrow{R} a$$


♭D
d
D
♭e
♭b
♭B
b
B
♭G
g
G
♭a
♭e
♭E
e
E
B
c
C
♭d
♭a
♭A
a
A
E
f
F
♭g

作品实例 2.

贝多芬第九交响曲的第二乐章的 143 – 146 小节是从大三和弦 C 开始, 依次用字 $R*L*R$ 中的变换对其作用, 得到三和弦的序列

$$\mathrm{C} \xrightarrow{R} \mathrm{a} \xrightarrow{L} \mathrm{F} \xrightarrow{R} \mathrm{d}.$$

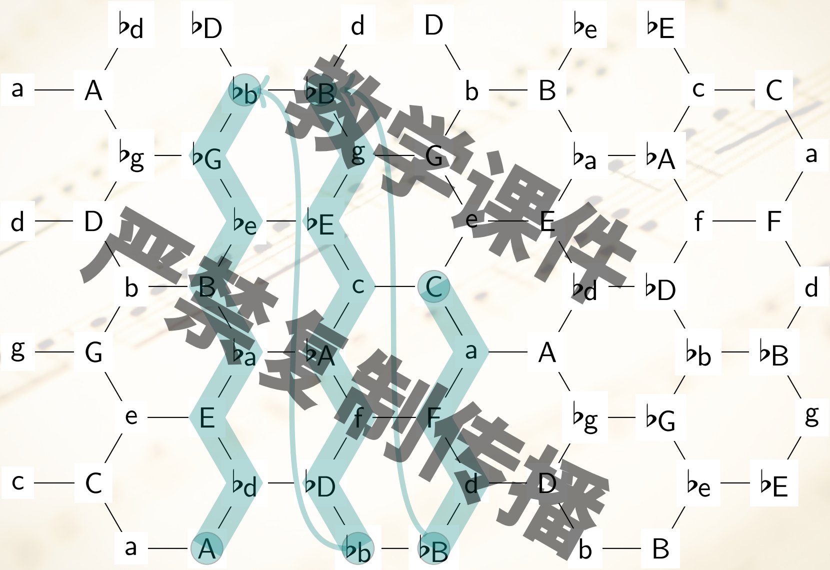
其实这仅仅是一连串和弦进行的开始. 1991年, Cohn 研究发现, 从第 143 小节开始, 贝多芬连续使用的 18 个和弦进行恰为变换 R 和 L 交替作用的结果.

Richard Cohn, Properties and generability of transpositionally invariant sets, *Journal of Music Theory*, **35** (1991), 1 – 32.

作品实例 2.

贝多芬使用的三和弦序列如下

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{C} \xrightarrow{R} \mathrm{a} \xrightarrow{L} \mathrm{F} \xrightarrow{R} \mathrm{d} \xrightarrow{L} \flat\mathrm{B} \xrightarrow{R} \mathrm{g} \xrightarrow{L} \flat\mathrm{E} \\
&\xrightarrow{R} \mathrm{c} \xrightarrow{L} \flat\mathrm{A} \xrightarrow{R} \mathrm{f} \xrightarrow{L} \flat\mathrm{D} \xrightarrow{R} \flat\mathrm{b} \xrightarrow{L} \flat\mathrm{G} \\
&\xrightarrow{R} \flat\mathrm{e} \xrightarrow{L} \mathrm{B} \xrightarrow{R} \flat\mathrm{a} \xrightarrow{L} \mathrm{E} \xrightarrow{R} \flat\mathrm{d} \xrightarrow{L} \mathrm{A}
\end{aligned}
$$


♭d ♭D d D ♭e ♭E
a A ♭b ♭B b B c C
♭g ♭G g G ♭a ♭A a
d D ♭e ♭E e E f F
b B c C ♭d ♭D d
g G ♭a ♭A a A ♭b ♭B
e E f F ♭g ♭G g
c C ♭d ♭D d D ♭e ♭E
a A ♭b ♭B b B

事实上, 新黎曼群 $\mathscr{N}$ 中的元素 $L*R$ 是 12 阶的

$$(L*R)^{12}=e,$$

因此上述和弦序列还可继续延长, 直到遍历 24 个大、小三和弦后最终回到出发点 C

$$\mathrm{C} \xrightarrow{R} \mathrm{a} \xrightarrow{L} \mathrm{F} \xrightarrow{R} \mathrm{d} \xrightarrow{L} \flat\mathrm{B} \xrightarrow{R} \mathrm{g} \xrightarrow{L} \flat\mathrm{E}$$

$$\xrightarrow{R} \mathrm{c} \xrightarrow{L} \flat\mathrm{A} \xrightarrow{R} \mathrm{f} \xrightarrow{L} \flat\mathrm{D} \xrightarrow{R} \flat\mathrm{b} \xrightarrow{L} \flat\mathrm{G}$$

$$\xrightarrow{R} \flat\mathrm{e} \xrightarrow{L} \mathrm{B} \xrightarrow{R} \flat\mathrm{a} \xrightarrow{L} \mathrm{E} \xrightarrow{R} \flat\mathrm{d} \xrightarrow{L} \mathrm{A}$$

$$\xrightarrow{R} \flat\mathrm{g} \xrightarrow{L} \mathrm{D} \xrightarrow{R} \mathrm{b} \xrightarrow{L} \mathrm{G} \xrightarrow{R} \mathrm{e} \xrightarrow{L} \mathrm{C}$$

音网上的哈密尔顿圈

如果一个图中存在一条路, 恰经过图中的每个顶点一次, 就称其为一条 **哈密尔顿路** (Hamiltonian path). 如果这条路的起点和终点是同一个顶点, 就称其为一个 **哈密尔顿圈** (Hamiltonian cycle).

环面上的音网图包含一个哈密尔顿圈, 说明可以从一个三和弦出发, 经过一系列的变换 P, R, L, 使得 24 个大、小三和弦每个都恰好出现一次. 由于每个新黎曼变换都只把三和弦中的某一个音级变化半音, 上面的事实说明人们可以比较"平滑"地遍历全部大、小三和弦.

William Rowan

Hamilton

1805.8.4 – 1865.9.2

爱尔兰物理学家、天

文学家、数学家

进一步的阅读

研究者在新黎曼理论和音网的基础上，利用变换和图的工具来分析其他一些音乐对象.

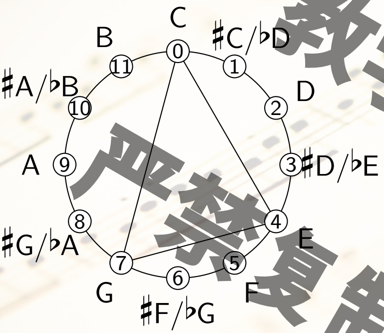
Azer Akhmedova and Michael Winter, Chordal and timbral morphologies using hamiltonian cycles, *Journal of Mathematics and Music*, **8** (2014), 1 – 24.

与 $\mathscr{D} = \langle T, I \rangle$ 之间的关系

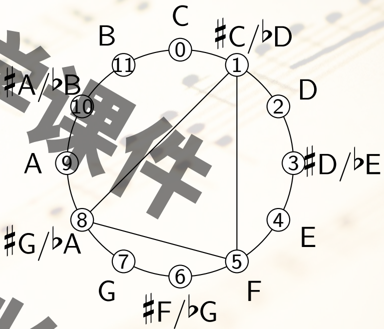
大、小三和弦的集合 $\mathscr{S}$ 包含 24 个元素，因此 $\mathscr{S}$ 上最大的变换群是对称群 S_{24}，而新黎曼群 $\mathscr{N}$ 可以看作是 S_{24} 的一个子群.

移调变换 T 和倒影变换 I 生成的群 $\mathscr{D} = \langle T, I \rangle$ 原本是定义在音类集合上的. 通过对三和弦中每个音类的变换，可以诱导出 $\mathscr{D}$ 中元素在集合 $\mathscr{S}$ 上的一个作用，从而可以把 $\mathscr{D}$ 也看作是S_{24} 的子群.

移调变换 T 在 $\mathscr{S}$ 上的作用

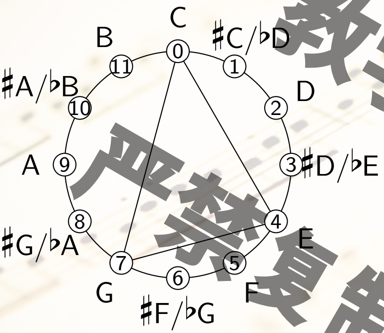


C 大三和弦

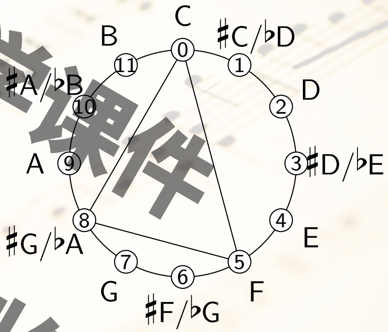


T(C)=♯C 大三和弦

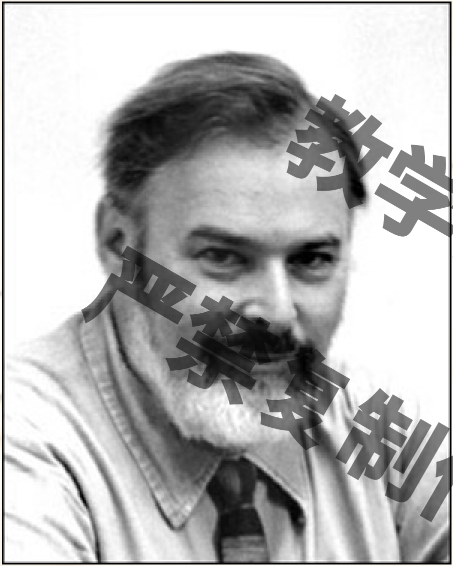
倒影变换 I 在 $\mathscr{S}$ 上的作用



C 大三和弦



I(C)=f 小三和弦



David Benjamin Lewin

1933.7.2 – 2003.5.5

美国音乐理论家、作曲家、评论家

子群的中心化子

不仅如此, David Lewin 指出: 作为对称群 S_{24} 的子群, $\mathscr{D}$ 和新黎曼群 $\mathscr{N}$ 之间存在着某种对偶 (dual) 关系.

定　义

设 G 是一个群, $H \leq G$ 是一个子群. 定义

$$C_G(H) = \{\, g \in G \mid g * h = h * g,\ \forall h \in H \,\},$$

称为 H 在 G 中的 **中心化子** (centralizer).

对偶关系

定 理

$$C_{S_{24}}(\mathscr{N}) = \mathscr{D}, \qquad C_{S_{24}}(\mathscr{D}) = \mathscr{N}.$$

Alissa Crans, Thomas Fiore, Ramon Satyendra, *Musical actions of dihedral groups*, The American Mathematical Monthly, **116** (2009), 479 – 495.

Julian Hook, Uniform triadic transformation, *Journal of Music Theory*, **46** (2002), 57 – 126.