旋 律 与 对 称

Melody and Symmetry

王　杰

北京大学数学科学学院

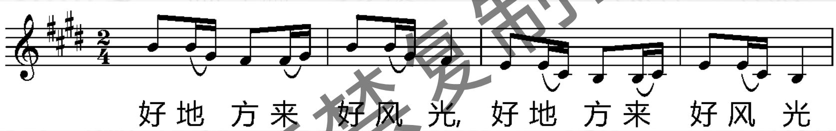
2017 – 2018 学年 • 第二学期

复　习

如何变化一小段旋律？用数学语言：可以对旋律做哪些 **变换 (transformation)**？

最简单的方法就是移动它们的音高，称为 **移调 (transposition)**.

例如：贺敬之词、马可曲的《南泥湾》



第 3、4 两个小节把前两个小节的旋律严格地降低了一个纯五度.

复　习

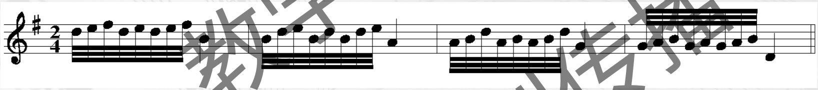
第一小节	B	B	♯G	♯F	♯F	♯G
音程	P5	P5	P5	P5	P5	P5
第三小节	E	E	♯C	B	B	♯C

$1 = \mathrm{E}$:

$$| \; \underline{5\underline{53}} \; \underline{2\underline{23}} \; | \; \underline{5\underline{53}} \; 2 \; | \quad \Longrightarrow \quad | \; \underline{1\underline{1\underset{\cdot}{6}}} \; \underline{\underset{\cdot}{5}\underline{\underset{\cdot}{5}\underset{\cdot}{6}}} \; | \; \underline{1\underline{1\underset{\cdot}{6}}} \; \underset{\cdot}{5} \; |$$

复　习

秦鹏章、罗忠镕编配的民族管弦乐曲《春江花月夜》，其第三段“花影层叠”中连续运用了移调手法



$1 = \mathrm{G}$:

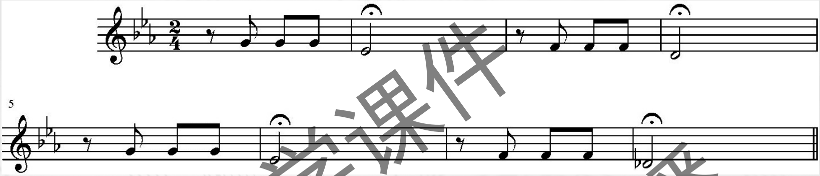
$| \; \underline{\underline{56756567}} \; 3 \; | \; \underline{\underline{35635356}} \; 2 \; | \; \underline{\underline{23523235}} \; 1 \; | \; \underline{\underline{12312123}} \; \underset{\cdot}{6} \; |$

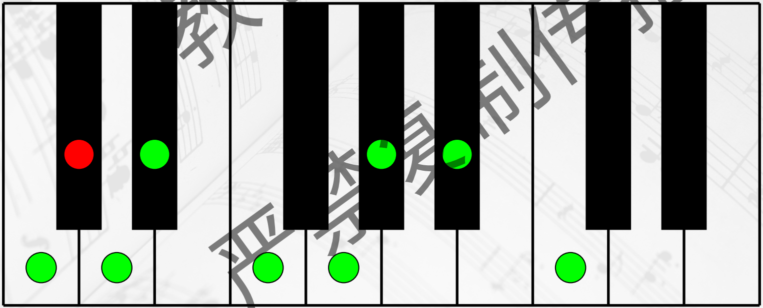
严格移调 vs 调性移调

严格移调 (exact transposition): 把一段旋律中的每个音级升高 (降低) 相同的半音数.

调性移调 (tonal transposition): 适当调整升高 (降低) 的半音数, 使得移调后得到的各个音级仍然在调式音阶中.

c 小调命运交响曲





严格移调 vs 调性移调

对于音级 C, E, G 做升高 4 个半音的 **严格移调**, 得到 E, $\sharp$G, B.

如果这三个音级分别属于 C 大调音阶和 F 大调音阶时, 对其做相应的 **调性移调**, 得到的结果分别为 E, G, B 和 E, G, $\flat$B.

何占豪(1933 –) 陈钢(1935 –)

小提琴协奏曲《梁山伯与祝英台》(1959)


cresc.
61


悲憤地
(Patimento) ♩= 126
哀傷地 傾訴地
(Lagrimoso) ♩= 48
22

乐音体系的数字化

假定以 Imperial 290 钢琴 97 个键的乐音构成乐音体系

$$\mathbb{M} = \{ \mathrm{C}_0,\ \ldots,\ \mathrm{B}_0,\ \mathrm{C}_1,\ \ldots,\ \mathrm{B}_1,\ \ \ldots,\ \ \mathrm{C}_7,\ \ldots,\ \mathrm{B}_7,\ \mathrm{C}_8 \}.$$

可以把这 97 个音级与数字 0, 1, 2, . . ., 96 相对应. 即

$$\begin{array}{c}
\mathrm{C}_0 \longleftrightarrow 0,\ \sharp\mathrm{C}_0/\flat\mathrm{D}_0 \longleftrightarrow 1,\ \ldots,\ \mathrm{B}_0 \longleftrightarrow 11, \\
\mathrm{C}_1 \longleftrightarrow 12,\ \sharp\mathrm{C}_1/\flat\mathrm{D}_1 \longleftrightarrow 13,\ \ldots,\ \mathrm{B}_1 \longleftrightarrow 23, \\
\vdots \\
\mathrm{C}_7 \longleftrightarrow 84,\ \sharp\mathrm{C}_7/\flat\mathrm{D}_7 \longleftrightarrow 85,\ \ldots,\ \mathrm{B}_7 \longleftrightarrow 95, \\
\mathrm{C}_8 \longleftrightarrow 96.
\end{array}$$

移调变换

给定正整数 n. 把升高 n 个半音的移调变换记作 T_n, 降低 n 个半音的移调变换记作 T_{-n}. 对任一音级 $x \in \mathbb{M}$,

$$T_n(x) = x + n, \quad T_{-n}(x) = x - n.$$

一般地, 对任意整数 $z \in \mathbb{Z}$, 可以把移调变换统一记作

移调变换

$$T_z(x) = x + z.$$

特别地, 把升高 0 个半音的移调变换记作 T_0.

移调变换

对任意整数 $m, n \in \mathbb{Z}$, 把两个移调变换 T_m, T_n **相继作用到**某个音级上, 得到的效果仍然是对该音级的一个移调. 我们用记号

$$T_n * T_m$$

表示先用 T_m 作用, 然后再用 T_n 作用.

移调变换相继作用

$$T_n * T_m = T_{m+n}, \qquad m, n \in \mathbb{Z}.$$

例

移调变换 T_7 作用到 C$_4$ (中央 C) 上, 对应于 $48 \in \mathbb{M}$, 所以

$$T_7(\mathrm{C}_4) = T_7(48) = 48 + 7 = 55 = \mathrm{G}_4.$$

移调变换 T_{-5} 作用到 G$_4$ 上, 有

$$T_{-5}(55) = 55 - 5 = 50 = \mathrm{D}_4.$$

$$(T_{-5} * T_7)(\mathrm{C}_4) = T_2(\mathrm{C}_4) = \mathrm{D}_4.$$

移调变换的性质

▸ 移调变换群

- (交换律) 对任意 $m, n \in \mathbb{Z}$, 有 $T_m * T_n = T_n * T_m$.
- (结合律) 任意给定正整数 $l, m, n \in \mathbb{Z}$, 有

$$(T_l * T_m) * T_n = T_l * (T_m * T_n).$$

- (单位元) 对任意 $n \in \mathbb{Z}$, 有

$$T_n * T_0 = T_n = T_0 * T_n.$$

- (逆变换) 对于任意 T_n $(n \in \mathbb{Z})$, 都唯一存在一个整数 $m = -n$, 使得

$$T_n * T_m = T_m * T_n = T_{n+m} = T_0.$$

The saddest music ever written

《野战排》(Platoon), Hemdale Film Corporation, 1986

导演: 奥利弗 · 斯通 (Oliver Stone)

1987 年获得第 59 届奥斯卡最佳影片、最佳导演、最佳音响、最佳剪辑四项大奖

“越战三部曲”之一. 其他两部是: 《生于七月四日》(Born on the Fourth of July, 1989), 《天与地》(Heaven & Earth, 1993).

Samuel Osborne Barber

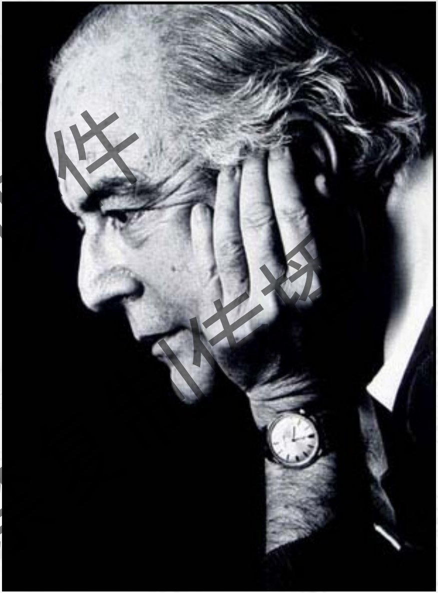
1910.3.9 – 1981.1.23

美国作曲家

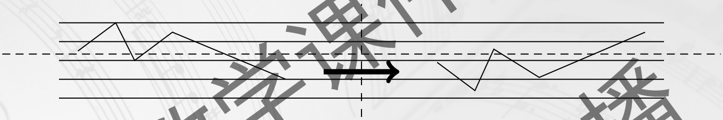
$\flat$B 小调弦乐柔版

Adagio for Strings

Op. 11 (1936)



关于水平方向直线的对称



这种变换称为 **倒影 (inversion)**. 直观地看, 倒影就是把一段旋律上下颠倒. 严格讲, 就是把旋律中的上升音程用相同半音数的下降音程代替, 把下降音程用相同半音数的上升音程代替.

倒影

这种对称不仅从乐谱上可以明显地看出来，演奏时大多数人凭借听觉也都可以容易地分辨出来. 例如，在苏萨的《雷神》进行曲中，一开始就将上行的旋律和它的倒影同时呈现

John Philip Sousa

1854.11.6 – 1932.3.6

美国作曲家、指挥家

The Thunderer

巴赫的升D小调赋格 (WTK I-8, BWV 853) 主题

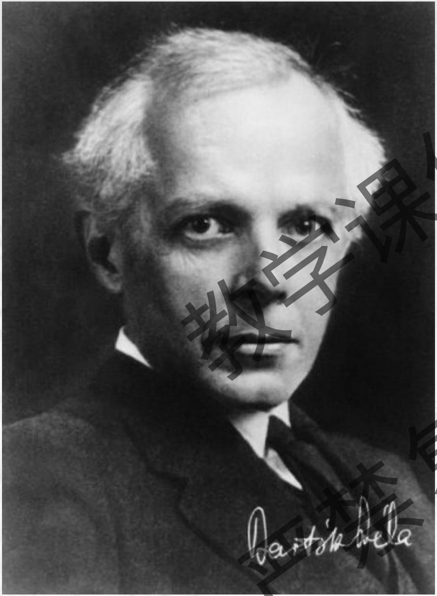
第一次倒影变换:

第二次倒影变换:

主题	↑P5 ↑m2 ↓m2 ↓M2 ↓M2 ↑M2 ↑M2 ↓P5 ↑P4 ↓M2 ↓M2 ↓M2
第一倒影	↓P4 ↓M2 ↑M2 ↑M2 ↑M2 ↓M2 ↓M2 ↑P5 ↓P5 ↑M2 ↑M2 ↑m2
第二倒影	↓P5 ↓m2 ↑m2 ↑M2 ↑m2 ↓M2 ↓M2 ↑P5 ↓P5 ↑M2 ↑M2 ↑m2

巴赫的升D小调赋格 (WTK I-8, BWV 853) 主题

到第 62 小节在低音部对主题做了展开变换



Béla Viktor János Bartók

1881.3.25 – 1945.9.26

匈牙利作曲家、钢琴家

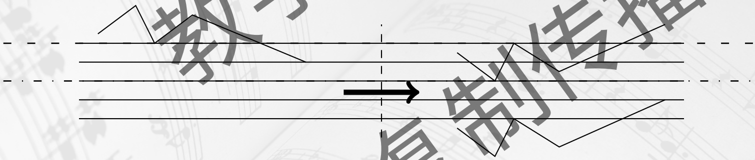
Mikrokosmos

作品写于 1926 – 1939 年期间, 共分为 6 卷, 包含 153 首钢琴曲.

第 6 卷 no. 141 题为 “Subject and Reflection”.

倒 影

选取不同的水平直线做对称轴，会得到不同的倒影.



倒 影

用 I 表示关于 $C_4 = 48$ 所在直线的倒影变换，就得到对应关系

$$
\begin{array}{cccc}
\cdots & \cdots & \flat B_3 \longleftrightarrow D_4 & B_3 \longleftrightarrow \sharp C_4 \\
{\color{red} C_4 \longleftrightarrow C_4} & \sharp C_4 \longleftrightarrow B_3 & D_4 \longleftrightarrow \flat B_3 & \sharp D_4 \longleftrightarrow A_3 \\
E_4 \longleftrightarrow \flat A_3 & F_4 \longleftrightarrow G_3 & \sharp F_4 \longleftrightarrow \flat G_3 & G_4 \longleftrightarrow F_3 \\
\sharp G_4 \longleftrightarrow E_3 & A_4 \longleftrightarrow \flat E_3 & \sharp A_4 \longleftrightarrow D_3 & B_4 \longleftrightarrow \flat D_3 \\
C_5 \longleftrightarrow C_3 & \sharp C_5 \longleftrightarrow B_2 & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

▸ 音类空间上的倒影变换

倒影变换 I 的数字表达式

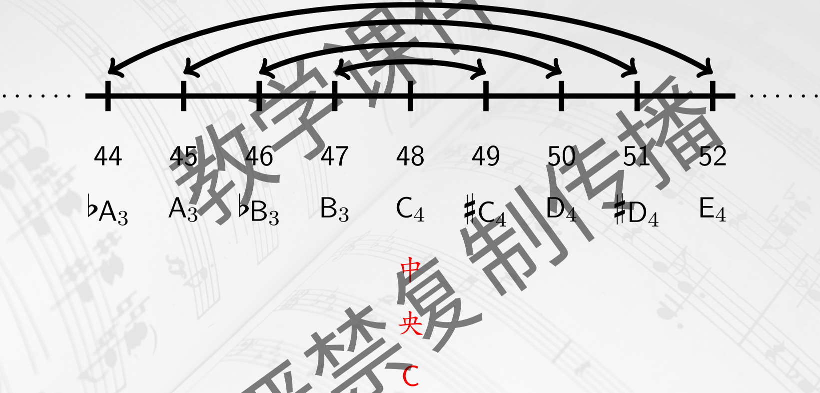
...	...	$46 \longleftrightarrow 50$	$47 \longleftrightarrow 49$
$48 \longleftrightarrow 48$	$49 \longleftrightarrow 47$	$50 \longleftrightarrow 46$	$51 \longleftrightarrow 45$
$52 \longleftrightarrow 44$	$53 \longleftrightarrow 43$	...	...

即有

$$I(x) = 96 - x, \quad \forall x \in \mathbb{M}.$$

C_4 的确是**中央 C!**

倒影变换 I 的图形表达式



I 的性质

- $I^2 \triangleq I * I = T_0$;
- $T_n * I = I * T_{-n}$.

证明: 对任意音级 $x \in \mathbb{M}$ 和整数$n \in \mathbb{Z}$,

$$(T_n * I)(x) = T_n(96 - x) = 96 - x + n,$$

$$(I * T_{-n})(x) = I(x - n) = 96 - (x - n) = 96 - x + n.$$

关于垂线的对称

这相当于把一段旋律依照相反的次序"从尾到头"地重复一遍，音乐术语称为 逆行 (**retrograde**).

倒影是上下颠倒，而逆行是左右互换.

逆 行

贝多芬的第 29 号钢琴奏鸣曲 (Piano Sonata #29, Op. 106, Große Sonate für das Hammerklavier) 第四乐章:

经过一系列的发展与冲突, 到第 155 小节出现了这个主题的完整逆行

音乐的奉献

下面节选了巴赫《音乐的奉献》(The Musical Offering, Das Musikalische Opfer, BWV 1079) 中的 18 小节乐谱, 其第一行最后的 9 小节是第二行开始 9 小节的逆行. 与此同时, 第二行的最后 9 小节也是第一行开始 9 小节的逆行.


6
10
14

在三维空间中将这两个声部交叉连接，使之合二为一.

这样的拓扑结构就是只有一个面的 **Möbius** 带 (**Möbius strip**).

逆 行

一段旋律可以表示成一个由音级构成的序列. 用 R 记逆行变换, 对一个音级序列

$$x_1x_2\dots x_{k-1}x_k, \quad x_i \in \mathbb{M}$$

做逆行变换, 得到一个新的音级序列

$$R(x_1x_2\dots x_k) = x_kx_{k-1}\dots x_2x_1.$$

逆行的性质

- $R^2 = R * R = T_0$;
- $R * T_i = T_i * R, \quad \forall i$;
- $R * I = I * R$.

字母与音名的对应

A	B	C	D	E	F	G

a	b	c	d	e	f	g
h	i	j	k	l	m	n
o	p	q	r	s	t	u
v	w	x	y	z		

海　顿

Franz Joseph Haydn

1732.3.31 –

1809.5.31

奥地利作曲家

纪念海顿

1909 年, 为纪念海顿逝世 100 周年, 当时法国顶级音乐杂志 *Revue musicale mensuelle de la S.I.M* 的主编 Jules Écorcheville 向一批著名作曲家发出邀请, 要求他们以 Haydn 的名字作为主题提供作品.

Jules Écorcheville

1872.3.17 –

1915.2.19

死于第一次世界大战 Perthes-lès-Hurlus 战场

法国音乐理论家、批评家

A	B	C	D	E	F	G

a	b	c	d	e	f	g
h	i	j	k	l	m	n
o	p	q	r	s	t	u
v	w	x	y	z		

由于 a 和 h 都对应于音名 A, d 和 y 又都对应于 D, 这样得出来的主题会显得旋律过于单调. 于是 Jules Écorcheville 把 h 改为对应于音名 B. 这样一来, Haydn 就变成了

B、A、D、D、G

拉威尔的小步舞曲

应邀提供作品的包括德彪西 (Claude-Achille Debussy, 1862.8.22 – 1918.3.25)、圣桑 (Charles-Camille Saint-Saëns, 1835.10.9 – 1921.12.16)、拉威尔等大家. 下面的乐谱节选自拉威尔的小步舞曲 (*Menuet sur le nom d'Haydn*). 一开始拉威尔就把海顿主题 B、A、D、D、G 单独标了出来. 随后拉威尔自己又把海顿主题及其逆行、倒影等都一一标注了出来.

拉威尔

Joseph-Maurice Ravel

(1875.3.7 –

1937.12.28)

法国作曲家、钢琴

家、指挥

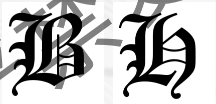
Menuet sur le Nom d'Haydn

B A C H Motif

把名字嵌入音乐中的最著名的例子莫过于 “B A C H 动机”

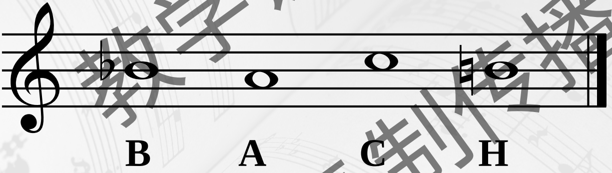
德文音名:

C	D	E	F	G	A	♭B	B
C	D	E	F	G	A	B	H



巴赫动机

巴赫的姓 BACH 对应于 $\flat$B A C B



这就是著名的 巴赫动机 (**B A C H Motif**). ▸ 勋伯格 Op. 25

巴赫动机

巴赫多次将这个动机用于其作品的低音声部. 不过最具戏剧性的作品是他未完成的《赋格的艺术》(Die Kunst der Fuge, BWV 1080).

根据巴赫死后 1751 年出版的版本, 作品包括 14 首赋格曲和 4 首卡农.

赋格的艺术

在最后一首赋格中，巴赫把 B-A-C-H Motif 写入乐谱，位于第 235 小节，而乐谱中断于 239 小节.

巴赫的手稿

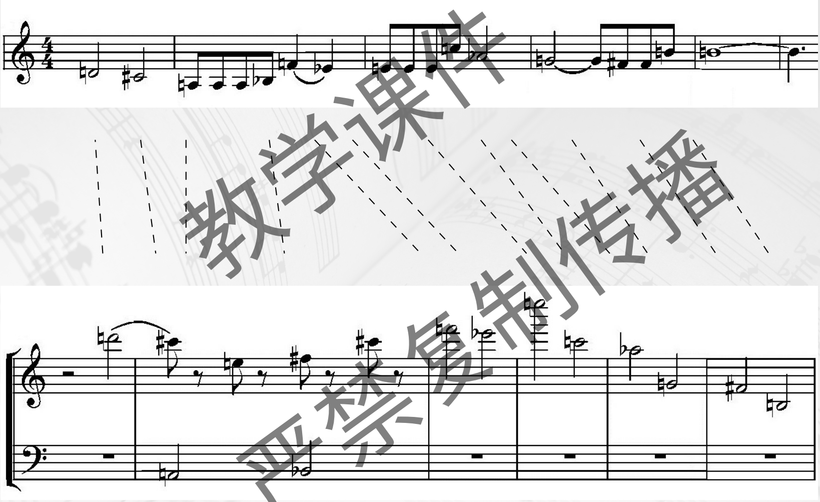
巴赫的手稿

手稿的后面有巴赫的第三个儿子 Carl Philipp Emanuel Bach 加的几行字：

Über dieser Fuge, wo der Name B A C H im Contrasubject angebracht worden, ist der Verfasser gestorben.

在作曲家将 BACH 这个名字引入这首赋格的对题之处时，作者去世了.

勋伯格第 4 弦乐四重奏 (Op. 37, 1936)



八度关系

在乐音体系中，称两个音级具有八度关系，如果它们或者是相等的，或者相差若干个八度.

等音的音级视为相等:

$$\sharp\mathrm{B}=\mathrm{C}=\flat\flat\mathrm{D},\ \sharp\mathrm{C}=\flat\mathrm{D},\ \times\mathrm{C}=\mathrm{D}=\flat\flat\mathrm{E},\ \ldots,\ \times\mathrm{A}=\mathrm{B}=\flat\mathrm{C}.$$

勋伯格《三首钢琴曲》

Drei Klavierstücke Op. 11 (1909, 1924 年修订), no. 1

旋律: B ♯G ♮G

第 4-5 小节的持续音: ♯G B ♮G

韦伯恩

Anton Friedrich Wilhelm

von Webern

1883.12.3 – 1945.9.15

奥地利作曲家，指挥家

第二维也纳学派代表人物之一

韦伯恩《5 乐章弦乐四重奏》

Fünf Sätze für Streichquartett Op. 5 (1909), no. 2

中提琴旋律: G B G ♯C　　第 2 小提琴、大提琴和弦: ♯C B G

《后调性理论导引（第三版）》

Joseph Straus

Introduction to post-tonal theory (3rd Edition)

Pearson Education, Inc.

New Jersey, 2005

中译本：齐研译

人民音乐出版社

北京，2014

等价关系与音类

设 S 是一个集合. 给定 S 上的一个 **(二元) 关系 (binary relation)** 就是指定了由其元素的全体有序对构成的 **笛卡尔积**

$$S \times S = \{ (x, y) \mid x, y \in S \}$$

中的一个子集合 $R \subset S \times S$. 对于 $\forall a, b \in S$, 称 a 与 b 有关系, 当且仅当 $(a, b) \in R$.

集合 S 上的一个关系就是指定一个规则, 对于集合中的任意两个元素 $a, b \in S$, 都可以判定 a 与 b 有关系还是没有关系.

1. **自反性 (reflexivity)**: 任意 $x \in S$ 都与自己有关系, 即 R 要满足

$$(x,x) \in R, \quad \forall x \in S;$$

2. **对称性 (symmetry)**: 如果 x 与 y 有关系, 则 y 与 x 也有关系, 即有

$$(x,y) \in R \iff (y,x) \in R, \quad \forall x,y \in S;$$

3. **传递性 (transitivity)**: 如果 x 与 y 有关系, y 和 z 有关系, 则 x 与 z 也有关系, 即有

$$(x,y) \in R \text{ 且} (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R, \quad \forall x,y,z \in S.$$

等价关系

如果一个关系 R 同时具备上述三个性质, 就称 R 是集合 S 上的一个 **等价关系 (equivalence relation)**.

例 1. 设 S 是全校同学的集合. “同班” 就是集合 S 上的一个等价关系.

例 2. 设 $\mathbb{M}$ 是乐音体系的集合. 八度关系 就是 $\mathbb{M}$ 上的一个等价关系.

等价类

给定集合 S 上的一个等价关系. 对于任意两个元素 $x, y \in S$, 如果 x 与 y 有关系, 就称 x **与** y **等价**, 记作 $x \sim y$. 进一步, 可以定义 S 的子集合

$$\overline{x} = \{y \in S \mid y \sim x\},$$

即全体与 x 等价的元素构成的子集合, 称为包含 x 的 **等价类** **(equivalence class)**.

操场上的等价类

等价类的性质

1. 任意两个等价类或者相等, 或者互不相交. 即有

$$\overline{y} \neq \overline{x} \iff \overline{y} \cap \overline{x} = \varnothing, \quad \forall x, y \in S.$$

2. 集合 S 可以表示成若干互不相交的等价类之并

$$S = \bigcup_{x \in S} \overline{x}.$$

换言之, 给定 S 上的一个等价关系, 就得到集合中全部元素的一个分类 (**classification**).

音　类

在乐音体系中，根据八度关系形成的等价类称为 **音类 (pitch class)**. 八度关系把所有的音级分成 12 个音类:

$$\overline{\mathrm{C}},\quad \overline{\sharp\mathrm{C}}=\overline{\flat\mathrm{D}},\quad \overline{\mathrm{D}},\quad \overline{\sharp\mathrm{D}}=\overline{\flat\mathrm{E}},\quad \overline{\mathrm{E}},\quad \overline{\mathrm{F}},\quad \overline{\sharp\mathrm{F}}=\overline{\flat\mathrm{G}},$$

$$\overline{\mathrm{G}},\quad \overline{\sharp\mathrm{G}}=\overline{\flat\mathrm{A}},\quad \overline{\mathrm{A}},\quad \overline{\sharp\mathrm{A}}=\overline{\flat\mathrm{B}},\quad \overline{\mathrm{B}}.$$

音　类

pitch class 被译作“音级”不妥:

- 中文术语“音级”通常指乐音体系中的各音, 也就是乐音体系这个集合中的元素;
- pitch class 源于数学上的“等价类”, 将其译作“音类”能够更加准确地反映这个概念的本质;
- 20 世纪西方音乐理论中重要的基本概念: pc set (pitch class set) 即可译作“音类集合”, 似乎也比“音级集合”更顺.

音类空间

把 12 个音类放在一起，构成一个集合

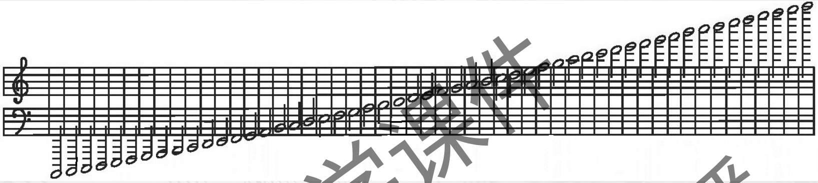
$$\mathscr{PC} = \{\overline{\mathrm{C}},\ \overline{\sharp\mathrm{C}},\ \overline{\mathrm{D}},\ \ldots,\ \overline{\mathrm{A}},\ \overline{\sharp\mathrm{A}},\ \overline{\mathrm{B}}\},$$

称作 **音类空间 (pitch class space)**.

等音的音级属于同一个音类:

$$\overline{\sharp\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{C}} = \overline{\flat\flat\mathrm{D}},\ \overline{\sharp\mathrm{C}} = \overline{\flat\mathrm{D}},\ \overline{\text{𝄪}\mathrm{C}} = \overline{\mathrm{D}} = \overline{\flat\flat\mathrm{E}},\ \ldots,\ \overline{\text{𝄪}\mathrm{A}} = \overline{\mathrm{B}} = \overline{\flat\mathrm{C}}.$$

音类空间



⇓

带余除法

定理

任意给定正整数 $m > 0$. 对任意整数 z, 唯一存在整数 q, r, 满足

$$z = qm + r, \quad 0 \leq r < m.$$

其中的 q 称为**商**, r 称为**余数**.

定　义

记全体整数的集合为 $\mathbb{Z}$. 给定正整数 m.

(1) 任意整数 $x \in \mathbb{Z}$ 对于 m 做带余除法, 得到的余数记作

$$x \mod m.$$

显然有 $0 \le x \mod m < m$.

(2) 任意 $x, y \in \mathbb{Z}$ 称作模 m **同余的**, 如果在对 m 的带余除法

$$x = q_1 m + r_1, \quad y = q_2 m + r_2, \quad 0 \le r_1, r_2 < m$$

中, 它们的余数相等 $r_1 = r_2$. 这时记作 $x \equiv y \pmod m$.

同余关系

给定一个正整数 m, 则 $\mathbb{Z}$ 中任意两个数 a, b **模** m **同余** 的关系是一个等价关系:

$$a \text{ 与 } b \text{ 有关系} \iff a \equiv b \pmod{m},$$

这时也记作 $a \sim b$.

例如当 $m = 12$ 时, $13 \sim 1$, 因为

$$13 = 1 \cdot 12 + 1, \quad 1 = 0 \cdot 12 + 1,$$

所以有 $13 \equiv 1 \pmod{12}$.

同余类集合

取定正整数 m. 对于模 m 的同余关系, 任意整数 a 所在的等价类

$$\bar{a} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b \text{ 和 } a \text{ 模 } m \text{ 同余}\},$$

称为模 m 的一个 **同余类**.

当 $m = 12$ 时全体整数的集合 $\mathbb{Z}$ 被分成 12 个同余类的并集合

$$\mathbb{Z} = \bar{0} \cup \bar{1} \cup \bar{2} \cup \cdots \cup \overline{10} \cup \overline{11}.$$

模 12 的同余类集合

全体模 12 的同余类构成一个集合

$$\mathbb{Z}_{12} = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{11}\}.$$

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{Z}_{12} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$$

模 12 的加法

对于任意两个同余类$\overline{x}$, $\overline{y} \in \mathbb{Z}_{12}$, 定义它们的和

$$\overline{x} \oplus \overline{y} = \overline{x+y} \in \mathbb{Z}_{12}. \tag{1}$$

例如:

$$\overline{5} \oplus \overline{8} = \overline{5+8} = \overline{13}.$$

而$13 \equiv 1 \pmod{12}$, 所以得到

$$\overline{5} \oplus \overline{8} = \overline{1} \in \mathbb{Z}_{12}.$$

乐音体系的列队

乐音体系 $\mathbb{M}$ 中的 97 个音级与数字 0, 1, 2, ..., 96 相对应:

$C_0=0$	$\sharp C_0/\flat D_0=1$	$D_0=2$	$\ldots$	$\sharp A_0/\flat B_0=10$	$B_0=11$
$C_1=12$	$\sharp C_1/\flat D_1=13$	$D_1=14$	$\ldots$	$\sharp A_1/\flat B_1=22$	$B_1=23$
$\vdots$				$\vdots$	
$C_7=84$	$\sharp C_7/\flat D_7=85$	$D_7=86$	$\ldots$	$\sharp A_7/\flat B_7=94$	$B_7=95$
$C_8=96$					
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\ldots$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
$\overline{C}=\overline{0}$	$\overline{\sharp C}=\overline{1}$	$\overline{D}=\overline{2}$	$\ldots$	$\overline{\sharp A}=\overline{10}$	$\overline{B}=\overline{11}$

音类空间 $\mathscr{PC}$ 与 $\mathbb{Z}_{12}$ 之间的 1-1 对应

把 $\overline{\mathrm{C}}$ 对应于 $\overline{0}$, $\overline{\sharp\mathrm{C}}$ 对应于 $\overline{1}$, ..., $\overline{\mathrm{B}}$ 对应于 $\overline{11}$, 就可以通过这种对应在音级之间做运算.

例如: 把 $\flat$E 升高 14 个半音. 因为 $\flat$E 所在的等价类 $\overline{\flat\mathrm{E}} = \overline{\sharp\mathrm{D}}$ 对应于模 12 同余 3 的等价类 $\overline{3}$, 而

$$\overline{3} \oplus \overline{14} = \overline{5},$$

所以 $\flat$E 升高 14 个半音后所属的等价类对应于 $\overline{5}$, 应该是 $\overline{\mathrm{F}}$.

音类空间 $\mathscr{PC}$ 与 $\mathbb{Z}_{12}$ 之间的 $1-1$ 对应

又如, 把 ♯F 降低 7 个半音. 因为 $\overline{\sharp\mathrm{F}}$ 对应于等价类 $\overline{6}$, 而

$$6-7=-1\equiv 11 \pmod{12},$$

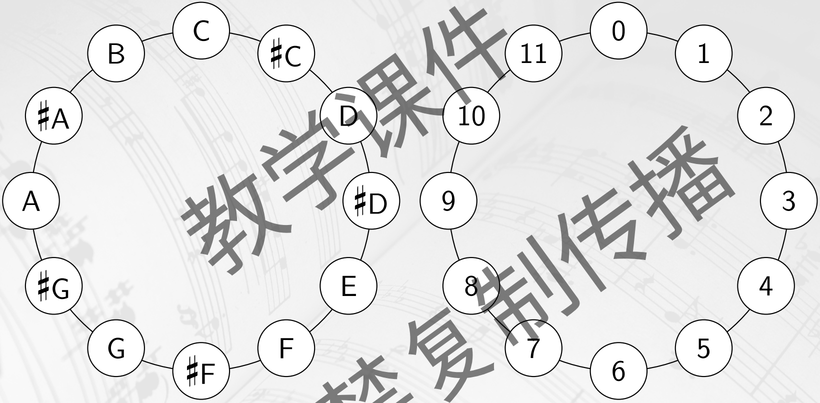
即知

$$\overline{6}\oplus\overline{-7}=\overline{11},$$

所以 ♯F 降低 7 个半音后所属的等价类是对应于 $\overline{11}$ 的 $\overline{\mathrm{B}}$.

总之, 乐音体系中的 12 个音类与整数模 12 同余的等价类之间存在 1-1 对应, 从而可以在音类之间引入模 12 的加法.

音类空间 $\mathscr{PC}$ 与 $\mathbb{Z}_{12}$ 之间的 1-1 对应



▸ 移调变换

回看移调变换

把升高 n 个半音的移调变换 T_n 看做是在 12 个音类上的变换

定　义

$$T_n(\overline{x}) = \overline{T_n(x)}, \quad \forall \overline{x} \in \mathscr{PC}.$$

例如:

$$T_3(\overline{\mathrm{C}}) = \overline{T_3(\mathrm{C})} = \overline{\sharp\mathrm{D}}, \quad T_{-4}(\overline{\mathrm{C}}) = \overline{T_{-4}(\mathrm{C})} = \overline{\flat\mathrm{A}}.$$

利用$\mathscr{PC}$ 与模 12 的同余类集合 $\mathbb{Z}_{12}$ 之间的 1-1 对应, 任一音类 $\overline{x}$ 对应于集合 $\{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{11}\}$ 中的某一个同余类, 于是有

移调变换的公式

$$T_n(\overline{x}) = \overline{T_n(x)} = \overline{x+n}, \quad \forall \overline{x} \in \mathbb{Z}_{12}.$$

音类的这种数字表达式更加便于计算. 例如:

$$T_3(\overline{\mathrm{C}}) = T_3(\overline{0}) = \overline{T_3(0)} = \overline{3} = \overline{\sharp\mathrm{D}},$$

$$T_{-4}(\overline{\mathrm{C}}) = T_{-4}(\overline{0}) = \overline{T_{-4}(0)} = \overline{-4} = \overline{8} = \overline{\flat\mathrm{A}}.$$

音类空间上的移调变换

按照上述方式, 原来作用在乐音体系 $\mathbb{M}$ 上的移调变换 T_n 被改造成为音类空间 $\mathscr{PC} = \{\overline{\mathrm{C}}, \overline{\sharp\mathrm{C}}, \ldots, \overline{\mathrm{B}}\}$ 到自身的 **映射 (mapping)**. ▸音类圆周

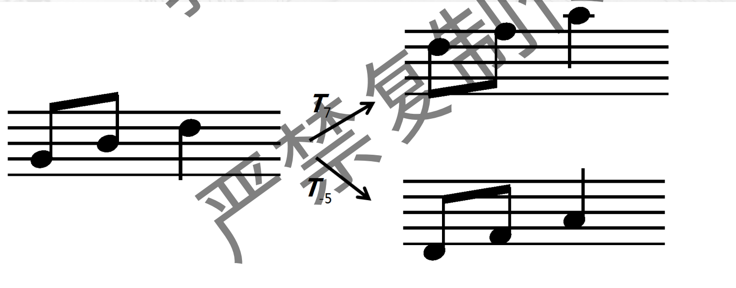
命　题

对任意整数 m, n, $T_m = T_n$ 当且仅当 $m \equiv n \pmod{12}$.

移调变换 T_7 把 G B D′ 升高 7 个半音, T_{-5} 把 G B D′ 降低 5 个半音, 分别得到

$$T_7(\text{G B D}') = \text{D}'\ \text{F}'\ \text{A}'; \quad T_{-5}(\text{G B D}') = \text{D F A}.$$

D′ F′ A′ 和 D F A 分别相差八度, 在八度关系下分别属于相同的等价类: $\overline{\mathrm{D}'} = \overline{\mathrm{D}}, \overline{\mathrm{F}'} = \overline{\mathrm{F}}, \overline{\mathrm{A}'} = \overline{\mathrm{A}}$,



音类空间上的移调变换

总之, 在音类空间 $\mathscr{PC} = \{\overline{\mathrm{C}}, \overline{\sharp\mathrm{C}}, \ldots, \overline{\mathrm{B}}\}$ 上, 可以只考虑 12 个移调变换

$$T_0,\ T_1,\ \ldots,\ T_{11}.$$

它们把音类空间中的任意一个音类变成 $\mathscr{PC}$ 中的另一个音类.

利用 $\mathscr{PC}$ 与模 12 的同余类集合 $\mathbb{Z}_{12}$ 之间的 1-1 对应, 这 12 个移调变换也是 $\mathbb{Z}_{12}$ 上的变换

$$T_n(\overline{x}) = \overline{x+n}, \quad \forall \overline{x} \in \mathbb{Z}_{12}.$$

群的定义

设 G 是一个非空集合, 具有一个二元运算 $*$, 满足

1. 结合律: $(a * b) * c = a * (b * c), \quad \forall a, b, c \in G$;
2. G 中存在 **单位元** e, 满足 $a * e = e * a = a, \forall a \in G$;
3. 对任意 $a \in G$, 存在 **逆元素** $b \in G$, 使得 $a * b = b * a = e$,

就称代数结构 $(G, *)$ 是一个 **群 (group)**.

通常把群中的运算称作“乘法”, 因此把 a 的逆元素记作 a^{-1}.

群的例子

例 1. 全体整数的集合 $\mathbb{Z}$, 关于整数的加法构成一个群 $(\mathbb{Z}, +)$.

例 2. 记整数模 12 的同余类集合 $\mathbb{Z}_{12} = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{11}\}$, 关于模 12 的加法 $\oplus$ 构成一个群 $(\mathbb{Z}_{12}, \oplus)$:

$$\overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{a+b}.$$

例如, 由 $5 + 7 \equiv 0 \pmod{12}$ 知在 $\mathbb{Z}_{12}$ 中有 $\overline{5} \oplus \overline{7} = \overline{0}$.

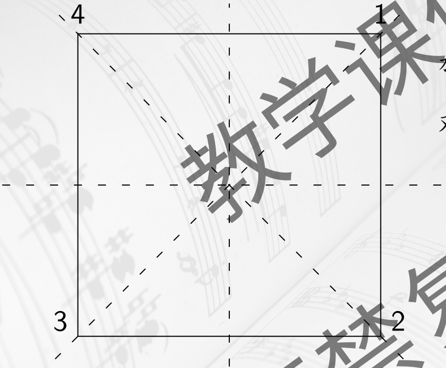
更多的例子

$(\mathbb{Z}, \times)$ 不是群.

$(\mathbb{Q}, \times)$ 不是群.

记 $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, 则 $(\mathbb{Q}^*, \times)$ 是一个群.

二面体群 (dihedral group)



旋转: $r_0 = e$, r_{90}, r_{180}, r_{270}.

对称: s_H, s_V, s_{13}, s_{24}.

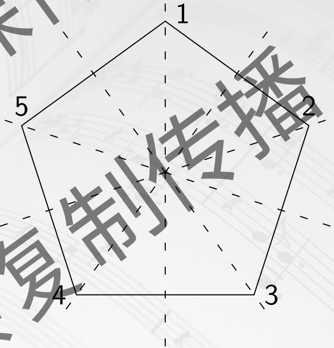
$$D_8 = \{r_0, r_{90}, r_{180}, r_{270}, \\ s_H, s_V, s_{13}, s_{24}\}$$

二面体群 (dihedral group)

记 $r = r_{72}$.

旋转: $r, r^2, r^3, r^4, r^5 = e$.

对称: s_1, s_2, s_3, s_4, s_5.



$$D_{10} = \{r, r^2, r^3, r^4, r^5,$$

$$s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$$

对称群

设集合 $\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$. Ω 到自身的一个可逆变换 α 可以表示为

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix},$$

其中 $a_1\ a_2\ \cdots\ a_n$ 是 $1\ 2\ \cdots\ n$ 的一个排列. 称 α 为一个 n **次置换 (permutation)**.

全体 n 次置换关于映射的复合构成一个群, 称作 n **次对称群 (symmetric group)**, 记作 S_n.

3 次对称群 S_3

$S_3 = \{\, e,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3 \,\}$, 其中

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \ \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

群的基本概念

G 中元素的个数 $|G|$ 称作这个群的 阶 **(order)**.

$(\mathbb{Z}_{12},\ \oplus)$ 是 12 阶的.

正 n 边形的二面体群 $|D_{2n}| = 2n$.

n 次对称群 $|S_n| = n!$

$(\mathbb{Z},\ +)$, $(Q^*,\ \times)$ 是 无限群.

移调变换群

把音类空间 $\mathscr{PC}$ 上的全体移调变换构成的集合记作

$$\mathscr{T} = \{\, T_i \mid 0 \leq i \leq 11 \,\}.$$

作为音类空间上的变换, $\mathscr{T}$ 中的任意两个移调变换 T_m, T_n 也可以做复合 $T_m * T_n$.

移调变换群

根据移调变换的性质 ▸ 移调变换性质, $(\mathscr{T}, *)$ 满足结合律; 有单位元 T_0; 每个 T_n 有逆元素

$$T_n^{-1} = T_{-n} \pmod{12}.$$

因此 $(\mathscr{T}, *)$ 构成一个群.

不仅如此, $\mathscr{T}$ 中元素之间的运算还满足交换律 (commutative law)

$$T_m * T_n = T_n * T_m,$$

这样的群称作 **交换群** 或者 **Abel 群 (abelian group)**.

Niels Henrik Abel

(1802.8.5 – 1829.4.6)

挪威数学家

$\mathscr{T}$ 的乘法表

	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}
T_0	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}
T_1	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0
T_2	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1
T_3	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2
T_4	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3
T_5	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4
T_6	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
T_7	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
T_8	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7
T_9	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8
T_{10}	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9
T_{11}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}

循环群

事实上, $\mathscr{T}$ 可以由一个移调变换 T_1 生成:

$$T_i = T_1^i \neq e,\ 1 \leq i \leq 11,\quad T_{12} = T_1^{12} = T_0 = e,$$

其中 e 是群中的单位元. 把群 $\mathscr{T}$ 的生成元记作 $T = T_1$, 则有

$$\mathscr{T} = \langle T \rangle,$$

是一个 12 阶的 **循环群** (cyclic group). 这时群中的任意元素都是生成元 T 的方幂:

$$\mathscr{T} = \{T,\ T^2,\ \ldots,\ T^{11},\ T^{12} = e\}.$$

同构的群

设 $(G,*)$ 和 $(H,\star)$ 是两个群. 映射 $\alpha\colon G \longrightarrow H$ 如果满足

$$\alpha(a*b)=\alpha(a)\star\alpha(b), \qquad \forall a,b\in G,$$

就称 α 是一个从 G 到 H 的 **同态 (homomorphism)**.

如果群同态 α 是一个 **双射 (bijection)**, 则称 α 是一个 **同构映射 (isomorphic mapping)**, 这时也称群 G 和 H 是 **同构的**, 记作

$$G\cong H.$$

同构的群

全体实数关于实数的加法构成一个群 $(\mathbb{R}, +)$. 全体正实数关于实数的乘法构成一个群 $(\mathbb{R}^+, \cdot)$.

映射 α: $x \mapsto \log_{10} x$ 是 $\mathbb{R}^+$ 到 $\mathbb{R}$ 的双射, 并且满足

$$\alpha(x \cdot y) = \log_{10}(x \cdot y) = \log_{10} x + \log_{10} y = \alpha(x) + \alpha(y).$$

这说明 α 是一个同构映射. 其逆映射为

$$\alpha^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+, \ x \mapsto 10^x.$$

定理：$(\mathscr{T},\ *) \cong (\mathbb{Z}_{12},\ \oplus)$.

证明. 定义映射 α: $\mathscr{T} \longrightarrow \mathbb{Z}_{12}$

$$\alpha(T_i) = \bar{i}, \qquad 0 \le i \le 11,$$

则对任意 $1 \le i, j \le 11$,

$$\alpha(T_i * T_j) = \alpha(T_{i+j \pmod{12}}) = \overline{i+j} = \bar{i} \oplus \bar{j} = \alpha(T_i) \oplus \alpha(T_j).$$

这说明 α 是群 $(\mathscr{T},\ *)$ 到 $(\mathbb{Z}_{12},\ \oplus)$ 的一个同态.

进一步, α 既是单射, 又是满射, 从而是一个同构映射. $\square$

$\mathscr{T} \cong \mathbb{Z}_{12}$

倒影变换 I 在音类空间上的作用

倒影变换 I 原本是定义在乐音体系 $\mathbb{M}$ 上的. ▸ 乐音体系中的倒影

音类空间 $\mathscr{PC}$ 的本质是把 $\mathbb{M}$ 中所有的音级按照八度等价关系分成了 12 个音类. 与移调变换的情形一样, 倒影变换也可以作用到音类空间上去.

定 义

$$I(\overline{x}) = \overline{I(x)}, \forall \overline{x} \in \mathscr{PC}.$$

倒影变换 I 在音类空间上的作用

在八度等价关系下, 处在不同八度但又具有相同音名的音级都属于同一个音类

$$\overline{\flat \mathrm{B}_4} = \overline{\flat \mathrm{B}_2} = \overline{\flat \mathrm{B}_7} = \overline{\flat \mathrm{B}}.$$

因此讨论 I 在音类空间 $\mathscr{PC}$ 上的作用时, 可以忽略不同八度的差别. 例如:

$$I(\overline{\mathrm{C}}) = \overline{I(\mathrm{C})} = \overline{\mathrm{C}},$$

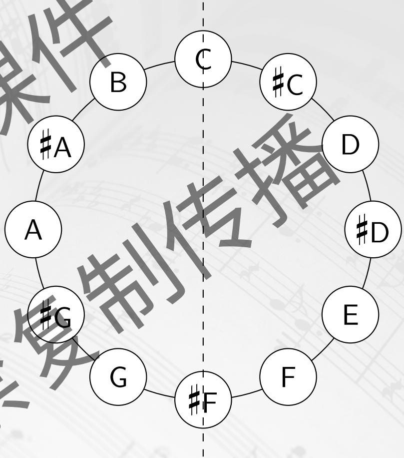
$$I(\overline{\sharp \mathrm{G}}) = \overline{(I(\sharp \mathrm{G}))} = \overline{\mathrm{E}}.$$

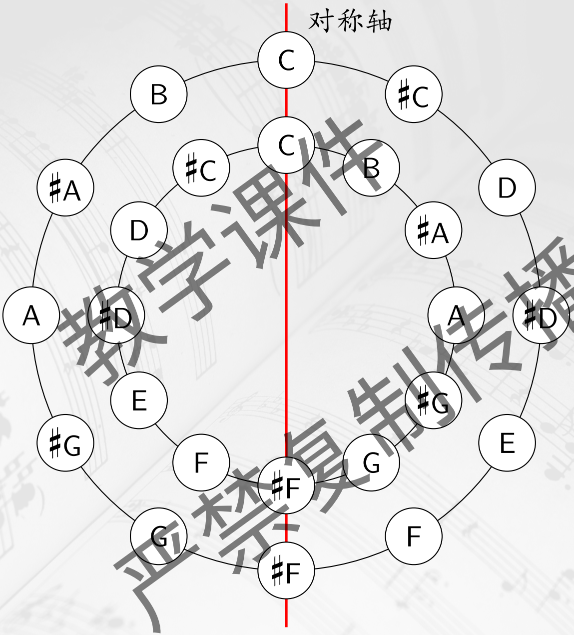
倒影变换 I 在音类空间上的作用

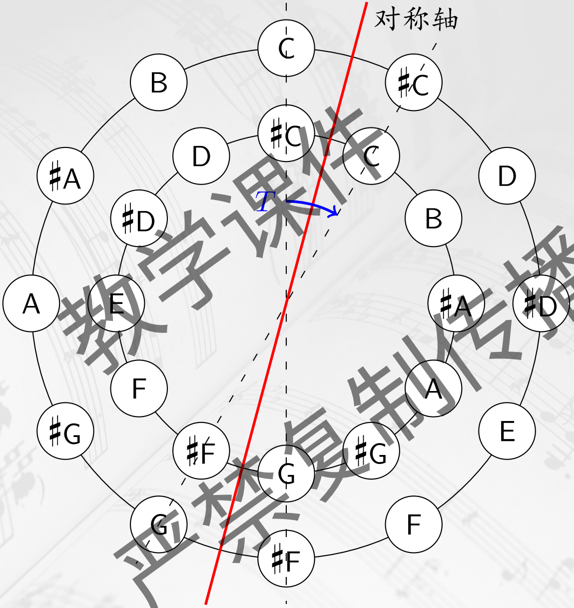
按照音类空间 $\mathscr{PC}$ 与 $\mathbb{Z}_{12}$ 之间的 1-1 对应，倒影变换 I 可以表成

$$I: x \mapsto -x \pmod{12},$$

$$0 \leq x \leq 11.$$




对称轴
C
♯C
D
E
F
♯F
G
♯G
A
♯A
B
C
B
♯A
A
♯G
G
♯F
F
E
♯D
D
♯C

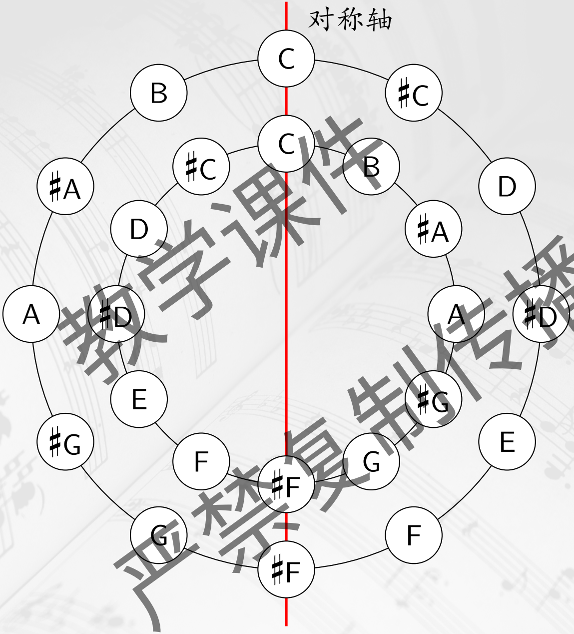

对称轴
C
B
♯C
♯A
D
♯C
C
D
♯D
T
B
A
E
♯A
♯D
F
A
E
♯G
♯F
G
♯G
G
F
♯F

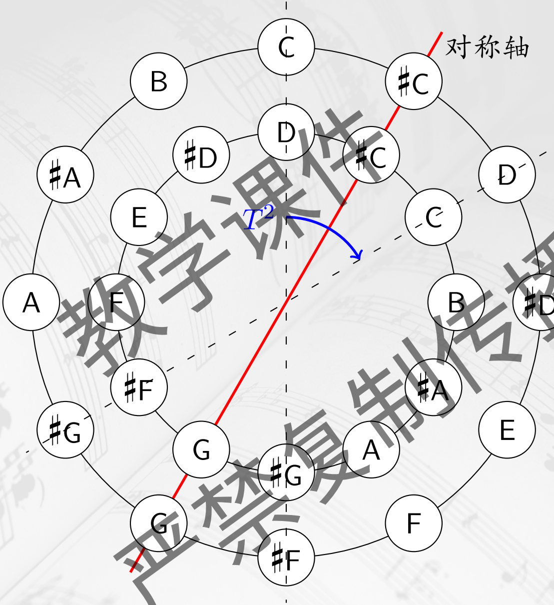
变换的乘法

同样都是音类空间 $\mathscr{PC}$ 到自身的变换, 倒影变换 I 与移调变换 T 就可以做复合

$$T * I : x \mapsto 1 - x \pmod{12},$$

$$0 \leq x \leq 11.$$


对称轴
C
♯C
D
♯D
E
F
♯F
G
♯G
A
♯A
B
C
B
♯A
A
♯G
G
♯F
F
E
♯D
D
♯C


对称轴
T^2
C
♯C
D
♯D
E
F
♯F
G
♯G
A
♯A
B
D
♯C
C
B
♯A
A
♯G
G
♯F
F
E
♯D

变换的乘法

倒影变换 I 与移调变换 T^2 的复合

$$T^2 * I : \ x \mapsto 2 - x \pmod{12},$$

$$0 \le x \le 11.$$

猜　想

¿很可能有?

对任意 $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 11,$

$$T^k * I:\ x \mapsto k - x \pmod{12},$$

$$0 \le x \le 11.$$

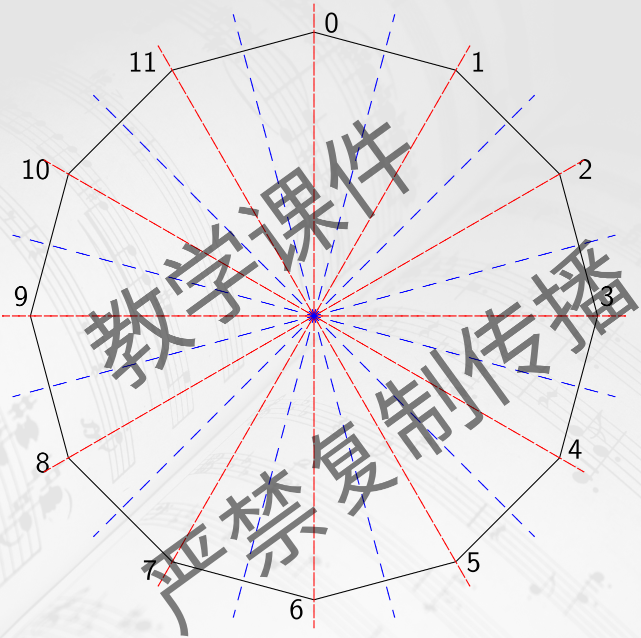
证明之!

更大的变换群

倒影变换 I 与移调变换 T^k $(0 \leq k \leq 11)$ 复合就可以得到以任意一条水平直线为对称轴的对称.

由移调变换 T 和倒影变换 I 生成的群记作

$$\mathscr{D} = \langle I, T \rangle.$$


0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

群同构

定　理

音类空间 $\mathscr{PC}$ 上由移调变换 T 和倒影变换 I 生成的变换群

$$\mathscr{D} = \langle T,\ I\rangle$$

同构于正 12 边形的变换群 (二面体群), 即有

$$\mathscr{D} \cong D_{24}$$

音乐变换群

如果再把逆行变换 R 也添进来，最终就得到一个更大的群

$$\mathscr{M} = \langle T,\ I,\ R\rangle.$$

可以证明，音乐变换群 $\mathscr{M}$ 的阶

$$|\mathscr{M}| = 48.$$

作曲家用群论来作曲吗?

“群” (group) 的概念是何时形成的?

数学界一般都认可“群”的概念肇始于 Galois 关于方程代数解的工作. 1829 年, 年仅 18 岁的 Galois 首次将其关于方程代数解的论文提交给法国科学院 (Académie des Sciences), 但未被接受. 后来 Galois 又向 Fourier 提交了论文的第二稿. Fourier 于 1830 年 5 月 16 日去世, Galois 的稿子也丢失了.

Évariste Galois

1811.10.25 – 1832.5.31

法国数学家.

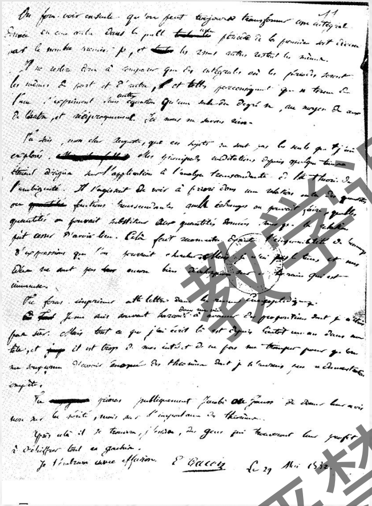
Siméon Denis Poisson

1781.6.21 – 1840.4.25

法国数学家、物理学家

Galois 的论文

1831 年 1 月 17 日，应 Poisson 的邀请，Galois 再次向法国科学院提交了论文的第三稿．但是 Poisson 未能理解 Galois 的工作，退回了稿子，建议 Galois 进一步完善其论证．直到 1846 年，Galois 的文章才被 Liouville 出版．



1832 年 5 月 29 日 Galois 给朋友 Auguste Chevalier 的信:

“Ask Jacobi or Gauss publicly to give their opinion, not as to the truth, but as to the importance of these theorems. Later there will be, I hope, some people who will find it to their advantage to decipher all this mess”.

Joseph Liouville

1809.3.24 – 1882.9.8

法国数学家

Augustin-Louis Cauchy

1789.8.21 – 1857.5.23

法国数学家

1845 年, Cauchy 给出了“群”的一个定义, 但是他把群称为“替换的共轭系” (conjugate system of substitutions). 直到 1854 年, 群的抽象定义才最先出现在 Cayley 的论文

On the theory of groups, as depending on the symbolic equation $\theta^n = 1$, *Philosophical Magazine, 4th Series*, **7 (42)** (1854), 40–47.

由此可见, 群的概念逐步形成并被人们广泛接受, 应不早于十九世纪五十年代. 在此之前的音乐家应该不会知道群论.

Arthur Cayley

1821.8.16 – 1895.1.26

英国数学家

李斯特

Franz Liszt

1811.10.22 – 1886.7.31

匈牙利作曲家，钢琴大师

匈牙利狂想曲第二号

Hungarian Rhapsody # 2


stringendo
8
f
Ped.
sfz

每个音符生而平等

传统的音乐大多属于调性音乐 (tonal music), 其中不同音级的地位和作用是不同的. 调性音乐中总有一个主音 **(tonic)**, 其他的音与主音之间形成一定的关系, 例如主从关系、稳定非稳定关系等等. 人们在欣赏音乐的时候是可以感受到这些关系的. 然而也正是由于这种关系的存在, 使得严格的移调和倒影变换在调性音乐中使用时往往会受到限制.

十二音技术

从 1908 年开始，奥地利作曲家勋伯格在其音乐创作中逐步建立和发展了**十二音技术 (twelve-tone technique)**，以期打破传统调性音乐对作曲家自由发挥的桎梏.

Arnold Schönberg (1874.9.13 – 1951.7.13), 犹太裔奥地利作曲家、音乐理论家、音乐教育家, 第二维也纳学派 (The Second Vienna School) 的创立者和领导者. 20 世纪 30 年代, 由于其犹太人身份, 其作品被纳粹判定为"颓废音乐"(Entartete Musik). 1934 年移居美国.

十二音技术的出发点是 **十二音序列 (twelve-tone series)**. 乐音体系中的所有音级依照八度关系被分成 12 个音类

$$\overline{\mathrm{C}},\ \overline{\sharp\mathrm{C}}=\overline{\flat\mathrm{D}},\ \overline{\mathrm{D}},\ \overline{\sharp\mathrm{D}}=\overline{\flat\mathrm{E}},\ \overline{\mathrm{E}},\ \overline{\mathrm{F}},\ \overline{\sharp\mathrm{F}}=\overline{\flat\mathrm{G}},$$

$$\overline{\mathrm{G}},\ \overline{\sharp\mathrm{G}}=\overline{\flat\mathrm{A}},\ \overline{\mathrm{A}},\ \overline{\sharp\mathrm{A}}=\overline{\flat\mathrm{B}},\ \overline{\mathrm{B}}.$$

而一个 **音列 (tone row)** 就是这 12 个音类的一个排列.

勋伯格的钢琴协奏曲 (Concerto for piano and orchestra, Op. 42, 1942), 其基本音列为 (省略表示等价类的上划线)

$$\flat\mathrm{E},\ \flat\mathrm{B},\ \mathrm{D},\ \mathrm{F},\ \mathrm{E},\ \mathrm{C},\ \sharp\mathrm{F},\ \flat\mathrm{A},\ \flat\mathrm{D},\ \mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{G}.$$

钢琴协奏曲

以音列中的第一个音类为起点，令其对应于 $\mathbb{Z}_{12}$ 中的 $\overline{0}$. 即 $\flat$E 对应 $\overline{0}$, E 对应 $\overline{1}$, F 对应 $\overline{2}$, ..., $\sharp$C 对应 $\overline{10}$, D 对应 $\overline{11}$.

同样省略表示同余类的上划线，就得到音类与同余类之间的一个 1-1 对应关系

$\flat$E	E	F	$\sharp$F	G	$\sharp$G	A	$\sharp$A	B	C	$\sharp$C	D
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

钢琴协奏曲

于是一个音列 (音类的排列) 就可以表示成 $\mathbb{Z}_{12} = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{11}\}$ 中元素的一个排列. 勋伯格钢琴协奏曲的基本音列

$$\flat E,\ \flat B,\ D,\ F,\ E,\ C,\ \sharp F,\ \flat A,\ \flat D,\ A,\ B,\ G$$

就可以写成

$$0,\ 7,\ 11,\ 2,\ 1,\ 9,\ 3,\ 5,\ 10,\ 6,\ 8,\ 4$$

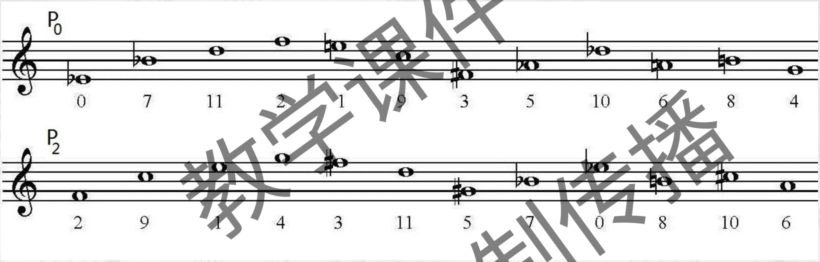
十二音技术

给定一个音列, 可以对其进行各种变换, 得到一系列新的音列. 作为出发点的这个音列称作 **初始音列 (primary tone row)**, 记作 P_0. 对其进行移调变换, 上升 n 个半音, 就得到一个新的 **移调音列**, 记作 P_n. 例如

$P_0 =$	♭E	♭B	D	F	E	C	♯F	♭A	♭D	A	B	G
$=$	0	7	11	2	1	9	3	5	10	6	8	4

$P_2 =$	2	9	1	4	3	11	5	7	0	8	10	6
$=$	F	C	E	G	♯F	D	♯G	♭B	♭E	B	♯C	A

十二音技术



因为移调变换是作用在音类上的, 所以共有 12 个移调音列, 即

$P_0, P_1, \ldots, P_{11}$.

十二音技术

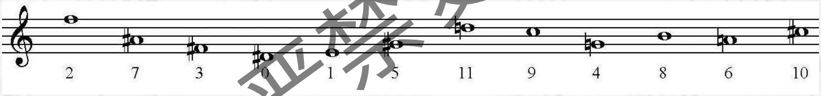
对 P_n 做关于其**第一个音类**的倒影变换，得到一个 **倒影音列**，记作 I_n. 例如对 P_0 做倒影变换，保持其第一个音类 ♭E=0 不变，相当于对音列中每一项做变换 $x \mapsto -x \pmod{12}$，于是得到

$I_0 =$	0	5	1	10	11	3	9	7	2	6	4	8
$=$	♭E	♭A	E	♭D	D	♯F	C	♭B	F	A	G	B

十二音技术

又如对 P_2 做倒影变换，保持其第一个音类 F $(=2)$ 不变，相当于对音列中每一项做变换 $x \mapsto 4-x \pmod{12}$，于是得到

$I_2 =$	2	7	3	0	1	5	11	9	4	8	6	10
$=$	F	♯A	♯F	♯D	E	♯G	D	C	G	B	A	♯C



十二音技术

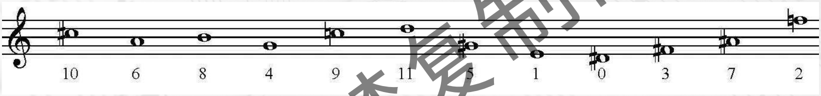
对 P_n 做逆行变换, 得到一个 逆行音列 R_n. 例如

$$R_2: \quad \text{A}, \sharp\text{C}, \text{B}, \flat\text{E}, \flat\text{B}, \sharp\text{G}, \text{D}, \sharp\text{F}, \text{G}, \text{E}, \text{C}, \text{F}.$$

十二音技术

对 I_n 做逆行变换, 就得到 **逆行倒影音列** RI_n. 例如

$$RI_2: \quad \sharp\mathrm{C},\ \mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{G},\ \mathrm{C},\ \mathrm{D},\ \sharp\mathrm{G},\ \mathrm{E},\ \sharp\mathrm{D},\ \sharp\mathrm{F},\ \sharp\mathrm{A},\ \mathrm{F}.$$



十二音技术

可见从初始音列 P_0 出发, 通过移调、倒影、逆行和逆行倒影变换, 可以得到 48 个音列

$$P_0, P_1, \ldots, P_{11}, \quad I_0, I_1, \ldots, I_{11},$$

$$R_0, R_1, \ldots, R_{11}, \quad RI_0, RI_1, \ldots, RI_{11}.$$

这 48 个音列组成一个 **音列矩阵 (tone row matrix)**. 它是一个 12×12 的方阵. 其第一行为初始音列 P_0, 第一列为初始音列的倒影 I_0.

	I_0	I_7	I_{11}	I_2	I_1	I_9	I_3	I_5	I_{10}	I_6	I_8	I_4	
P_0	♭E	♯A	D	F	E	C	♯F	♯G	♯C	A	B	G	R_0
P_5	♯G	♭E	G	♯A	A	F	B	♯C	♯F	D	E	C	R_5
P_1	E	B	♭E	♯F	F	♯C	G	A	D	♯A	C	♯G	R_1
P_{10}	♯C	♯G	C	♭E	D	♯A	E	♯F	B	G	A	F	R_{10}
P_{11}	D	A	♯C	E	♭E	B	F	G	C	♯G	♯A	♯F	R_{11}
P_3	♯F	♯C	F	♯G	G	♭E	A	B	E	C	D	♯A	R_3
P_9	C	G	B	D	♯C	A	♭E	F	♯A	♯F	♯G	E	R_9
P_7	♯A	F	A	C	B	G	♯C	♭E	♯G	E	♯F	D	R_7
P_2	F	C	E	G	♯F	D	♯G	♯A	♭E	B	♯C	A	R_2
P_6	A	E	♯G	B	♯A	♯F	C	D	G	♭E	F	♯C	R_6
P_4	G	D	♯F	A	♯G	E	♯A	C	F	♯C	♭E	B	R_4
P_8	B	♯F	♯A	♯C	C	♯G	D	E	A	F	G	♭E	R_8
	RI_0	RI_7	RI_{11}	RI_2	RI_1	RI_9	RI_3	RI_5	RI_{10}	RI_6	RI_8	RI_4	

	I_0	I_7	I_{11}	I_2	I_1	I_9	I_3	I_5	I_{10}	I_6	I_8	I_4	
P_0	0	7	11	2	1	9	3	5	10	6	8	4	R_0
P_5	5												R_5
P_1	1												R_1
P_{10}	10												R_{10}
P_{11}	11												R_{11}
P_3	3												R_3
P_9	9												R_9
P_7	7												R_7
P_2	2												R_2
P_6	6												R_6
P_4	4												R_4
P_8	8												R_8
	RI_0	RI_7	RI_{11}	RI_2	RI_1	RI_9	RI_3	RI_5	RI_{10}	RI_6	RI_8	RI_4	

	I_0	I_7	I_{11}	I_2	I_1	I_9	I_3	I_5	I_{10}	I_6	I_8	I_4	
P_0	0	7	11	2	1	9	3	5	10	6	8	4	R_0
P_5	5	0	4	7	6	2	8	10	3	11	1	9	R_5
P_1	1												R_1
P_{10}	10												R_{10}
P_{11}	11												R_{11}
P_3	3												R_3
P_9	9												R_9
P_7	7												R_7
P_2	2												R_2
P_6	6												R_6
P_4	4												R_4
P_8	8												R_8
	RI_0	RI_7	RI_{11}	RI_2	RI_1	RI_9	RI_3	RI_5	RI_{10}	RI_6	RI_8	RI_4	

	I_0	I_7	I_{11}	I_2	I_1	I_9	I_3	I_5	I_{10}	I_6	I_8	I_4	
P_0	0	7	11	2	1	9	3	5	10	6	8	4	R_0
P_5	5	0	4	7	6	2	8	10	3	11	1	9	R_5
P_1	1	8	0	3	2	10	4	6	11	7	9	5	R_1
P_{10}	10												R_{10}
P_{11}	11												R_{11}
P_3	3												R_3
P_9	9												R_9
P_7	7												R_7
P_2	2												R_2
P_6	6												R_6
P_4	4												R_4
P_8	8												R_8
	RI_0	RI_7	RI_{11}	RI_2	RI_1	RI_9	RI_3	RI_5	RI_{10}	RI_6	RI_8	RI_4	

	I_0	I_7	I_{11}	I_2	I_1	I_9	I_3	I_5	I_{10}	I_6	I_8	I_4	
P_0	0	7	11	2	1	9	3	5	10	6	8	4	R_0
P_5	5	0	4	7	6	2	8	10	3	11	1	9	R_5
P_1	1	8	0	3	2	10	4	6	11	7	9	5	R_1
P_{10}	10	5	9	0	11	7	1	3	8	4	6	2	R_{10}
P_{11}	11	6	10	1	0	8	2	4	9	5	7	3	R_{11}
P_3	3	10	2	5	4	0	6	8	1	9	11	7	R_3
P_9	9	4	8	11	10	6	0	2	7	3	5	1	R_9
P_7	7	2	6	9	8	4	10	0	5	1	3	11	R_7
P_2	2	9	1	4	3	11	5	7	0	8	10	6	R_2
P_6	6	1	5	8	7	3	9	11	4	0	2	10	R_6
P_4	4	11	3	6	5	1	7	9	2	10	0	8	R_4
P_8	8	3	7	10	9	5	11	1	6	2	4	0	R_8
	RI_0	RI_7	RI_{11}	RI_2	RI_1	RI_9	RI_3	RI_5	RI_{10}	RI_6	RI_8	RI_4	

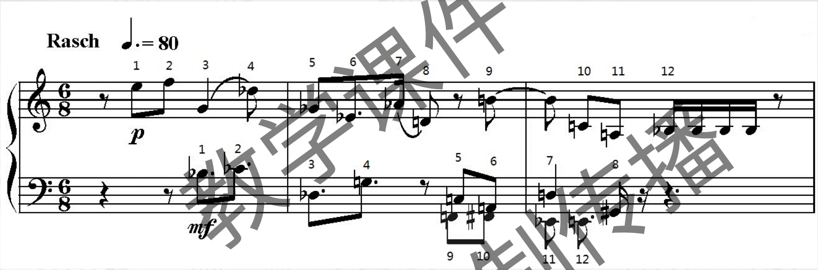
钢琴组曲 (Suite für Klavier, Op. 25, 1921 – 1923)

这是勋伯格的第一部完全用 12 音技术谱写的作品. 在前奏曲 (*Präludium*) 一开始处, 勋伯格就在右手部分给出了初始音列 P_0:

E	F	G	♭D	♭G	♭E	♭A	D	B	C	A	♭B
0	1	3	9	2	11	4	10	7	8	5	6

而左手部分弹奏的是移调音列 P_6, 并且把音列的 5 – 8 项与 9 – 12 项并行呈现.

钢琴组曲 (Suite für Klavier, Op. 25, 1921 – 1923)



需要指出的是, 音列中的元素代表的是音类, 在乐曲中具体使用该音类中哪个八度的音符是由作曲家自由决定的.

钢琴组曲 (Suite für Klavier, Op. 25, 1921 – 1923)

全曲中只使用了 P_0, P_6, I_6, I_0, R_6 和 RI_6 六个音列:

▸ 巴赫动机

进一步的阅读书目

George Perle, *Serial composition and atonality: An introduction to the music of Schoenberg, Berg, and Webern* (6th, revised edition), University of California Press, Berkeley, 1991.

第四版中译本: 《序列音乐写作与无调性—勋伯格、贝尔格与韦伯恩音乐介绍》, 罗忠镕译, 中央音乐学院出版社, 北京, 2006.

郑英烈, 《序列音乐写作教程》(第二版), 上海音乐出版社, 上海, 2007.

有多少互不相同的音列?

从一个初始音列出发可以得到 48 个不同的音列. 但是这 48 个音列中可能有相等的, 因此实际得到的互不相同的音列可能少于 48 个.

例. 设 P_0 是一个全半音音阶 **(chromatic scale)**

$P_0 =$	F	$\sharp$F	G	$\sharp$G	A	$\sharp$A	B	C	$\sharp$C	D	$\sharp$D	E
$=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

有多少互不相同的音列?

于是有

$$I_0 = 0,\ 11,\ 10,\ \ldots,\ 2,\ 1 = R_1,$$

是一个下行的全半音音阶. 由此可得

$$I_1 = R_2,\ I_2 = R_3,\ \cdots,\ I_{10} = R_{11},\ I_{11} = R_0.$$

再对上式用逆行变换, 得到

$$RI_0 = P_1,\ RI_1 = P_2,\ \cdots,\ RI_{10} = P_{11},\ RI_{11} = P_0.$$

因此, 从初始音列 P_0 出发, 恰得到 24 个互异的音列, 其中 12 个是上行的全半音音阶, 12 个是下行的全半音音阶.

有多少互不相同的音列?

设

$$P_0 = 0,\ a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_{11},$$

其中 $a_1, a_2, \dots, a_{11}$ 是 $1, 2, \dots, 11$ 的一个排列. 直接验证可得, 对于 $0 \le n \le 11$,

$$\begin{aligned} P_n &= n,\ a_1+n,\ a_2+n,\ \dots,\ a_{11}+n, \\ I_n &= n,\ n-a_1,\ n-a_2,\ \dots, n-a_{11}. \end{aligned} \tag{2}$$

注意其中的加法是模 12 的.

有多少互不相同的音列?

容易看出, $P_0, P_1, \ldots, P_{11}$ 互不相同, 从而其倒影 $I_0, I_1, \ldots, I_{11}$ 也互不相同.

如果对某个 $0 \le k \le 11$ 有 $I_k = P_n$, 则可由 (2) 式推出 $k = n$, 进而得出

$$n - a_1 = a_1 + n,\ n - a_2 = a_2 + n, \cdots, n - a_{11} = a_{11} + n,$$

但这导致一个矛盾:

$$a_1 = -a_1, \quad a_2 = -a_2, \quad \cdots \quad a_{11} = -a_{11}.$$

这就证明了 $P_0, \ldots, P_{11}$ 与 $I_0, \ldots, I_{11}$ 这 24 个音列是互不相同

有多少互不相同的音列?

定　理 A

给定音列

$$P_0 = 0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{10},\ a_{11}.$$

存在 k: $1 \le k \le 11$, 使得 $I_k = R_0$ 的充要条件是

$$0 + a_{11} = a_1 + a_{10} = a_2 + a_9 = \cdots = a_5 + a_6 = k \pmod{12}.$$

有多少互不相同的音列?

对音列 $I_k = R_0$ 做逆行变换, 就得到 $RI_k = P_0$. 因此, 上述定理给出了 $P_0 = RI_k$ 的充分必要条件.

习题. 证明: 上述定理中的 k 必为奇数.

有多少互不相同的音列?

满足定理 A 条件的音列有多少?

音列的第一项显然可以取 12 个音类中的任意一个, 故有 12 种取法. 第一项取定之后, 最后一项 a_{11} 要满足 $0 + a_{11} = k$, 只能有 6 种取法.

第二项 a_1 可以从剩下的 10 个音类中任取, 它取定后倒数第二项 a_{10} 也就确定了. 以此类推, 可知满足定理 A 条件的音列共有

$$12 \times 6 \times (10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2) = 276,480 \text{ 个}.$$

勋伯格完成于 1923 年 4 月 14 日的《小夜曲》(Serenade, Op. 24) 的第五乐章“舞蹈场景” (Tanzscene) 采用的初始音列为

$P_0 =$	A	$\flat$B	C	$\sharp$D	E	$\sharp$F	F	G	$\flat$A	$\natural$B	$\sharp$C	$\natural$D
$=$	0	1	3	6	7	9	8	10	11	2	4	5

容易看出这个音列满足上述定理的条件

$$0+a_{11} = a_1+a_{10} = a_2+a_9 = a_3+a_8 = a_4+a_7 = a_5+a_6 = 5 \pmod{12}$$

因此有 $I_5 = R_0$.


38
5
TANZSCENE
Sehr lebhaft ♪= 152-160
Kl
Bkl
Md
Gt
Gg
Br
Vcl
B
pizz.
arco
am Frosch
spring
18299

有多少互不相同的音列?

由于移调音列 P_i 与倒影音列 I_j 是互异的, 因此要讨论从 P_0 出发, 何时会得到少于 48 个互异音列, 就只需要再讨论 $P_0 = R_k$ 的情形.

定　理 B

给定音列

$$P_0 = 0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{10},\ a_{11}.$$

存在 k: $1 \le k \le 11$, 使得 $P_0 = R_k$ 的充分必要条件是 $k = 6$, 且有

$$\begin{aligned} a_6 &= a_5 + 6 \\ a_7 &= a_4 + 6 \\ &\cdots\ \cdots \qquad\qquad\qquad (\mathrm{mod}\ 12). \\ a_{10} &= a_1 + 6 \\ a_{11} &= 6 \end{aligned}$$

有多少互不相同的音列?

满足定理 B 条件的音列有多少?

音列的第一项显然可以取 12 个音类中的任意一个, 故有 12 种取法. 第一项取定之后, 哪一个音类对应 $6 \in \mathbb{Z}_{12}$ 就确定了, 故最后一项 a_{11} 只有 1 种取法.

第二项 a_1 可以从剩下的 10 个音类中任取, 它取定后倒数第二项 a_{10} 也就确定了. 以此类推, 可知满足定理 B 条件的音列共有

$$12 \times (10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2) = 46,080 \text{ 个}.$$

有多少互不相同的音列?

要计算有多少互不相同的音列, 就要严格定义什么时候两个音列是“相同”的, 什么时候是“不同”的.

记全体音列构成的集合为 $\mathbb{T}$:

$$\mathbb{T} = \{\text{全体音列}\}.$$

因为全体音列可以与 0, 1, ..., 11 的全体排列成 1-1 对应关系, 所以有

$$|\mathbb{T}| = 12! = 479001600.$$

有多少互不相同的音列?

在 $\mathbb{T}$ 中的音列之间定义一个二元关系 $\sim$:

任意给定两个音列 $X, Y \in \mathbb{T}$, $X \sim Y$ 当且仅当音列 Y 出现在以 X 为初始音列的音列矩阵中.

换言之, $X \sim Y$ 的充分必要条件是: Y 等于从初始音列 $P_0 = X$ 导出的某个移调音列 P_n, 倒影音列 I_n, 逆行音列 R_n 或者逆行倒影音列 RI_n.

习题. 证明 $\sim$ 是集合 $\mathbb{T}$ 上的一个等价关系.

有多少互不相同的音列?

定　义

两个音列 $X, Y \in \mathbb{T}$ 称为是 **不同的**, 如果它们分别属于 $\mathbb{T}$ 中不同的等价类.

计算不同音列的数目就是要计算 $\mathbb{T}$ 中等价类的数目.

有多少互不相同的音列?

定　理

共有 9,985,920 个音列的等价类.

证明:

$$276480 + 46080 = 322560,$$

$$\frac{12! - 322560}{48} + \frac{322560}{24} = 9985920.$$

有多少互不相同的音列?

定理 A 和 B 中给出的条件本质上都是刻画了音列的某种对称性.

而具有这种对称性的音列是非常稀少的.

$$\frac{322560}{12!} = \frac{1}{1485} \approx 0.0006734,$$

即不到万分之七!

十二音技术

勋伯格自己曾说过:

People accuse me of being a mathematician, but I am not a mathematician, I am a geometer.

十二音技术

法国音乐学家 Roland de Candé (1986):

The 12-tone music was condemned by the Nazis (and forbidden in the occupied Europe) because its author was a Jew; by the Stalinists for having a bourgeois cosmopolitan formalism; by the public for being different from everything else.

十二音技术

美国作曲家约翰·亚当斯（John Coolidge Adams，1947.2.15 – ，三幕歌剧《尼克松在中国》(Nixon in China, 1987) 的作者) 曾经指出:

Something tremendously powerful was lost when composers moved away from tonal harmony and regular pulses ... among other things the audience was lost.

于润洋

1932.7.17 – 2015.9.23

音乐学家

现代音乐的社会功能

人们在聆听勋伯格的音乐时, 绝不是使自己沉浸在一种娱乐和享受之中. 这里没有愉悦可言, 相反, 音乐给聆听者以惊愕, 随之而产生一种精神震撼, 在这一瞬间人与音乐融合在一起, 主体意识到自身的力量和存在, 自觉、清醒、而且充实. 对这样的音乐, 不仅需要感官的感受, 而且需要理性去领悟和理解, 需要哲学的反思.

于润洋: 《现代西方音乐哲学导论》, 人民音乐出版社, 北京, 2012, p. 367 – 368